BULLETIN DE LA S. M. F.

BENIAMINO SEGRE

# Recenti prospettive nella teoria delle corrispondenze

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 86 (1958), p. 355-372

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1958__86__355_0>

Réunion des Mathématiciens
d'Expression latine (1957, Nice).
*Bull. Soc. math. France*,
86, 1958, p. 355 à 372.

# RECENTI PROSPETTIVE NELLA TEORIA DELLE CORRISPONDENZE;

DI

BENIAMINO SEGRE.

---

SOMMARIO.

*N. B.* — I numeri entro parentesi quadre [ ], dopo l'indicazione dei singoli paragrafi sono quelli dei lavori — elencati nella *Bibliografia* — che vertono sugli argomenti ivi rispettivamente trattati; per ulteriori indicazioni bibliografiche, a questi relative, *cf.* le citazioni contenute in quegli stessi lavori.)

**Introduzione.** — Da un secolo in qua, la geometria algebrica ha svolto una parte preponderante nel segnare direttive di sviluppo e nell'ispirare nuove concezioni e metodi adeguati a vari rami fra i più significativi della matematica. A prescindere infatti dalla sua manifesta influenza sugli altri *indirizzi geometrici*, nonché sopra certi aspetti dell'*aritmetica* (equivalenza e forme ridotte, equazioni diofantee, geometria dei numeri), del *calcolo delle probabilità* (probabilità geometriche), ecc., la geometria algebrica è valsa in passato a volgere l'*algebra* verso la teoria dell'eliminazione e verso la teoria degli invarianti e covarianti, offrendo poi al moderno indirizzo astratto esempi salienti relativi a corpi ed anelli attaccati ad enti algebrici; alla *teoria delle funzioni e degli integrali analitici* ha posto questioni vitali inerenti all'uniformizzazione locale e globale, ed allo studio degli integrali abeliani e loro generalizzazioni; infine alla *topologia* essa ha servito in parte da modello con l'introduzione di varietà prodotti e di varietà riemanniane, e con la risoluzione di tutto un complesso di problemi concernenti le intersezioni, la teoria delle caratteristiche, la teoria della base.

Oggidì, nonostante alcune apparenze in contrario, l'ufficio direttivo della geometria algebrica è ben lungi dal venir meno, così come lo stesso evolversi di questa disciplina — inteso quale approfondimento delle proprietà degli enti algebrici che rimangono invariate di fronte alle transformazioni birazionali — è tutt'altro che in via terminare.

Basta invero riflettere che relativamente poco si conosce persino intorno alle corrispondenze birazionali dotate di eccezioni, l'importanza delle quali — e non soltanto per la geometria — va sempre più manifestandosi, e che lo studio delle stesse trasformazioni cremoniane non può ritenersi in alcun modo esaurito, neppure nel caso più semplice delle trasformazioni fra piani. Tutto ciò chiaramente emerge da recenti sviluppi dovuti alla Scuola geometrica italiana, i quali vengono anche ad additare nuove prospettive a taluno dei rami menzionati in principio.

Nella presente conferenza mi propongo di riassumere una parte di quegli sviluppi, senza naturalmente poter entrare in particolari dimostrativi per mancanza di tempo. Per tale motivo dovrò inoltre sorvolare sulle indicazioni storiche e bibliografiche (relativamente alle quali è tuttavia da tener presente il N. B. anteposto al Sommario), e parimente non potrò soffermarmi a segnalare tutti i legami che con quanto qui esposto verranno ad avere o hanno già altre teorie (come p. es. la teoria analitico-topologica delle « modificazioni », da raccostare con quella algebrico-geometrica delle « dilatazioni »).

Sebbene la trattazione che segue riguardi essenzialmente uno soltanto dei molteplici aspetti della geometria algebrica, vorrei sperare ch'essa abbia a bastare per mettere in luce l'inesausta vitalità e fecondità di quest'ultima nell'indirizzo classico.

§ I. **Generalità sulle corrispondenze birazionali fra varietà algebriche non singolari e sui loro elementi irregolari.** — Siano $V$ e $V'$ due varietà algebriche irriducibili non singolari, definite sul corpo complesso, e sia $T$ una corrispondenza birazionale (ossia algebrica e generalmente biunivoca) fra $V$ e $V'$. Allora $T^{-1}$ sarà una corrispondenza birazionale fra $V'$ e $V$, ed è ben noto che le due varietà hanno conseguentemente la stessa dimensione, $d$. Relativamente a questa, vanno nettamente distinti due casi secondoché $d=1$ o $d \geqq 2$ : mentre nel primo caso non vi sono mai eccezioni alla biunivocità della corrispondenza, nel secondo caso eccezioni siffatte generalmente esistono, ed il relativo studio offre alto interesse da molteplici punti di vista. Volendo approfondire tale studio, potremo dunque d'ora innanzi supporre $d \geqq 2$.

Il generico punto $P$ di $V$ risulta *regolare* per $T$, intendendo esprimere con ciò che $T$ muta $P$ in uno ed un sol punto $P' = T(P)$ di $V'$, istituendo una corrispondenza analitica invertibile — e quindi topologica — fra l'intorno di $P$ su $V$ e l'intorno di $P'$ su $V'$. Se $P$ è un qualunque punto di $V$, denoteremo con $T(P)$ l'insieme dei punti di $V'$ dato dal limite generale del punto $T(\overline{P})$, ove $\overline{P}$ sia un punto regolare di $T$ su $V$ tendente ivi comunque a $P$. Si dimostra che $T(P)$ è una varietà algebrica, definita come *interferenza*, la quale in nessun caso può consistere di più punti distinti in numero finito, sicché essa o è una varietà infinita oppure è ridotta ad un sol punto.

Denotiamo ora con $H$ una generica sottovarietà di $V$, che sia irriducibile e la cui dimensione $h$ soddisfi alle limitazioni $1 \leqq h \leqq d-1$. Il punto generico di $H$ ammette un solo transformato mediante $T$, il quale è a sua volta punto generico di una sottovarietà algebrica irriducibile di $V'$, detta la *trasformata* di $H$ mediante $T$ e da denotarsi con $T(H)$. Per una somma algebrica

$$H = \pm H_1 \pm H_2 \pm \ldots \pm H_n,$$

la trasformata $T(H)$ si definirà assumendo

$$T(H) = \pm T(H_1) \pm T(H_2) \pm \ldots \pm T(H_n).$$

Nell'ipotesi che $H$ sia effettiva, conviene pure alle volte considerare la *trasformata totale* di $H$ mediante $T$, da denotarsi con $T\{H\}$, ossia il luogo descritto da $T(P)$ al variare del punto $P$ su $H$ e così definito quale *interferenza algebrica*; in certi casi il luogo stesso può venir utilmente introdotto quale *varietà algebrica*, attribuendo alle singole sue componenti opportune molteplicità.

