BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUELINE LELONG-FERRAND

Application des méthodes de Hilbert à l'étude des transformations infinitésimales d'une variété différentiable

Bulletin de la S. M. F., tome 86 (1958), p. 1-26

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1958__86__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Bull. Soc. math. France,
86, 1958, p. 1 à 26.

APPLICATION DES MÉTHODES DE HILBERT A L'ÉTUDE DES TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES D'UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE;

PAR

Mme JACQUELINE LELONG-FERRAND.

1. Introduction. — La donnée d'un champ de vecteurs ξ, sur une variété différentiable V^n, pose, entre autres, les problèmes suivants :

PROBLÈME 1. — *A quelles conditions doit satisfaire le champ ξ pour que la transformation infinitésimale $X_\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, définie par ce champ, corresponde à un groupe global de transformations de V^n ?*

La réponse est simple et connue quand la variété V^n est compacte, tout champ ξ suffisamment régulier définissant alors un groupe global. D'autre part nous avons déjà étudié le problème général par une méthode directe, dans [5] et [7] et nous avons établi alors une condition nécessaire et suffisante très générale, de nature géométrique. Les méthodes de l'analyse fonctionnelle nous permettront de donner ici une autre réponse (théorème $9a$); et par retour à des considérations géométriques, nous retrouverons la condition établie dans [7].

PROBLÈME 2. — *A quelles conditions doit satisfaire le champ ξ pour que la transformation infinitésimale associée X_ξ définisse un groupe compact à un paramètre ?*

Ici encore nous établirons une condition nécessaire et suffisante fondée sur les propriétés de l'opérateur $\mathcal{X}_\xi$ (théorème $13a$).

Il est à remarquer que l'algèbre de Lie $\{\mathcal{X}_\alpha\}$ définie par un groupe de Lie compact à un nombre quelconque de dimensions, opérant sur V^n, satisfait à une condition analogue; mais cette question ne sera pas étudiée ici ([1]). Nous verrons, par contre, que le problème 2 est étroitement lié à un problème de décomposition orthogonale, qui sera formulé de façon précise plus loin, mais qu'on peut, en gros, énoncer sous la forme suivante :

PROBLÈME 3. — *A quelles conditions doit satisfaire le champ ξ pour que l'opérateur associé $\mathcal{X}_\xi$ donne lieu à une décomposition* « *forte* » [analogue à celle de Kodaira] *de l'espace des fonctions, ou, plus généralement, des tenseurs, de carré sommable sur V^n?*

Les méthodes employées seront essentiellement des méthodes d'analyse fonctionnelle, fondées sur les propriétés des opérateurs adjoints dans un espace de Hilbert. On connait le succès de ces méthodes pour l'étude des opérateurs d et δ attachés à une variété riemannienne; il est donc assez naturel de les appliquer aux opérateurs $\mathcal{X}_\xi$. Cependant, comme on le verra, les résultats obtenus seront d'une nature assez différente.

Il est à remarquer enfin que la résolution du problème 3 donne, implicitement, la solution globale de certains systèmes particuliers d'équations linéaires aux dérivées partielles : des méthodes analogues ont été appliquées par K. O. FRIEDRICHS ([2]) à une étude générale de ces systèmes.

Les résultats principaux ont été énoncés dans [6].

DÉFINITIONS. — Une fonction $f(x^1, \ldots, x^n)$, définie dans un ouvert de R^n, sera dite de classe $C_1^k (k \geq 0)$ si elle est pourvue de dérivées d'ordre k, satisfaisant, en tout point, à une condition de Lipschitz.

Par extension, une variété différentiable V^n sera dite de classe C_1^k si les fonctions qui définissent les changements de coordonnées admissibles sont de classe C_1^k.

Dans tout ce qui suit, V^n désignera une variété différentiable ouverte, connexe, non nécessairement orientable, de classe C_1^1, pourvue d'une structure uniforme compatible avec sa topologie. Si V^n n'est pas complète, nous supposerons qu'elle admet un bord régulier ∂V^n, c'est-à-dire qu'elle peut être complétée par adjonction d'un bord ∂V^n, localement défini par $x^n = 0$ dans un système de coordonnées admissibles, et nous poserons $\overline{V^n} = V^n \cup \partial V^n$ (fermeture de V^n) ([3]).

Par le procédé devenu classique ([4]) de « doublement » des variétés à bord,

---

([1]) Certains résultats, relatifs à cette question, ont été énoncés dans [4].

([2]) Conférence à la Société mathématique de France, 31 mai 1957, non publiée.

([3]) Pour une définition plus précise du bord, *voir* [7].

([4]) *Voir*, par exemple, P. E. CONNER [1].

le cas d'une variété à bord régulier se ramène à celui d'une variété complète sans bord. Mais il est à remarquer que, même si V^n est de classe C_1^k, avec $k > 1$, la variété complète double n'est, en général, que de classe C_1^1.

La variété V^n est *finie* si la variété complète double est compacte.

2. Les opérateurs $\mathcal{X}_\xi$. — On sait que, sur une variété différentiable paracompacte de classe C_1^k, il est possible de définir une métrique riemannienne $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$, de classe C_1^{k-1}, et, partant, un élément de volume $d\tau = \sqrt{g}\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Dans la plus grande partie de cette étude, nous supposerons seulement qu'on a pu définir sur V^n un élément de volume $d\tau = \gamma\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, où γ est une *densité* de classe C_1^0. Cette condition est réalisée en particulier sur la variété constituée par un groupe localement euclidien quelconque.

Sur une variété V^n de classe C_1^1, on peut définir des champs de tenseurs de classe C_1^0, et des fonctions de classe C_1^1. A tout champ de vecteurs ξ, de classe C_1^0, nous ferons correspondre la transformation infinitésimale $\mathcal{X}_\xi$, c'est-à-dire l'opérateur différentiel du premier ordre agissant sur les fonctions f de classe C_1^0 selon la loi $\mathcal{X}_\xi f = \xi^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, où ξ^i désignent les composantes de ξ dans le système de coordonnées locales x^i. Le transformé $\mathcal{X}_\xi f$ d'une fonction f de classe C_1^0 est une fonction définie presque partout et mesurable; si f est de classe C_1^1 alors $\mathcal{X}_\xi f$ est de classe C_1^0.

Plus généralement, $\mathcal{X}_\xi$ opère sur les champs de tenseurs de classe C_1^0 selon la loi

$$\mathcal{X}_\xi T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = \xi^r \frac{\partial}{\partial x^r} T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \xi^r}{\partial x^{i_k}} T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_{k-1} r i_{k+1}\ldots i_p} - \sum_{h=1}^{q} \frac{\partial \xi^{j_h}}{\partial x^r} T^{j_1\ldots j_{h-1} r j_{h+1}\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p},$$

le transformé $\mathcal{X}_\xi T$ du tenseur T étant un tenseur de même variance, défini presque partout et mesurable.

En particulier, $\mathcal{X}_\xi$ agit sur les formes différentielles de classe C_1^0, considérées comme liées à des tenseurs covariants antisymétriques, en conservant leur degré. Et l'on a alors

$$\mathcal{X}_\xi \varphi = d i_\xi \varphi + i_\xi\, d\varphi,$$

où d désigne l'opérateur de différentiation extérieure, et où i_ξ est l'opérateur « produit intérieur » par le vecteur ξ, défini par

$$i_\xi \varphi = \xi^r \varphi_{r(i_1\ldots i_{p-1})}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}.$$

D'autre part la formule de dérivation d'un produit se généralise ici en

$$\mathcal{X}_\xi(\varphi \wedge \psi) = \mathcal{X}_\xi \varphi \wedge \psi + \varphi \wedge \mathcal{X}_\xi \psi.$$

En appliquant ces règles à l'élément du volume $d\tau = \gamma\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, on obtient

$$\mathcal{X}_\xi\, d\tau = -\,\delta\xi\, d\tau,$$

avec

$$\delta\xi = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma\xi^i) \qquad [\text{divergence du vecteur } \xi].$$

3. Espaces fonctionnels. — V^n étant une variété différentiable de classe C_1^1 sur laquelle on a défini un élément de volume $d\tau$, nous désignerons par $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert constitué par les fonctions réelles ou complexes, de carré sommable sur V^n, avec le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{V^n} f\bar{g}\, d\tau.$$

Si V^n est une variété riemannienne de classe C_1^1, portant la métrique $ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$, nous désignerons par $\mathcal{H}_p^q$ l'espace de Hilbert constitué par les tenseurs p fois covariants et q fois contravariants, de carré sommable sur V^n, avec le produit scalaire

$$\langle S, T\rangle = \int_{V^n} (S, T)\, d\tau,$$

où l'on a posé

$$(S, T) = g^{i_1 r_1}\ldots g^{i_p r_p} g_{j_1 s_1}\ldots g_{j_q s_q} S^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} \overline{T}^{(s_1\ldots s_q)}_{(i_1\ldots i_p)}.$$

Le sous-espace de $\mathcal{H}_p^0$ constitué par les tenseurs p fois covariants antisymétriques sera désigné par $\mathcal{H}_p$; il s'identifie à l'espace des formes différentielles φ de degré p et de carré sommable sur V^n, muni du produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \int_{V^n} \varphi \wedge {}^*\overline{\psi}.$$

4. Formules fondamentales. — φ étant une forme différentielle de degré n, on a $\mathcal{X}_\xi \varphi = d i_\xi \varphi$; d'où, si V^n est une variété finie à bord régulier :

$$\int_{V^n} \mathcal{X}_\xi \varphi = \int_{\partial V^n} i_\xi \varphi = (-1)^{n-1} \int_{\partial V^n} \xi^n \varphi_{12\ldots n}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1},$$

en désignant par $\{x^i\}$ un système de coordonnées locales canoniques (telles que ∂V^n soit caractérisé localement par $x^n = 0$). Plus généralement, si le bord de V^n est localement défini par $r(x) = R$, où $r(x)$ est une fonction de classe C_1^1, on pourra poser $x^n = r(x) - R$, d'où $\xi^n = \mathcal{X}_\xi r$, et

(1) $$\int_{V^n} \mathcal{X}\varphi = \int_{\partial V^n} \mathcal{X} r \left(\frac{\varphi}{dr}\right) \quad [5],$$

$\omega = \left(\dfrac{dr}{\varphi}\right)$ étant la forme différentielle définie par $dr \wedge \omega = \varphi$.

