BULLETIN DE LA S. M. F.

HEINZ BAUER

Sur l'équivalence des théories de l'intégration selon N. Bourbaki et selon M. H. Stone

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 51-75

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__51_0>

Bull. Soc. math. France,
85, 1957, p. 51 à 75.

SUR L'ÉQUIVALENCE DES THÉORIES DE L'INTÉGRATION SELON N. BOURBAKI ET SELON M. H. STONE.

PAR

HEINZ BAUER (1).

INTRODUCTION.

On sait qu'on fait une distinction entre les mesures de Radon et les mesures abstraites. Une mesure de Radon positive sur un espace localement compact E est par définition une forme linéaire positive sur l'espace vectoriel $\mathcal{K}(E)$ des fonctions numériques continues dans E et à support compact. Par contre, une mesure abstraite est définie comme suit : Soient E un ensemble quelconque, $\mathcal{R}$ un espace vectoriel de fonctions numériques définies dans E tel que, pour toute fonction f de $\mathcal{R}$, la fonction $|f|$ appartienne à $\mathcal{R}$; on appelle mesure abstraite toute forme linéaire positive μ sur $\mathcal{R}$ satisfaisant à la condition suivante : si l'enveloppe supérieure d'une suite croissante (f_n) de fonctions positives de $\mathcal{R}$ appartient à $\mathcal{R}$, on a l'égalité $\mu(\sup f_n) = \sup \mu(f_n)$. Toute mesure de Radon positive est, en ce sens, une mesure abstraite particulière. Tandis que la notion de mesure de Radon est essentiellement liée à l'existence d'une topologie sur E, la notion de mesure abstraite ne se réfère à aucune topologie. N. BOURBAKI [4] (2) et M. H. STONE [9] ont développé presque simultanément une théorie de l'intégration, l'un principalement pour les mesures de Radon, l'autre pour les mesures abstraites. Les méthodes utilisées et les résultats obtenus dans ces deux théories sont, en principe, les mêmes. On est donc amené à penser que la seconde théorie est beaucoup plus générale que la première.

En fait, on sait démontrer que les deux théories sont équivalentes au sens

(1) Travail effectué avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique. J'exprime ici ma profonde gratitude à MM. G. CHOQUET et M. BRELOT pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes recherches, et pour les entretiens stimulants que j'ai eus avec eux.

(2) *Voir* la bibliographie à la fin du Mémoire.

suivant (³) : Soit μ une mesure abstraite, donc une forme linéaire positive sur un espace vectoriel $\mathcal{R}$ de fonctions, définies dans un ensemble E, avec les propriétés citées. D'après S. KAKUTANI [6], il existe toujours une mesure de Radon positive $\tilde{\mu}$ sur un espace localement compact $\tilde{E}$ telle que les espaces de Riesz $L^1(\mu)$ et $L^1(\tilde{\mu})$ définis respectivement au sens de la théorie de Stone et de Bourbaki soient isomorphes avec conservation de la norme, donc aussi isomorphes en tant qu'espaces de Banach. On appelle $\tilde{E}$ l'espace de représentation de Kakutani.

Rappelons brièvement la construction de $\tilde{E}$ dans un cas particulier. Soient Γ une algèbre booléenne de sous-ensembles d'un ensemble E (avec $E \in \Gamma$), $\mathcal{R}$ l'espace vectoriel $E(\Gamma)$ des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques d'ensembles de Γ, μ une mesure abstraite sur $\mathcal{R}$. [On peut considérer une mesure abstraite sur $\mathcal{R}$ comme une fonction numérique (finie) positive σ-additive sur Γ, et réciproquement.] Soit Ψ l'algèbre booléenne achevée des sous-ensembles μ-intégrables de E modulo les ensembles μ-négligeables. D'après STONE, il existe un espace compact totalement discontinu $\tilde{E}$ et un isomorphisme ψ de Ψ sur l'algèbre booléenne $\tilde{\Psi}$ des sous-ensembles de $\tilde{E}$, à la fois ouverts et fermés. Pour un élément $\tilde{X}$ de $\tilde{\Psi}$, on pose $\tilde{\mu}(\tilde{X}) = \mu(X)$, où l'ensemble μ-intégrable X est un représentant de l'élément $\overset{-1}{\psi}(\tilde{X})$ de Ψ. La fonction $\tilde{\mu}$ est définie sans ambiguïté dans $\tilde{\Psi}$; il n'existe sur $\tilde{E}$ qu'une seule mesure de Radon positive donnant à chaque ensemble $\tilde{X}$ de $\tilde{\Psi}$ la mesure $\tilde{\mu}(\tilde{X})$. Nous désignerons encore cette mesure par $\tilde{\mu}$. L'espace $\tilde{E}$ ainsi obtenu est l'espace de représentation de Kakutani; les espaces de Riesz $L^1(\mu)$ et $L_1(\tilde{\mu})$ sont isomorphes avec conservation de la norme. Dans ce cas, même les espaces de Banach $L^p_F(\mu)$ et $L^p_F(\tilde{\mu})$ sont isomorphes quels que soient le nombre réel p $(1 \leq p < +\infty)$ et l'espace de Banach F. Signalons aussi que $\tilde{E}$ est un espace compact stonien, ce qui signifie que l'adhérence d'un ensemble ouvert est un ensemble ouvert. Dans le cas général, l'espace de Kakutani est somme d'espaces compacts stoniens.

Ces quelques remarques sur $\tilde{E}$ et $\tilde{\mu}$ nous permettent de constater deux inconvénients de la méthode de représentation de Kakutani.

1° L'espace de représentation de Kakutani dépend de la mesure abstraite μ; un changement de μ entraîne, en général, un changement de $\tilde{E}$, même si l'ensemble E et l'espace de fonctions $\mathcal{R}$ restent fixes.

2° Si l'on applique la méthode de Kakutani au cas où E est un espace localement compact et μ une mesure de Radon positive sur E, on n'obtient pas généralement E comme espace de représentation; l'espace $\tilde{E}$, qui est

(³) *Voir* BOURBAKI [4], p. 175, exercice 10.

somme d'espaces compacts stoniens, possède une structure topologique souvent plus compliquée que celle de E. Nous avons indiqué ailleurs [1] un troisième inconvénient de la méthode de Kakutani : la méthode de Kakutani ne fournit pas une représentation concrète de la théorie abstraite de l'intégrale de Riemann développée récemment par L. H. Loomis [7], à l'aide de la théorie de l'intégrale de Riemann dans des espaces localement compacts développée par O. Haupt et C. Pauc [5].

Il se pose donc une question : existe-t-il une méthode qui fournisse une représentation de la théorie de l'intégration de Stone par celle de Bourbaki, sans avoir les inconvénients de la méthode de Kakutani?

Nous allons montrer dans ce travail qu'une seule hypothèse supplémentaire sur l'espace de fonctions $\mathcal{R}$ permet de répondre affirmativement à cette question. Il s'agit de l'hypothèse suivante : étant donné une fonction quelconque f de $\mathcal{R}$, la fonction $\inf(1, f)$ appartient à $\mathcal{R}$. Cette hypothèse assure l'existence d'un espace localement compact E' tel qu'à chaque mesure abstraite μ sur $\mathcal{R}$ corresponde une mesure de Radon positive μ' sur E' pour laquelle l'espace de Banach $L^p_F(\mu')$ est isomorphe à l'espace de Banach $L^p_F(\mu)$ quels que soient le nombre réel $1 \leq p < +\infty$ et l'espace de Banach F. Si E est un espace localement compact et $\mathcal{R}$ l'espace vectoriel $\mathcal{K}(E)$ des fonctions continues dans E à support compact, E' est identique à E; la mesure μ' correspondant à μ est identique à μ. Dans un autre travail [2] nous avons montré que l'existence de l'espace E' conduit aussi à une représentation concrète de la théorie abstraite de l'intégrale de Riemann développée par Loomis. La différence essentielle entre notre méthode de représentation et celle de Kakutani peut s'énoncer comme suit : tandis qu'on retrouve, dans l'ensemble des fonctions continues définies dans l'espace de Kakutani $\tilde{E}$, seulement une image très vague de l'espace $\mathcal{R}$, l'espace $\mathcal{R}$ a une image fidèle dans l'ensemble des fonctions continues définies dans notre espace de représentation E'.