Nei riguardi di $T$, i punti $P$ di $V$ posson venir classificati come segue in tre diverse categorie, le quali dovrebbero però venire ulteriormente suddivise ove si volesse fare un'analisi del tutto esauriente.

1. $P$ può essere un punto *regolare* di $T$ su $V$ nel senso già precisato; allora $T(P)$ consta di un unico punto di $V'$, in cui $T^{-1}$ risulta regolare.

2. $P$ è detto un punto *fondamentale* di $T$ su $V$ se $T(P)$ è una sottovarietà algebrica infinita di $V'$.

3. La rimanente alternativa è che $T(P)$ consti di un sol punto $P'$, senza che $T^{-1}(P')$ si riduca al solo punto $P$, ed allora si dirà che $P$ è un punto *eccezionale* di $T$ su $V$ (il suddetto punto $P'$ risultando punto fondamentale di $T^{-1}$ su $V'$).

Una sottovarietà algebrica irriducibile $H$ di $V$ dicesi *regolare*, *fondamentale* od *eccezionale* per $T$, a seconda del tipo del suo punto $P$ generico. Nel primo caso, $H$ e $T(H)$ risultano riferite fra loro da $T$ birazionalmente, e quindi hanno la stessa dimensione. Si ha invece $\dim T(H) > \dim H$ se $H$ è fondamentale per $T$, senza che nessuna componente di $T(H)$ risulti fondamentale per $T^{-1}$; l'eventualità testè esclusa può di fatto presentarsi, ed allora le dimensioni di $H$ e $T(H)$ possono anche essere uguali. In ogni caso, *se $H$ è una varietà fondamentale di $T$ su $V$ risulta* $\dim H \leqq \dim V - 2$, ed inoltre *le ipersuperficie eccezionali di $T$ su $V$ sono sempre in numero finito* (*eventualmente nullo*).

§ II. **Le dilatazioni, ed il problema della decomponibilità delle trasformazioni birazionali in prodotti di dilatazioni e contrazioni.** — Le più semplici trasformazioni birazionali dotate di elementi irregolari sono quelle denominate *dilatazioni*, come pure le loro inverse, chiamate *contrazioni*, le quali possono venir ottenute nel modo che segue, a partire da una qualunque varietà $V$, di dimensione $d \geqq 2$, assegnata che sia su essa una sottovarietà algebrica $U$, la cui dimensione $c$ soddisfi alle $0 \leqq c \leqq d - 2$, nell'ipotesi che tanto $U$ che $V$ siano irriducibili e non singolari.

Si tagli $V$ lungo $U$, deducendone la *varietà algebrica tagliata* (aperta)

$$V^* = V - U.$$

È allora possibile di *chiudere* $V^*$ aggregando a questa, in luogo di ciascun punto $P$ di $U$, un insieme $\infty^{d-c-1}$ di « punti astratti » assimilabili alle faccette $(c+1)$-dimensionali tangenti in $P$ sia ad $U$ che a $V$, rappresentate quindi dagli $S_{c+1}$ che passano per l'$S_c$ tangente in $P$ ad $U$ e che simultaneamente giacciono nell'$S_d$ tangente in $P$ a $V$. In tal guisa si ricava una varietà algebrica irriducibile non singolare, $V'$, univocamente definita da $U$ e $V$ a meno di una trasformazione birazionale ovunque regolare. Si dice allora che si passa da $V$ a $V'$ applicando a $V$ una *dilatazione $T$ di base $U$*: è questa una trasformazione birazionale che dilata $U$ in un'*ipersuperficie* $U'$ non singolare di $V'$, fibrata da $\infty^c$ varietà $S'$ (di dimensione $d-c-1$) trasformate dei singoli punti $P$ di $U$, ciascuna delle quali ha la struttura di uno *spazio proiettivo* $S'_{d-c-1}$, i cui spazi subordinati di dimensione $h$ (ove $0 \leqq h \leqq d-c-2$) verranno genericamente designati con $S'_h$.

Allora su $V'$ sussiste l'importante *equivalenza algebrica*

$$(\bigstar) \qquad (U'S')_{V'} \equiv - S'_{d-c-2},$$

ove il primo membro denota l'intersezione virtuale di $U'$ ed $S'$ su $V'$. Gli unici punti irregolari di $T$ su $V$ sono i punti di $U$, ciascuno dei quali risulta fondamentale; e gli unici punti irregolari di $T^{-1}$ su $V'$ sono quelli di $U'$, ciascuno dei quali risulta eccezionale. Le proprietà algebrico-topologiche di $V'$ sono legate abbastanza semplicemente a quelle di tipo analogo relative ad $U$ ed a $V$. Così, ad esempio, se $A_1, A_2, \ldots, A_\rho$ sono ipersuperficie di $V$ costituenti ivi una base intermediaria (nel senso di SEVERI), onde $\rho$ designerà il numero base ipersuperficiale della $V$, si ha che le $\rho+1$ ipersuperficie di $V'$:

$$T\{A_1\}, \quad T\{A_2\}, \quad \ldots, \quad T\{A_\rho\}, \quad U'$$

costituiscono a loro volta su $V'$ una base intermediaria, sicché *il numero base ipersuperficiale della* $V'$ *vale* $\rho+1$.

Le proprietà dianzi accennate suggeriscono varie interessanti questioni. Si abbia anzitutto un'ipersuperficie $U'$ di una varietà $V'$ di dimensione $d \geqq 2$, le $U'$, $V'$ essendo entrambe irriducibili e non singolari; si supponga poi $U'$ fibrata da $\infty^c$ varietà $S'$ $(0 \leqq c \leqq d-2)$, ciascuna di dimensione $d-c-1$ ed avente la struttura di uno spazio proiettivo, in guisa inoltre che valga la $(\bigstar)$. Ci si domanda se è possibile di applicare a $V'$ una *contrazione di base* $U'$, ossia se è possibile di ottenere una varietà algebrica *non singolare*, identificando fra loro i punti delle singole fibre $S'$. La risposta è notoriamente affermativa nel caso delle superficie, ossia per $d=2$, ed è ancora probabilmente tale anche per $d>2$ : ma quest'ultimo caso non è ancora stato esplicitamente trattato.

Un altro importante problema è quello di decidere se *ogni* trasformazione birazionale fra varietà algebriche possa o meno ottenersi come un *prodotto* di un numero finito di dilatazioni e contrazioni. Il problema appare assai difficile per le varietà superiori, ma è stato recentemente risolto in senso affermativo nel caso delle superficie, ed anzi sotto la condizione aggiuntiva che in quel prodotto abbiano ad effettuarsi prima tutte le dilatazioni, seguite poi dalle contrazioni. Una prima conseguenza di ciò, è che *il valore assoluto del discriminante di una base intermediaria per la totalità delle curve tracciate sopra una superficie algebrica costituisce un invariante birazionale assoluto di questa* (avente carattere aritmetico).