([5]) A partir de maintenant, quand aucune confusion ne sera possible, nous laisserons tomber l'indice ξ et écrirons $\mathcal{X}$ au lieu de $\mathcal{X}_\xi$.

Si nous appliquons cette formule à la forme $\varphi = f\bar{g}\,d\tau$, où $f, g \in \mathcal{H}$, nous obtenons

$$\langle Xf, g\rangle + \langle f, Xg\rangle - \int_{V^n} \delta\xi f\bar{g}\,d\tau = \int_{\partial V^n} f\bar{g}\,Xr\frac{d\tau}{dr}.$$

Si donc nous introduisons le nouvel opérateur $\tilde{X}$ défini par

$$(2) \qquad \tilde{X}f = \delta\xi f - Xf,$$

la différence $\langle Xf, g\rangle - \langle f, \tilde{X}g\rangle$ s'exprime par une intégrale étendue au bord de V^n, soit

$$(3) \qquad \langle Xf, g\rangle - \langle f, \tilde{X}g\rangle = \int_{\partial V^n} f\bar{g}\,Xr\frac{d\tau}{dr}.$$

Si, V^n étant une variété riemannienne, nous appliquons la formule (4, 1) à $\varphi = (S, T)\,d\tau$, où S et T désignent deux tenseurs de même variance, nous obtenons la formule plus générale

$$(4) \qquad \langle XS, T\rangle - \langle S, \tilde{X}T\rangle = \int_{\partial V^n} (S, T)\,Xr\frac{d\tau}{dr},$$

l'opérateur $\tilde{X}$ étant défini par

$$(5) \qquad XT^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} + \tilde{X}T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = \delta\xi\,T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} + \sum_{k=1}^{p} t^r_{i_k} T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_{k-1} r i_{k+1}\ldots i_p} - \sum_{h=1}^{q} t^{j_h}_r T^{j_1\ldots j_{h-1} r j_{h+1}\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p},$$

avec

$$t_{ij} = Xg_{ij} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i} \qquad \text{et} \qquad t^r_i = g^{rj}t_{ij}$$

(ce qui entraîne $2\,\delta\xi = -t^i_i$).

En particulier, si φ et ψ sont deux formes différentielles de même degré p, nous avons

$$(6) \qquad \langle X\varphi, \psi\rangle - \langle \varphi, \tilde{X}\psi\rangle = \int_{\partial V^n} Xr\,\frac{\varphi\wedge\bar{\psi}}{dr}, \qquad \text{avec } {}^\star\tilde{X}\psi = -X^\star\psi.$$

5. **Cas des variétés finies.** — Les formules précédentes vont nous permettre de traduire en langage d'analyse fonctionnelle la condition pour que le champ ξ définisse un groupe global de transformations sur une variété finie V^n.

Cette condition, qui sera désignée par (C^1), est facile à déterminer en se référant au cas compact, et elle a été établie dans [7]. Nous nous bornerons ici à l'énoncer :

LEMME 5*a*. — *Pour que le champ ξ, de classe C^0_1 sur la fermeture $\bar{V}^n$ d'une variété finie, à bord régulier, de classe C^1_1, détermine un groupe* *continu à un paramètre d'homéomorphismes, il faut et il suffit que le champ* ξ *soit tangent à* ∂V^n *en tout point* x *tel que* $\xi(x) \neq 0$ (ce qu'on peut encore exprimer en disant que la composante « normale » de ξ s'annule sur ∂V^n).

En revenant à la formule (4, 3), on en déduit immédiatement :

LEMME 5*b*. — *Pour que le champ* ξ *définisse un groupe global de transformations sur une variété finie à bord régulier* V^n, *il faut et il suffit qu'on ait*

$$(1) \qquad \langle X_\xi f, g \rangle = \langle f, \tilde{X}_\xi g \rangle, \qquad \forall f, g \in C_1^1.$$

Cette nouvelle condition sera désignée par (C^2).

Nous transformerons ce dernier énoncé en introduisant les fermetures respectives (extensions fortes) des opérateurs X et $\tilde{X}$, soient X^c et $\tilde{X}^c$. L'opérateur $X + \tilde{X}$ étant borné [il correspond à une simple multiplication par la fonction $\delta\xi(x)$], X^c et $\tilde{X}^c$ ont même domaine $\mathcal{D}^c(\xi)$. Utilisant une terminologie classique ([6]), nous dirons que l'adjoint $\tilde{X}^w = (X^c)^*$ de X^c [resp. l'adjoint $X^w = (\tilde{X}^c)^*$ de $\tilde{X}^c$] constitue *l'extension faible* de $\tilde{X}$ [resp. X].

La formule (5.1) prouve que le domaine commun de X^w et $\tilde{X}^w$ est constitué par les fonctions $f \in \mathcal{H}$ telles que la fonction Xf soit définie presque partout et appartienne elle-même à $\mathcal{H}$; on voit de plus facilement que ce domaine coïncide avec $\mathcal{D}^c(\xi)$, ce qui entraîne l'identité de X^c avec X^w et de $\tilde{X}^c$ avec $\tilde{X}^w$. Inversement, si X^c et $\tilde{X}^c$ sont adjoints l'un de l'autre, la formule (5, 1) vaut en particulier pour f, g de classe C_1^1, ce qui nous permet d'énoncer :

THÉORÈME 5*c*. — *Pour qu'un champ de vecteurs* ξ *de classe* C_1^0 *sur la fermeture* $\bar{V}^n$ *d'une variété finie, à bord régulier, de classe* C_1^1, *définisse un groupe global de transformations, il faut et il suffit que les fermetures des opérateurs* X_ξ *et* $\tilde{X}_\xi$, *associés à ce champ, et considérés comme opérant dans l'espace* $\mathcal{H}$ *défini par la donnée d'un élément de volume* $d\tau$ *sur* V^n, *constituent des opérateurs adjoints l'un de l'autre* [ou encore : *que les extensions faible et forte de* X_ξ *coïncident*].

Ce résultat va nous servir de guide pour la suite.

6. Cas des variétés infinies — Dans le cas d'une variété infinie, nous savons que la condition (C^1), exprimée dans le lemme 5*a*, reste nécessaire; cela nous permet de nous ramener toujours, par le procédé de « doublement », au cas d'une variété complète (sans bord). Mais cette condition n'est plus

---

([6]) *Voir*, K. O. FRIEDRICHS [2].

équivalente à (C^2), ni suffisante, ainsi que le prouveront des exemples ultérieurs.

Nous allons montrer, par contre, que la condition (C^3), exprimée dans le théorème $5c$, reste nécessaire et suffisante, si l'on suppose $|\delta\xi|$ borné, et si l'on définit convenablement le domaine « naturel » de $\mathcal{X}$. Ce résultat, dont la démonstration se fera en plusieurs étapes, fera l'objet du théorème $9a$. Il nous restera ensuite à rechercher les conditions géométriques que doit remplir le champ ξ pour que (C^3) soit vérifiée : ce sera l'objet du théorème $11a$.

Nous considérerons désormais $\mathcal{X}_\xi$ et $\tilde{\mathcal{X}}_\xi$ comme agissant dans l'espace $\mathcal{C}^1$ des fonctions de classe C^1_1 à support compact contenu dans $\overline{V^n}$; cet espace est dense dans $\mathcal{H}$. Le domaine $\mathcal{D}^c(\xi)$ de $\mathcal{X}^c$ est constitué par les éléments f de $\mathcal{H}$ auxquels on peut associer une suite f_n d'éléments de $\mathcal{C}^1$, convergeant fortement vers f, telle que $\mathcal{X}f_n$ ait aussi une limite forte désignée par $\mathcal{X}^c f$. On définirait de même la fermeture $\tilde{\mathcal{X}}^c$ de $\tilde{\mathcal{X}}$, dont le domaine coïncide avec $\mathcal{D}^c(\xi)$ si $|\delta\xi|$ est borné; et le domaine $\mathcal{D}^w(\xi)$ de l'opérateur $\mathcal{X}^w$ sera constitué par les éléments f de $\mathcal{H}$ auxquels on peut associer un élément de $\mathcal{H}$, désigné par $\mathcal{X}^w f$, satisfaisant à

$$\langle f, \tilde{\mathcal{X}}^c g\rangle = \langle \mathcal{X}^w f, g\rangle, \qquad \forall g \in \mathcal{D}^c.$$

Ceci étant, supposons que le champ ξ définisse un groupe global à un paramètre de transformations de V^n, soit $(t, x) \to \varphi(t, x)$; et désignons par S_t l'opérateur défini par

$$f(x) \to f_t(x) = f[\varphi(t, x)].$$

Nous allons montrer d'abord que *si $|\delta\xi|$ est borné, S_t est un opérateur borné de $\mathcal{H}$.* Nous pouvons poser, en effet

$$d\tau[\varphi(t, x)] = \rho(t, x)\, d\tau(x).$$

et l'on aura

$$\rho(s + t, x) = \rho(t, x)\rho[s, \varphi(t, x)],$$

d'où

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}[\rho(t, x)] = -\delta\xi[\varphi(t, x)],$$

ce qui prouve que $|\rho(t, x)|$ est majoré par $e^{k|t|}$, où $k = \sup|\delta\xi|$, d'où

$$\|f_t\|^2 \leqq e^{k|t|}\|f\|^2.$$

D'autre part, si $f \in \mathcal{C}^1$, la fonction

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \xi^i[\varphi(t, x)]\frac{\partial f}{\partial x^i}[\varphi(t, x)] = S_t \mathcal{X} f$$

est elle-même continue, et converge uniformément vers $\mathcal{X}f$ quand $t \to 0$.