Ce travail se divise en quatre paragraphes. Le paragraphe 1 contient quelques conséquences importantes des propriétés de l'espace de fonctions $\mathcal{R}$. Dans le paragraphe 2 nous définirons les espaces $\mathcal{L}^p_F(\mu)$ et $\mathcal{L}^p_F(\mu)$ pour une mesure abstraite μ sur $\mathcal{R}$. Ceci est nécessaire puisqu'on ne trouve dans la littérature qu'une définition de ces espaces utilisant des hypothèses sur $\mathcal{R}$ trop restrictives pour nous. En fait, nos hypothèses sur $\mathcal{R}$ suffisent à définir ces espaces. Ceci n'est pas très surprenant puisque, d'après Stone [9], notre hypothèse supplémentaire sur $\mathcal{R}$ entraîne la mesurabilité de la fonction constante 1, donc une assez grande richesse d'ensembles intégrables. Dans le paragraphe 3 nous définirons l'espace de représentation E' dans le cas le plus important, où $\mathcal{R}$ sépare les points de l'ensemble E; nous montrerons l'existence d'un isomorphisme naturel de l'espace vectoriel des formes linéaires, relativement bornées sur $\mathcal{R}$ dans l'espace vectoriel des mesures de Radon sur E'. Enfin, le paragraphe 4 contient la démonstration de notre théorème de représentation.

Paragraphe 1. — L'espace $\mathcal{R}$ des fonctions élémentaires.

1.1. L'espace $\mathcal{R}$. — Soient E un ensemble quelconque, $\mathcal{R}$ un ensemble de fonctions numériques finies définies dans E et satisfaisant aux trois conditions suivantes :

(R_1) *Étant données deux fonctions quelconques f, g de $\mathcal{R}$ et deux nombres réels quelconques α, β, la fonction $\alpha f + \beta g$ appartient à $\mathcal{R}$.*

(R_2) *Étant donnée une fonction quelconque f de $\mathcal{R}$, la fonction $|f|$ appartient à $\mathcal{R}$.*

(R_3) *Étant donnée une fonction quelconque f de $\mathcal{R}$, la fonction* $\inf(1, f)$ *appartient à $\mathcal{R}$.*

Les conditions (R_1) et (R_2) entraînent que $\mathcal{R}$ est un *espace de Riesz*. Pour deux fonctions f, g de $\mathcal{R}$, les fonctions $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ appartiennent à $\mathcal{R}$. Chaque fonction $f \in \mathcal{R}$ est la différence des deux fonctions positives $f^+ = \sup(f, 0)$, $f^- = (-f)^+$ de $\mathcal{R}$: $f = f^+ - f^-$. La condition (R_3) est une conséquence de (R_1) et (R_2) si $\mathcal{R}$ contient la fonction constante 1. Il résulte des axiomes (R_1), (R_2) et (R_3) que la fonction $\inf(\alpha, f)$ appartient à $\mathcal{R}$ quels que soient le nombre $\alpha \geqq 0$ et la fonction $f \in \mathcal{R}$.

Nous désignerons par $\mathcal{R}_+$ l'ensemble des fonctions positives appartenant à $\mathcal{R}$.

1.2. L'espace $\mathcal{R}^0$. — Étudions maintenant un certain sous-espace de $\mathcal{R}$ qui joue un rôle particulier dans nos considérations.

DÉFINITION. — *Nous désignerons par $\mathcal{R}^0$ l'ensemble des fonctions bornées g de $\mathcal{R}$ ayant la propriété suivante : il existe une fonction h de $\mathcal{R}_+$ (fonction dépendant de g) telle que $h(x) < 1$ entraîne $g(x) = 0$ pour tout $x \in E$.*

Nous désignerons par $\mathcal{R}_+^0$ l'ensemble des fonctions positives appartenant à $\mathcal{R}^0$.

Il résulte immédiatement de la définition de $\mathcal{R}^0$ que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{R}$ vérifiant les axiomes de $\mathcal{R}$. Pour toute fonction bornée $f \in \mathcal{R}$ et tout nombre réel $\alpha > 0$, la fonction $f_\alpha = f - \inf(\alpha, f)$ appartient à $\mathcal{R}^0$; en effet, f_α est borné et $f_\alpha(x) = 0$ résulte de $\alpha^{-1} f^+(x) < 1$. Si $\mathcal{R}$ contient la fonction constante 1, $\mathcal{R}^0$ est simplement l'ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{R}$.

Démontrons maintenant que $\mathcal{R}^0$ est une « base d'approximation » des fonctions de $\mathcal{R}$ au sens suivant :

LEMME. — *Pour toute fonction f de $\mathcal{R}_+$, il existe une suite croissante (g_n) de fonctions de $\mathcal{R}_+^0$ simplement convergente vers f. Pour toute fonction bornée f de $\mathcal{R}_+$, il existe une suite croissante (g_n) de fonctions de $\mathcal{R}_+^0$ qui converge uniformément vers f dans E.*

Démonstration. — Soit d'abord f une fonction bornée de $\mathcal{R}_+$. Pour chaque couple de nombres réels α, β tels que $0 < \alpha < \beta$, les fonctions $f_\alpha = f - \inf(\alpha, f)$ et $k = \inf\left(1, \frac{1}{\beta - \alpha} f_\alpha\right)$ appartiennent à $\mathcal{R}^0$. On a $0 \leqq k \leqq 1$, la relation $f(x) \leqq \alpha$ entraîne $k(x) = 0$, et la relation $f(x) \geqq \beta$ entraîne $k(x) = 1$. D'après G. Nöbeling et l'auteur [8], p. 56, il existe donc une suite croissante (g_n) de fonctions de $\mathcal{R}_+^0$ qui converge uniformément vers f dans E. Soit maintenant f une fonction quelconque de $\mathcal{R}_+$. Les fonctions bornées positives $h_n = \inf(n, f)$, $n = 1, 2, \ldots$ forment une suite croissante qui converge simplement vers f. En vertu de la première partie de la démonstration, on peut associer à chaque h_n une fonction $g'_n \in \mathcal{R}_+^0$ telle que $g'_n \leqq h_n \leqq g'_n + \frac{1}{n}$. La suite croissante des fonctions $g_n = \sup(g'_1, \ldots, g'_n)$ de $\mathcal{R}_+^0$ répond à la question : on a $g'_n \leqq g_n \leqq h_n \leqq g_n + \frac{1}{n}$ pour chaque $n = 1, 2, \ldots$ donc $\lim g_n = \lim h_n = f$.

En modifiant légèrement la démonstration du lemme nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 1. — *Pour toute suite croissante (f_n) de fonctions de $\mathcal{R}_+$, il existe une suite croissante (g_n) de fonctions de $\mathcal{R}_+^0$ telle que*

$$(1) \qquad \sup_n f_n = \sup_n g_n \quad \text{et} \quad g_n \leqq f_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Démonstration. — Soit $\bar{f} = \sup f_n$ l'enveloppe supérieure de la suite (f_n). Les fonctions bornées $f'_n = \inf(n, f_n)$ de $\mathcal{R}_+$ forment une suite croissante dont l'enveloppe supérieure est encore $\bar{f}$. Selon le lemme, il existe pour chaque f'_n une fonction $g'_n \in \mathcal{R}_+^0$ telle que $g'_n \leqq f'_n \leqq g'_n + \frac{1}{n}$. La suite des fonctions $g_n = \sup(g'_1, \ldots, g'_n)$ répond à la question.

