BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI CARTAN

Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 77-99

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__77_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
85, 1957, p. 77 à 99.

VARIÉTÉS ANALYTIQUES RÉELLES ET VARIÉTÉS ANALYTIQUES COMPLEXES;

PAR

HENRI CARTAN.

J'avais annoncé sans démonstration, en 1953 [5], quelques résultats concernant les sous-variétés analytiques réelles de l'espace numérique R^n; il s'agissait de théorèmes sur la cohomologie à coefficients dans un faisceau analytique cohérent, analogues à ceux qui concernent les variétés de Stein dans le cas analytique-complexe. L'un des buts de cet article est de donner des démonstrations de ces résultats (*voir* notamment les théorèmes 2 et 3 ci-dessous). Pour cela on a besoin de savoir que l'espace réel R^n, considéré comme plongé dans l'espace complexe C^n, possède un système fondamental de voisinages ouverts dont chacun est un domaine d'holomorphie (prop. 1 ci-dessous); on utilise aussi une extension des théorèmes fondamentaux relatifs à la cohomologie des variétés de Stein (*voir* le théorème 1 ci-dessous).

Le théorème 3 met en évidence l'intérêt de la notion de sous-ensemble analytique « cohérent ». Ceci amène à étudier un peu systématiquement les sous-ensembles analytiques (au sens analytique-réel); cette étude n'a guère été entreprise jusqu'ici (*voir* cependant [2], p. 120-122); elle fait l'objet des paragraphes 8 et 9. Dans les paragraphes 10 et 11, on cherche à caractériser, parmi les sous-ensembles analytiques de R^n, ceux qui sont définissables globalement par un nombre fini d'équations analytiques.

Il serait intéressant d'avoir des critères permettant de reconnaître si une variété analytique réelle V (réunion dénombrable de compacts) peut être réalisée comme sous-variété analytique d'un espace numérique R^n. D'après B. MALGRANGE [10], il suffit pour cela que V admette un ds^2 analytique.

Le présent travail devait être écrit pour le Volume jubilaire du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* en l'honneur de M. Arnaud DENJOY. Il n'a pu malheureusement être prêt à temps. Que Monsieur DENJOY veuille bien, malgré ce retard, l'accepter comme un hommage de ma respectueuse admiration.

1. Voisinages de R^n dans C^n.

PROPOSITION 1. — *L'espace numérique réel R^n, plongé dans l'espace numérique complexe C^n, possède un système fondamental de voisinages ouverts dont chacun est un domaine d'holomorphie.*

DÉMONSTRATION. — Soient $z_k = x_k + iy_k (1 \leqq k \leqq n)$ les n variables complexes de C^n, le sous-espace R^n étant défini par les équations $y_k = 0$. Soit $SO(n)$ le groupe orthogonal réel à n variables, et notons G le groupe-produit $SO(n) \times SO(n)$; faisons opérer G sur C^n en associant à chaque couple (s, t) d'éléments de $SO(n)$ la transformation $(x, y) \to (sx, ty)$ de C^n [on note x, resp. y, un point (x_k), resp. (y_k), de R^n]. Le sous-espace fermé R^n de C^n est stable par les opérations de G, et comme G est compact, R^n posséde un système fondamental de voisinages ouverts *stables par* G. Il s'ensuit que R^n possède un système fondamental de voisinages (ouverts) dont chacun a la forme

$$\sum_k (y_k)^2 < f\left[\sum_k (x_k)^2\right],$$

où $f(t)$ est une fonction de $t \geqq 0$, à valeurs réelles > 0, et semi-continue inférieurement. De plus on peut supposer que f est *décroissante* (au sens large). Pour démontrer notre proposition, il suffira de montrer qu'étant donné une telle fonction $f(t)$ il existe une fonction $g(t)$, à valeurs > 0, *décroissante et indéfiniment dérivable*, qui satisfasse en outre aux deux conditions suivantes :

(1) $g(t) \leqq f(t)$ pour tout $t \geqq 0$;

(2) l'ouvert $\sum_k (y_k)^2 < g\left[\sum_k (x_k)^2\right]$ est un *domaine d'holomorphie.*

On va montrer que la condition différentielle

(3) $2tg''(t) < 1$ (où g'' désigne la dérivée seconde de la fonction g)

entraîne la condition (2). D'après OKA [11], si un ouvert $U \subset C^n$ est tel que chaque point de la frontière de U possède un voisinage ouvert V tel que $U \cap V$ soit un domaine d'holomorphie, alors U est un domaine d'holomorphie. D'autre part, appliquons la classique condition différentielle de LEVI-KRZOSKA (*cf.* [1], p. 54) : pour qu'un point $(x_k + iy_k)$ de la frontière de l'ensemble ouvert U défini par l'inégalité

$$\sum_k (y_k)^2 < g\left[\sum_k (x_k)^2\right]$$

possède un voisinage ouvert V tel que $U \cap V$ soit un domaine d'holomorphie,

il suffit que la forme quadratique hermitienne (à n variables complexes a_k)

$$(1-g'(t))\left(\sum_k a_k\bar{a}_k\right)-2g''(t)\left|\sum_k x_k a_k\right|^2$$

induise une forme définie positive sur l'hyperplan complexe

$$\sum_k (g'(t)x_k+iy_k)a_k=0,$$

t désignant le nombre $\sum_k (x_k)^2$. Compte tenu de l'iuvariance de U par le groupe G, il suffit d'exprimer la condition précédente pour les points (x_k, y_k) tels que $x_k=0$ pour $k\geqq 2$; alors $t=(x_1)^2$, et comme la dérivée première $g'(t)$ est $\leqq 0$ par hypothèse, on voit que l'inégalité (3) entraîne bien la condition de Levi-Krzoska.

En conséquence, pour établir la proposition 1, il suffit de prouver le

Lemme 1. — *Étant donnée une fonction $f(t)$, définie pour $t\geqq 0$, à valeurs >0 et décroissante, il existe une fonction $g(t)>0$, décroissante, indéfiniment dérivable, et qui satisfasse aux conditions* (1) *et* (3).

Prouvons ce lemme. Supposons qu'on ait trouvé une fonction $h(t)$ définie pour $t\geqq t_0$ ($t_0>0$), à valeurs >0, décroissante et indéfiniment dérivable, telle que $h(t)\leqq f(t)$ pour $t\geqq t_0$, et $2t\,h''(t)<1$ pour $t\geqq t_0$; alors la fonction $g(t)=h(t_0+t)$ satisfera aux conditions du lemme. Tout revient donc à trouver une telle fonction $h(t)$, pour un t_0 convenable.

Au lieu de la fonction h, cherchons la fonction $H(u)=h(u^{-1})$, qui doit être définie pour $u>0$ assez petit, croissante, indéfiniment dérivable et à valeurs >0, et doit en outre satisfaire aux deux inégalités

$$(4)\qquad H(u)\leqq F(u),\qquad 4u^2H'(u)+2u^3H''(u)<1$$

pour $u>0$ assez petit [on a posé $F(u)=f(u^{-1})$]. On va même chercher une fonction $H(u)$ définie pour toutes les valeurs de la variable réelle u, qui soit croissante, indéfiniment dérivable, à valeurs >0 pour $u>0$, et qui satisfasse à (4) pour $u>0$ assez petit. Or la deuxième inégalité (4) est vérifiée d'elle-même pour $u>0$ assez petit du moment que H est indéfiniment dérivable pour $u=0$. Pour construire H, introduisons une fonction $\lambda(u)$ indéfiniment dérivable de la variable réelle u, à valeurs $\geqq 0$, nulle hors de l'intervalle $0\leqq u\leqq 1$, de manière que le point $u=0$ appartienne au *support* de λ, et que $\int\lambda(u)\,du=1$; il est classique qu'une telle fonction λ existe. Prenons alors pour H le produit de convolution $\lambda\star F$, c'est-à-dire

$$H(u)=\int\lambda(x)\,F(u-x)\,dx.$$

Puisque λ est indéfiniment dérivable, H l'est aussi; puisque F est croissante, H est croissante et $H(u) \leqq F(u)$ pour tout u; puisque le point $u = 0$ appartient au support de λ, on a $H(u) > 0$ pour $u > 0$. Donc la fonction $H(u)$ satisfait à toutes les conditions cherchées, et le lemme 1 est démontré. En même temps est achevée la démonstration de la proposition 1.

2. Extension des théorèmes fondamentaux sur la cohomologie des variétés de Stein. — Soit X une variété analytique-complexe. Soit $\mathcal{O}(X)$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes aux différents points de X; c'est un *faisceau d'anneaux :* on notera $\mathcal{O}_x(X)$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes au point $x \in X$. Ce faisceau d'anneaux est *cohérent* (au sens de Serre [13], déf. 3, p. 210) : cela résulte d'un théorème de Oka (*cf.* [12], [3] et l'exposé XV de [4]). On appelle *faisceau analytique* (sur X) un faisceau de $\mathcal{O}(X)$-modules (*cf.*. [13], p. 203). Nous renvoyons à [13] pour la définition d'un faisceau *cohérent* de modules; il nous suffit de savoir que, en vertu de la proposition 7 de [13] (p. 210), un faisceau analytique F est cohérent si et seulement si chaque point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que le faisceau induit $F(U)$ soit isomorphe (comme faisceau analytique) au conoyau d'un homomorphisme analytique de faisceaux $(\mathcal{O}(U))^p \to (\mathcal{O}(U))^q$ (p et q entiers convenables).