Il en résulte que si $f \in \mathcal{C}^1$, $\frac{1}{t}(S_t f - f)$ converge fortement vers Xf quand t tend vers zéro.

On démontrerait de même que si $S_t^\star$ désigne l'adjoint de S_t, $\frac{1}{t}(S_t^\star f - f)$ converge fortement vers $\tilde{X}f$, quand t tend vers zéro, $\forall f \in \mathcal{C}^1$. Or, pour que $f \in \mathcal{D}^w$, il faut et il suffit qu'il existe un élément de $\mathcal{H}$, désigné par $X^w f$, tel que

$$\langle X^w f, g \rangle = \langle f, \tilde{X} g \rangle, \qquad \forall g \in \mathcal{C}^1.$$

Mais

$$\langle f, \tilde{X} g \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \langle f, S_t^\star g - g \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \langle S_t f - f, g \rangle.$$

Donc $f \in \mathcal{D}^w$ si et seulement si $\frac{1}{t}(S_t f - f)$ a une limite faible quand $t \to 0$, cette limite étant $X^w f$; et de même, $\tilde{X}^w g$ peut être défini comme limite faible de $\frac{1}{t}(S_t^\star g - g)$. Donc si $f, g \in \mathcal{D}^w$, on a

$$\langle X^w f, g \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \langle S_t f - f, g \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \langle f, S_t^\star g - g \rangle = \langle f, \tilde{X}^w g \rangle.$$

Ceci prouve que l'adjoint de $\tilde{X}^w$, qui coïncide avec X^c, est contenu dans X^w; comme on a toujours $X^c \subset X^w$, on en déduit $X^c = X^w$, et, de même, $\tilde{X}^c = \tilde{X}^w$, prouvant que la condition (C^3) est nécessaire.

7. Suite. — Inversement, supposons qu'on ait $X^c = X^w$. L'opérateur $X^c + \tilde{X}^c$ étant borné, nous pouvons poser alors

$$X^c = B + iA, \qquad \tilde{X}^c = B - iA,$$

B étant borné et A autoadjoint.

Nous allons d'abord prouver l'existence d'un groupe continu d'opérateurs S_t de $\mathcal{D}$ satisfaisant formellement à

$$\frac{dS_t}{dt} = XS_t = S_t X, \tag{1}$$

ce qui signifie que $\forall f \in \mathcal{D}^c$, on peut définir $S_t f \in \mathcal{D}^c$ de telle manière que

$$\frac{d}{dt}(S_t f) = XS_t f = S_t X f.$$

Pour construire l'opérateur S_t, nous utiliserons la décomposition spectrale de A, soit $A = \int \lambda \, dE_\lambda$, et, à chaque $f \in \mathcal{H}$, nous ferons correspondre les deux suites $f_n(t)$ et $h_n(t)$ d'éléments de $\mathcal{H}$, définis par les relations de récurrence :

$$\frac{dh_n}{dt}=\int e^{-i\lambda t}\,dE_\lambda(Bf_n); \qquad h_n(0)=f;$$

$$f_{n+1}=\int e^{i\lambda t}\,dE_\lambda(h_n); \qquad f_0=f.$$

L'opérateur $U_t=\int e^{i\lambda t}\,dE_\lambda$, étant unitaire, h_n et f_{n+1} sont bien déterminés par la connaissance de f_n, et satisfont à

$$\|f_{n+1}-f_n\|=\|h_n-h_{n-1}\|,$$

$$\left\|\frac{dh_n}{dt}-\frac{dh_{n-1}}{dt}\right\|=\|Bf_n-B_{f_{n-1}}\|\leqq k\|f_n-f_{n-1}\| \qquad \text{si } k=\|B\|.$$

Les conditions initiales entraînant

$$\|f_1-f_0\|\leqq(2+k|t|)\|f\|,$$

on en déduit, par récurrence

$$\|f_{n+1}-f_n\|\leqq k^n\left[\frac{2|t|^n}{n!}+\frac{k|t|^{n+1}}{(n+1)!}\right]\|f\|.$$

Ces inégalités prouvent immédiatement que les suites f_n, h_n et $\frac{dh_n}{dt}$ convergent fortement, t étant fixé. Soient f_t, h_t et h'_t leurs limites respectives. On voit facilement que $h'_t=\frac{d}{dt}(h_t)$, et l'on a, par passage à la limite :

$$h'_t=\int e^{-i\lambda t}\,dE_\lambda(Bf_t); \qquad f_t=\int e^{i\lambda t}\,dE_\lambda(h_t).$$

Si Af_t est défini, ou, ce qui revient au même, si $f_t\in\mathcal{D}^c$, on a donc

$$\frac{df_t}{dt}=\int i\lambda\, e^{i\lambda t}\,dE_\lambda(h_t)+\int e^{i\lambda t}\,dE_\lambda(h'_t),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\frac{df_t}{dt}=iAf_t+Bf_t=X^c f_t. \tag{2}$$

Il semble donc que l'opérateur $S_t : f\rightarrow f_t$, défini pour toute $f\in\mathcal{H}$ et tout t réel, soit la solution du problème posé. Il reste cependant à établir que la famille $\{S_t\}$ satisfait aux conditions voulues, et qu'elle est la seule à y satisfaire.

8. Suite. — Nous démontrons maintenant que le problème posé ne peut admettre d'autre solution que S_t; et même, plus généralement, nous allons voir que toute famille F_t, à un paramètre, d'éléments de $\mathcal{O}^c$, définie sur un intervalle fermé $t_0 \leqq t \leqq t_1$, contenant l'origine, et satisfaisant à $F_0 = f$, $\frac{d}{dt}(F_t) = X^c F_t$, coïncide nécessairement, sur l'intervalle $[t_0, t_1]$, avec $f_t = S_t f$. On voit en effet facilement que la fonction

$$H_t = \int e^{-i\lambda t} \, dE_\lambda(F_t)$$

admet une dérivée $\frac{d}{dt}(H_t)$ satisfaisant à

$$\frac{d}{dt}(H_t) = \int e^{-i\lambda t} \, dE_\lambda(BF_t).$$

De plus, $F_0 = f$ entraîne $H_0 = f$; et l'on établit, par récurrence, les inégalités

$$\| F_t - f_n \| = \| H_t - h_{n-1} \| \leqq k^n \frac{|t|^n}{n!} \| F_t - f \|,$$

où k, f_n et h_n ont la même signification que plus haut. Ces inégalités prouvent que $f_n \to F_t$, autrement dit, que F_t coïncide avec f_t sur $[t_0, t_1]$.

En fait, nous remarquerons que la famille d'opérateurs S_t est entièrement caractérisée par les relations

$$(3) \qquad S_0 f = f; \qquad \frac{d}{dt}\int e^{-i\lambda t} \, dE_\lambda(S_t f) = \int e^{-i\lambda t} \, dE_\lambda(BS_t f)$$

valables pour toute $f \in \mathcal{H}$.

Appliquant à chacun des deux membres de la deuxième de ces relations l'opérateur $U = \int e^{-i\lambda u} \, dE_\lambda$, et remplaçant f par $f_u = S_u f$, nous obtenons la relation

$$\frac{d}{dt}\int e^{-i\lambda(t+u)} \, dE_\lambda(S_t S_u f) = \int e^{-i\lambda(t+u)} \, dE_\lambda(BS_t S_u f)$$

qui prouve l'identité de $S_t S_u$ avec S_{t+u}.

Nous avons ainsi établi que les opérateurs S_t constituent un groupe à un paramètre de transformations de $\mathcal{H}$. Ces opérateurs sont bornés, car les relations de récurrence précédemment écrites entraînent

$$\| f_t - f \| \leqq [2 + k|t|] \, e^{k|t|} \, \| f \|,$$

d'où l'on déduit

$$\| S_t \| \leqq [3 + k|t|] \, e^{k|t|}.$$

Et nous remarquerons aussi, bien que ceci ne découle pas des inégalités précédentes, que $S_t f$ converge fortement vers f, quand $t \to 0$, quelle que soit $f \in \mathcal{H}$; on a en effet

$$S_t f - f = \int e^{i\lambda t}\, dE_\lambda (h_t - f) + \int (e^{i\lambda t} - 1)\, dE_\lambda f,$$

d'où

$$\| S_t f - f \| \leqq \| h_t - f \| + 2 \left[\int \sin^2 \frac{\lambda t}{2}\, d \| E_\lambda f \|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

et il est facile de voir que chacun des termes du deuxième membre tend vers zéro (la convergence de h_t vers $f = h_0$ résulte de l'existence de la dérivée $h'_0 = Bf$).