Corollaire 2. — *Pour tout ensemble H de fonctions de $\mathcal{R}_+$, filtrant pour la relation $\leqq$, il existe un ensemble H^0 de fonctions de $\mathcal{R}_+^0$, filtrant pour $\leqq$, tel que $\sup_{f \in H} f = \sup_{g \in H^0} g$ et tel que toute fonction de H^0 soit majorée par au moins une fonction de H.*

Démonstration. — Montrons que l'ensemble H^0 des fonctions $g \in \mathcal{R}_+^0$, qui sont majorées par au moins une fonction de H, possède les propriétés en question. Pour deux fonctions g_1, g_2 de H^0, la fonction $\sup(g_1, g_2)$ appartient à H^0 ; l'ensemble H^0 est donc filtrant. De la définition de H^0 résulte l'inégalité $\sup_{g \in H^0} g \leqq \sup_{f \in H} f$. On a même l'égalité. En effet, soit $\sup_{f \in H} f(x) = \alpha$ pour un élément quelconque $x \in E$. Il existe alors une suite croissante (f_n) de fonctions de H telle que $\sup f_n(x) = \alpha$. D'après le premier corollaire, il existe une suite croissante (g_n) de fonctions de H^0 telle que $\sup f_n = \sup g_n$. On a donc $\sup g_n(x) = \alpha$, d'où résulte l'énoncé.

REMARQUE. — Il résulte de la définition de $\mathcal{R}^0$ et du lemme que, pour toute fonction $g \in \mathcal{R}^0$, il existe une fonction h de $\mathcal{R}_+^0$ (et pas seulement de $\mathcal{R}_+$) telle que $h(x) < 1$ entraîne $g(x) = 0$ $(x \in E)$. On a donc $(\mathcal{R}^0)^0 = \mathcal{R}^0$.

Paragraphe 2. — Les espaces $\mathcal{L}_F^p$ et L_F^p.

2.1. Définitions. — Considérons maintenant une *mesure abstraite* μ sur $\mathcal{R}$. C'est une forme linéaire positive sur $\mathcal{R}$ satisfaisant à la condition suivante :

(M) *Si une suite croissante (f_n) de fonctions de $\mathcal{R}$ a pour enveloppe supérieure une fonction de $\mathcal{R}$, on a* $\mu\left(\sup\limits_n f_n\right) = \sup\limits_n \mu(f_n)$.

Partant de μ on définit, d'après le premier procédé d'intégration de Stone (¹), une intégrale supérieure $\bar{\mu}(f)$ pour toute fonction numérique positive f, finie ou non, définie dans E : désignons par $\sigma(f)$ l'ensemble des suites croissantes (f_n) de fonctions de $\mathcal{R}_+$ telles que $f \leq \sup f_n$; on posera

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{\mu}(f) = +\infty, & \text{si } \sigma(f) \text{ est vide;} \\ \bar{\mu}(f) = \inf\limits_{(f_n) \in \sigma(f)} \left(\sup\limits_n \mu(f_n)\right), & \text{si } \sigma(f) \text{ n'est pas vide.} \end{cases}$$

Pour une fonction $f \in \mathcal{R}_+$, on a $\bar{\mu}(f) = \mu(f)$.

Soient p un nombre réel tel que $1 \leq p < +\infty$, F un espace de Banach sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels; nous écrirons $|\mathbf{z}|$ pour la norme d'un vecteur $\mathbf{z} \in F$. Pour toute application $\mathbf{f}$ de E dans F, on posera

$$(3) \qquad N_p(\mathbf{f}) = \bar{\mu}(|\mathbf{f}|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour deux applications $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ de E dans F et tout nombre réel $\alpha \neq 0$, on a

$$N_p(\mathbf{f} + \mathbf{g}) \leq N_p(\mathbf{f}) + N_p(\mathbf{g}), \qquad N_p(\alpha \mathbf{f}) = |\alpha| N_p(\mathbf{f}).$$

On désignera par $\mathcal{F}_F^p(E, \mathcal{R}, \mu)$ [ou simplement $\mathcal{F}_F^p(\mu)$, ou $\mathcal{F}_F^p$] l'ensemble des applications $\mathbf{f}$ de E dans F telles que $N_p(\mathbf{f}) < +\infty$. L'ensemble $\mathcal{F}_F^p$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel F^E de toutes les applications de E dans F; et N_p est une semi-norme sur $\mathcal{F}_F^p$. On dit que la topologie sur $\mathcal{F}_F^p$ définie par cette semi-norme est la topologie de la convergence en moyenne d'ordre p. Enfin, nous désignerons par $\mathcal{R}_F$ (resp. $\mathcal{R}_F^0$) l'ensemble des fonctions $\mathbf{f} \in F^E$ de la forme

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i f_i,$$

(¹) *Voir* l'exposé de la théorie de Stone par BOURBAKI [4], p. 114 et suivantes, où $\bar{\mu}$ est désigné par μ^{**}.

où les $\mathbf{a}_i$ sont des vecteurs de F et où les f_i appartiennent à $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}^0$). Dans le cas $F=\mathbf{R}$, nous écrirons $\mathcal{F}^p$ au lieu de $\mathcal{F}^p_{\mathbf{R}}$; on a $\mathcal{R}_{\mathbf{R}}=\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^0_{\mathbf{R}}=\mathcal{R}^0$.

Proposition 1. — *$\mathcal{R}^0_F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}^p_F$.*

Démonstration. — Pour toute fonction $\mathbf{f}=\sum \mathbf{a}_i f_i$ de $\mathcal{R}^0_F$, on a

$$N_p(\mathbf{f})\leqq\sum N_p(\mathbf{a}_i f_i)=\sum |\mathbf{a}_i|\, N_p(f_i).$$

Il suffit donc de démontrer que $N_p(f)<+\infty$ pour toute fonction $f\in\mathcal{R}^0$. La fonction f est bornée; il existe un $h\in\mathcal{R}_+$ tel que $h(x)<1$ entraîne $f(x)=0$. On a donc $|f|^p\leqq K.h$, où $K>0$ est la borne supérieure de $|f|^p$. Il en résulte $\overline{\mu}(|f|^p)\leqq\overline{\mu}(Kh)=K\mu(h)<+\infty$, d'où la proposition.

Ce résultat nous conduit à la définition suivante :

Définition. — *On désigne par $\mathcal{L}^p_F(E, \mathcal{R}, \mu)$ [ou simplement par $\mathcal{L}^p_F(\mu)$, ou $\mathcal{L}^p_F$] l'adhérence, dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}^p_F(E, \mathcal{R}, \mu)$ muni de la topologie de la convergence en moyenne d'ordre p, de l'espace $\mathcal{R}^0_F$. On désigne par $L^p_F(E, \mathcal{R}, \mu)$ [ou $L^p_F(\mu)$, ou L^p_F] l'espace séparé normé associé à $\mathcal{L}^p_F(E, \mathcal{R}, \mu)$.*

On appellera les fonctions de $\mathcal{L}^p_F$, les fonctions de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrables au sens du *premier* procédé d'intégration de Stone. Nous écrirons $\mathcal{L}^p$ et L^p au lieu de $\mathcal{L}^p_{\mathbf{R}}$ et $L^p_{\mathbf{R}}$.

2.2. Propriétés des espaces $\mathcal{L}^p_F$. — Bourbaki [4], p. 143, ne définit $\mathcal{L}^p_F$ que dans le cas où $\mathcal{R}$ est un sous-espace de $\mathcal{F}^p$. De $\mathcal{R}\subset\mathcal{F}^p$ résulte $\mathcal{R}_F\subset\mathcal{F}^p_F$ pour tout espace de Banach F; Bourbaki définit donc $\mathcal{L}^p_F$ comme l'adhérence de $\mathcal{R}_F$ dans $\mathcal{F}^p_F$. En général, les axiomes de $\mathcal{R}$ n'entraînent pas la relation $\mathcal{R}\subset\mathcal{F}^p$; toutefois, nous ramènerons notre définition de $\mathcal{L}^p_F$ à celle de Bourbaki.