Rappelons le résultat fondamental (*cf.* [5], § 7, th. A et B) :

Théorème fondamental. — *Soit X une variété de Stein* (1), *et soit F un faisceau analytique cohérent sur X. Alors :*

(A) *Pour tout point $x \in X$, le module F_x* [module sur l'anneau $\mathcal{O}_x(X)$] *est engendré par l'image de l'application naturelle*

$$H^0(X, F) \to F_x;$$

[$H^0(X, F)$ désigne, comme d'habitude, le module des sections de F au-dessus de X];

(B) *Pour tout entier $q \geqq 1$, le groupe de cohomologie $H^q(X, F)$ est réduit à* 0.

En fait, ce théorème vaut, plus généralement, pour tout faisceau analytique cohérent sur un *espace analytique* (2) holomorphiquement complet (3).

Nous nous proposons ici d'étendre le théorème fondamental au cas où X est remplacé par un sous-espace fermé convenable d'une variété analytique complexe (ou même, plus généralement, d'un espace analytique). Soit X une variété analytique complexe (ou, plus généralement, un espace analytique),

(1) Pour la définition d'une variété de Stein, *voir* par exemple [5], p. 49.

(2) Au sujet de la notion générale d' « espace analytique », due à Behnke et Stein ainsi qu'à H. Cartan, *voir* par exemple l'exposé récent [14], § 1.

(3) Au sujet de la notion d'espace « holomorphiquement complet », *voir* [8].

et soit A un sous-espace *fermé* de X. Soit $\mathcal{O}(A)$ le faisceau induit sur A par le faisceau $\mathcal{O}(X)$; c'est un faisceau d'anneaux; l'anneau $\mathcal{O}_x(A)$, pour $x \in A$, n'est autre que l'anneau $\mathcal{O}_x(X)$ des germes holomorphes de l'espace ambiant X. Il est immédiat que $\mathcal{O}(A)$ est un faisceau cohérent d'anneaux; on a, sur A, la notion de faisceau analytique, et la même caractérisation des faisceaux analytiques cohérents que ci-dessus. On se propose de démontrer ([4]) :

THÉORÈME 1. — *Soit X une variété analytique-complexe, réunion dénombrable de compacts. Si un sous-espace fermé $A \subset X$ possède un système fondamental de voisinages ouverts dont chacun est une variété de Stein, les conclusions du « théorème fondamental » subsistent, i. e. :*

(A) *Pour tout point $x \in A$ et tout faisceau analytique cohérent F sur A, F_x est engendré* [comme module sur $\mathcal{O}_x(A)$] *par l'image de l'application naturelle $H^0(A, F) \to F_x$;*

(B) *Pour tout entier $q \geqq 1$, et tout faisceau analytique cohérent F sur A, on a $H^q(A, F) = 0$.*

REMARQUE. — La démonstration qui suivra (§ 4) montrera que dans l'énoncé précédent, on pourrait remplacer « variété analytique-complexe » par « espace analytique », et « une variété de Stein » par « holomorphiquement complet »; les assertions (A) et (B) restent vraies dans ce cas plus général.

3. Prolongement d'un faisceau cohérent donné sur un fermé. — Avant de démontrer le théorème 1, nous avons besoin d'un théorème de prolongement des faisceaux cohérents :

PROPOSITION 2. — *Soit A un sous-espace fermé d'un espace analytique X. Supposons que X soit réunion dénombrable de compacts. Si un faisceau analytique G, sur A, est $\mathcal{O}(A)$-cohérent, alors G est induit par un faisceau $\mathcal{O}(U)$-cohérent F sur un voisinage ouvert convenable U de A.*

Il s'agit, d'une manière plus précise, de trouver un voisinage U de A, un faisceau cohérent F sur U, et un isomorphisme (analytique) de G sur le faisceau $F(A)$ induit par F sur le sous-espace A.

Avant de prouver la proposition 2, nous établirons plusieurs lemmes :

LEMME 2. — *Soient F et F' deux faisceaux analytiques cohérents sur un sous-espace fermé A d'un espace analytique X, et soient f et g deux homomorphismes analytiques $F \to F'$; pour $x \in A$, soient f_x et g_x les homomorphismes $F_x \to F'_x$ induits par f et g. Alors l'ensemble des $x \in A$ tels que $f_x = g_x$ est* ouvert *dans A.*

([4]) La démonstration suivra en gros celle donnée dans [4], exposé XIX, pour le cas où le sous-espace fermé A est compact.

Démonstration. — Soit x un point de A tel que $f_x = g_x$; on veut montrer que $f_y = g_y$ pour tout point $y \in$ A assez voisin de x. Or il existe un nombre fini de sections u_i de F au-dessus d'un voisinage U de x dans A, telles que, pour tout $y \in U$, les u_i engendrent F_y comme module sur l'anneau $\mathcal{O}_y(A)$. D'autre part, pour chaque i, il existe un voisinage ouvert U_i de x, contenu dans U, et des sections v_i (resp. w_i) de F' au-dessus de U_i, telles que, pour tout $y \in U_i$, v_i (resp. w_i) induise un élément de F'_y égal à $f_y(u_i)$ [resp. égal $g_y(u_i)$]. Puisque $f_x(u_i) = g_x(u_i)$, les sections v_i et w_i coïncident dans un voisinage de x; on a donc $f_y(u_i) = g_y(u_i)$, quel que soit i, pour tout $y \in A$ assez voisin de x; or ceci entraîne l'égalité des homomorphismes f_y et g_y, ce qui démontre le lemme.

Lemme 3. — *Soient F et F' deux faisceaux analytiques cohérents sur un espace analytique X, réunion dénombrable de compacts. Soit A un sous-espace* fermé *de X, et soit $f: F(A) \to F'(A)$ un homomorphisme analytique des faisceaux induits sur A par F et F'. Alors il existe un voisinage V de A et un homomorphisme analytique $g: F(V) \to F'(V)$, qui prolonge f.*

Démonstration. — Considérons d'abord le cas où A est réduit à un point $x \in X$; alors f est simplement un homomorphisme $F_x \to F'_x$ pour les structures de modules sur $\mathcal{O}_x(X)$. Soient u_i des sections de F au-dessus d'un voisinage de x, en nombre fini, qui engendrent le $\mathcal{O}_y(X)$-module F_y en chaque point y assez voisin de x; et soient v_j des sections de F' au-dessus d'un voisinage de x, en nombre fini, qui engendrent F'_y en chaque point y assez voisin de x. Le faisceau F étant cohérent, le « faisceau des relations » entre les sections u_i est engendré par un nombre fini de systèmes (a_k^i) $(k = 1, 2, \ldots)$ holomorphes au voisinage de x. On a donc, pour chaque k, $\sum_i a_k^i u_i = 0$ au voisinage de x; et, pour tout système de fonctions b^i, holomorphes en un point y assez voisin de x, et satisfaisant à $\sum_i b^i u_i = 0$ au voisinage de y, il existe des λ^k holomorphes en y, telles que $b^i = \sum_k \lambda^k a_k^i$ pour tout i. Cela dit, chaque $f(u_i) \in F'_x$ peut s'écrire comme combinaison linéaire $\sum_j \lambda_i^j v_j$ à coefficients λ_i^j holomophes au voisinage de x; et l'on a

$$\sum_{i,j} a_k^i \lambda_i^j v_j = 0$$

au voisinage de x. Soit alors y un point assez voisin de x; montrons qu'il existe un $\mathcal{O}_y$-homomorphisme $f_y : F_y \to F'_y$ tel que $f_y(u_i) = \sum \lambda_i^j v_j$. Il suffit

de vérifier que si des b^i holomorphes en y satisfont à $\sum_i b^i u_i = 0$, on a $\sum_{i,j} b^i \lambda_i^j v_j = 0$; or cela résulte du fait que c'est vrai si $b^i = a_k^i$, quel que soit k. Les homomorphismes f_y étant maintenant définis, il est clair que la collection de ces f_y définit un homomorphisme analytique $F(U) \to F'(U)$ pour un voisinage ouvert U assez petit de x. Et ceci démontre le lemme 3 dans le cas particulier où A est réduit à un point.