Tenuto conto del risultato finale dell'antipenultimo capoverso, si deduce inoltre che :

*Se due varietà algebriche sono riferite fra loro mediante una corrispondenza decomponibile in un prodotto di dilatazioni e di contrazioni (l'ultima condizione essendo automaticamente soddisfatta almeno nel caso delle superficie), i numeri base ipersuperficiali* $\rho$, $\rho'$ *delle due varietà ed i numeri* $k$, $k'$ *delle ipersuperficie eccezionali della corrispondenza rispettivamente su di esse risultano legati dalla*

$$k-\rho=k'-\rho'.$$

Per varietà sovrapposte o, più generalmente, che siano fra loro birazionalmente equivalenti in senso stretto risulta $\rho = \rho'$, onde si trae $k = k'$, ossia :

*Per due varietà di quel tipo, la corrispondenza possiede su ciascuna di esse uno stesso numero di ipersuperficie eccezionali.*

Nel caso più semplice delle trasformazioni cremoniane fra piani, questa proprietà comprende un classico risultato enunciato per la prima volta nel 1864 da T. A. Hirst, per incarico del Cremona, alla « British Association for the Advancement of Science » ; esso fu poi stabilito dal Cremona per via induttiva non del tutto completa e — in modo esauriente — dal Clebsch e da altri. L'estensione agli spazi e varietà superiori che risulta nel modo indicato vale sotto la condizione — dianzi specificata — sulla decomponibilità della corrispondenza : e tale condizione potrebbe *a priori* essere limitativa. Un'estensione non soggetta invece a restrizioni di sorta, può venire ottenuta con le argomentazioni che ora passiamo ad esporre.

§ III. **Proprietà omologiche d'immersione di una varietà algebrica in un'altra e topologia di varietà algebriche tagliate, con applicazioni alle corrispondenze birazionali.** — Fissata una qualunque varietà algebrica $V$ irriducibile e non singolare, di dimensione $d \geqq 1$, sia $M$ una qualsiasi sottovarietà algebrica effettiva di $V$ (irriducibile o riducibile, pura od impura), di dimensione $c\,(\leqq d-1)$. Sopprimendo da $V$ i punti di $M$ si ottiene la *varietà algebrica tagliata*

$$V^* = V - M;$$

ed è noto che le riemanniane di $V$ e $V^*$ — che per semplicità denoteremo ancora con $V$ e $V^*$ — sono varietà topologiche di dimensione $2d$ reticolabili simplicialmente, l'una chiusa e l'altra aperta. Posto

$$\gamma = 2d - 2c - 1,$$

è subito visto che — per ogni intero $\delta$ inferiore a $\gamma$ — le *proprietà omologiche $\delta$-dimensionali* di $V$ coincidono con quelle $\delta$-dimensionali relative a $V^*$.

Per ciò che concerne le *proprietà omologiche $\gamma$-dimensionali* di $V^*$ (sopra l'anello degli interi), si ha che esse non dipendono dalle eventuali componenti di $M$ aventi dimensioni inferiore a $c$; in altri termini, per il loro studio è lecito restringerci al caso in cui $M$ sia pura, e cioè della forma

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_k,$$

ove le $M_l$ sono $k\,(\geqq 1)$ sottovarietà algebriche irriducibili $c$-dimensionali di $V$ fra loro a due distinte. A ciascuna $M_l$ può intrinsecamente venir associato un certo *$\gamma$-ciclo $N_l$* di $V^*$ semplicemente allacciato ad $M_l$ e definito su $V$ a meno di un'omologia.

Ebbene, si dimostra che, se

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_r$$

sono $\gamma$-cicli di $V$ non incontranti $M$ e costituenti una base per il gruppo di Betti $\gamma$-dimensionale di $V$ (onde $r$ sarà il $\gamma$-mo numero di Betti di $V$), e se del pari

$$B_1, \quad B_2, \quad \ldots, \quad B_s$$

costituiscono un'analoga base per il gruppo della torsione $\gamma$-dimensionale di $V$, si ottiene un *sistema di generatori* per il gruppo dell'omologia $\gamma$-dimensionale di $V^*$ aggregando i suddetti cicli $N$ a questi cicli $A$ e $B$. Fra tali generatori intercedono intanto le *relazioni*

$$t_j B_j \sim 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s),$$

ove $t_j$ denota il coefficiente di torsione di $V$ relativo al ciclo $B_j$. Allo scopo di scrivere le *relazioni ulteriori* (costituenti una base assieme alle precedenti), detto $\bar{r}$ il numero di Betti $(\gamma + 1)$-dimensionale di $V$ si fissi comunque su $V$ una base di Betti

$$\bar{A}_1, \quad \bar{A}_2, \quad \ldots, \quad \bar{A}_{\bar{r}}$$

per i cicli $(\gamma + 1)$-dimensionali, e si ponga per abbreviare

$$a_{il} = [\bar{A}_i M_l] \qquad (i = 1, 2, \ldots, \bar{r};\ l = 1, 2, \ldots, k),$$

ove il secondo membro denota l'indice di Kronecker dei cicli — di dimensioni fra loro complementari — ivi racchiusi entro parentesi. Le relazioni richieste sono allora le

$$\sum_{l=1}^{k} a_{il} N_l \sim 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \bar{r}).$$

Ne consegue che il *numero di Betti $\gamma$-dimensionale $r^*$ di $V^*$* è dato da

$$r^* = k + r - \sigma,$$

dove $\sigma$ denota il *rango* della matrice delle $a$, il quale ha un ovvio significato topologico e soddisfa alle : $\sigma = 0$ se $k = 0$, e $1 \leqq \sigma \leqq \min(k, \bar{r})$ se $k > 0$. Si vede inoltre subito come, mediante gli elementi dianzi introdotti, possano venir calcolati i *coefficienti di torsione $\gamma$-dimensionale di $V^*$*.