Soit pour cela μ^0 la restriction de μ à $\mathcal{R}^0$. La forme linéaire μ^0 sur $\mathcal{R}^0$ est une mesure abstraite; d'autre part $\mathcal{R}^0$ vérifie les axiomes de $\mathcal{R}$. On déduit de μ^0 l'intégrale supérieure $\overline{\mu}^0$, les semi-normes N^0_p, et les espaces $\mathcal{F}^p_F(\mu^0)$, $\mathcal{L}^p_F(\mu^0)$, $L^p_F(\mu^0)$.

Proposition 2. — *Pour toute fonction numérique positive f, finie ou non, on a $\overline{\mu}^0(f)=\overline{\mu}(f)$. Les espaces $\mathcal{F}^p_F(\mu^0)$, $\mathcal{L}^p_F(\mu^0)$, $L^p_F(\mu^0)$ sont respectivement identiques aux espaces $\mathcal{F}^p_F(\mu)$, $\mathcal{L}^p_F(\mu)$, $L^p_F(\mu)$.*

Démonstration. — L'égalité $\overline{\mu}^0(f)=\overline{\mu}(f)$, pour une fonction numérique $f\geqq 0$, est une conséquence immédiate du corollaire 1 du lemme du paragraphe 1 ; elle implique l'égalité $N^0_p(\mathbf{f})=N_p(\mathbf{f})$ pour toute application $\mathbf{f}$ de E dans F. Il y a donc identité des espaces $\mathcal{F}^p_F(\mu^0)$ et $\mathcal{F}^p_F(\mu)$. Le reste de la proposition résulte de la remarque de la fin du premier paragraphe d'après laquelle $(\mathcal{R}^0)^0 = \mathcal{R}^0$ et par conséquent $(\mathcal{R}^0)^0_F = \mathcal{R}^0_F$.

Remarque. — Puisqu'on a $\mathcal{R}^0 \subset \mathcal{F}^p(\mu)$ et $\mathcal{F}^p(\mu^0) = \mathcal{F}^p(\mu)$, l'espace des applications de E dans F de puissance $p^{\text{ième}}$ μ^0-intégrables, existe au sens de Bourbaki. A cause de $(\mathcal{R}^0)^0 = \mathcal{R}^0$, cet espace est identique à notre espace $\mathcal{L}^p_F(\mu^0)$, donc, d'après la proposition 2, identique à notre espace $\mathcal{L}^p_F(\mu)$. Cette remarque nous évite de faire toute la théorie des espaces $\mathcal{L}^p_F(\mu)$. Ainsi notre espace $\mathcal{L}^p_F(\mu)$ possède toutes les propriétés énoncées par Bourbaki, même sans la condition $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}^p(\mu)$. Par exemple, $L^p_F(\mu)$ est un espace de Banach.

Montrons maintenant que notre espace $\mathcal{L}^p_F(\mu)$ est identique à l'espace correspondant de Bourbaki s'il est défini, donc si $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}^p(\mu)$.

Proposition 3. — *Si $\mathcal{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}^p(\mu)$, l'espace $\mathcal{L}^p_F(\mu)$ est l'adhérence de $\mathcal{R}_F$ dans $\mathcal{F}^p_F(\mu)$.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}^p(\mu)$ entraîne $\mathcal{R}_F \subset \mathcal{F}^p_F(\mu)$. Il suffit de démontrer que $\mathcal{R}_F \subset \mathcal{L}^p_F(\mu)$. Traitons d'abord le cas $F = \mathbf{R}$. Soit f une fonction de $\mathcal{R}_+$. D'après le lemme du paragraphe 1, il existe une suite croissante (g_n) de fonctions de $\mathcal{R}^0_+$ simplement convergente vers f. De $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}^p(\mu)$ résulte $\overline{\mu}(f^p) < +\infty$; notre définition de $\mathcal{L}^p(\mu)$ entraîne $g_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Le théorème de Lebesgue [5], qui est applicable à $\mathcal{L}^p(\mu)$ d'après la remarque ci-dessus, montre donc que f appartient à $\mathcal{L}^p(\mu)$. Puisque chaque fonction de $\mathcal{R}$ est la différence de deux fonctions de $\mathcal{R}_+$, nous avons démontré que $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}^p(\mu)$. Supposons maintenant que F soit un espace de Banach quelconque, et considérons une fonction $\mathbf{f} = \sum \mathbf{a}_i f_i$ de $\mathcal{R}_F$ ($\mathbf{a}_i \in F$, $f_i \in \mathcal{R}$). De la première partie de notre démonstration résulte qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $i = 1, \ldots, n$, une fonction $g_i \in \mathcal{R}^0$ telle que $N_p(f_i - g_i) \leqq \varepsilon$. La fonction $\mathbf{g} = \sum \mathbf{a}_i g_i$ appartient à $\mathcal{R}^0_F$, et l'on a

$$N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}) \leqq \sum N_p(\mathbf{a}_i(f_i - g_i)) \leqq \varepsilon \sum |\mathbf{a}_i|,$$

ce qui montre que $\mathbf{f}$ appartient à $\mathcal{L}^p_F(\mu)$. Nous avons donc démontré que $\mathcal{R}_F \subset \mathcal{L}^p_F(\mu)$.

Le théorème suivant est bien connu pour les mesures de Radon ; pour les mesures abstraites, Bourbaki [4], p. 143, ne le démontre que sous des hypothèses restrictives sur $\mathcal{R}_F$.

Théorème 1. — *Soient p et q deux nombres réels tels que $1 \leqq p < +\infty$,*

---

(5) *Voir* Bourbaki [4], p. 140 et 143.

$1 \leqq q < +\infty$. *Pour qu'une application* $\mathbf{f}$ *de* E *dans* F *appartienne à* $\mathcal{L}_F^p$, *il faut et il suffit que l'application* $|\mathbf{f}|^{\frac{p}{q}-1}\mathbf{f}$ *appartienne à* $\mathcal{L}_F^q$.

DÉMONSTRATION. — Rappelons que, pour tout nombre $\alpha > 0$, l'application $\mathbf{z} \to |\mathbf{z}|^{\alpha-1}\mathbf{z}$ est définie et continue dans le complémentaire de $\mathbf{0}$ dans F; elle se prolonge par continuité au point $\mathbf{0}$ en lui donnant la valeur zéro.