Enfin, la fonction $X^c S_t f$ (si elle est définie et appartient à $\mathcal{H}$) apparaît comme la limite forte, pour $u \to 0$, de

$$\frac{1}{u} [S_{t+u} f - S_t f] = S_t \left[\frac{S_u f - f}{u} \right],$$

d'où, puisque S_t est borné, la formule de permutabilité :

$$X^c S_t f = S_t X^c f.$$

Cette formule prouve que $f \in \mathcal{D}^c$ entraîne $S_t f \in \mathcal{D}^c$; la formule (7, 2) est par conséquent applicable à toute $f \in \mathcal{D}^c$, de sorte que l'opérateur S_t satisfait bien à toutes les conditions voulues.

9. Suite. — Il reste maintenant à établir que le groupe S_t, de transformations de $\mathcal{H}$ correspond à un groupe global $x \to \varphi(t, x)$ de transformations de V_n, prolongeant le groupe local défini par le champ ξ. A chaque point x_0 de V^n on peut en effet faire correspondre un voisinage U_0 de x_0 et un nombre $\eta > 0$ tels que $\varphi(t, x)$ soit défini pour $x \in U_0$ et $|t| < \eta$, les coordonnées locales du point $\varphi(t, x)$ satisfaisant au système différentiel

$$(1) \qquad \frac{\partial \varphi^i(t, x)}{\partial t} = \xi^i[\varphi(t, x)]$$

avec les conditions initiales qui se déduisent de $\varphi(0, x) = x$. Plus généralement, si K est un compact quelconque, on peut, au moyen d'un recouvrement de K, définir un intervalle ouvert I, contenant l'origine, tel que $\varphi(t, x)$ soit défini pour tout $x \in K$ et $t \in I$. Nous désignerons par $I_K =]t_0, t_1[$ l'intervalle I maximal.

Pour les fonctions f de classe C_1^1 à support dans K, et pour $t \in I_K$, on a nécessairement

$$f[\varphi(t, x)] = S_t f(x),$$

car $f[\varphi(t, x)]$ satisfait au système

$$f[\varphi(0, x)] = f(x); \qquad \frac{\partial}{\partial t} f[\varphi(t, x)] = X f[\varphi(t, x)]$$

qui, nous l'avons vu, caractérise $S_t f$ dans l'intervalle I_K.

L'opérateur S_t, défini quel que soit t, permet de prolonger

$$f_t(x) = f[\varphi(t, x)] \qquad \text{pour} \quad t \geqq t_1 \qquad \text{ou} \qquad t \leqq t_0,$$

donc aussi, semble-t-il, de définir $\varphi(t, x)$ pour toute valeur réelle de t et tout $x \in K$. Ce dernier point cependant n'est pas absolument évident car les fonctions $S_t f$, considérées ici comme des éléments de $\mathcal{H}$, ne sont définies qu'à un ensemble de mesure nulle près. Pour l'établir, nous remarquerons d'abord que si $f \in \mathcal{D}^c$, alors $\frac{d}{dt}(S_t f) \in \mathcal{H}$, ce qui permet de prouver que, x étant fixé, $S_t f(x)$ est fonction continue de t, excepté au plus pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de x (la mesure utilisée étant $d\tau$); K étant un compact quelconque, nous désignerons par $\mathcal{J}(K)$ la fermeture de la réunion $\bigcup_{t \in I_K} \varphi(t, K)$; $\mathcal{J}(K)$ étant une réunion dénombrable de compacts, on peut déterminer une famille dénombrable $\{f_n\}$ de fonctions continues à supports compacts, séparant les points de $\mathcal{J}(K)$. A cette famille $\{f_n\}$ correspond un ensemble E, de mesure nulle, tel que si $x \notin E$, $S_t f_n$ soit continue en t quel que soit n. Le point $x \in K$ étant fixé, nous désignerons par y l'une des valeurs d'adhérence de $\varphi(t, x)$ au point t_1 (y pouvant éventuellement être à l'infini). Les fonctions f_n étant continues à l'infini, et le point y appartenant à $\mathcal{J}(K)$, $f_n(y)$ est l'une des valeurs d'adhérence de $S_t f_n(x)$ au point t_1; et si $x \notin E$, la continuité de $S_t f_n(x)$ par rapport à t entraîne l'unicité de cette limite. Si donc y' désigne une autre valeur d'adhérence de $\varphi(t, x)$ au point t_1, on doit avoir $f_n(y) = f_n(y')$, $\forall n$, ce qui entraîne $y = y'$, pourvu que $x \notin E$. Autrement dit, si $x \notin E$, $\varphi(t, x)$ a une limite y_x bien déterminée (éventuellement à l'infini) quant $t \to t_1$ par valeurs inférieures. Nous allons voir, de plus, que l'ensemble F des $x \in K$ tels que y_x soit à l'infini, est de mesure nulle. Sinon, en effet, la fonction caractéristique f de F satisferait à

$$\|f\| \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to t_1} S_t f(x) = 0, \qquad \forall x.$$

La convergence de t vers t_1 entraînant la convergence forte de $S_t f$ vers $S_{t_1} f$, on devrait avoir $S_{t_1} f = 0$ presque partout sur V^n, donc $\| S_{t_1} f \| = 0$ contrairement au fait que le rapport $\frac{\|f\|}{\|S_{t_1} f\|}$ est borné par $\| S_{-t_1} \|$.

Or, si le point $y_x = \lim_{t \to t_1} \varphi(t, x)$ est à distance finie, nous pouvons définir $\varphi(t, z)$ dans un voisinage convenable de y_x et pour $|t|$ suffisamment petit, donc prolonger $\varphi(t, x)$ pour $t > t_1$ dans un voisinage convenable de x; et l'ensemble des points x de K où ce prolongement n'est pas possible, est de mesure nulle.

D'autre part, nous pouvons toujours déterminer un compact K' contenant K, tel que le complémentaire dans K' d'un ensemble de mesure nulle, soit dense dans K'. En appliquant le résultat précédent à K', on voit que le prolongement de $\varphi(t, x)$ est possible pour tout $x \in K'$, et pour des valeurs de t constituant un intervalle contenant strictement $I_{K'}$, contrairement à l'hypothèse que l'intervalle $I_{K'}$ est maximal. Il en résulte que $I_{K'}$ est l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, autrement dit, que $\varphi(t, x)$ peut être défini quels que soient t, réel, et $x \in K'$, et ceci, de telle manière qu'on ait $S_t f_n = f_n[\varphi(t, x)]$ quel que soit n. L'identité $S_t(fg) = S_t f . S_t g$, valable quelles que soient les fonctions bornées f, $g \in \mathcal{H}$, et le théorème d'approximation de Stone-Weierstrass permettent de démontrer l'égalité $S_t f = f[\varphi(t, x)]$ pour toute f continue à support dans K; K étant quelconque, on en déduit que $\varphi(t, x)$ peut être prolongé pour tout t réel et tout $x \in V^n$, sans cesser de satisfaire au système différentiel (9, 1).

La démonstration étant ainsi achevée, nous pouvons revenir au cas d'une variété à bord et énoncer :

THÉORÈME 9*a*. — *Soit V^n une variété différentiable de classe C_1^1, à bord régulier, sur laquelle on a défini un élément de volume*

$$d\tau = \gamma\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Pour qu'un champ de vecteurs ξ, de classe C_1^0 sur V^n, et à divergence bornée, définisse un groupe global de transformations de V^n, il faut et il suffit que les extensions faible et forte de l'opérateur infinitésimal associé X_ξ, considéré comme opérant dans $\mathcal{H}$, coïncident.

Cas particulier. Cas des variétés riemanniennes. — Le théorème 9*a* s'applique en particulier aux champs de vecteurs à divergence nulle, c'est-à-dire aux transformations infinitésimales conservant l'élément de volume $d\tau$. L'opérateur X est alors antisymétrique (c'est-à-dire que $\tilde{X} = -X$ ou que iX est symétrique) et la condition trouvée équivaut à dire que iX^c est autoadjoint. La deuxième partie de la démonstration précédente (§ 7 et 8) se simplifie alors notablement, car X^c admet alors une décomposition spectrale de la forme

$$X^c = \int i\lambda\, dE_\lambda$$

et l'opérateur S_t est défini simplement par $S_t = \int e^{i\lambda t}\, dE_\lambda$. Nous énoncerons :

THÉORÈME 10*a*. — *Soit V^n une variété de classe C_1^1 à bord régulier sur laquelle on a défini un élément de volume $d\tau$. Pour qu'une transformation infinitésimale X définisse un groupe global de transformations de V^n, conservant les volumes, il faut et il suffit que l'opérateur iX^c, considéré comme opérant dans $\mathcal{H}$, soit autoadjoint.*

EXTENSION. — Nous avons vu (§ 3), que, si V^n est une variété riemannienne, on peut considérer X comme opérant dans l'espace $\mathcal{H}_p^q$ des tenseurs de variance (p, q) et de carré sommable. Cette extension de X conduit à un théorème analogue à 9*a*, que nous n'énoncerons pas, l'analogue de 10*a* nous paraissant plus intéressant.