Questi risultati trovano fra l'altro applicazione nello studio delle trasformazioni birazionali non dappertutto regolari. Se $T$ è una siffatta trasformazione fra due varietà algebriche $V$, $V'$, i punti irregolari di $T$ su $V$ costituiscono ivi una sottovarietà algebrica, $M$, le cui componenti sono varietà fondamentali od eccezionali di $T$ su $V$; ed un'analoga varietà, $\overline{M}'$, si ottiene su $V'$ in relazione a $T^{-1}$. È chiaro allora che $T$ istituisce una corrispondenza ovunque biregolare fra le varietà tagliate

$$V^* = V - M \qquad \text{e} \qquad V'^* = V' - \overline{M}',$$

sicché queste risultano fra loro *topologicamente identiche*. Conservando per $V$, $V^*$ le precedenti notazioni, ed adottando per $V'$, $V'^*$ analoghe notazioni *munite di apici*, si avrà che in generale almeno una delle $\overline{M}$, $\overline{M}'$ conterrà qualche ipersuperficie eccezionale, sicché dovrà assumersi

$$c = c' = d - 1 \qquad \text{e quindi} \qquad \gamma = 1.$$

Le $V^*$, $V'^*$ hanno per ciò che precede lo stesso numero di Betti 1-dimensionale :

$$r^* = r'^*;$$

inoltre, in base a proprietà classiche, risulta

$$r = r'.$$

Da qui si trae l'*uguaglianza*

$$k - \sigma = k' - \sigma',$$

dove $k$ sia il numero delle ipersuperficie eccezionali di $T$ su $V$, $\sigma$ designi quante fra queste risultano fra loro algebricamente indipendenti, e $k'$, $\sigma'$ abbiano analoghi significati in relazione a $T^{-1}$ e $V'$. Altre conseguenze di *carattere aritmetico* si ottengono dall'uguaglianza dei coefficienti di torsione 1-dimensionale di $V^*$ e $V'^*$.

Questi risultati possono venir formulati in modo più preciso in vari casi particolari. Così, ad esempio, essi implicano senz'altro che :

*Una qualunque trasformazione cremoniana $T$ e la sua inversa $T^{-1}$ posseggono il medesimo numero di ipersuperficie eccezionali (irriducibili). Gli ordini delle ipersuperficie eccezionali di $T$ e di $T^{-1}$ ammettono uno stesso massimo comun divisore.*

§ IV. **Definizione di successioni covarianti d'immersione e di varietà canoniche di varietà algebriche mediante dilatazioni. Applicazioni a problemi d'intersezione irregolare.** — È ben noto come — secondo Severi — ogni sottovarietà algebrica (effettiva o virtuale) $U_i$ di una data varietà algebrica irriducibile non singolare, $U$, definisca una *classe di equivalenza* (che denoteremo ancora con $U_i$) costituita dalle sottovarietà di $U$ ad essa razionalmente equivalenti; e come fra tali classi si possa operare per somma e per moltiplicazione, così da generare un anello commutativo $\mathfrak{A}_U$, avente $U$ come elemento unità, il quale denominasi l'*anello dell'equivalenza razionale* di $U$. In tale anello, gli elementi che ammettono un *inverso* sono quelli della forma

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_c,$$

dove $U_0 = U$, $c$ denota la dimensione di $U$, ed $U_i$ è (la classe eventualmente nulla determinata da) una qualunque sottovarietà pura di $U$, di dimensione $c - i$ ($i = 1, 2, \ldots, c$). Un siffatto elemento invertibile chiamasi anche una *successione* $\{U_i\} = \{U\}$ *di sostegno* $U$; il relativo elemento inverso definisce del pari una successione $\{\tilde{U}_i\}$, formata da varietà $\tilde{U}_i$ esprimibili algebricamente in modo semplice mediante le $U_i$.

Nell'ipotesi che $U$ sia *un'ipersuperficie* di una varietà $V$ irriducibile e non singolare, la cui dimensione $d$ varrà quindi $c+1$, si ottiene in modo ovvio una determinata *successione covariante d'immersione* $\{U_i\} = \{U_{V,i}\} = \{U_V\}$ di $U$ in $V$ assumendo

$$U_i = U_{V,i} = (-1)^i\, U^{[i+1]},$$

dove il numero entro parentesi quadre sta per indicare elevazione a potenza a quell'esponente nell'anello $\mathfrak{A}_V$; pertanto, a prescindere dal segno, $U_i$ coincide allora con la $i$-ma *varietà caratteristica* relativa al sistema lineare $|U|$ determinato da $U$ su $V$.

Questa nozione può venir estesa come segue anche ai casi restanti, nei quali cioè $c \leqq d-2$. All'uopo si applichi a $V$ una dilatazione $T$ di base $U$: questa muterà $V$ in una varietà $d$-dimensionale $V'$ e dilaterà $U$ in un'ipersuperficie $U'$ di $V'$, della quale si potranno considerare le successive potenze in $\mathfrak{A}_{V'}$. Quelle fra esse di esponente $1, 2, \ldots, d-c-1$ vengono da $T^{-1}$ contratte in varietà di dimensione inferiore, talché per le rispettive classi di equivalenza risulta

$$T^{-1}(U'^{[i]}) = 0 \qquad \text{per} \quad i = 1, 2, \ldots, d-c-1.$$

Tale particolarità non ha più generalmente luogo per le rimanenti potenze, le quali — trasformate mediante $T^{-1}$ e prese con segni opportuni — dànno appunto gli elementi della *successione covariante di immersione* $\{U_{V,i}\}$ di $U$ in $V$ che si vuol ottenere; più precisamente, per $i = 1, 2, \ldots, c$, si assume per definizione

$$U_i = U_{V,i} = (-1)^{d-c+i-1}\, T^{-1}(U'^{[d-c+i]}).$$

Un'analisi particolareggiata mostra come i diversi problemi geometrici sulle *intersezioni*, e varie altre questioni fondamentali relative anche a varietà dotate di *punti multipli*, possano venir risolute con l'uso metodico delle successioni covarianti d'immersione. Qui, per mancanza di tempo, ci limiteremo ad indicare un solo esempio in proposito.

Siano $M$, $N$ due sottovarietà di $V$, passanti in modo generico per una terza sottovarietà $U$ di $V$; e si supponga che fra le rispettive dimensioni $m$, $n$, $d$, $c$ delle quattro varietà testè nominate interceda la limitazione

$$m + n \leqq d + c.$$

Allora $U$ risulta una *componente* dell'intersezione delle $M$, $N$, di dimensione $c$ *irregolare*, ossia maggiore del normale, se in questa limitazione non vale il segno di uguaglianza; l'*intersezione R residua* delle $M$, $N$, sarà in ogni caso una varietà di dimensione regolare

$$r = m + n - d,$$

la quale, se $r \geqq 1$, *si appoggia alla $U$ lungo una varietà $S$* di dimensione $s = r - 1$. Ciò premesso, si voglia esprimere *la classe di equivalenza* determinata da questa varietà $S$ di appoggio in funzione delle quattro varietà considerate inizialmente, e valutare l'*equivalenza funzionale*

$$E = (MN)_V - R$$

di $U$ nell'intersezione delle $M$, $N$ (la quale coincide manifestamente con $U$ se $m + n = d + c$, ossia se $r = c$, e cioè nel caso più semplice in cui il problema d'intersezione proposto risulti *regolare*).