Passons au cas général. D'après ce qu'on vient de démontrer, pour chaque point $x \in A$ il existe un voisinage ouvert U de x et un homomorphisme analytique $h: F(U) \to F'(U)$, de manière que l'homomorphisme $h_x: F_x \to F'_x$ induit par h soit égal à l'homomorphisme f_x induit par $f: F(A) \to F'(A)$. En vertu du lemme 2, on peut choisir U assez petit pour que $h_y = f_y$ en tout point $y \in A \cap U$. Si à chaque $x \in A$ on associe un tel ouvert U, ces ouverts et $X - A$ constituent un recouvrement ouvert $\mathcal{R}$ de X; puisque X est paracompact, il existe deux recouvrements ouverts (U_i) et (V_i), plus fins que $\mathcal{R}$, dont chacun est *localement fini*, et tels que $\overline{V}_i \subset U_i$. Soit B la réunion de ceux des $\overline{V}_i$ qui rencontrent A; B est un *voisinage fermé* de A dans X. D'autre part, pour chaque i tel que U_i rencontre A, on a un homomorphisme analytique $g^i: F(U_i) \to F'(U_i)$ qui induit un homomorphisme

$$F(A \cap U_i) \to F'(A \cap U_i)$$

égal à celui induit par $f: F(A) \to F'(A)$; il s'ensuit que, pour $x \in A \cap U_i \cap U_j$, les homomorphismes $(g^i)_x$ et $(g^j)_x$ induits par g^i et g^j sont égaux. Soit alors $x \in B$; l'ensemble $I(x)$ des i tels que $x \in \overline{V}_i$ est fini, et l'on a $I(y) \subset I(x)$ pour $y \in B$ assez voisin de x. Le lemme 2 montre que l'ensemble des $x \in B$ tels que l'on ait $(g^i)_x = (g^j)_x$ pour tout couple (i, j) d'indices i et j appartenant à $I(x)$, est ouvert dans B; comme il contient A, c'est un voisinage V de A. Si $x \in V$, soit g_x la valeur commune des $(g^i)_x$ pour les $i \in I(x)$; il est immédiat que la collection des g_x, pour $x \in V$, définit un homomorphisme analytique $g: F(V) \to F'(V)$, et que g prolonge f. La démonstration du lemme 3 est achevée.

Démonstration de la proposition 2. — Soit $x \in A$; il résulte de la définition d'un faisceau cohérent qu'il existe un ouvert U (dans X) contenant x, un faisceau cohérent F sur U, et un isomorphisme analytique de $G(A \cap U)$ sur le faisceau $F(A \cap U)$. Si à chaque $x \in A$ on associe un tel U, ces ouverts U et l'ouvert $X - A$ constituent un recouvrement ouvert $\mathcal{R}$ de x. Puisque X est paracompact, il existe deux recouvrements ouverts (U_i) et (V_i), plus fins que $\mathcal{R}$, dont chacun est localement fini, et tels que $\overline{V}_i \subset U_i$. Pour chaque i tel que U_i rencontre A, on a un faisceau analytique cohérent F^i sur U_i et un isomorphisme analytique f^i du faisceau $G(A \cap U_i)$ sur $F^i(A \cap U_i)$. Pour

chaque couple (i, j) tel que $A \cap U_i \cap U_j$ ne soit pas vide, $f^i \circ (f^j)^{-1}$ est un isomorphisme f^{ij} de $F^j(A \cap U_i \cap U_j)$ sur $F^i(A \cap U_i \cap U_j)$; et dans $A \cap U_i \cap U_j \cap U_k$ supposé non vide, on a $f^{ij} \circ f^{jk} = f^{ik}$.

D'après le lemme 3 appliqué à l'espace $U_i \cap U_j$ et au sous-espace fermé $A \cap U_i \cap U_j$, il existe un ouvert U_{ij} contenant $A \cap U_i \cap U_j$ et contenu dans $U_i \cap U_j$, et un homomorphisme analytique $g^{ij} : F^j(U_{ij}) \to F^i(U_{ij})$ qui prolonge f^{ij}; si $i = j$, on convient que $U_{ii} = U_i$ et que g^{ii} est l'identité. Il existe un ouvert W contenant A tel que, pour tout couple (i, j), on ait

$$W \cap \overline{V}_i \cap \overline{V}_j \subset U_{ij};$$

en effet, tout point $x \in A$ possède un voisinage ouvert $W(x)$ qui ne rencontre qu'un nombre fini des $\overline{V}_i$; pour chaque couple (i, j) tel que $\overline{V}^i$ et $\overline{V}_j$ rencontrent $W(x)$, U_{ij} est un ouvert contenant x; l'intersection de ces U_{ij} (en nombre fini) et de $W(x)$ est un ouvert contenant x; la réunion des ouverts ainsi attachés aux points $x \in A$ est l'ouvert W cherché.

Soit maintenant V l'ensemble des points $y \in W$ tels que

$$(g^{ij})_y \circ (g^{ik})_y = (g^{ik})_y$$

quels que soient i, j, k tels que $y \in \overline{V}_i \cap \overline{V}_j \cap \overline{V}_k$. L'ensemble V contient A et est *ouvert*. Soit enfin U la réunion des $V \cap V_i$: c'est un ouvert contenant A. On va définir un faisceau F sur U, par « recollement » : sur $U \cap V_i$, on prend le faisceau $F^i(U \cap V_i)$; dans $U \cap V_i \cap V_j$, qui est contenu dans U_{ij} (puisque $U \subset W$), on a un homomorphisme analytique $F^j(U \cap V_i \cap V_j) \to F^i(U \cap V_i \cap V_j)$, induit par g^{ij}; notons-le encore g^{ij}. Dans $U \cap V_i \cap V_j \cap V_k$, on a $g^{ij} \circ g^{jk} = g^{ik}$, puisque $U \subset V$; il en résulte notamment (pour $k = i$) que g^{ij} est un isomorphisme. Soit F le faisceau, sur U, obtenu en recollant les $F^i(U \cap V_i)$ par les isomorphismes transitifs g^{ij}; il est cohérent, puisque les $F^i(U \cap V_i)$ le sont. Le faisceau $F(A)$ induit par F sur A est obtenu par recollement des $F^i(A \cap V_i)$ au moyen des isomorphismes f^{ij}, qui sont précisément induits par les g^{ij}. Or $f^{ij} = f^i \circ (f^j)^{-1}$, f^i étant un isomorphisme

$$G(A \cap V_i) \to F^i(A \cap V_i).$$

Il en résulte que la collection de ces f_i définit un isomorphisme f du faisceau G sur le faisceau $F(A)$ induit par F sur A. Et ceci achève la démonstration de la proposition 2.

Remarque. — Le faisceau G étant donné sur A comme dans la proposition 2, on a trouvé un triple (U, F, f) formé d'un ouvert U contenant A, d'un faisceau cohérent F sur U, et d'un isomorphisme analytique f de G sur le faisceau induit $F(A)$. Une telle solution (U, F, f) est *unique à un isomorphisme près*, dans le sens suivant : si (U', F', f') est une autre solution, il existe un voisinage ouvert U'' de A, contenu dans $U \cap U'$, et un isomor-

phisme h du faisceau induit $F(U'')$ sur le faisceau induit $F'(U'')$, tel que

$$f' = h_A \circ f,$$

en notant h_A l'isomorphisme $F(A) \to F(A')$ induit par h.

Cette assertion est une conséquence facile des lemmes 2 et 3.

4. Démonstration du théorème 1. — Nous avons encore besoin d'une proposition préliminaire :

PROPOSITION 3. — *Soit X un espace paracompact, F un faisceau de groupes abéliens sur X, et A une partie fermée de X. Pour chaque entier $q \geqq 0$, le groupe abélien $H^q(A, F)$ est limite directe des groupes abéliens $H^q(U, F)$ relatifs aux ouverts U contenant A.*

Pour $q = 0$, c'est bien connu : toute section de F au-dessus de A fermé se prolonge en une section de F au-dessus d'un voisinage ouvert U de A : et si deux sections de F au-dessus d'un ouvert U contenant A coïncident sur A, elles coïncident dans tout un voisinage de A.

Pour passer de là au cas où q est quelconque, on utilise une « résolution fine » de F, c'est-à-dire une suite exacte de faisceaux

$$0 \to F \to F^0 \to F^1 \to \ldots \to F^q \ldots,$$

où les $F^i (i \geqq 0)$ sont des faisceaux *fins*. On sait ([5]) qu'on a un isomorphisme canonique entre $H^q(X, F)$ et le $q^{\text{ème}}$ groupe d'homologie du complexe formé de la suite de groupes abéliens

$$0 \to \Gamma(X, F^0) \xrightarrow{d^0} \Gamma(X, F^1) \xrightarrow{d^1} \ldots \xrightarrow{d^{q-1}} \Gamma(X, F^q) \xrightarrow{d^q} \ldots,$$

$\Gamma(X, F^q)$ désigne le groupe des sections $H^0(X, F^q)$. Autrement dit, on a un isomorphisme canonique entre $H^q(X, F)$ et le quotient du noyau de

$$d^q : \Gamma(X, F^q) \to \Gamma(X, F^{q+1})$$

par l'image de

$$d^{q-1} : \Gamma(X, F^{q-1}) \to \Gamma(X, F^q).$$

Ce résultat vaut aussi pour A et pour les ouverts U contenant A. Comme le complexe $\sum_{q \geqq 0} \Gamma(A, F^q)$ est la limite directe des complexes $\sum_{q \geqq 0} \Gamma(U, F^q)$ quand U parcourt l'ensemble des ouverts contenant A, et comme l'homologie des complexes commute avec la limite directe, il s'ensuit bien que $H^q(A, F)$ est limite directe des $H^q(U, F)$.