Un simple examen de la formule (4, 5) nous montre en effet, que iX^c ne constitue un opérateur symétrique de $\mathcal{H}_p^q$ que dans les cas suivants :

a. ou bien $t_{ij} = Xg_{ij} = 0$, $\forall i, j$ (cas d'une isométrie infinitésimale);
b. ou bien $t_{ij} = Xg_{ij} = \lambda g_{ij}$, λ étant un scalaire (cas d'une transformation infinitésimale conforme), avec $n = 2(p - q)$.

On en déduit facilement le résultat suivant :

THÉORÈME 10*b*. — *Si le champ de vecteurs ξ définit un groupe global d'isométries de V^n, l'opérateur iX_ξ^c, considéré comme opérant dans l'un quelconque des espaces $\mathcal{H}_q^p$, est autoadjoint.*

Réciproquement, si, considéré comme opérant dans un espace $\mathcal{H}_q^q$ tel que $p - q \neq \frac{n}{2}$, l'opérateur iX_ξ^c est autoadjoint, alors le champ de vecteurs ξ définit un groupe global d'isométries de V^n.

Le cas singulier $p - q = \frac{n}{2}$ conduit à l'énoncé suivant :

THÉORÈME 10*c*. — *Pour que le champ ξ à divergence bornée définisse un groupe global de transformations conformes d'une variété riemannienne V^n de dimension n paire, il faut et il suffit que l'opérateur iX_ξ^c, considéré comme opérant dans l'un quelconque des espaces $\mathcal{H}^q_{q+\frac{n}{2}}$ soit autoadjoint.*

REMARQUE. — Les théorèmes 10*b* et 10*c* restent vrais si l'on remplace $\mathcal{H}_p^q$ par l'espace $\mathcal{H}_p$ des formes différentielles de carré sommable, en posant $q = 0$.

11. Critère géométrique. — Pour que le théorème 9*a* puisse servir à la détermination effective des groupes de transformations de V^n, il nous faut avoir un critère géométrique permettant de reconnaître si les extensions faible et forte de X_ξ coïncident, autrement dit, si l'extension faible X_ξ^w de X_ξ satisfait à

$$\langle X_\xi^w f, g\rangle = \langle f, \tilde{X}_\xi^w g\rangle, \qquad \forall f, g \in \mathcal{D}^w.$$

Ce critère nous sera fourni par le théorème suivant :

THÉORÈME 11*a*. — *Soit V^n une variété complète de classe C_1^1 sur laquelle on a pu définir une fonction positive $r(x)$, de classe C_1^1, telle que l'ensemble $E_R = \{x; r(x) \leqq R\}$ soit compact quel que soit R. Posons*

$$\theta(R) = \sup_{x \in \partial E_R} |X_\xi r(x)|,$$

où ∂E_R désigne la frontière de E_R et X_ξ la transformation infinitésimale associée à un champ de vecteurs ξ, de classe C_1^0 sur V^n.

Pour que les extensions faible et forte de l'opérateur X_ξ, considéré comme opérant dans l'espace des fonctions de carré sommable sur V^n, coïncident, il suffit que l'intégrale $\int_R^\infty \frac{du}{\theta(u)}$, soit divergente quel que soit $R > 0$.

DÉMONSTRATION. — Supposons $\int_R^\infty \frac{du}{\theta(u)} = +\infty$, $\forall R > 0$, et soient $f, g \in \mathcal{D}^{w}$. La variété V^n étant la réunion des compacts E_R, on a

$$\langle X^w f, g\rangle = \lim_{R \to +\infty} \int_{E_R} X f \bar{g}\, d\tau; \qquad \langle f, \tilde{X}^w g\rangle = \lim_{R \to +\infty} \int_{E_R} f \tilde{X} \bar{g}\, d\tau,$$

d'où par application de (4, 3) :

$$\langle X^w f, g\rangle - \langle f, \tilde{X}^w g\rangle = \lim_{R \to +\infty} \varphi(R),$$

avec

$$\varphi(R) = \int_{\partial E_R} f \bar{g} X r \frac{d\tau}{dr}.$$

Or cette fonction $\varphi(R)$ satisfait à

$$\int_R^\infty |\varphi(u)| \frac{du}{\theta(u)} \leq \int_R^\infty du \int_{\partial E u} |f\bar{g}| \frac{d\tau}{du} \leq \int_{V^n} |f\bar{g}|\, d\tau,$$

la deuxième inégalité résultant du fait que chaque point de V^n appartient à un seul ensemble ∂E_u au plus. La dernière intégrale étant majorée par $\|f\|.\|g\|$, l'intégrale $\int_R^\infty |\varphi(u)| \frac{du}{\theta(u)}$ est convergente; et la divergence à l'infini de $\int \frac{du}{\theta(u)}$ entraîne l'existence d'une suite R_n, tendant vers $+\infty$, telle que $\varphi(R_n) \to 0$. On en déduit l'égalité

$$\langle X^w f, g\rangle = \langle f, \tilde{X}^w g\rangle, \qquad \forall f, g \in \mathcal{D}^w.$$

C. Q. F. D.

En rapprochant ce résultat du théorème $9a$, on obtiendrait immédiatement une condition géométrique suffisante pour que le champ définisse un groupe global, cette condition étant d'ailleurs indépendante du choix de l'élément de volume $d\tau$. Nous ne l'énoncerons pas, car elle coïncide avec celle qui a été établie par un procédé plus direct dans [7], sans l'hypothèse $|\delta\xi|$ borné, et en supposant seulement $r(x)$ de classe C_1^0.

12. Exemple. — Pour terminer cette première partie de notre étude, nous allons donner l'exemple d'un champ de vecteurs, à divergence nulle, qui ne définit pas un groupe global de transformations; et nous vérifierons que les extensions faible et forte de l'opérateur associé X ne coïncident pas.

Soit X la transformation infinitésimale de R^2 définie par

$$X = -\frac{2}{3}xy\frac{\partial}{\partial x} + \left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Cette transformation conserve l'élément d'aire $d\tau = dx\,dy$; mais la solution du système différentiel

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{3}xy; \qquad \frac{dy}{dt} = \left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)$$

est donnée, sous forme paramétrique, par

$$x = k(1+u^2)^{-\frac{1}{3}}; \qquad y = ku(1+u^2)^{-\frac{1}{3}}; \qquad t = \frac{1}{k}\int_{u_0}^{u}\frac{dv}{(1+v^2)^{\frac{2}{3}}}:$$

u_0 et k désignant des constantes qui dépendent des conditions initiales. Il résulte de ces formules que $|y| \to +\infty$ pour une valeur finie de t, et que le transformé $\varphi(t, x_0, y_0)$ du point (x_0, y_0) ne peut être défini quel que soit t, donc que X ne correspond pas à un groupe global de transformations de R^2.

Nous allons voir en effet que les extensions faible et forte de X ne coïncident pas; pour simplifier, nous nous limiterons au sous-domaine D_k de R^2 défini par $x(x^2+y^2) > k^3 (k > 0)$; la frontière de D_k, qui est une courbe intégrale de (1), est tangente au champ ξ. Nous pouvons donc appliquer notre théorie à D_k. Or il est facile de voir, par un changement de variables et un calcul fondé sur l'inégalité de Schwarz, que toute fonction f, de classe C_1^1, à support compact contenu dans D_k, satisfait à

$$\|f\| \leq \frac{\alpha}{k}\|Xf\|, \qquad \text{avec} \quad \alpha = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dv}{(1+v^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

Par extension, toute fonction de $\mathcal{D}^c$ devra satisfaire à la même inégalité : il en résulte qu'il n'existe pas de fonction f, autre que la fonction zéro, satisfaisant à $X^c f = 0$.

Or si nous désignons par $\psi(z)$ une fonction quelconque, de classe C_1^1, de la variable réelle z, nulle en dehors de l'intervalle $a \leq z \leq b (a > k)$, la fonction $f(x, y) = \psi[x(x^2+y^2)]$ est elle-même de classe C_1^1, et satisfait en tout point à $Xf = 0$; d'autre part l'aire comprise entre les trajectoires $x(x^2+y^2) = a^3$, $x(x^2+y^2) = b^3$ (qui limitent le support de f) étant finie, f est de carré sommable; donc $f \in \mathcal{D}^w$ et satisfait à $X^w f = 0$, ce qui prouve que les opérateurs X^w et X^c ne coïncident pas; nous avons même démontré que l'espace des fonctions faiblement invariantes (satisfaisant à $X^w f = 0$) ne coïncide pas avec l'espace des fonctions fortement invariantes (satisfaisant à $X^c f = 0$).

II.

13. Deuxième problème. — Nous abordons maintenant le problème 2 : *à quelle condition le champ de vecteurs ξ définit-il un groupe compact, à un paramètre, de transformations de V^n ?*

Nous remarquerons d'abord que si le champ ξ définit un groupe compact G, sur une variété paracompacte, on peut, par le choix d'une métrique riemannienne appropriée, supposer qu'il s'agit d'un groupe d'isométries. Car si l'on part d'une métrique riemannienne arbitraire, on peut, par un procédé d'intégration, en déduire une métrique invariante par G. Nous pouvons donc nous borner ici à l'étude des champs de vecteurs de Killing.