A tal fine, si considerino su $U$ le successioni covarianti d'immersione di $U$ nelle $M$, $N$, $V$, e si effettui il prodotto delle prime due per l'inversa della terza. Si ottiene così una nuova successione $\{ U^0 \} = \{ U_i^0 \}$ di sostegno $U$:

$$\{ U^0 \} = \{ U_M \} \cdot \{ U_N \} \cdot \{ \tilde{U}_V \};$$

questa fornisce risposta ad entrambe le domande proposte, risultando precisamente

$$E = U^0_{c+d-m-n}, \qquad S = U^0_{c+d-m-n+1}.$$

Le successioni covarianti d'immersione permettono infine di definire e studiare nel modo più semplice le *varietà canoniche* di una data varietà algebrica, $V$, irriducibile, non singolare, $\infty^d$ $(d \geqq 1)$. All'uopo riferiamoci alla varietà $\infty^{2d}$:

$$W = V \times V$$

delle coppie ordinate di $V$ (determinata da $V$ a meno di una trasformazione birazionale ovunque regolare). Su essa è tracciata la varietà imagine delle coppie di punti coincidenti di $V$ (detta la *varietà diagonale* di $W$), la quale può manifestamente venire identificata con la stessa $V$, che appare così quale sottovarietà di $W$. Si può conseguentemente considerare la successione covariante $\{ V_W \}$ di immersione di $V$ in $W$, e quindi pure, l'inversa $\{ \tilde{V}_W \}$ di questa; ebbene, la classe $V_i^*$ di equivalenza canonica di $V$, di dimensione $d - i$, può venire definita assumendo

$$V_i^* = (-1)^i \tilde{V}_{W,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, d).$$

Se U è una sottovarietà $\infty^c$ di $V$, fra le varietà canoniche di $U$ e di $V$ e le varietà della successione covariante d'immersione di $U$ in $V$ intercede il sistema di relazioni

$$U_i^* = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j U_{V,j} V_{i-j}^* \qquad (i = 0, 1, \ldots, c),$$

il quale risulta risolubile rispetto alle $U_{r,j}$. Pertanto, in ogni dato problema, le *varietà covarianti d'immersione* possono venir sostituite con le *varietà canoniche*. Queste godono di proprietà estendenti in vari modi il classico teorema d'aggiunzione di ENRIQUES. Esse appaiono inoltre al centro delle più importanti teorie geometriche, ed intimamente legate ai differenti aspetti algebrici, topologici e trascendenti di queste ultime. Molti di tali legami restano però tuttora da approfondire.

§ V. **Estensione delle dilatazioni (d'indice 1), e di talune loro applicazioni, alle varietà differenziabili. Dilatazioni d'indice superiore e fibrazioni differenziabili di un'$r$-sfera mediante $k$-sfere equatoriali; fibrazioni locali e globali, ed esempi vari. Applicazioni alla teoria delle algebre primitive reali.** — La nozione di dilatazione può venire estesa alle varietà differenziabili (reali), nel modo precisato dal seguente teorema.

*Date comunque due varietà differenziabili $U$, $V$ di classe $C^1$, rispettivamente di dimensioni $c$, $d$ ($0 \leqq c < d$) e tali che $U \subset V$, ad esse resta coordinata univocamente (a meno di un omeomorfismo differenziabile) una coppia di varietà $U'$, $V'$, di dimensioni rispettive $d-1$, $d$, tali che $U'$ risulti una varietà fibrata di base $U$ avente per fibra uno spazio proiettivo $S'_r$ di dimensione*

$$r = d - c - 1,$$

*con la condizione ulteriore che sia $U' \subset V'$ e che le $U$, $V$ possano venir dedotte ordinatamente dalle $U'$, $V'$ identificando fra loro i punti di ciascuna fibra $S'_r$ di $U'$.*

Si dimostra questo teorema poggiando sulle proprietà delle dilatazioni nel caso algebrico. Sotto forma intuitiva, si può anche argomentare così. Si munisca la $V$ — com'è sempre possibile — di una metrica riemanniana compatibile con la sua struttura differenziale, e si asporti quindi da essa la varietà tubolare chiusa $d$-dimensionale, $W$, di mediana $U$ e raggio $\rho$ abbastanza piccolo; si ottiene in tal guisa una varietà aperta $V^\star = V - W$, omeomorfa alla $V - U$. Il contorno della $V^\star$ coincide col contorno $U^\star$ della $W$, e consta quindi di $\infty^c$ $r$-sfere geodetiche $\Sigma^\star_P$ di raggio $\rho$, provenienti dai singoli punti $P$ di $U$, ciascuna situata sulla varietà riempita dalle geodetiche uscenti dal punto $P$ relativo e normali in $P$ ad $U$. Le varietà $V'$, $U'$, $S'_r$ del precedente enunciato, sono essenzialmente ciò che rispettivamente diventano le suddette $V^\star$, $U^\star$, $\Sigma^\star_P$ quando si identifichino i due punti delle varie coppie antipodali su ciascuna delle sfere $\Sigma^\star_P$. La determinazione delle $U'$, $V'$, così ottenuta, risulta indipendente dalla scelta sia di $\rho$ che della metrica attribuita a $V$.

Se $c = d - 1$ le $U'$, $V'$ non presentano interesse, queste essendo in tal caso manifestamente omeomorfe alle $U$, $V$. Se invece $c \leqq d - 2$ ciò non ha più luogo, in quanto $U'$ viene ad avere dimensione $d - 1$ maggiore della dimensione $c$ di $U$. Si dirà allora pertanto che si passa da $V$ a $V'$ applicando a $V$ la *dilatazione* di base $U$, e da $V'$ a $V$ mediante la *contrazione* che riduce a punti le singole fibre $S'_r$ di $U'$. Tali dilatazioni e contrazioni verranno dette *di indice* 1, per distinguerle da altre che introdurremo fra poco; esse — o, per meglio dire, le $V$, $V'$ — saranno considerate soltanto sull'anello degli interi mod 2, con che si vengono ad evitare difficoltà inerenti alle orientazioni.

Con questa avvertenza, molte delle applicazioni della teoria delle dilatazioni riescono senz'altro trasportabili dal campo algebrico a quello differenziale. Anche in quest'ultimo si introducono così le nozioni e si stabiliscono le proprietà relative alle *successioni covarianti d'immersione* ed alle *successioni canoniche*, traendone conseguenze molteplici analoghe a quelle relative al caso algebrico. Fra esse va particolarmente segnalata la possibilità d'introdurre le *intersezioni irregolari*, e di trattarle nel campo topologico, sotto opportune condizioni di differenziabilità. Un esempio in proposito viene offerto dal seguente teorema, che si stabilisce con semplici considerazioni sulle dilatazioni.