Nous démontrerons d'abord ceci : soient Φ une application continue de F dans F qui laisse le point $\mathbf{0}$ invariant [par exemple $\Phi(\mathbf{z}) = |\mathbf{z}|^{\alpha-1}\mathbf{z}$ pour un $\alpha > 0$], $\mathbf{f}$ une fonction de $\mathcal{R}_F^0$; alors $\mathbf{g} = \Phi \circ \mathbf{f}$ appartient à $\mathcal{L}_F^q$. La fonction $\mathbf{f}$ est de la forme $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i f_i$ $(\mathbf{a}_i \in F,\ f_i \in \mathcal{R}^0)$. La remarque de la fin du paragraphe 1 montre qu'il existe une fonction $h_0 \in \mathcal{R}_+^0$ telle que, pour tout $x \in E$, la relation $h_0(x) < 1$ entraîne $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$, donc $\mathbf{f}(x) = 0$. L'ensemble $\mathcal{R}^0(h_0)$ des fonctions de $\mathcal{R}^0$, qui s'annulent sur l'ensemble des $x \in E$ tels que $h_0(x) < 1$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{R}^0$ vérifiant les axiomes de $\mathcal{R}$. Les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ appartiennent à $\mathcal{R}^0(h_0)$. Sur chaque sous-ensemble relativement compact de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ à n dimensions, l'application $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \to \Phi\left(\sum \mathbf{a}_i \xi_i\right)$ est uniformément continue. Puisque les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont bornées, il existe donc, pour tout $\varepsilon > 0$, un nombre $\delta > 0$, tel que

$$\sup_{1 \leqq i \leqq n} |f_i(y) - f_i(z)| < \delta \quad \text{entraîne} \quad |\mathbf{g}(y) - \mathbf{g}(z)| < \varepsilon,$$
$$\sup_{1 \leqq i \leqq n} |f_i(x)| < \delta \quad \text{entraîne} \quad |\mathbf{g}(x)| < \varepsilon$$

quels que soient $x, y, z \in E$. D'après un critère d'approximation de NÖBELING et de l'auteur [8], p. 61, la fonction $\mathbf{g}$ peut être approchée uniformément par des combinaisons linéaires de fonctions de $\mathcal{R}^0(h_0)$ à coefficients dans F. Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe donc une fonction $\mathbf{g}' \in \mathcal{R}_F^0$ telle que $|\mathbf{g} - \mathbf{g}'| \leqq \varepsilon h_0$. On a par conséquent $N_p(\mathbf{g} - \mathbf{g}') \leqq \varepsilon N_p(h_0)$; puisque h_0 est indépendant de ε, il en résulte que $\mathbf{g} \in \mathcal{L}_F^q$.

Pour le reste de la démonstration nous nous inspirerons de BOURBAKI [4], p. 142. Soit $\mathbf{f}$ une fonction de $\mathcal{L}_F^p$. D'après la remarque précédant la proposition 3, il existe une suite $(\mathbf{f}_n)$ de fonctions de $\mathcal{R}_F^0$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_p(\mathbf{f}_n) < +\infty \qquad \text{et} \qquad \mathbf{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n(x)$$

presque partout dans E (par rapport à μ). La première partie de notre démonstration $\left[\text{avec } \Phi(\mathbf{z}) = |\mathbf{z}|^{\frac{p}{q}-1}\mathbf{z}\right]$ montre que la fonction

$$\mathbf{g}_n = |\mathbf{f}_1 + \ldots + \mathbf{f}_n|^{\frac{p}{q}-1}(\mathbf{f}_1 + \ldots + \mathbf{f}_n)$$

appartient à $\mathcal{L}_F^q$. On a

$$|\mathbf{g}_n|^q = |\mathbf{f}_1 + \ldots + \mathbf{f}_n|^p \leqq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{f}_n|\right)^p = h^q,$$

où h est la fonction numérique positive (pas nécessairement finie) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{f}_n|\right)^{\frac{p}{q}}$;
elle vérifie l'inégalité

$$N_q(h))^q = \left(N_p\left(\sum |\mathbf{f}_n|\right)\right)^p \leqq \left(\sum N_p(\mathbf{f}_n)\right)^p < +\infty,$$

d'où résulte $N_q(h) < +\infty$. D'autre part, $\mathbf{g}_n(x)$ tend presque partout vers $\mathbf{g}(x) = |\mathbf{f}(x)|^{\frac{p}{q}-1}\mathbf{f}(x)$. Le théorème de Lebesgue montre donc que $\mathbf{g}$ appartient à $\mathcal{L}_F^q$. La réciproque est immédiate puisque $\mathbf{g} = |\mathbf{f}|^{\frac{p}{q}-1}\mathbf{f}$ entraîne $\mathbf{f} = |\mathbf{g}|^{\frac{q}{p}-1}\mathbf{g}$.

Remarque. — Il résulte du théorème 1 que $\mathcal{L}^p$ est l'ensemble des fonctions numériques f telles que $|f|^{p-1}f$ appartient à $\mathcal{L}^1$. C'est la définition de l'espace $\mathcal{L}^p$ à l'aide de $\mathcal{L}^1$ donné par Stone [9]. Cependant Stone, dans sa théorie de l'intégration, considère comme éléments de $\mathcal{L}^1$ non seulement des fonctions définies dans E tout entier mais aussi des fonctions définies presque partout dans E. Nous avons laissé de côté cette possibilité de généralisation des espaces $\mathcal{L}_F^p$; ce ne sont que les espaces L_F^p qui jouent un rôle dans notre théorème de représentation.

2.3. Les espaces $\mathcal{L}_F^{p*}$. — Considérons une forme linéaire positive μ sur $\mathcal{R}$ satisfaisant à la condition suivante, plus restrictive que (M) :

(M*) *Si H est un ensemble de fonctions de $\mathcal{R}$ filtrant pour la relation $\leqq$, ayant pour enveloppe supérieure une fonction de $\mathcal{R}$, on a* $\mu\left(\sup_{f\in H} f\right) = \sup_{f\in H} \mu(f)$.

μ est donc une mesure abstraite particulière. On sait que toute mesure de Radon positive sur un espace localement compact, considérée comme forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact, vérifie la condition (M*).

Dans le reste du paragraphe nous supposerons que μ vérifie (M*). On définit, d'après le second procédé d'intégration de Stone [9] ([6]), une deuxième intégrale supérieure $\mu^*(f)$ pour toute fonction numérique positive

([6]) *Voir* aussi Bourbaki [4], p. 114 et suivantes.

f, finie ou non, définie dans E : désignons par $\sigma^*(f)$ l'ensemble des sous-ensembles H de $\mathcal{R}_+$ filtrant par $\leqq$ tels que $f \leqq \sup_{h \in H} h$; on posera

$$(4) \qquad \begin{cases} \mu^*(f) = +\infty, & \text{si } \sigma^*(f) \text{ est vide;} \\ \mu^*(f) = \inf\limits_{H \in \sigma^*(f)} \left(\sup\limits_{h \in H} \mu(h)\right), & \text{si } \sigma^*(f) \text{ n'est pas vide.} \end{cases}$$

Pour toute fonction $f \in \mathcal{R}_+$, on a $\mu^*(f) = \mu(f)$.

Pour $1 \leqq p < +\infty$ et toute application $\mathbf{f}$ de E dans un espace de Banach F, on posera

$$(5) \qquad N_p^*(\mathbf{f}) = (\mu^*(|\mathbf{f}|^p))^{\frac{1}{p}}.$$

En remplaçant, dans la définition des espaces $\mathcal{F}_F^p$, $\mathcal{L}_F^p$, L_F^p, la semi-norme N_p par N_p^*, on obtient la définition des espaces $\mathcal{F}_F^{p*}$, $\mathcal{L}_F^{p*}$, L_F^{p*}. Nous écrirons $\mathcal{F}^{p*}$ au lieu de $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^{p*}$, etc. On appellera les fonctions de $\mathcal{L}_F^{p*}$, les fonctions de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable au sens du *second* procédé d'intégration de Stone.