NOTATIONS. — ξ désignant un champ de vecteurs quelconque, de classe C_1^0, sur une variété de classe C_1^1, nous désignerons par $\mathcal{H}'(\xi)$ l'espace des fonctions faiblement invariantes pour la transformation infinitésimale associée X_ξ, c'est-à-dire le sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ constitué par les fonctions f satisfaisant à $\langle f, \tilde{X}^c g\rangle = 0$, $\forall g \in \mathcal{D}^c$; l'espace complètement orthogonal à $\mathcal{H}'(\xi)$ sera désigné par $\mathcal{H}''(\xi)$; quand aucune confusion ne sera possible, ces deux espaces seront désignés simplement par $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$.

Ceci étant posé, nous allons établir le résultat suivant :

THÉORÈME 13 *a*. — *Pour qu'un champ de vecteurs ξ, de classe C_1^0, sur une variété riemannienne de classe C_1^1, définisse un groupe compact d'isométries à un paramètre, il faut et il suffit que l'opérateur inverse X_ξ^{-1} associé, considéré comme opérant dans $\mathcal{H}''(\xi)$, soit borné.*

α. La condition est nécessaire. — Supposons que ξ définisse un groupe global compact, à un paramètre, d'isométries de V^n. Ce groupe étant global. l'opérateur associé X^w, considéré comme opérant dans $\mathcal{H}$, est opposé à son adjoint. Et si l'on pose

$$X^w = \int i\lambda\, dE_\lambda,$$

on sait que l'opérateur

$$S_t = e^{tX} = \int e^{i\lambda t}\, dE_\lambda,$$

coïncide avec celui que définissent les opérations du groupe, soit $f \to f[\varphi(t, x)]$ (*voir* § 8 et 9). Le groupe G étant compact, S_t définit un groupe compact à un paramètre de transformations de V^n, d'où il résulte, par application du théorème de Stone, que sa décomposition spectrale est de la forme

$$S_t = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{in\omega t} E_n,$$

E_n désignant un système complet de projections. On en déduit :

$$X^{(\omega)} = \omega \sum_{-\infty}^{+\infty} in\, E_n.$$

L'espace $\mathcal{H}'$ des fonctions faiblement invariantes est donc constitué par les $f \in \mathcal{H}$ satisfaisant à $E_n f = 0$ pour $n \neq 0$, tandis que $\mathcal{H}''$ est constitué par les $f \in \mathcal{H}$ satisfaisant à $E_0 f = 0$; d'où il résulte que si $f \in \mathcal{H}'' \cap \mathcal{D}^{(\omega)}$, on a

$$\| Xf \| \geqq \omega \| f \|.$$

Inversement, si $g \in \mathcal{H}''$, il existe un élément et un seul de $\mathcal{H}'' \cap \mathcal{D}^{(\omega)}$, soit $f = \frac{1}{i\omega} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} E_n g$, satisfaisant à $g = X^{(\omega)} f$, et l'on a

$$\| f \| = \| X^{-1} g \| \leqq \frac{1}{\omega} \| g \|.$$

C. Q. F. D.

β. *La condition est suffisante.* — Cette réciproque sera démontrée en trois temps. Nous établirons d'abord (lemme **14***a*) que, si X_ξ^{-1} est borné dans $\mathcal{H}''$, alors le champ ξ définit un groupe global. Puis nous établirons (lemme **14***b*) que les orbites de ce groupe sont fermées; ces deux propositions n'utiliseront pas toutes les hypothèses, et seront valables pour un champ ξ quelconque à divergence nulle. Enfin nous démontrerons (lemme **15***a*) qu'un groupe d'isométries à un paramètre, dont les orbites sont fermées, est nécessairement compact.

14. Lemme **14***a*. — *Soit ξ un champ de vecteurs, à divergence nulle sur V^n, tel que l'opérateur inverse associé X^{-1} soit borné dans $\mathcal{H}''$; alors le champ ξ définit un groupe global de transformations de V^n.*

On voit immédiatement en effet, que l'opérateur iX^{-1}, étant symétrique et borné dans $\mathcal{H}''$, est autoadjoint; son inverse $-iX^{c}$ est donc autoadjoint dans $\mathcal{H}''$, et, par extension, dans $\mathcal{H}$; d'où le résultat annoncé, par application du théorème **10***a*.

Lemme **14***b*. — *Soit ξ un champ de vecteurs à divergence nulle sur V^n, tel que l'opérateur inverse associé X^{-1} soit borné dans $\mathcal{H}''$. Alors le groupe G défini par ξ a toutes ses orbites fermées, et les périodes correspondantes sont bornées.*

Démonstration. — Supposons que G admette une orbite non fermée, ou, que, toutes les orbites étant fermées, les périodes correspondantes ne soient pas bornées. Quel que soit le nombre $T > 0$, on pourrait alors déterminer un arc C_T, sans point double, image continue et biunivoque du segment $|t| < T$ dans une transformation de la forme $t \to \varphi(t, x_0)$, où x_0 désigne un point de V^n. L'arc C_T, régulièrement plongé dans V^n, admettrait un voisinage U homéomorphe à un pavé $\Omega \times I$ de R^n, Ω désignant un pavé $|x^i| < \alpha\,(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ de R^{n-1}, et I un intervalle $|x^n| < \beta$ de R $[\alpha > 0,\ \beta > 0]$; et l'on pourrait choisir U de manière que dans le système de coordonnées défini par cet homéomorphisme, on ait $\xi^i = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$; $\xi^n = 1$.

Soit $\chi(t)$ la fonction de classe C_1^0, nulle pour $|t| > T$, linéaire dans chacun des intervalles $\left[-T, -\frac{T}{2}\right]$, $\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right]$, $\left[\frac{T}{2}, T\right]$, et satisfaisant à $\chi\left(-\frac{T}{2}\right) = -\frac{T}{2}$, $\chi\left(\frac{T}{2}\right) = +\frac{T}{2}$. Un calcul simple nous donne

$$\int_{-T}^{+T} \chi(t)\,dt = 0; \qquad \int_{-T}^{+T} \chi^2(t)\,dt = \frac{T^3}{6}; \qquad \int_{-T}^{+T} \chi'^2(t)\,dt = 2T.$$

Désignant par $\psi(x^1, \ldots, x^{n-1})$ une fonction quelconque, de classe C_1^0, non identiquement nulle et à support dans Ω, nous définirions une fonction f à support dans U et de classe C_1^0, en posant

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \chi(x^n)\,\varphi(x^1, \ldots, x^{n-1}).$$

D'autre part l'élément de volume $d\tau$, étant invariant dans G, serait nécessairement, dans U, de la forme

$$d\tau = \gamma(x^1, \ldots, x^{n-1})\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Et nons aurions

$$\|f\|^2 = \int_U |f|^2\,d\tau = \int_{-T}^{+T} \chi^2(t)\,dt \int_\Omega \psi^2(x^1, \ldots, x^{n-1})\,\gamma\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1};$$

$$\|Xf\|^2 = \int_U \left|\frac{\partial f}{\partial x^n}\right|^2 d\tau = \int_{-T}^{+T} \chi'^2(t)\,dt \int_\Omega \psi^2(x^1, \ldots, x^{n-1})\,\gamma\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1};$$

d'où

$$\|f\| = \left[\frac{T}{\sqrt{12}}\right] \|Xf\|.$$

Or il est facile de voir que la fonction f ainsi déterminée appartient à $\mathcal{H}''$; car si g désigne une fonction invariante de classe C_1^1, on a nécessairement $Xg = \frac{\partial g}{\partial x^n} = 0$ dans U; d'où

$$\int_U f\bar{g}\,d\tau = \int_{-T}^{+T} \chi(t)\,dt \int_\Omega \bar{g}(x^1, \ldots, x^{n-1})\,\psi(x^1, \ldots, x^{n-1})\,\gamma\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1} = 0.$$

Il existerait donc une fonction $f \in \mathcal{H}''$ telle que le rapport $\dfrac{\|f\|}{\|Xf\|} = \dfrac{T}{\sqrt{12}}$ soit aussi grand qu'on le veut, contrairement à l'hypothèse.

C. Q. F. D.

15. Lemme 15 *a*. — *Soit V^n une variété riemannienne complète, admettant un groupe global d'isométries G à un paramètre. Si toutes les orbites de G sont fermées, le groupe est compact.*

Soit, en effet, G un groupe d'isométries à un paramètre dont toutes les orbites soient fermées; à chaque point x de V^n est associé un nombre positif minimal $T(x)$ [période de l'orbite correspondante] tel que les transformations du groupe satisfassent à $\varphi[t+T(x), x] = \varphi(t, x)$, $\forall t$.