*$U$ e $V$ conservando i significati del precedente enunciato, si fissi un intero $s$ soddisfacente alle limitazioni $d-c+1 \leqq s \leqq d$, si ponga $t=s-d+c$, e si considerino su $V$ $s$ $(d-1)$-cicli* mod 2 *qualsiansi, $A_1, A_2, \ldots, A_s$. Alle classi di omologia* mod 2 *definite su $V$ da questi e da $U$ resta allora intrinsecamente coordinata una classe di omologia $(d-s)$-dimensionale, da denotarsi con $(A_1A_2\ldots A_s)^U_V$, un rappresentante della quale può venire ottenuto come intersezione residua ad $U$ di $s$ cicli differenziabili omologhi ai cicli $A$ e passanti in modo generico per $U$. Tale classe si esprime con l'omologia* (mod 2) :

$$(A_1A_2\ldots A_s)^U_V \sim A_1A_2\ldots A_s + \sum_{i=0}^{t} U_{V,\,t-i}V_i[A],$$

*dove nel secondo membro i prodotti vanno effettuati nell'anello di omologia* (mod 2) *su $V$, le $U_{V,i}$ sono le varietà della successione covariante d'immersione di $U$ in $V$, e $V_i[A]$ denota la somma di tutti i prodotti dei cicli $A$ presi ad $i$ ad $i$ senza ripetizioni.*

Se $V'$ è la varietà ottenibile come dianzi applicando a $V$ la *dilatazione* $T$ di base $U$, può darsi che $V'$ sia anche deducibile in guisa similare a partire da una varietà, $V_1$, non omeomorfa a $V$. Il caso più interessante è quello in cui la $U'=T(U)$ possa venir fibrata differenziabilmente mediante sottospazi $S'_k$ dei suoi $S'_r$ generatori, in guisa che si passi da $V'$ a $V_1$ mediante la *contrazione* $\Xi_1$ che riduce ciascuna di quelle fibre $S'_k$ ad un sol punto. Esclusi i casi estremi $k=0$ e $k=r$ perché banali, ossia supposto

$$0<k<r,$$

è chiaro che si passa da $V$ a $V_1$ applicando il prodotto $T_1 = \Xi_1 T$ (effettuato da destra a sinistra), e che questo *dilata* i singoli punti di $U$ in varietà di dimensione

$$r - k = d - c - (k + 1) > 0,$$

costituenti le basi delle fibrazioni mediante $S'_k$ dei singoli $S'_r$ generatori di $U'$, mutando quindi $U$ in una varietà $U_1$ di dimensione

$$c + (r - k) = d - (k + 1).$$

Diremo allora che $T_1$ è una *dilatazione d'indice* $k + 1$, di $V$ in $V_1$, avente per base $U$.

È chiaro che $V_1$ può anche direttamente ottenersi dalla varietà aperta $V^*$ precedentemente considerata, fibrando opportunamente le singole $r$-sfere $\Sigma_P^*$ del suo contorno $U^*$ mediante $k$-sfere equatoriali ed identificando poifra loro i punti di ciascuna di queste $k$-sfere.

Un esempio in proposito si ha supponendo che la varietà $V$ sia *a struttura complessa* (e quindi di dimensione reale $d$ pari), e che $U$ sia una sua sottovarietà appartenente a tale struttura. Resta allora definita intrinsecamente una *fibrazione mediante cerchi* delle sfere $\Sigma_P^*$, e quindi una *dilatazione d'indice* 2 di base $U$, della $V$ in un'altra varietà $V_1$ a struttura complessa, la quale dilata $U$ in una sottovarietà $U_1$ (di dimensione reale $d - 2$) della $V_1$, appartenente alla struttura complessa di quest'ultima.

La questione di vedere se esistono altri casi di dilatazioni d'indice superiore porta a difficili problemi sulle varietà fibrate, a cominciare da quello di determinare tutte le possibili *fibrazioni differenziabili di uno spazio proiettivo reale* $S_r$ *mediante spazi subordinati* $S_k$ $(0 < k < r)$.

Oltre al *problema globale*, testè enunciato, ci si può anche proporre un *problema locale*, il quale consiste nel fibrare mediante $S_k$ una conveniente porzione $r$-dimensionale dell'$S_r$. Già per la risolubilità di questo problema $r$ e $k$ non possono venire presi ad arbitrio, in quanto all'uopo :

*Detto p il più piccolo intero tale che* $2^p$ *superi* $k$, *occorre risulti*

$$r \equiv k \pmod{2^p}.$$

Ciò si stabilisce poggiando su semplici considerazioni di geometria algebrica e differenziale. Per la risolubilità del problema globale, è inoltre necessario che *si abbia precisamente*

$$k = 2^p - 1;$$

il precedente risultato fornisce che allora $r$ *dev'essere della forma*

$$r = m\, 2^p - 1,$$

dove $m$ denota un intero superiore all'unità.

Esempi notevoli di fibrazioni, sia locali che globali, si ottengono facilmente a partire da una qualunque *algebra reale* $\mathcal{A}$, che sia *primitiva* (ossia priva di divisori dello zero), ma non necessariamente commutativa od associativa. Detto $n$ l'ordine di $\mathcal{A}$, per le corrispondenti fibrazioni risulta

$$k = n - 1, \qquad r = mn - 1,$$

con $m$ intero arbitrario superiore all'unità. Il confronto coll'enunciato dell'antipenultimo capoverso porge subito l'uguaglianza $n = 2^p$, la quale esprime il seguente teorema, già altrimenti dedotto da Hopf da risultati topologici riposti dello Stiefel.

*L'ordine di un'algebra primitiva reale risulta necessariamente una potenza del* 2.

Le algebre $\mathcal{A}$ primitive reali finora note sono di ordine $n = 2^p$ con $p = 0$ (numeri reali), $p = 1$ (numeri complessi), $p = 2$ (quaternioni reali), $p = 3$ (ottave di Cayley), e non si sa se vi siano altri tipi. Va inoltre avvertito che le fibrazioni ottenibili come s'è accennato con tali algebre sono generalmente soltanto locali : esse risultano però *globali* se $m = 2$ oppure se, $m$ essendo qualunque, l'algebra $\mathcal{A}$ è *associativa* (il che, a norma di un classico risultato di Frobenius, implica che $\mathcal{A}$ sia di uno dei primi tre tipi suddetti).