La proposition 3 étant établie, il est maintenant facile de démontrer le

---

([5]) *Voir* par exemple [7], p. 89, th. A.

théorème 1 du paragraphe 2. En effet, grâce à la proposition 2 (§ 3) on peut supposer que le faisceau F est induit sur A par un faisceau analytique cohérent dans un voisinage U de A, faisceau que nous appellerons encore F. D'après l'hypothèse de l'énoncé, les voisinages ouverts V de A, contenus dans U, et qui sont des variétés de Stein, forment un système fondamental de voisinages de A; donc chaque groupe $H^q(A, F)$ est limite directe des $H^q(V, F)$, d'après la proposition 3. Or le « théorème fondamental » dit que $H^q(V, F) = 0$ pour $q \geqq 1$; cela entraîne $H^q(A, F) = 0$ pour $q \geqq 1$, c'est-à-dire l'assertion (B) du théorème. Pour démontrer l'assertion (A), choisissons un V; d'après le théorème fondamental, le $\mathcal{O}_x$-module F_x est engendré par des sections de F au-dessus de V; il l'est donc, *a fortiori*, par des sections au-dessus de A.

5. Faisceaux analytiques cohérents sur une variété analytique-réelle. — Soit V une variété analytique-réelle. On notera $\mathcal{R}(V)$ le faisceau des germes de fonctions analytiques-réelles aux différents points de V; $\mathcal{R}_x(V)$ désignera donc l'anneau des germes de fonctions analytiques-réelles au point $x \in V$.

Proposition 4. — *Le faisceau $\mathcal{R}(V)$ est un faisceau cohérent d'anneaux.*

La démonstration d'Oka pour le cas analytique-complexe s'applique sans changement au cas analytique-réel. Plus généralement, il y a une démonstration uniformément valable pour tout corps valué complet non discret (*cf.* [4], exposé XV). D'ailleurs, la proposition 4 pourrait facilement se déduire du théorème d'Oka pour le cas analytique-complexe.

Définition. — Soit V une variété analytique-réelle, plongée comme sous-ensemble fermé dans une variété analytique-complexe X. On dit que X est une *complexification* de V si chaque point $x \in V$ possède, dans X, un système de coordonnées locales (complexes) z_i jouissant des propriétés suivantes : au voisinage de x, V est l'ensemble des points dont les coordonnées z_i sont réelles, et les parties réelles $\mathrm{Re}(z_i)$ forment un système de coordonnées locales pour V au voisinage de x.

Proposition 5. — *Soit V une variété analytique-réelle, plongée comme sous-ensemble fermé dans une variété analytique-complexe X, de manière que X soit une complexification de V. Alors le faisceau $\mathcal{R}(V) \otimes_R C$, sur V, s'identifie au faisceau $\mathcal{O}(V)$ induit par $\mathcal{O}(X)$ sur V. Si, de plus, F est un faisceau $\mathcal{R}(V)$-cohérent sur V, le faisceau $F \otimes_R C$ est un faisceau $\mathcal{O}(V)$-cohérent.*

Démonstration. — Il suffit de la faire dans le cas où $V = R^n$ et $X = C^n$, R^n étant canoniquement plongé dans C^n. Si x est un point de R^n, l'anneau $\mathcal{R}_x(R^n) \otimes_R C$ n'est autre que l'anneau des fonctions analytiques au point x et à valeurs complexes; il s'identifie à l'anneau $\mathcal{O}_x(C^n)$ des fonctions holo-

morphes au point x. D'où l'identification des faisceaux $\mathcal{R}(R^n)\otimes_R C$ et $\mathcal{O}(R^n)$.

Soit maintenant F un faisceau analytique cohérent (au sens réel) sur V, c'est-à-dire $\mathcal{R}(V)$-cohérent. En se restreignant à un ouvert convenable U de V, F est isomorphe au conoyau d'un homomorphisme analytique

$$(\mathcal{R}(U))^p \to (\mathcal{R}(U))^q;$$

donc $F\otimes_R C$ est isomorphe au conoyau de $(\mathcal{R}(U))^p\otimes_R C \to (\mathcal{R}(U))^q\otimes_R C$, qui s'identifie au conoyau de $(\mathcal{O}(U))^p \to (\mathcal{O}(U))^q$, lequel est analytique cohérent au sens complexe, c'est-à-dire $\mathcal{O}(U)$-cohérent. Ceci achève la démonstration.

PROPOSITION 6. — *Soit V une variété analytique réelle, plongée comme sous-ensemble fermé dans une variété analytique-complexe X, de manière que X soit une complexification de V. Supposons que V possède dans X un système fondamental de voisinages ouverts dont chacun soit une variété de Stein. Alors :*

(A) *Pour tout point $x\in V$ et tout faisceau $\mathcal{R}(V)$-cohérent F sur V, F_x est engendré* [comme module sur l'anneau $\mathcal{R}_x(V)$] *par des sections de F au-dessus de V;*

(B) *Pour tout entier $q\geqq 1$, et tout faisceau $\mathcal{R}(V)$-cohérent F sur V, on a $H^q(V, F)=0$.*

DÉMONSTRATION (6). — D'après la proposition 5, le faisceau $F\otimes_R C$ est $\mathcal{O}(V)$-cohérent. On peut lui appliquer le théorème 1 (dans lequel A serait remplacé par V). Donc $F_x\otimes_R C$ est engendré, comme module sur $\mathcal{R}_x(V)\otimes_R C$, par des sections de $F\otimes_R C$ au-dessus de V; cela entraîne aussitôt que F_x est engendré, comme module sur $\mathcal{R}_x(V)$, par des sections de F au-dessus de V. D'autre part, le théorème 1 dit que $H^q(V, F\otimes_R C)=0$ pour $q\geqq 1$; comme $H^q(V, F\otimes_R C)\approx H^q(V, F)\otimes_R C$, il s'ensuit que $H^q(V, F)=0$.

On peut appliquer la proposition 6 à R^n plongé dans C^n, grâce à la proposition 1 (§ 1), et compte tenu du fait classique qu'un domaine d'holomorphie est une variéte de Stein. Ainsi :

THÉORÈME 2. — *Soit F un faisceau analytique cohérent (au sens réel) sur l'espace R^n. Alors :*

(A) *Pour tout point $x\in R^n$, F_x est engendré* (comme module sur l'anneau des fonctions analytiques au point x) *par des sections de F au-dessus de R^n;*

(B) *Pour tout entier $q\geqq 1$, on a $H^q(R^n, F)=0$.*

REMARQUE. — Étant donnée une variété analytique réelle V, réunion dénom-

(6) Cette démonstration est calquée sur celle donnée par Serre ([4], exposé XX) dans le cas où V est compacte.

brable de compacts, on peut montrer sans difficulté que V peut être plongée comme sous-espace fermé d'une variété analytique-complexe X telle que X soit une complexification de V. On ignore s'il est possible de faire en sorte que V possède, dans X, un système fondamental de voisinages ouverts dont chacun soit une variété de Stein, de manière à pouvoir appliquer à V les conclusions (A) et (B) de la proposition 6. Dans le paragraphe suivant, on va démontrer (A) et (B) pour toutes les sous-variétés analytiques dans l'espace numérique R^n.

6. Sous-ensembles analytiques d'une variété analytique-réelle. — Soit V une variété analytique-réelle. On dit qu'une partie A de V est un *sous-ensemble analytique* de V si A est *fermé* dans V, et si, au voisinage de chaque point $a \in A$, A peut être défini par l'annulation d'un système fini de fonctions analytiques au voisinage de a. Plus particulièrement, A est une *sous-variété analytique* de V si A est fermé dans V et si, au voisinage de chaque point $a \in A$, A peut être défini par l'annulation d'un certain nombre de coordonnées parmi celles d'un système convenable de coordonnées locales (de V) au point a; alors A porte évidemment une structure de variété analytique-réelle.

Soit A un sous-ensemble analytique d'une variété analytique-réelle V; on attache à A un faisceau d'idéaux I sur V, comme suit : si $x \notin A$, on pose $I_x = \mathcal{R}_x(V)$; si $x \in A$, I_x est l'idéal de $\mathcal{R}_x(V)$ formé des germes de fonctions analytiques qui s'annulent identiquement sur A (au voisinage de x). Les idéaux I_x forment bien un faisceau I, qu'on appellera le *faisceau d'idéaux attaché au sous-ensemble analytique* A. Cette définition est calquée sur celle du cas analytique-complexe; mais tandis que, dans le cas analytique-complexe, le faisceau d'idéaux attaché à un sous-ensemble analytique (complexe) est toujours *cohérent* ([3], th. 2), *il n'en est plus de même dans le cas analytique-réel* (*cf.* § 9).