G étant un groupe d'isométries, la distance géodésique $d(x, x_m)$ d'un point quelconque x à chacun des points $x_m = \varphi[mT(x), x_0]$ est, quel que soit $x_0 \in V^n$, et quel que soit l'entier m, égale à $d(x, x_0)$. Supposons que l'orbite C_0 de x_0 ne soit pas réduite à un point; on peut alors la considérer comme image continue et biunivoque de la circonférence-unité par $e^{i\theta} \to \varphi\left[\dfrac{\theta\, T(x_0)}{2\pi}, x_0\right]$; nous désignerons par δ la distance du point x_0 à l'arc γ_1 de C_0, qui correspond à $\dfrac{\pi}{4} < \theta < 7\dfrac{\pi}{4}$; $T(x_0)$ étant le plus petit nombre positif satisfaisant à $\varphi[T(x_0), x_0] = x_0$, δ est non nul. Si le point x satisfait à $d(x, x_0) < \dfrac{\delta}{2}$, les points x_m satisferont à $d(x_m, x_0) < \delta$ et ne pourront, par conséquent, appartenir à l'arc γ_1. Leurs images réciproques $y_m = \exp\left[2i\pi m \dfrac{T(x)}{T(x_0)}\right]$ sur la circonférence-unité devront appartenir à l'arc défini par $|\theta| < \dfrac{\pi}{4}$, quel que soit l'entier m, ce qui exige que les points y_m soient tous confondus avec y_0. Autrement dit, les points x_m sont tous confondus avec x_0, ce qui exige que $T(x)$ soit un multiple de $T(x_0)$. Nous avons donc ainsi établi que chaque point x_0 de V^n, dont l'orbite ne se réduit pas à un point, admet un voisinage U_0 en chaque point duquel $T(x)$ est un multiple entier de $T(x_0)$. Or nous pouvons supposer U_0 assez petit pour que chaque point x de U_0 puisse être joint à x_0 par une seule géodésique; chaque point de U_0 est alors déterminé par ses coordonnées normales; et la donnée des transformés $\varphi[T(x_0), x_i]$ de n points x_i de U_0 convenablement choisis suffit à déterminer l'isométrie $x \to \varphi[T(x_0), x]$ qui laisse x_0 invariant : il suffit que les points x_i soient situés sur n géodésiques distinctes issues de x_0. Si nous posons $T(x_i) = p_i T(x_0)$ [p_i entier] et si nous désignons par p le plus petit commum multiple des nombres p_i, le nombre $T = p\, T(x_0)$ satisfait à $\varphi(T, x_i) = x_i$ [$i = 0, 1, \ldots, n$] d'où il résulte qu'on a $\varphi(T, x) = x$, $\forall\, x \in V^n$, d'où enfin $\varphi[t+T, x] = \varphi(t, x)$ quels que soient t et x. Il suffit donc de partir d'un point x_0, dont l'orbite ne se réduit pas à un point, pour déterminer un nombre T, période commune à toutes les orbites, ce qui prouve que le groupe G est compact. C. Q. F. D.

16. Exemple. — Considérons le sous-groupe à un paramètre du tore T^2 défini par $X = \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y}$, où x, y sont des coordonnées sur T^2, définies modulo 2π. Si le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ est rationnel, soit $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{a}{b}$ [a, b, entiers premiers entre eux], on peut déterminer deux entiers c, d, satisfaisant à $ad - bc = 1$, et le changement de variables $x = au + cv$, $y = bu + dv$, nous ramène à l'étude de l'opérateur $X = \frac{\lambda}{a}\frac{\partial}{u}$. Toute fonction f, de carré sommable sur T^2, admettant un développement en série de Fourier de la forme

$$f(u, v) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}\, e^{i(pu+qv)},$$

on a

$$\|f\|^2 = 4\pi^2 \sum_p \sum_q |c_{pq}|^2;$$

$$\|Xf\|^2 = 4\pi^2 \left|\frac{\lambda}{a}\right|^2 \sum_p \sum_q p^2 |c_{pq}|^2$$

et l'espace $\mathcal{H}''$ est constitué par les fonctions f dont tous les coefficients c_{0q} sont nuls. Si $f \in \mathcal{H}''$, on a donc $\|Xf\| > \left|\frac{\lambda}{a}\right| \|f\|$ prouvant que X engendre un groupe compact, conformément aux résultats connus.

Si le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ est irrationnel, nous pouvons déterminer une fraction irréductible $\frac{a}{b}$, de dénominateur b aussi grand qu'on le veut, telle que $\left|\frac{\lambda}{\mu} - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^2}$; la fonction $f(x, y) = e^{i(bx-ay)}$ satisfait à $\|f\| = 2\pi$,

$$\|Xf\| = 2\pi |\lambda b - \mu a|, \qquad \|XXf\| = 2\pi |\lambda b - \mu a|^2$$

d'où, en posant $g = Xf$:

$$\frac{\|Xg\|}{\|g\|} = |\lambda b - \mu a| < \left|\frac{\mu}{b}\right|,$$

ce qui prouve l'existence d'une fonction $g \in \mathcal{H}''$ telle que le rapport $\frac{\|Xg\|}{\|g\|}$ soit aussi petit qu'on le veut; et nous retrouvons le fait connu que le groupe engendré par $X = \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y}$, avec $\frac{\lambda}{\mu}$ irrationnel, n'est pas compact.

17. — Au cours de l'étude qui précède, nous avons, en fait, établi le résultat suivant : si le champ ξ est à divergence nulle, et si l'opérateur inverse associé X^{-1} est borné dans $\mathcal{H}''(\xi)$, alors ξ définit un groupe global G; toutes les orbites de G sont fermées, et les périodes correspondantes sont bornées. Nous allons maintenant établir la proposition inverse, qui nous sera utile par la suite.

Soit donc G un groupe à un paramètre de transformations de V^n, conservant les volumes, et dont toutes les orbites soient fermées. Nous désignerons toujours par $T(x)$ la période de l'orbite du point x, définie en tout point x tel que $\xi(x) \neq 0$. Et, pour abréger, nous dirons qu'une propriété a lieu sur presque toute orbite si l'ensemble des orbites sur lesquelles elle n'est pas vérifiée constitue un ensemble de mesure nulle sur V^n. Ceci étant, on voit que $\mathcal{H}'$ est constitué par les fonctions f de $\mathcal{H}$ qui sont presque partout égales à une fonction constante sur chaque orbite, tandis que $\mathcal{H}''$ est constitué par les fonctions g de $\mathcal{H}$ qui sont sommables et satisfont à

$$\int_0^{T(x)} g[\varphi(t, x)]\,dt = 0$$

sur presque toute orbite C_x.

Si $g \in \mathcal{H}''$, nous lui ferons correspondre la fonction f définie sur ces orbites C_x, par les conditions

$$f[\varphi(v, x)] - f[\varphi(u, x)] = \int_u^v g[\varphi(t, x)]\,dt;$$

et

$$(1) \qquad \int_0^{T(x)} f[\varphi(t, x)]\,dt = 0.$$

dont on voit facilement qu'elles déterminent une fonction et une seule.

Aux points tels que $\xi(x) = 0$, nous poserons $f(x) = 0$.

La fonction f est ainsi déterminée presque partout et satisfait à $Xf = g$. Nous allons montrer que, si les périodes $T(x)$ sont bornées par un même nombre k, alors $f \in \mathcal{H}$ et satisfait à

$$(2) \qquad \|f\| \leq k\|g\|.$$

Il résultera alors de (1) que f appartient à $\mathcal{H}''$, et nous aurons établi que l'opérateur $X^{-1} : g \to f$ est borné dans $\mathcal{H}''$.

Pour établir (2) nous remarquerons qu'on a, par application de l'inégalité de Schwartz,

$$|f[\varphi(v, x)] - f[\varphi(u, x)]|^2 \leq \mathrm{T}(x) \int_0^{T(x)} |g[\varphi(t, x)]|^2\,dt,$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de l'hypothèse faite sur $T(x)$,

$$\int_0^{T(x)} |f[\varphi(t,x)]|^2\,dt \leqq k^2 \int_0^{T(x)} |g[\varphi(t,x)]|^2\,dt,$$

cette inégalité étant valable sur presque toute orbite C_x. Or, on a

$$\|g\|^2 = \int_{V^n} |g(x)|^2\,d\tau(x) = \int_{V^n}\int_0^{T(x)} |g[\varphi(t,x)]|^2 \frac{dt\,d\tau(x)}{T(x)}$$

à cause de l'invariance de l'élément de volume $d\tau$. On en déduit immédiatement le résultat annoncé. Nous énoncerons :

THÉORÈME 17*a*. — *Soit V^n une variété de classe C_1^1 sur laquelle on a défini un élément de volume $d\tau$. Pour que l'opérateur inverse X_ξ^{-1} associé à un champ de vecteurs ξ à divergence nulle, soit borné dans l'espace $\mathcal{H}''(\xi)$ correspondant, il faut et il suffit que le champ ξ définisse un groupe à un paramètre de transformations de V^n, dont toutes les orbites soient fermées, les périodes correspondantes étant bornées.*

REMARQUE. — Il est à noter que les conditions du théorème précédent peuvent être vérifiées par un groupe non compact. Par exemple, le groupe à un paramètre, défini sur la sphère S^2 en coordonnées sphériques θ, φ, par

$$\theta_t = \theta, \qquad \varphi_t = \varphi + (1+\cos^2\theta)t,$$

conserve l'élément d'aire $d\tau = \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$; les orbites sont fermées, et les périodes correspondantes bornées par $k=1$, mais ce groupe n'est pas compact.

18. Problèmes de décomposition orthogonale. — Soit toujours V^n une variété de classe C_1^1 sur laquelle on a défini un élément de volume $d\tau$; à tout champ de vecteurs ξ, de classe C_1^0 sur V^n, nous avons fait correspondre (§ 13) une décomposition orthogonale $\mathcal{H} = \mathcal{H}'(\xi) \oplus \mathcal{H}''(\xi)$ de l'espace des fonctions de carré sommable sur V^n [cette décomposition résultant immédiatement de la définition de $\mathcal{H}'(\xi)$ et de $\mathcal{H}''(\xi)$, et du fait que $\mathcal{H}'(\xi)$ est fermé]. Nous allons étudier les problèmes soulevés par cette décomposition.