Opportune considerazioni di geometria algebrica conducono ad ulteriori notevoli esempi di fibrazioni sia locali che globali. Si vede così fra l'altro che *ogni* $S_{4m-1}$ *può venir fibrato globalmente mediante* $S_3$, in modo *diverso* da quello fornito dall'algebra dei quaternioni; inoltre, mentre, a norma di ciò che precede, non esistono fibrazioni globali con $r = 6$, $k = 2$, si constata che :

*La varietà aperta che si ottiene tagliando un* $S_6$ *reale lungo un* $S_3$ *subordinato può venir fibrata mediante piani.*

**§ VI. Corrispondenze di Möbius fra spazi euclidei, con particolare riguardo a quelle fra esse che sono razionali intere. Una proprietà caratteristica delle trasformazioni cremoniane intere.** — Si deve a Möbius la considerazione di quelle corrispondenze puntuali di classe $C^1$ fra (due porzioni di) spazi euclidei $S_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $S'_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ :

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

che alterano i volumi in un rapporto costante, ossia che soddisfano alla condizione

$$(2) \qquad \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = c \qquad \text{(con } c \text{ costante non nulla).}$$

Fra *le corrispondenze di Möbius* vi sono le affinità e (per $n \geq 2$) *le corri-*

*spondenze di Möbius speciali* rappresentate da equazioni della forma

$$(3) \qquad \begin{cases} y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad \ldots, \quad y_{n-1} = x_{n-1}, \\ y_n = x_n + \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \end{cases}$$

le quali manifestamente ammettono un'inversa ancora dello stesso tipo :

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = y_{n-1}, \\ x_n = y_n - \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}). \end{cases}$$

La più generale corrispondenza di Möbius non è ottenibile come prodotto di corrispondenze affini e corrispondenze di Möbius speciali; tuttavia è stato recentemente mostrato come *essa possa venire ottenuta sotto forma finita con sole operazioni di derivazione e di eliminazione.*

Fra le corrispondenze di Möbius hanno particolare interesse quelle che sono *razionali intere*, rappresentate cioè da equazioni del tipo (1) con le $f$ *polinomi* nelle $x$ soddisfacenti alla (2). *A priori*, non è detto che una trasformazione siffatta abbia un'inversa ancora dello stesso tipo, e cioè ch'essa sia cremoniana e che pure la sua inversa risulti intera. Si vede però facilmente che una *trasformazione cremoniana che sia intera insieme alla sua inversa è necessariamente del tipo di Möbius.* Di più, fin dal 1939, il KELLER aveva provato che — nel corpo complesso — *una trasformazione di Möbius che sia cremoniana e razionale intera ha per inversa una trasformazione* (*non soltanto razionale*, *ma*) *razionale intera.*

Recentemente è stato dimostrato che in questo enunciato la condizione che la trasformazione sia cremoniana *può venir omessa*, in quanto :

*Se $n$ polinomi $f_1, f_2, \ldots, f_n$ (a coefficienti complessi) in $n$ variabili soddisfano identicamente alla* (2), *allora le equazioni* (1) *rappresentano una trasformazione cremoniana intera*, *sicché le* (1) *risultano di conseguenza invertibili mediante equazioni ancora dello stesso tipo.*

Questo risultato appare come banale nel caso particolare delle corrispondenze intere speciali, rappresentate cioè da equazioni della forma (3) — con $\varphi$ polinomio nelle $x$ — le quali, come s'è detto, sono invertite dalle (4); tali corrispondenze mutano le rette parallele all'asse $x_n$ in rette parallele all'asse $y_n$, e possono quindi venire denominate *trasformazioni intere di de Jonquières.* L'ultimo enunciato seguirebbe dunque, ed anzi sotto forma più generale, quando fosse stabilito il seguente teorema di fattorizzazione, il quale porgerebbe in pari tempo il modo di ottenere *tutte* le trasformazioni cremoniane di Möbius.

*Ogni corrispondenza razionale intera di Möbius fra spazi euclidei ad $n\,(\geq 2)$ dimensioni*, *sopra un corpo commutativo di caratteristica zero*, *può venir decomposta in un prodotto di un numero finito di trasformazioni affini e di trasformazioni intere di de Jonquières.*

Si hanno buone ragioni per ritenere questo teorema valido, ma non estendibile a corpi di caratteristica diversa da zero. Il teorema stesso è stato compiutamente dimostrato nel caso più semplice $n = 2$, poggiando su certe proposizioni ausiliarie, in sè non prive d'interesse, dalle quali fra l'altro risulta che :

*Affinché una curva razionale intera*

$$x = f(t), \qquad y = g(t) \qquad (\textit{con } f, g \textit{ polinomi})$$

*di un piano affine* $(x, y)$ *di caratteristica zero, non possegga punti multipli a distanza finita, occorre e basta ch'essa possa venire trasformata in una retta mediante un'opportuna trasformazione cremoniana intera.*

§ **VII. Corrispondenze cremoniane topologiche fra piani reali, ed esistenza di piani grafici algebrici non desarguesiani.** — È ben noto che, nel campo complesso, una corrispondenza cremoniana fra spazi proiettivi che sia dappertutto regolare è necessariamente un'omografia. Analogo risultato non sussiste però nel campo reale relativamente a spazi di dimensione $n \geqq 2$, ossia esistono fra tali spazi delle *corrispondenze cremoniane topologiche* non omografiche. Lo studio di siffatte corrispondenze, importante da vari punti di vista, è stato iniziato recentemente nel caso più semplice $n = 2$, il quale — come vedremo — risulta anche collegato a questioni inerenti ai fondamenti della geometria proiettiva.

Una trasformazione cremoniana topologica fra due piani proiettivi reali dicesi *pura* quando non possiede punti fondamentali *reali* su uno, e quindi su ciascuno, dei due piani. Si vede agevolmente che il prodotto di due trasformazioni di tale specie è ancora una trasformazione della stessa specie, talché *le trasformazioni cremoniane topologiche pure di un piano in sè costituiscono un gruppo, sottogruppo del gruppo formato da tutte le trasformazioni cremoniane topologiche.*

*L'ordine* di una trasformazione cremoniana topologica pura fra piani dev'essere *congruo all'unità* mod 4; *viceversa*, per ogni valore dell'ordine soddisfacente a questa condizione, v'è un certo numero (positivo, finito) di tipi differenti di siffatte trasformazioni. Fra tali trasformazioni, quelle che — senza essere omografiche — hanno l'ordine minimo, sono precisamente le trasformazioni del 5° *ordine* dotate in ciascuno dei due piani di tre coppie di punti fondamentali complessi-coniugati di molteplicità due. Si dimostra che :

*Ogni trasformazione cremoniana topologica pura fra piani può venir decomposta nel prodotto di un numero finito di trasformazioni quintiche di quest'ultimo tipo.*