Étudions maintenant les relations entre les espaces $\mathcal{L}_F^p$ et $\mathcal{L}_F^{p*}$; mais remarquons d'abord que, pour toute application $\mathbf{f}$ de E dans F, on a

$$(6) \qquad N_p^*(\mathbf{f}) \leqq N_p(\mathbf{f}).$$

Proposition 4. — *L'espace $\mathcal{L}_F^p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_F^{p*}$. Pour toute fonction $\mathbf{f}$ de $\mathcal{L}_F^p$, on a*

$$(7) \qquad N_p^*(\mathbf{f}) = N_p(\mathbf{f}).$$

Démonstration. — Soit $\mathbf{f}$ une fonction de $\mathcal{L}_F^p$. Il existe une suite $(\mathbf{g}_n)$ de fonctions de $\mathcal{R}_F^0$ telle que $\lim\limits_{n \to \infty} N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}_n) = 0$; de (6) résulte d'une part : $\lim N_p^*(\mathbf{f} - \mathbf{g}_n) = 0$, d'autre part : $N_p^*(\mathbf{f}) \leqq N_p(\mathbf{f}) < +\infty$. Donc $\mathbf{f}$ appartient à $\mathcal{L}_F^{p*}$, ce qui prouve que $\mathcal{L}_F^p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_F^{p*}$ D'après le théorème 1, on a $|\mathbf{f}|^{p-1}\mathbf{f} \in \mathcal{L}_F^1$; la fonction $|\mathbf{f}|^p = \left||\mathbf{f}|^{p-1}\mathbf{f}\right|$ appartient ainsi [7] à $\mathcal{L}^1$. Il suffit donc de montrer l'égalité (7) pour $p = 1$ et $F = \mathbf{R}$. Soient f une fonction de $\mathcal{L}^1$, (g_n) une suite de fonctions de $\mathcal{R}^0$ telle que $\lim N_1(f - g_n) = 0$. De l'inégalité $|N_1(f) - N_1(g_n)| \leqq N_1(f - g_n)$, résulte $N_1(f) = \lim N_1(g_n) = \lim \bar{\mu}(|g_n|)$. D'après (6) on a aussi $\lim N_1^*(f - g_n) = 0$, d'où résulte $N_1^*(f) = \lim N_1^*(g_n) = \lim \mu^*(|g_n|)$. Puisque $|g_n|$ appartient à $\mathcal{R}^0$:

$$\mu(|g_n|) = \bar{\mu}(|g_n|) = \mu^*(|g_n|),$$

donc $N_1^*(f) = N_1(f)$.

---

[7] *Voir* Bourbaki, [4], p. 135 et 143.

Proposition 5. — *Pour toute fonction* $\mathbf{f}^\star$ *de* $\mathcal{L}_F^{p\star}$, *il existe une fonction* $\mathbf{f}$ *de* $\mathcal{L}_F^p$ *telle que* $N_p^\star(\mathbf{f}^\star - \mathbf{f}) = 0$. *Pour toute fonction positive* $f^\star$ *de* $\mathcal{L}^{p\star}$, *il existe une fonction positive* f *de* $\mathcal{L}^p$ *telle que* $N_p^\star(f^\star - f) = 0$.

Démonstration. — Pour $\mathbf{f}^\star \in \mathcal{L}_F^{p\star}$, il existe une suite (g_n) de fonctions de $\mathcal{R}_F^0$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} N_p^\star(\mathbf{f}^\star - \mathbf{g}_n) = 0$. Il en résulte : $\lim\limits_{m,n\to\infty} N_p^\star(\mathbf{g}_n - \mathbf{g}_m) = 0$, donc, d'après la proposition 4, $\lim\limits_{m,n\to\infty} N_p(\mathbf{g}_n - \mathbf{g}_m) = 0$. Puisque l'espace $\mathcal{L}_F^p$ est complet, la suite $(\mathbf{g}_n)$ possède une limite $\mathbf{f}$ dans $\mathcal{L}_F^p$ qui répond à la question. En effet, on a

$$N_p^\star(\mathbf{f}^\star - \mathbf{f}) \leqq N_p^\star(\mathbf{f}^\star - \mathbf{g}_n) + N_p^\star(\mathbf{f} - \mathbf{g}_n) = N_p^\star(\mathbf{f}^\star - \mathbf{g}_n) + N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}_n),$$

donc $N_p^\star(\mathbf{f}^\star - \mathbf{f}) = 0$.

Soient maintenant $f^\star \geqq 0$ une fonction de $\mathcal{L}^{p\star}$ et (g_n) une suite de fonctions de $\mathcal{R}^0$ telle que $\lim N_p^\star(f^\star - g_n) = 0$. De $\big|f^\star - |g_n|\big| \leqq |f^\star - g_n|$ résulte $N_p^\star(f^\star - |g_n|) \leqq N_p^\star(f^\star - g_n)$. On peut donc supposer que toute fonction g_n est positive. Comme ci-dessus on montre l'existence d'une fonction $f \in \mathcal{L}^p$ telle que $\lim N_p(f - g_n) = 0$. De $\big||f| - g_n\big| \leqq |f - g_n|$ résulte alors qu'on peut supposer $f \geqq 0$. La démonstration générale montre que $N_p^\star(f^\star - f) = 0$.

Désignons par $\mathcal{N}_F^p$ l'adhérence de 0 dans $\mathcal{L}_F^p$, par $\mathcal{N}_F^{p\star}$ l'adhérence de 0 dans $\mathcal{L}_F^{p\star}$; alors $\mathcal{N}_F^p$ est l'ensemble des $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_F^p$ tels que $N_p(\mathbf{f}) = 0$, et $\mathcal{N}_F^{p\star}$ est l'ensemble des $\mathbf{f}^\star \in \mathcal{L}_F^{p\star}$ tels que $N_p^\star(\mathbf{f}^\star) = 0$. Les propositions 4 et 5 entraînent que chaque classe d'équivalence de $\mathcal{L}_F^p$ modulo $\mathcal{N}_F^p$ est contenue dans une et une seule classe d'équivalence de $\mathcal{L}_F^{p\star}$ modulo $\mathcal{N}_F^{p\star}$, et qu'inversement chaque classe d'équivalence de $\mathcal{L}_F^{p\star}$ modulo $\mathcal{N}_F^{p\star}$ contient une classe d'équivalence de $\mathcal{L}_F^{p\star}$ modulo $\mathcal{N}_F^{p\star}$. Cette correspondance biunivoque entre les classes d'équivalences de $\mathcal{L}_F^p$ et de $\mathcal{L}_F^{p\star}$ établit un isomorphisme canonique entre l'espace vectoriel $L_F^p = \mathcal{L}_F^p / \mathcal{N}_F^p$ et l'espace vectoriel $L_F^{p\star} = \mathcal{L}_F^{p\star} / \mathcal{N}_F^{p\star}$ qui conserve la norme. Dans le cas $F = \mathbf{R}$, les espaces L^p et $L^{p\star}$ sont des espaces de Riesz complètement réticulés pour la structure d'ordre déduite de la structure d'ordre naturelle de $\mathcal{L}^p$ et $\mathcal{L}^{p\star}$ [8]. La deuxième partie de la proposition 5 montre que l'isomorphisme canonique de L^p sur $L^{p\star}$ est aussi un isomorphisme de l'espace de Riesz L^p sur l'espace de Riesz $L^{p\star}$. Or, nous avons démontré :

Théorème 2. — *Soit* μ *une mesure abstraite avec la propriété* $(\mathrm{M}^\star)$. *Il existe un isomorphisme de l'espace de Banach* L_F^p *sur l'espace de Banach* $L_F^{p\star}$; *pour* $F = \mathbf{R}$, *cet isomorphisme est aussi un isomorphisme de* L^p *sur* $L^{p\star}$ *considérés comme espaces de Riesz* [9].

---

[8] *Voir* Bourbaki, [4], p. 138 et 143.

[9] Pour $p = 1$, $F = \mathbf{R}$, ce théorème est connu ; *voir* Bourbaki [4], p. 143.

REMARQUES. — 1° Comme nous l'avons déjà remarqué, chaque mesure de Radon positive sur un espace localement compact E, considérée comme forme linéaire sur $\mathcal{K}(E)$ (espace des fonctions continues à support compact) possède la propriété (M*). Pour une mesure de Radon positive sur E, les espaces $\mathcal{L}_F^{p*}$ et L_F^{p*} existent donc toujours. Une application $\mathbf{f}$ de E dans l'espace de Banach F est de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable au sens de la théorie de Bourbaki si $\mathbf{f}$ appartient à $\mathcal{L}_F^{p*}$. Pour une mesure de Radon positive, les espaces $\mathcal{L}_F^p$ et L_F^p définis dans le livre de BOURBAKI sont donc, dans notre terminologie, les espaces $\mathcal{L}_F^{p*}$ et L_F^{p*} (10).