Nous remarquerons d'abord que l'espace $\mathcal{H}'(\xi)$ peut se réduire au seul élément zéro (par exemple si ξ définit un groupe de translations dans R^n), tandis que $\mathcal{H}''(\xi)$ contient tous les éléments de la forme $\tilde{X}_\xi^c g$, où $g \in \mathcal{D}^c(\xi)$, lesquels constituent un sous-ensemble dense de $\mathcal{H}''(\xi)$. Nous avons donc, dans tous les cas, la

Formule de décomposition faible. — Tout élément f de $\mathcal{H}$ peut se mettre, d'une manière et d'une seule, sous la forme $f = f' + f''$, où $f' \in \mathcal{H}'(\xi)$ et où f'' est limite forte, pour $r \to \infty$, d'une suite $\tilde{X}_\xi^c g_r$, où $g_r \in \mathcal{D}^c(\xi)$.

Cette formule étant établie, il est naturel de se demander s'il existe un élément g de $\mathcal{D}^{w}(\xi)$, tel qu'on ait $f'' = X_\xi^{w'} g$; or des exemples simples montrent qu'un tel élément g n'existe pas toujours : c'est le cas de la fonction f définie, sur la droite numérique R, par $f(x) = 0$ pour $|x| > 1$ et $f(x) = 1$ pour $|x| < 1$, pour le groupe des translations de R; car ici, $\mathcal{H}'(\xi)$ est réduit à l'élément zéro, donc $f \in \mathcal{H}''(\xi)$, et il n'existe d'autre part aucune fonction $g \in \mathcal{H}$ telle que $f = \frac{dg}{dx}$.

Pour avoir une « formule de décomposition forte » $f = h + \tilde{X}^{w} g$, où $h \in \mathcal{H}'(\xi)$ et $g \in \mathcal{D}^{w}(\xi)$, valable pour toute $f \in \mathcal{H}$, il faut et il suffit que la transformation $(\tilde{X}^{w})^{-1}$ soit partout définie dans $\mathcal{H}''(\xi)$ [l'unicité de $g = (\tilde{X}^{w})^{-1}$ étant assurée, si l'on veut, par la condition supplémentaire $g \in \tilde{\mathcal{H}}''(\xi)$, où $\tilde{\mathcal{H}}''(\xi)$ est l'espace complètement orthogonal à

$$\tilde{\mathcal{H}}'(\xi) = \{f; \tilde{X}_\xi^{w'} f = 0\}].$$

Cette condition s'interprète simplement dans le cas où ξ est à divergence nulle, car alors $\tilde{\mathcal{H}}'' = \mathcal{H}''$, et $(\tilde{X}^{w})^{-1} = (X^{w})^{-1}$ peut être considéré comme une transformation linéaire de $\mathcal{H}''$ dans lui-même, partout définie et fermée : un tel opérateur est nécessairement borné; et réciproquement, si X^{-1} est borné dans $\mathcal{H}''$, sa fermeture $(X^{c})^{-1}$ est partout définie. Or nous avons trouvé précédemment la condition pour que X^{-1} soit borné dans $\mathcal{H}''$. Nous pouvons donc énoncer :

Théorème 18 *a*. — *Soit X_ξ une transformation infinitésimale conservant un élément de volume $d\tau$ défini sur une variété V^n de classe C_1^1. Pour que tout élément f de $\mathcal{H}$ admette une décomposition de la forme $f = h + X^{w} g$,* où $h \in \mathcal{H}'(\xi)$ et $g \in \mathcal{D}^{w}(\xi)$, *il faut et il suffit que X_ξ corresponde à un groupe global G, à un paramètre, de transformations de V^n, que les orbites de G dans V^n soient fermées, et que les périodes correspondantes soient bornées par un même nombre.*

Remarque. — Dans le cas où X est une isométrie infinitésimale sur une variété riemannienne, l'énoncé se simplifie et la condition obtenue peut être remplacée par « il faut et il suffit que X définisse un groupe compact à un paramètre de transformations de V^n ». Mais, dans ce cas, on obtient une formule de décomposition spectrale complète, soit

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} E_n f,$$

où $\{E_n\}$ désigne l'ensemble complet de projections défini au paragraphe 13.

Nous remarquerons que $f_n = E_n f$ satisfait à $X f_n = \frac{2\pi in}{T} f_n$, où T désigne la période du groupe.

On a d'ailleurs une formule analogue pour chacun des espaces $\mathcal{H}_p^q$ définis au paragraphe 3, et l'on en déduit, si l'on veut, une « formule de décomposition forte ».

Une étude directe des espaces $\mathcal{H}_p^q$, analogue à celle qui a été faite pour $\mathcal{H}$, nous permet d'énoncer :

THÉORÈME 18 *b*. — *Soit V^n une variété riemannienne complète de classe C_1^1 sur laquelle on a défini un champ de vecteurs de Killing, de classe C_1^0. Nous considérons l'opérateur X_ξ associé comme opérant dans l'un des espaces $\mathcal{H}_p^q$, et désignons par $\mathcal{H}_p'^q$ l'espace des tenseurs « faiblement invariants » de type p, q, par $\mathcal{H}_p''^q$ l'espace complètement orthogonal à $\mathcal{H}_p'^q$. Alors les trois hypothèses suivantes sont équivalentes :*

a. ξ définit un groupe compact à un paramètre d'isométrie de V^n;
b. L'opérateur X_ξ^{-1} est borné dans $\mathcal{H}_p''^q$;
c. Tout tenseur T de $\mathcal{H}_p^q$ admet une décomposition de la forme

$$T = U + X_\xi^w S, \qquad \text{où} \quad U \in \mathcal{H}_p'^q.$$

Le théorème 18 *a* reste vrai si l'on remplace $\mathcal{H}_p^q$ par l'espace $\mathcal{H}_p$ des formes différentielles de degré p et de carré sommable sur V^n.

19. Interprétation de certains résultats. — Il est à remarquer que l'étude précédente contient, en fait la solution globale de certaines équations (ou de certains systèmes d'équations) aux dérivées partielles du premier ordre.

Tout d'abord la « formule de décomposition forte » du paragraphe précédent nous permet d'étudier l'équation

$$(1) \qquad X f = g,$$

où $g \in \mathcal{H}$ est donné, et où X est un opérateur différentiel « antisymétrique » du premier ordre. Nous voyons ainsi que (1) ne peut admettre une solution $f \in \mathcal{H}$ que si g appartient à $\mathcal{H}''(\xi)$ [c'est-à-dire si g est orthogonale à toutes les solutions de l'équation homogène correspondante]; et pour que (1) admette une solution $f \in \mathcal{H}$ quelle que soit $g \in \mathcal{H}''$ il faut et il suffit que X définisse un groupe global, dont toutes les orbites soient fermées, les périodes correspondantes étant bornées.

Nous obtiendrons de même la solution des systèmes d'équations aux dérivées partielles, très particuliers, représentés symboliquement par $X\,T = S$, où X est une isométrie infinitésimale, T un tenseur inconnu et S un tenseur donné.

D'autre part les paragraphes 7 et 8 contiennent une étude, sur la variété-produit $V^n \times R$, de l'équation $Xf = \frac{\partial f}{\partial t}$, où X désigne un opérateur différentiel du premier ordre, défini sur V^n, et assujetti à la seule condition $|\delta\xi|$ borné; cette équation présente une certaine analogie avec celle de la chaleur; et il résulte de notre étude qu'elle ne peut admettre de solution $f(t, x)$, définie pour toute valeur de t, et prenant des valeurs arbitraires données pour $t = 0$, que si X définit un groupe global de transformations de V^n.

On obtiendrait de même la solution du système représenté symboliquement par $XS = \frac{\partial S}{\partial t}$, où S désigne un tenseur, sur une variété riemannienne.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CONNER (P. E.). — *The Green's and Neumann's problems for differential forms on Riemannian manifolds*, (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 40, 1954, p. 1151-1155).

[2] FRIEDRICHS (K. O.). — *The identity of weak and strong extensions of differential operators*, (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 55, 1944, , p. 132-151).

[3] KOBAYASHI (Shôshichi). — *Espaces à connexion de Cartan complets*, (*Proc. Japan Acad.*, t. 30, 1954, p. 709-710).

[4] LELONG-FERRAND (Jacqueline). — *Application of Hilbert space methods to Lie groups acting on a differentiable manifold*, (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 43, 1957, p. 249-252).

[5] LELONG-FERRAND (Jacqueline). — *Sur le champs de vecteurs définissant un groupe d'homéomorphismes d'une variété différentiable* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 1491-1493).

[6] LELONG-FERRAND (Jacqueline). — *Sur les transformations infinitésimales d'une variété différentiable, considérées comme des opérateurs hilbertiens* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 1585-1588).

[7] LELONG-FERRAND (Jacqueline). — *Sur les groupes à un paramètre de transformations des variétés différentiables*, [*J. Math. pures et appl.* (sous presse)].

(Manuscrit reçu en décembre 1957.)

Mme J. LELONG-FERRAND,
Professeur à la Faculté des Sciences,
95, boulevard Jourdan,
Paris (14e).