Définition. — Un sous-ensemble analytique A d'une variété analytique-réelle V sera dit *cohérent* si le faisceau d'idéaux I attaché à A est un faisceau cohérent. Il est évident que toute sous-variété analytique de V est un sous-ensemble cohérent.

Soit A un sous-ensemble analytique cohérent de V, et soit I le faisceau attaché à A. Le faisceau-quotient $\mathcal{R}(V)/I$ est un faisceau $\mathcal{R}(V)$-cohérent, nul en dehors de A; il induit sur A un faisceau cohérent d'anneaux, qui s'identifie à un faisceau de germes de fonctions sur A. Dans le cas particulier où A est une sous-variété analytique de V, ce faisceau d'anneaux n'est autre que le faisceau $\mathcal{R}(A)$ des germes de fonctions analytique (réelles); dans le cas général où A est un sous-ensemble analytique cohérent, le faisceau induit sur A par $\mathcal{R}(V)/I$ se notera encore $\mathcal{R}(V)$ et s'appellera le *faisceau des germes de fonctions analytiques* sur A.

Proposition 7. — *Soit* A *un sous-ensemble analytique cohérent d'une*

variété analytique-réelle V, et soit F un faisceau $\mathcal{R}(A)$-cohérent sur A. Si F' désigne le faisceau (sur V) obtenu en prolongeant F par o en dehors de A, alors F', considéré comme faisceau de $\mathcal{R}(V)$-modules, est cohérent.

La démonstration donnée par SERRE [13] pour le cas algébrique (*loc. cit.*, p. 232, prop. 3) est valable ici, puisqu'elle n'utilise que deux résultats de la théorie abstraite des faisceaux cohérents.

Par ailleurs, il est classique que $H^q(A, F) \approx H^q(W, F')$ avec les notations précédentes ($q \geqq 0$). Compte tenu du théorème 2, on obtient :

THÉORÈME 3. — *Soit A un sous-ensemble analytique cohérent de l'espace numérique R^n* (ce qui est le cas si A est une *sous-variété analytique* de R^n). *Soit F un faisceau analytique cohérent sur A. Alors :*

(A) *Pour tout point $x \in A$, F_x est engendré* [comme module sur l'anneau $\mathcal{R}_x(A)$ des germes de fonctions analytiques au point x] *par des sections de F au-dessus de A;*

(B) *Pour tout entier $q \geqq 1$, on a $H^q(A, F) = 0$.*

7. Quelques conséquences du théorème 3. — On peut déduire du théorème 3 des conséquences analogues à celles que l'on tire du « théorème fondamental » (§ 2) : les démonstrations sont les mêmes; nous ne les donnerons donc pas ici, et nous renvoyons le lecteur à [4], [5] et [15].

(1) Soit A un sous-ensemble analytique cohérent de R^n. Alors A peut être défini par des *équations globales* : d'une façon précise, A est l'ensemble des zéros communs aux fonctions *analytiques dans tout* R^n et qui s'annulent sur A. En fait, A peut être défini globalement par un nombre *fini* d'équations (*voir* § 10, corollaire de la proposition 15).

(2) Soit A comme dans (1); alors toute *fonction analytique* sur A [c'est-à-dire toute section du faisceau $\mathcal{R}(A)$] est induite sur A par une fonction analytique de l'espace R^n.

(3) Soit A comme dans (1); si des fonctions analytiques f_i sur A, en nombre fini, n'ont pas de zéro commun, il existe des fonctions c_i analytiques sur A, telles que $\sum_i c_i f_i = 1$.

(4) Si V est une sous-variété analytique de R^n, toute forme différentielle analytique sur V est induite par une forme différentielle analytique de R^n; de plus, l'anneau de cohomologie de l'anneau des formes différentielles analytiques sur V est canoniquement isomorphe à l'anneau de cohomologie réelle de l'espace V (*cf.* théorème de de Rham).

(5) Si une variété analytique réelle peut se plonger dans R^n, il existe toujours sur V, une fonction analytique (réelle) admettant, en chaque point d'un sous-ensemble discret de V, un développement limité arbitrairement donné.

(6) Soit V une variété analytique réelle pouvant se plonger dans R^n; tout « diviseur réel » sur V définit un élément du groupe de cohomologie $H^1(V, Z_2)$; pour que ce soit le diviseur d'une fonction méromorphe réelle, il faut et il suffit que l'élément correspondant de $H^1(V, Z_2)$ soit nul; il existe toujours un diviseur réel dont la classe de cohomologie soit un élément donné de $H^1(V, Z_2)$.

(7) Si V est une variété analytique réelle pouvant se plonger dans R^n, la classification des espaces fibrés principaux *analytiques* (réels) dont le groupe est un groupe de Lie abélien G coïncide avec la classification des espaces fibrés principaux *topologiques* de groupe G. Le cas d'un groupe de Lie non abélien mériterait d'être étudié (pour le cas analytique complexe, *voir* [9] et [6]).

8. Structure des sous-ensembles analytiques réels. — Il s'agit ici de notions plus ou moins connues, mais guère explicitées dans la littérature.

PROPOSITION 8 (7). — *Soit A_a un germe d'ensemble analytique (réel) en un point $a \in R^n$; R^n étant plongé dans C^n, il existe dans C^n, au point a, un germe d'ensemble analytique-complexe $\tilde{A}_a$ et un seul, possédant les deux propriétés suivantes :*

(*a*) $\tilde{A}_a \supset A_a$;

(*b*) *Tout germe de fonction holomorphe (au point a) qui s'annule sur A_a s'annule sur $\tilde{A}_a$.*

On a alors $\tilde{A}_a \cap R^n = A_a$, et tout germe d'ensemble analytique-complexe qui contient A_a contient $\tilde{A}_a$. Si I_a est l'idéal de $\mathcal{R}_a(R^n)$ formé des germes de fonctions analytiques s'annulant sur A_a, et $\tilde{I}_a$ l'idéal de

$$\mathcal{O}_a(C^n) \approx \mathcal{R}_a(R^n) \otimes_R C$$

formé des germes de fonctions holomorphes s'annulant sur $\tilde{A}_a$, on a $\tilde{I}_a = I_a \otimes C$.

DÉMONSTRATION. — Soit (f_i) un système fini de fonctions analytiques réelles, au voisinage de $a \in R^n$, qui engendre l'idéal I_a. Les équations $f_i(x) = 0$ définissent dans C^n, au voisinage de a, un sous-ensemble analytique-complexe; soit $\tilde{A}_a$ le germe induit par ce sous-ensemble au point a. Il est clair que $\tilde{A}_a$ possède les propriétés (*a*) et (*b*) de l'énoncé. Si B_a est un germe d'ensemble analytique-complexe contenant A_a, tout germe de fonction holomorphe qui s'annule sur B_a s'annule sur A_a, donc s'annule sur $\tilde{A}_a$, et par suite $B_a \supset \tilde{A}_a$; de là résulte l'unicité du germe analytique complexe $\tilde{A}_a$ satisfaisant à (*a*) et

(7) *Cf.* [2], p. 120-122.

(b). La définition explicite de $\tilde{A}_a$ montre que $\tilde{A}_a \cap R^n = A_a$. De plus, tout germe de fonction holomorphe qui s'annule sur $\tilde{A}_a$ s'annule sur A_a, donc est combinaison linéaire (à coefficients holomorphes en a) des f_i, et par suite appartient à l'idéal $\tilde{I}_a = I_a \otimes C$; ceci prouve que $\tilde{I}_a$ est l'idéal des germes de fonctions holomorphes s'annulant sur $\tilde{A}_a$.

Définition. — Le germe $\tilde{A}_a$ défini dans la proposition 8 s'appelle le *complexifié* du germe A_a.

Proposition 9. — *Si le germe A_a est réunion d'une famille finie de germes d'ensembles analytiques réels A_a^i, le complexifié $\tilde{A}_a$ est réunion des complexifiés $\tilde{A}_a^i$. Si, de plus, les A_a^i sont les composantes irréductibles* [8] *de A_a, les complexifiés $\tilde{A}_a^i$ sont les composantes irréductibles du complexifié $\tilde{A}_a$.*

Démonstration. — La réunion des $\tilde{A}_a^i$ contient A_a, et tout germe de fonction holomorphe qui s'annule sur A_a s'annule sur la réunion des $\tilde{A}_a^i$; il résulte alors de la caractérisation axiomatique du complexifié $\tilde{A}_a$ que ce complexifié est égal à la réunion des $\tilde{A}_a^i$. De plus, si A_a est irréductible, $\tilde{A}_a$ est irréductible : car si l'on avait $\tilde{A}_a = B'_a \cup C'_a$, B'_a et C'_a étant des germes complexes distincts de $\tilde{A}_a$, on aurait

$$A_a = B_a \cup C_a, \qquad \text{avec} \quad B_a = B'_a \cap R^n, \qquad C_a = C'_a \cap R^n,$$

donc on aurait par exemple $B_a = A_a$, d'où $B'_a \supset A_a$, donc $B'_a \supset \tilde{A}_a$ et, par suite, $B'_a = \tilde{A}_a$, contrairement à l'hypothèse. Supposons maintenant que A_a admette une décomposition en composantes irréductibles A_a^i; d'après ce qu'on vient de voir, les complexifiés $\tilde{A}_a^i$ sont irréductibles, et $\tilde{A}_a$ est réunion des $\tilde{A}_a^i$; pour montrer que les $\tilde{A}_a^i$ sont les composantes irréductibles de $\tilde{A}_a$, il suffit de vérifier que $\tilde{A}_a^i \not\subset \tilde{A}_a^j$ pour $i \neq j$; or si l'on avait $\tilde{A}_a^i \subset \tilde{A}_a^j$, on aurait $A_a^i \subset A_a^j$ contrairement aux hypothèses.