Contrariamente a quanto potrebbe credersi a prima giunta, esistono trasformazioni cremoniane topologiche fra piani che *non sono pure*, che cioè posseggono punti fondamentali *reali*, da esse trasformati in curve (eccezionali) reali, ciascuna delle quali deve manifestamente contenere soltanto un numero finito di punti reali. Si vede più precisamente che, quale *ordine* di una siffatta trasformazione, può venir assunto un qualunque numero *dispari* superiore all'unità. Il caso più semplice è quindi quello delle trasformazioni del 3° *ordine*, per le quali ciascuno dei due sistemi omaloidici possiede un punto base reale doppio isolato, in cui le curve del sistema ammettono due tangenti fisse complesse coniugate, ed un'ulteriore coppia di punti base semplici complessi-coniugati. Si dimostra che :

*Nessuna trasformazione cremoniana topologica fra piani, che sia pura e non omografica, può venir ottenuta come prodotto di trasformazioni cubiche del tipo testè indicato.*

Ne discende che il gruppo di tutte le trasformazioni cremoniane topologiche (pure ed impure) di un piano in sè *non risulta generabile* mediante trasformazioni cubiche, ossia mediante le sue trasformazioni non omografiche d'ordine minimo. Una caratterizzazione geometrica del sottogruppo generato da queste ultime non è ancora stata data.

Se consideriamo una *rete omaloidica* che determini una trasformazione cremoniana topologica, otteniamo l'esempio più semplice di *sistema grafico*, così chiamando un sistema algebrico reale $\infty^2$ di curve algebriche reali di un piano proiettivo che soddisfi alle seguenti condizioni : *a.* due curve distinte qualsiansi del sistema si tagliano in uno ed un sol punto reale; *b.* due punti reali distinti qualsiansi del piano appartengono ad una ed una sola curva (reale) del sistema. Occorre aggiungere che, quando la curva generica del sistema possegga punti (singolari) isolati, come per es. accade per le reti omaloidiche inerenti ad una trasformazione cremoniana topologica che non sia pura, occorre fare astrazione da tali punti nella definizione delle curve del sistema.

Un problema importante, che non è ancora stato convenientemente approfondito, è quello di *classificare* i diversi tipi di sistemi grafici (e le equazioni differenziali aventi le loro curve quali curve integrali), considerando come *identici* due sistemi che siano ottenibili l'uno dall'altro mediante una trasformazione cremoniana topologica. Un tale studio dovrà presumibilmente fare intervenire la teoria dei *tessuti*, associata con le proprietà inerenti all'*algebricità* delle curve e dei sistemi in esame. Senza volerci ora addentrare per questa via, ci limiteremo ad osservare che — come risulta dall'esempio dato più oltre — vi sono dei sistemi grafici che non sono reti omaloidiche ed anzi neppure sistemi lineari; e che le loro curve non risultano necessariamente di genere zero.

Un sistema grafico definisce in modo ovvio un *piano grafico*, che può opportunamente qualificarsi come *algebrico*, in virtù della supposta algebricità del sistema e delle sue curve : più precisamente, risultano « punti » del piano grafico i punti del piano proiettivo reale su cui è tracciato il sistema, e « rette » le curve di quest'ultimo. Un piano grafico algebrico può presentare due casi nettamente distinti, secondoché in esso il teorema di Desargues (o dei triangoli omologici) vale senza eccezioni o meno; mentre nel primo caso il relativo sistema grafico ha la stessa struttura topologica del sistema delle rette di un piano proiettivo reale, ciò non ha più luogo nel secondo caso.

Il problema di vedere se esistono o meno *piani grafici algebrici non desarguesiani* è stato proposto nel 1955 — con altra terminologia ed in forma nettamente dubitativa — dalla Società Matematica di Amsterdam. Un semplice esempio, rispondente invece a tale questione in *senso affermativo*, è quello dato dal sistema formato dalle cubiche ellittiche rappresentate dall'equazione

$$(p_1^2+p_2^2+p_3^2)(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+cp_3^3x_3^3=0,$$

nella quale $(x_1, x_2, x_3)$ sono coordinate omogenee di punto in un piano proiettivo reale, $c$ è un numero reale positivo fisso sufficientemente piccolo, e $(p_1, p_2, p_3)$ denotano tre parametri omogenei (non tutti nulli) variabili da curva a curva ad arbitrio nel campo reale. Si constata infatti che *quel sistema soddisfa alle precedenti condizioni a., b., e che il corrispondente piano grafico risulta non desarguesiano.*

## BIBLIOGRAFIA.

[1] SEGRE (B.). — *Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche* (*Ann. di Mat.*, serie 4, t. 33, 1952, p. 5-48).

[2] SEGRE (B.). — *Nuovi metodi e risultati nella geometria sulle varietà algebriche* (*Ann. di Mat.*, serie 4, t. 35, 1953, p. 1-128).

[3] SEGRE (B.). — *Dilatazioni e varietà canoniche sulle varietà algebriche* (*Ann. di Mat.*, serie 4, t. 37, 1954, p. 139-155).

[4] SEGRE (B.). — *Geometry upon an algebraic variety* (*Proc. Internat. Congres. Math.* [1954, Amsterdam], vol. III, p. 497-513).

[5] SEGRE (B.). — *Plans graphiques algébriques réels non desarguesiens et correspondances cremoniennes topologiques* (*Revue Math. pures et appl.*, t. 1, 1956, p. 39-54).

[6] SEGRE (B.). — *Forme differenziali e loro integrali*, vol. II, Roma, Docet, 1956, § 22.

[7] SEGRE (B.). — *Propriétés locales et globales des correspondances entre variétés algébriques ou analytiques* (Comunicazione tenuta al 3° *Congresso dei Matematici Sovietici*, Mosca, 26 giugno 1956, n$^{os}$ 12-13).

[8] SEGRE (B.). — *Corrispondenze di Möbius e trasformazioni cremoniane intere* (*Atti Acc. Sc. Torino*, t. 91, 1956-1957, p. 1-17).

[9] SEGRE (B.). — *Dilatazioni di varietà differenziabili* (*Rend. Acc. Naz. Lincei*, serie 8, t. 22, 1957, n° 1, p. 249-257).

[10] SEGRE (B.). — *Fibrazioni differenziabili di un'r-sfera mediante k-sfere equatoriali* (*Rend. Acc. Naz. Lincei*, serie 8, t. 22, 1957, n° 1, p. 383-392).

[11] SEGRE (B.). — *Corrispondenze birazionali e topologia di varietà algebriche* (*Ann. di Mat.*, serie 4, t. 43, 1957, p. 1-23).

Beniamino SEGRE,
Viale Ippocrate, 79,
Roma (Italie).