2° Pour une mesure abstraite μ sur $\mathcal{R}$ avec la propriété (M*), les espaces $\mathcal{F}_F^{p*}$, $\mathcal{L}_F^{p*}$, etc. possèdent les mêmes propriétés que celles démontrées pour $\mathcal{F}_F^p$, $\mathcal{L}_F^p$, etc. dans les propositions 2 et 3, et dans le théorème 1. Les démonstrations sont presque les mêmes; il faut simplement remplacer $\bar{\mu}$, N_p, etc. par μ^*, N_p^*, etc. et, dans la démonstration de la proposition 2, le corollaire 1 du lemme du paragraphe 1 par le corollaire 2 de ce lemme.

Paragraphe 3. — L'espace $E'_{\mathcal{R}}$.

3.1. Propriétés topologiques. — Rappelons quelques résultats que nous avons obtenus dans [2] et qui nous permettront de démontrer le théorème de représentation du prochain paragraphe.

Nous supposerons, dans le reste de ce paragraphe, que $\mathcal{R}$ vérifie, outre (R_1), (R_2) et (R_3), les axiomes suivants :

(S_1) *Étant donné un élément quelconque x de E, il existe une fonction f de $\mathcal{R}$ telle que $f(x) \neq 0$.*

(S_2) *Étant donné un couple quelconque d'éléments différents x, y de E, il existe une fonction f de $\mathcal{R}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*

Il résulte du lemme du paragraphe 1 que $\mathcal{R}^0$ vérifie aussi les axiomes (S_1) et (S_2) de $\mathcal{R}$ [ainsi que (R_1), (R_2), et (R_3)].

THÉORÈME 3. — *Si $\mathcal{R}$ vérifie les axiomes* (R_1), (R_2), (R_3) *et* (S_1), (S_2), *il existe un espace topologique $E'_{\mathcal{R}}$ ayant les propriétés suivantes :*

1° *$E'_{\mathcal{R}}$ est localement compact et contient E comme sous-ensemble dense;*

2° *toute fonction f de $\mathcal{R}$ peut se prolonger en une fonction continue f' définie dans $E'_{\mathcal{R}}$ s'annulant à l'infini* (11);

(10) *Voir* BOURBAKI [4], p. 135, proposition 10.

(11) Cela signifie que, pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble des $x' \in E'_{\mathcal{R}}$, tels que $|f'(x')| \geq \alpha$, est compact. Donc, pour un espace compact $E'_{\mathcal{R}}$, toute fonction continue dans $E'_{\mathcal{R}}$ s'annule à l'infini.

3° *pour chaque point x' de $E'_{\mathcal{R}}$, il existe une fonction f de $\mathcal{R}$ dont le prolongement f' ne s'annule pas au point x';*

4° *pour chaque couple de points différents x', y' de $E'_{\mathcal{R}}$, il existe une fonction f de $\mathcal{R}$ telle qu'on ait $f'(x') \neq f'(y')$ pour le prolongement f' de f.*

Ces propriétés déterminent l'espace $E'_{\mathcal{R}}$ à une homéomorphie près laissant E ponctuellement invariant.

Démonstration. — Remarquons d'abord que le prolongement f' d'une fonction $f \in \mathcal{R}$ est fini, si et seulement si f est bornée. Pour une fonction $f \in \mathcal{R}$ non bornée, l'ensemble des points $x' \in E'_{\mathcal{R}}$, tels que $|f'(x')| = +\infty$, est compact et disjoint de E, donc est un ensemble rare.

Nous avons démontré le théorème 3 dans [2], p. 471, dans le cas particulier où toute fonction de $\mathcal{R}$ est bornée. Montrons maintenant qu'il n'est pas nécessaire de faire cette hypothèse.

Soit $\mathcal{R}^*$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{R}$; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{R}$ vérifiant les axiomes (R_1), (R_2), (R_3) et (S_1), (S_2) de $\mathcal{R}$. L'espace $E'_{\mathcal{R}^*}$ existe donc d'après [2]. Nous démontrerons que $E'_{\mathcal{R}^*}$ est aussi un espace $E'_{\mathcal{R}}$. Pour cela il suffit de montrer que chaque fonction $f \in \mathcal{R}$ peut se prolonger en une fonction continue f', définie dans $E'_{\mathcal{R}^*}$, s'annulant à l'infini. Les fonctions $f_n = \inf(n, f)$, $n = 1, 2, \ldots$ appartiennent à $\mathcal{R}^*$; chacune d'elles possède donc un prolongement continu f'_n sur $E'_{\mathcal{R}^*}$. Les fonctions f'_n sont positives, s'annulent à l'infini, et forment une suite croissante. La fonction $f' = \sup f'_n$ répond à la question. En effet, la fonction f', étant l'enveloppe supérieure d'une suite de fonctions continues, est semi-continue inférieurement, donc continue en chaque point $a' \in E'_{\mathcal{R}^*}$ où $f'(a') = +\infty$. Soit $a' \in E'_{\mathcal{R}^*}$ tel que $f'(a') = \alpha < +\infty$. Puisque, pour un nombre naturel fixe $n_0 > \alpha$, on a $f'_{n_0}(a') \leqq \alpha < n_0$, il existe un voisinage V' de a' tel que $f'_{n_0}(x') < n_0$ pour tout $x' \in V'$. Il s'ensuit que $f_{n_0}(x) = \inf(n_0, f(x)) < n_0$, donc $f(x) = f_{n_0}(x) = f_n(x) < n_0$ pour tout $n \geqq n_0$ et tout $x \in V = V' \cap E$; d'où résulte $f'_{n_0}(x') = f'_n(x')$, pour tout $n \geqq n_0$ et tout $x' \in V'$, puisque V est dense dans l'espace V'. Par conséquent on a $f'(x') = f'_{n_0}(x')$ pour tout $x' \in V'$. Donc, f' est continu en a'. Nous avons ainsi démontré que f' est un prolongement continu de f. Notre démonstration de cette propriété montre que, pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble des $x' \in E'_{\mathcal{R}^*}$, tels que $f'(x') \geqq \alpha$, est égal à l'ensemble des x' tels que $f'_{n_0}(x') \geqq \alpha$, pourvu que $n_0 > \alpha$. Ce dernier ensemble étant compact, f' s'annule à l'infini.

Nous avons démontré l'unicité de $E'_{\mathcal{R}}$ dans le cas $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$. A cause de l'axiome ($R_3$), on voit immédiatement qu'un espace $E'_{\mathcal{R}}$ est aussi un espace $E'_{\mathcal{R}^*}$. L'unicité de $E'_{\mathcal{R}}$ est donc prouvée aussi dans le cas général.

D'après le lemme du paragraphe 1, toute fonction de $\mathcal{R}^*$ peut être approchée uniformément par des fonctions de $\mathcal{R}^0$. Il en résulte que chaque espace $E'_{\mathcal{R}^0}$ est aussi un espace $E'_{\mathcal{R}^*}$. Nous avons ainsi démontré :

COROLLAIRE. — *Les trois espaces $E'_{\mathcal{R}}$, $E'_{\mathcal{R}^*}$, $E'_{\mathcal{R}^0}$ sont égaux, à des homéomorphies près laissant E ponctuellement invariant.*

Rappelons encore deux résultats démontrés dans [2], p. 473 et 462, sous l'hypothèse que chaque fonction de $\mathcal{R}$ est bornée. Le corollaire du théorème 4 nous permet d'abandonner cette hypothèse ou de remplacer $\mathcal{R}$ par $\mathcal{R}^0$.