Corollaire. — *Pour que le germe A_a soit irréductible, il faut et il suffit que son complexifié $\tilde{A}_a$ soit irréductible.*

Définition. — On dira qu'un germe d'ensemble analytique-complexe B_a,

---

[8] Un germe A_a est réductible s'il existe deux germes B_a et C_a tels que $A_a = B_a \cup C_a$, $B_a \neq A_a$, $C_a \neq A_a$; A_a est *irréductible* dans le cas contraire. Comme l'anneau $\mathcal{O}_a$ des germes de fonctions analytiques au point a est noethérien, on voit facilement que tout germe d'ensemble analytique-réel A_a est réunion d'une famille finie de germes irréductibles A_a^i, et que ceux-ci sont déterminés de façon unique si l'on suppose que $A_a^i \not\subset A_a^j$ pour $i \neq j$ (auquel cas les A_a^i s'appellent les « composantes irréductibles » de A_a). On a les mêmes notions et la même terminologie pour les germes d'ensembles analytiques-complexes.

en un point *réel* $a \in C^n$, est un *complexifié*, s'il existe dans R^n un germe d'ensemble analytique-réel A_a tel que B_a soit le complexifié de A_a.

Cette définition appelle diverses remarques. Si B_a est un complexifié, c'est le complexifié de $B_a \cap R^n$, donc la donnée de B_a détermine A_a. Pour que B_a soit un complexifié, il faut et il suffit qne tout germe de fonction holomorphe qui s'annule sur $B_a \cap R^n$ s'annule sur B_a.

De la proposition 9 résultent les faits suivants :

Toute réunion finie de germes complexifiés est un complexifié; pour qu'un germe B_a soit un complexifié, il faut et il suffit que ses composantes irréductibles soient des complexifiés.

Notions sur la dimension. — Soit B_a un germe d'ensemble analytique-complexe en un point $a \in C^n$; on sait que si B_a est *irréductible*, on définit la *dimension* (complexe) de B_a; si de plus B est un sous-ensemble analytique-complexe, dans un voisinage de a, qui induise le germe B_a, chacune des composantes irréductibles du germe B_x induit par B en un point x voisin de a a même dimension p que le germe B_a. Si un tel point x est *non singulier* pour B, alors B est, au voisinage de x, une sous-variété analytique-complexe de dimension (complexe) p. Rappelons, d'autre part, que l'ensemble S des points singuliers de B est un sous-ensemble analytique-complexe dont toutes les composantes irréductibles, en un point quelconque $x \in S$, sont de dimension $< p$.

Ceci étant rappelé, soit maintenant A_a un sous-ensemble analytique-réel dans un voisinage d'un point $a \in R^n$, et supposons que le germe A_a induit par A soit *irréductible*. Par définition, la *dimension* (réelle) de A au point a (ou la dimension du germe A_a) est égale à la dimension (complexe) du germe complexifié $\tilde{A}_a$, qui est irréductible. Il existe évidemment, dans un voisinage convenable de a dans C^n, un sous-ensemble analytique-complexe B tel que le germe B_a induit par B soit le complexifié de A_a; alors $B \cap R^n$ et A coïncident au voisinage de a. Soit S l'ensemble des points singuliers de B; le germe S_a induit par S ne contient pas A_a, sinon il contiendrait $\tilde{A}_a$, ce qui est impossible puisque les composantes irréductibles de S_a sont de dimension strictement plus petite que la dimension de $B_a = \tilde{A}_a$. Ainsi A possède des points, arbitrairement voisins de a, qui sont *non singuliers* pour B; au voisinage d'un tel point, A est une *sous-variété analytique-réelle dont la dimension est égale à la dimension p du germe A_a*. En effet, cela résulte de la proposition suivante (*cf.* [2], p. 120-122) : *soient des f_i analytiques réelles au voisinage d'un point $b \in R^n$, telles que les équations $f_i(z) = 0$ définissent, dans un voisinage complexe de b, une sous-variété analytique-complexe V de dimension (complexe) p; alors $V \cap R^n$ est, au voisinage de b, une sous-variété analytique-réelle de dimension p.* Pour le voir, on observe que V est stable pour l'automorphisme $(z_1, \ldots, z_n) \to (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$; on peut ranger les coordonnées (supposées nulles en b) dans un ordre tel que

V soit définie par des équations

$$z_k = g_k(z_1, \ldots, z_p), \qquad p+1 \leq k \leq n,$$

où g_k est holomorphe au voisinage de l'origine. Soit

$$\bar{g}_k(z_1, \ldots, z_p) = \overline{g_k(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)};$$

on a $z_k = \bar{g}_k(z_1, \ldots, z_p)$ sur V, donc $g_k - \bar{g}_k = 0$ sur V, et comme $z_1, \ldots, z_p$ sont des coordonnées locales sur V, les fonctions g_k et $\bar{g}_k$ sont identiques; ainsi g_k est à coefficients réels, et $V \cap R^n$ est défini par les n-p équations réelles $x_k = g_k(x_1, \ldots, x_p)$.

Avant de résumer les résultats obtenus, observons que si un sous-ensemble analytique-réel induit un germe A_a irréductible de dimension p, alors, en tout point $x \in A$ assez voisin de a, toutes les composantes irréductibles du germe induit A_x sont de dimension $\leq p$; car si un sous-ensemble analytique-complexe B est tel que le germe B_a soit le complexifié de A_a, le germe B_x *contient* le complexifié de A_x et, par suite, les dimensions des composantes irréductibles de $\tilde{A}_x$ sont au plus égales à p.

Finalement, nous avons démontré ceci :

Proposition 10. — *Soit A un sous-ensemble analytique-réel dans un voisinage de $a \in R^n$; supposons que le germe A_a soit irréductible et de dimension p. Alors, en chaque point de A assez voisin de a, les composantes irréductibles de A sont de dimension $\leq p$. De plus, il existe un sous-ensemble analytique-réel $A' \subset A$ jouissant des propriétés suivantes : 1° les composantes irréductibles de A' au point a sont de dimension $< p$; 2° $A - A'$ possède des points arbitrairement voisins de a, et en chacun de ces points A est une sous-variété analytique-réelle de dimension p.*

(Il suffit de prendre pour A' l'intersection $A \cap S$, S désignant comme ci-dessus l'ensemble des points singuliers de B.)

Remarque. — Sous les hypothèses précédentes, il peut exister des points de A arbitrairement voisins de a, en lesquels la dimension de A est *strictement inférieure à p*. Par exemple, dans l'espace R^3 (coordonnées x, y, z), le cône d'équation

$$z(x^2 + y^2) = x^3$$

est irréductible à l'origine (0, 0, 0); il est de dimension 2 en ce point; mais, au voisinage de chaque point (0, 0, z) tel que $z \neq 0$, il se réduit à la droite d'équations $x = 0$, $y = 0$. Bien entendu, ces points sont *singuliers* pour le complexifié du cône à l'origine, complexifié qui n'est autre que le cône (complexe) défini par la même équation. Ce dernier fait résulte de la

Proposition 11. — *Soit B_a un germe irréductible d'ensemble analytique-complexe en un point réel $a \in C^n$, et soit p la dimension (complexe) de*

B_a. Pour que B_a soit un complexifié, il faut et il suffit que $B_a \cap R^n$ soit un germe (analytique réel) irréductible de dimension p. Il suffit que B_a contienne un germe analytique-réel, irréductible et de dimension p.

Démonstration — Supposons que B_a soit le complexifié d'un germe A_a; alors A_a est irréductible (corollaire de la proposition 9), et la dimension réelle de A_a est égale à la dimension complexe p de B_a (par définition de la dimension d'un germe analytique-réel). Réciproquement, supposons que B_a contienne un germe analytique-réel A_a, irréductible et de dimension p; soit B un sous-ensemble analytique complexe, dans un voisinage complexe de a, qui induise le germe B_a, et soit A un sous-ensemble analytique-réel, dans un voisinage réel de a, qui induise le germe A_a. Puisque $A_a \subset B_a$, on peut supposer $A \subset B$. Si f est un germe de fonction holomorphe qui s'annule sur A_a, f s'annule en des points non singuliers de B arbitrairement voisins de a, à savoir les points de A où A est une sous-variété de dimension p. Comme B_a est irréductible, f s'annule identiquement sur B au voisinage de a. Ainsi tout germe de fonction holomorphe qui s'annule sur A_a s'annule sur B_a, et, par suite, B_a est le complexifié de A_a.

9. — **Propriétés des sous-ensembles analytiques cohérents.** — Soit A un sous-ensemble analytique d'une variété analytique-réelle V, et soit I le faisceau d'idéaux attaché à A. Pour que I soit cohérent, il faut et il suffit que I soit *cohérent en chaque point* $a \in A$; ceci signifie qu'il existe un système fini de fonctions analytiques réelles au voisinage de a, qui engendrent l'idéal I_x en chaque point x assez voisin de a. Or la propriété, pour le faisceau I attaché à A, d'être cohérent au point $a \in A$, est une propriété qui ne dépend que du germe d'ensemble A_a induit par A au point a. On a donc la notion de *germe* (d'ensemble analytique réel) *cohérent*; pour que A soit cohérent, il faut et il suffit que les germes A_a induits par A aux points $a \in A$ soient cohérents. Tout revient donc à caractériser les germes cohérents; on peut se borner à étudier la cohérence des germes dans l'espace numérique R^n.

Proposition 12. — *Soit A_a un germe d'ensemble analytique-réel en un point $a \in R^n$. Soit B un sous-ensemble analytique-complexe, dans un voisinage complexe de a, tel que le germe induit B_a soit le complexifié de A_a. Pour que A_a soit cohérent, il faut et il suffit que, pour tout point x réel assez voisin de a, le germe B_x induit par B soit un complexifié.*

Démonstration. — La condition est nécessaire; soit en effet A un sous-ensemble analytique-réel induisant A_a, et soit (f_i) un système fini de fonctions analytiques réelles au voisinage de a, qui engendre, en chaque point réel x assez voisin de a, l'idéal I_x du faisceau I attaché à A. Les équations $f_i = 0$ définissent, dans un voisinage complexe de a, l'ensemble B. En chaque point x réel assez voisin de a, B_x est donc le complexifié de A_x.

La condition est suffisante; car soit, en chaque point x d'un voisinage

complexe de a, J_x l'idéal du faisceau attaché au sous-ensemble analytique-complexe B. Les J_x forment un faisceau cohérent. Si x est un point réel, B_x est, en vertu de l'hypothèse, le complexifié de $B_x \cap R^n$, c'est-à-dire de A_x; donc $J_x = I_x \otimes C$, en notant I_x l'idéal attaché à A au point x. Soit (f_i) un système fini de fonctions holomorphes dans un voisinage complexe de a, qui engendre l'idéal J_x en tout point x d'un voisinage complexe de a; alors les parties réelle et imaginaire des f_i sont des fonctions analytiques réelles qui, en tout point réel x voisin de a, engendrent l'idéal I_x. Ceci prouve que le faisceau I est cohérent au point a, c'est-à-dire que le germe A_x est cohérent.

PROPOSITION 13. — *La réunion d'une famille finie de germes cohérents est un germe cohérent. Pour qu'un germe d'ensemble analytique-réel soit cohérent, il faut et il suffit que ses composantes irréductibles soient des germes cohérents.*

DÉMONSTRATION. — Soient A^i des sous-ensembles analytiques-réels en nombre fini, dans un voisinage de a, tels que les germes $(A^i)_a$ soient cohérents. Soient B^i des sous-ensembles analytiques-complexes, dans un voisinage complexe de a, tels que $(B^i)_x$ soit le complexifié de $(A^i)_x$, pour tout point réel x voisin de a. Soit B la réunion des B^i; si x est un point réel voisin de a, le germe B_x, réunion des $(B^i)_x$, est le complexifié de la réunion des $(A^i)_x$ (prop. 9), c'est-à-dire de A_x. Ceci établit la première assertion de l'énoncé.

Il reste à montrer que si A_a est cohérent, ses composantes irréductibles A^i_a sont des germes cohérents. Or soient B^i_a les complexifiés des A^i_a; ce sont les composantes irréductibles du germe B_a complexifié de A_a (prop. 9). Chaque intersection $B^i_a \cap B^j_a (i \neq j)$ se compose de composantes irréductibles de dimension strictement plus petite que la plus petite des dimensions de B^i_a et de B^j_a; donc, en chaque point x voisin de a, chaque composante irréductible de $B^i_x \cap B^j_x$ est de dimension strictement inférieure à la plus petite des dimensions de B^i_x et de B^j_x; il en résulte que l'ensemble des composantes irréductibles de B_x est la réunion (quand i varie) des ensembles de composantes irréductibles des B^i_x. Puisque B_x est un complexifié, il en est de même des B^i_x d'après la proposition 9; donc chaque germe A^i_a est cohérent, en vertu de la proposition 12.

PROPOSITION 14. — *Soit A un sous-ensemble analytique-réel dans un voisinage de $a \in R^n$, tel que le germe induit A_a soit irréductible et de dimension p. Si A_a est cohérent, alors, en tout point $x \in A$ assez voisin de a, toutes les composantes irréductibles de A_x sont de dimension p.*

En effet, avec les notations de la proposition 12, les complexifiés des composantes irréductibles de A_x sont des composantes irréductibles de B_x, qui sont de dimension p.

REMARQUE. — La proposition 14 montre que le cône $z(x^2+y^2) = x^3$ *n'est pas cohérent* à l'origine (0, 0, 0), puisqu'il est de dimension 1 aux points

(o, o, z) tels que $z \neq$ o. D'autre part, la condition nécessaire énoncée à la proposition 14 pour que A_a soit cohérent *n'est pas suffisante*; considérons par exemple le cône

$$z(x+y)(x^2+y^2)=x^4;$$

en chaque point (x, y, z) voisin de (o, o, o) et distinct de (o, o, o) c'est une sous-variété de dimension 2; cependant il n'est pas cohérent à l'origine, car son complexifié est le cône complexe ayant même équation, et ce cône induit en chaque point (o, o, z) tel que $z \neq$ o un germe complexe qui n'est pas un complexifié.

10. Sous-ensembles analytiques de R^n définissables par des équations analytiques. — On a vu (§ 7) que tout sous-ensemble analytique cohérent A de R^n est l'ensemble des zéros communs à une famille de fonctions analytiques dans tout R^n. On va montrer que A peut être défini par un nombre *fini* d'équations $f_i(x)=$ o, les f_i étant analytiques dans R^n. De plus, la classe des sous-ensembles analytiques de R^n qui peuvent être définis par un nombre fini d'équations analytiques est plus vaste que celle des sous-ensembles analytiques cohérents, comme le montre l'exemple du cône $z(x^2+y^2)=x^3$ dans R^3.

PROPOSITION 15. — *Soit A un sous-ensemble analytique de R^n. Il y a équivalence entre les trois conditions suivantes :*

(*a*) *Il existe sur R^n un faisceau cohérent d'idéaux I tel que A soit le lieu des zéros de I* [i. e. A est l'ensemble des points x tels que $I_x \neq \mathcal{R}_x(R^n)$];

(*b*) *Il existe un voisinage ouvert U de R^n dans C^n, et un sous-ensemble analytique-complexe B de U, tel que $B \cap R^n = A$;*

(*c*) *Il existe un nombre fini de fonctions analytiques réelles f_i dans R^n, tel que A soit l'ensemble des solutions du système d'équations $f_i(x)=$ o.*

DÉMONSTRATION. — On va montrer que

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a).$$

$(a) \Rightarrow (b)$: Soit I un faisceau cohérent d'idéaux, comme en (a). Alors $I \otimes_R C$ est un faisceau cohérent d'idéaux sur R^n, au sens analytique complexe. Ce faisceau est induit par un faisceau cohérent d'idéaux J sur un voisinage ouvert U de R^n. Soit B le lieu des zéros de J; B est un sous-ensemble analytique-complexe de U, et $B \cap R^n = A$.

$(b) \Rightarrow (c)$: D'après la proposition 1, on peut supposer que U est un domaine d'holomorphie. B est alors un sous-ensemble analytique-complexe d'une variété de Stein U, donc ([9]) B est l'ensemble des solutions d'un

([9]) On le prouve au moyen d'un raisonnement dû à Grauert, et que voici : choisissons un point dans chaque composante connexe de $U-B$; d'après la théorie des variétés de

système fini d'équations $g_j = 0$, les g_j étant holomophes dans U. Les g_j induisent sur R^n des fonctions analytiques à valeurs complexes ; en égalant à zéro leurs parties réelles et imaginaires, on trouve un système fini d'équations $f_i = 0$ qui définit A.

$(c) \Rightarrow (a)$: Si A est défini par un système fini d'équations analytiques $f_i = 0$, les f_i engendrent, en chaque point $x \in R^n$, un idéal I_x; les idéaux I_x forment un faisceau cohérent I, et A est le lieu des zéros de I.

COROLLAIRE DE LA PROPOSITION 15. — *Tout sous-ensemble analytique cohérent A de R^n est l'ensemble des solutions d'un système fini d'équations analytiques $f_i(x) = 0$.*

[En effet, la condition (a) est satisfaite.]

11. Exemple d'un sous-ensemble analytique de R^3 qui n'est pas définissable globalement par des équations analytiques. — Soit $a(z)$ la fonction d'une variable réelle z, nulle pour $z \leqq -1$ et pour $z \geqq +1$, et égale à $\exp\left(\frac{1}{z^2-1}\right)$ pour $-1 < z < +1$. Soit S l'ensemble des points de R^3 (coordonnées x, y, z) défini par l'équation

$$z(x^2 + y^2) = x^3 a(z).$$

Comme $a(z)$ est une fonction continue, S est *fermé*. De plus S est un sous-ensemble analytique de R^3 : il suffit de le vérifier aux points de S où $z = \pm 1$. En ces points, on a $x = 0$, $y = 0$. Considérons par exemple le point $(0, 0, 1)$; au voisinage de ce point, S peut être défini par le système d'équations $x = 0$, $y = 0$. Ainsi S est bien un sous-ensemble analytique. On va prouver :

PROPOSITION 16. — *S étant défini comme ci-dessus, si une fonction $f(x, y, z)$, analytique réelle dans R^3, s'annule en tout point de S, elle est identiquement nulle.*

DÉMONSTRATION. — R^3 possède un voisinage ouvert U dans C^3, tel que f se prolonge en une fonction holomorphe dans U; on la notera encore f. Consi-

---

Stein, il existe une fonction g_1 holomorphe dans U, nulle sur B et égale à 1 en ces points. Soit B_1 le sous-ensemble analytique, ensemble des zéros de g_1; B_1 contient B; sur chacune des composantes irréductibles (au sens global dans U) de B_1 qui ne sont pas contenues dans B, choisissons un point n'appartenant pas à B; soit g_2 une fonction holomorphe dans U, égale à 1 en chacun de ces points, et nulle sur B. Soit B_2 le sous-ensemble analytique, ensemble des zéros communs à g_1 et g_2; B_2 contient B; celles des composantes irréductibles (globales) de B_2 qui ne sont pas contenues dans B sont de dimension $n-2$, et l'on peut choisir dans chacune d'elles un point n'appartenant pas à B. En poursuivant ainsi, on obtient n fonctions $g_1, \ldots, g_n$ holomorphes dans U, et l'ensemble de leurs zéros communs contient, outre B, un ensemble de points *isolés*. Si g_{n+1} est holomorphe dans U, nulle sur B et égale à 1 en ces points isolés, B est l'ensemble des zéros communs à $g_1, \ldots, g_{n+1}$.

dérons, dans C^3, l'ensemble S' des solutions complexes de l'équation

$$z(x^2+y^2)=x^3\exp\left(\frac{1}{z^2-1}\right) \qquad (z^2\neq 1).$$

S' est un sous-ensemble analytique (complexe) dans l'ouvert de C^3, complémentaire de la réunion des deux plans $z=1$ et $z=-1$; à l'origine, S' est le complexifié de S. On peut supposer U assez petit pour que les points *réguliers* de S' contenus dans U soient exactement ceux pour lesquels x est $\neq 0$. Considérons l'ensemble des points réguliers de S' contenus dans U; soit M celle des composantes connexes de cet ensemble qui contient les points réguliers voisins de $(0, 0, 0)$. Comme f est holomorphe et s'annule en ces derniers points, f est nulle en tout point de l'adhérence de M. On va montrer que ceci implique que *f s'annule en tout point de S' assez voisin du point* $(0, 0, 1)$.

D'abord, tout point $(0, 0, z_0)$, où z_0 est réel et $-1<z_0<+1$, possède un voisinage tel que les points réguliers de S' contenus dans ce voisinage appartiennent à M. Il suffit donc de prouver ceci : quel que soit $\varepsilon>0$, si deux points $(x_0, y_0, z_0)\in S'$ et $(x_1, y_1\, z_1)\in S'$ sont tels que

$$0<|x_i|<\varepsilon, \qquad |y_i|<\varepsilon, \qquad |z_i-1|<\varepsilon \qquad (\text{pour } i=0, 1),$$

ils peuvent être joints par un arc formé de points de S' situés dans la région

$$0<|x|<\varepsilon, \qquad |y|<\varepsilon\sqrt{3}, \qquad |z-1|<\varepsilon.$$

Voici comment on trouve un tel arc. Appelons $\lambda(z)$ la fonction

$$\frac{1}{z}\exp\left(\frac{1}{z^2-1}\right).$$

Joignons z_0 à z_1 par un arc Γ situé dans la couronne $0<|z-1|<\varepsilon$, et soit M la borne supérieure de $|\lambda(z)|$ sur Γ. Soit $\eta>0$ tel que $M\eta^3+\eta^2\leqq 1$. Joignons le point (x_0, y_0, z_0) à un point de la forme $(\eta x_0, y'_0, z_0)$ par des points de la forme (x, y, z_0), où $x=tx_0$ (t réel variant de 1 à η), $y=\sqrt{\lambda(z_0)x^3-x^2}$. Comme $|\lambda(z_0)x_0^3|<2\varepsilon^2$, on a constamment $|y|^2<3\varepsilon^2$. On peut joindre de même le point (x_1, y_1, z_1) à un point $(\eta x_1, y'_1, z_1)$. Il reste alors à joindre les points $(\eta x_0, y'_0, z_0)$ et $(\eta x_1, y'_1, z_1)$ par des points de la forme $(\eta x, y, z)$, z décrivant Γ, x variant de x_0 à x_1 dans le domaine $0<|x|<\varepsilon$, et y étant égal à $\sqrt{\lambda(z)\eta^3x^3-\eta^2x^2}$.

Ainsi il est démontré que $f(x, y, z)$ s'annule en tout point de S' assez voisin du point $(0, 0, 1)$. Fixons alors les nombres $x_0\neq 0$ et $y_0\neq 0$ assez voisins de 0; d'après le théorème de Picard appliqué au point singulier $z=1$ de la fonction $\lambda(z)$, il existe une infinité de points (x_0, y_0, z) de S' pour lesquels z est arbitrairement voisin de 1; comme f est holomorphe et s'annule en ces points, $f(x_0, y_0, z)$ est nulle quel que soit z réel. Ce résultat vaut quels que soient x_0 et y_0 comme ci-dessus, donc $f(x, y, z)$ est identiquement nulle. Ceci achève la démonstration.

Autre exemple. — La fonction $a(z)$ ayant la même signification que ci-dessus, considérons le sous-ensemble $\Sigma \subset R^3$ défini par l'équation

$$z^2(1-2z^2)(x^2+y^2)=(x^4+y^4)\,a(z).$$

C'est un sous-ensemble analytique de R^3, et il est *compact* (contrairement à ce qui avait lieu pour S). En raisonnant comme pour la proposition **16**, on démontre que *toute fonction $f(x, y, z)$ analytique réelle dans R^3 qui s'annule sur Σ, est identiquement nulle.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. Behnke et P. Thullen, *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen* (*Ergebn. Math.*. 1934).

[2] F. Bruhat, *Sur les représentations induites des groupes de Lie* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 84, 1956, p. 97-205).

[3] H. Cartan, *Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 78, 1950, p. 29-64).

[4] H. Cartan, *Séminaire Éc. Norm. sup.*, 1951-1952.

[5] H. Cartan, *Variétés analytiques complexes et cohomologie* (*Colloque sur les fonctions de plusieurs variables*, Bruxelles, 1953, p. 41-55).

[6] H. Cartan, *Espaces fibrés analytiques* (à paraître dans le volume du *Symposium de Topologie de Mexico*, 1956).

[7] P. Dolbeault, *Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe* (*Ann. Math.*, t. 64, 1956, p. 83-130).

[8] H. Grauert, *Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume* (*Math. Ann.*, t. 129, 1955, p. 233-259).

[9] H. Grauert, *Approximationssätze und analytische Faserräume* (*Math. Ann.*, à paraître prochainement).

[10] B. Malgrange, *Plongements des variétés analytiques réelles* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 85, 1957, p. 101-113.

[11] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.* VI. *Domaines pseudoconvexes* (*Tohoku Math. J.*, t. 49, 1942, p. 15-52); IX. *Domaines finis sans point critique intérieur* (*Jap. J. Math.*, t. 23, 1953, p. 97-155).

[12] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.* VII. *Sur quelques notions arithmétiques* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 78, 1950, p. 1-27).

[13] J. P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents* (*Ann. Math.*, t. 69, 1955, p. 197-278)

[14] J. P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 6, 1955-1956, p. 1-42).

[15] J. P. Serre, *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein* (*Colloque sur les fonctions de plusieurs variables*, Bruxelles, 1953, p. 57-68).