PROPOSITION 6. — *Pour qu'une fonction f de $\mathcal{R}$ appartienne à $\mathcal{R}^0$, il faut et il suffit que le prolongement continu de f sur $E'_{\mathcal{R}}$ soit fini et à support compact.*

PROPOSITION 7. — *Soit $f' \geqq 0$ une fonction numérique finie continue dans $E'_{\mathcal{R}}$ qui s'annule à l'infini. Il existe une suite croissante (g_n) de fonctions de $\mathcal{R}^0_+$ telle que la suite (g'_n) des prolongements continus des fonctions g_n sur $E'_{\mathcal{R}}$ converge uniformément vers f' dans $E'_{\mathcal{R}}$.*

3.2. Représentation de formes linéaires sur $\mathcal{R}$ par des mesures de Radon sur $E'_{\mathcal{R}}$. — Désignons, dans ce qui suit, par f' le prolongement continu sur $E'_{\mathcal{R}}$ d'une fonction $f \in \mathcal{R}$, et par $\mathcal{R}'$ (resp. $\mathcal{R}^{0\prime}$) l'ensemble des prolongements continus f' de toutes les fonctions f de $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}^0$). D'après la proposition 6, $\mathcal{R}^{0\prime}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$ des fonctions numériques finies continues dans $E'_{\mathcal{R}}$ et à support compact.

THÉORÈME 4. — *Soit μ une forme linéaire positive sur $\mathcal{R}$. L'application $g' \to \mu(g)$, où g' est une fonction de $\mathcal{R}^{0\prime}$, g sa restriction à E, est une forme linéaire positive μ'_0 sur $\mathcal{R}^{0\prime}$. Elle peut se prolonger d'une manière et d'une seule en une forme linéaire positive μ' sur $\mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$, donc en une mesure de Radon positive sur $E'_{\mathcal{R}}$* ([12]).

DÉMONSTRATION. — Montrons d'abord que, pour toute fonction $k' \in \mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$ et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions g', $h' \in \mathcal{R}^{0\prime}$ telles que $g' \leqq k' \leqq h'$ et $\mu'_0(h' - g') \leqq \varepsilon$. Comme la partie positive et la partie négative de k' appartiennent à $\mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$, on peut supposer que $k' \geqq 0$. Il existe une fonction h'_0 continue dans $E'_{\mathcal{R}}$ telle que $0 \leqq h'_0 \leqq 1$, $h'_0(x') = 1$ pour tout point x' du support compact de k'. La proposition 7 et la propriété (R_3) de $\mathcal{R}^0$ montrent qu'il existe même une telle fonction dans $\mathcal{R}^{0\prime}$. La proposition 7 assure de plus l'existence d'une fonction $g' \in \mathcal{R}^{0\prime}$ telle que $0 \leqq g' \leqq k' \leqq g' + \varepsilon$;

([12]) Ce théorème se trouve en principe déjà dans [2], p. 464. En ce qui nous concerne, une démonstration indépendante des résultats de [2] est nécessaire.

de ceci et de la définition de h'_0 résulte l'inégalité $0 \leqq g' \leqq k' \leqq g' + \varepsilon h'_0$. Les fonctions g' et $h' = g' + \varepsilon h'_0$ appartiennent à $\mathcal{R}^{0\prime}$; en outre $g' \leqq k' \leqq h'$, et enfin $\mu'_0(h' - g') = \varepsilon \mu'_0(h'_0)$, d'où notre proposition, puisque h'_0 ne dépend pas du choix de ε. Pour toute fonction $k' \in \mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$, on a donc l'égalité

$$\sup_{g' \leqq k',\, g' \in \mathcal{R}^{0\prime}} \mu'_0(g') = \inf_{k' \leqq h',\, h' \in \mathcal{R}^{0\prime}} \mu'_0(h').$$

Si l'on désigne par $\mu'(k')$ le nombre réel défini par cette égalité, on constate immédiatement que la fonction μ' ainsi définie est une forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$ qui prolonge μ'_0. L'égalité montre en outre que μ' est la seule forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$ ayant cette propriété ([13]).

Étudions maintenant quelques conséquences du théorème 4. Par le procédé de l'énoncé de ce théorème, on fait correspondre à chaque forme linéaire positive μ sur $\mathcal{R}$ une certaine mesure de Radon positive μ' sur $E'_{\mathcal{R}}$; désignons μ' par $\Phi(\mu)$. Il est immédiat, en vertu du théorème 4, qu'on a, pour chaque couple de formes linéaires positives μ_1, μ_2 sur $\mathcal{R}$ et de nombres positifs α_1, α_2, l'égalité

$$\Phi(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) = \alpha_1 \Phi(\mu_1) + \alpha_2 \Phi(\mu_2).$$

Il en résulte que Φ se prolonge d'une seule manière en une application linéaire de $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}(E'_{\mathcal{R}})$ des mesures de Radon sur $E'_{\mathcal{R}}$, où $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ désigne l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{R}$ telles que chacune d'elles soit la différence de deux formes linéaires positives nous désignerons aussi ce prolongement par Φ. Les éléments de $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ sont précisément les formes linéaires *relativement bornées* sur $\mathcal{R}$; on a $\mathcal{M}(E'_{\mathcal{R}}) = \mathcal{J}(\mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}}))$ ([14]). Le cône des formes positives de $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ définit une structure d'ordre par rapport à laquelle $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ est un espace de Riesz complètement réticulé; en particulier, $\mathcal{M}(E'_{\mathcal{R}})$ est un espace de Riesz complètement réticulé. L'application Φ est positive, c'est-à-dire que la relation $\mu \geqq 0\,(\mu \in \mathcal{J}(\mathcal{R}))$ entraîne $\Phi(\mu) \geqq 0$.

PROPOSITION 8. — 1° *Le sous-espace* $\overset{-1}{\Phi}(0)$ *de* $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ *est l'ensemble des formes linéaires* μ *de* $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ *telles qu'on ait*

$$\mu(f) = \mu(\inf(1, f)) \tag{8}$$

pour toute fonction bornée f *de* $\mathcal{R}$.

([13]) En appliquant une notion introduite dans LOOMIS [7], p. 170, on peut dire que la mesure de Radon μ' est la restriction à $\mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$ de la complétion bilatérale de la forme linéaire μ'_0.

([14]) *Voir* BOURBAKI [4], p. 34 et 54.

2° $\overset{-1}{\Phi}(0)$ *est une bande dans* $\mathcal{J}(\mathcal{R})$. *La bande complémentaire* [*des formes étrangères à toutes les formes de* $\overset{-1}{\Phi}(0)$] *se compose de toutes les formes* μ *de* $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ *qui vérifient, pour toute fonction positive* f *de* $\mathcal{R}$, *les deux conditions suivantes :*

$$(9)\qquad \lim_{n\to\infty} \mu\left(\inf\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) = 0;$$

$$(10)\qquad \lim_{n\to\infty} \mu(\inf(n, f)) = \mu(f) \quad (^{15}).$$

Démonstration. — Désignons par $\mathcal{R}^*$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{R}$, par $\mathcal{B}_0$ l'ensemble des $\mu\in\mathcal{J}(\mathcal{R})$ vérifiant la condition (8) pour tout $f\in\mathcal{R}^*$, par $\mathcal{B}_1$ l'ensemble des $\mu\in\mathcal{J}(\mathcal{R})$ vérifiant les conditions (9) et (10) pour tout $f\in\mathcal{R}_+$. Les ensembles $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{J}(\mathcal{R})$. Signalons encore une conséquence immédiate de (8) : si μ est une forme de $\mathcal{B}_0$, alors $\mu(f) = \mu(\inf(\alpha, f))$ pour tout $f\in\mathcal{R}^*$ et tout $\alpha > 0$.

La deuxième partie de la proposition sera démontrée si l'on sait que $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ est somme directe ordonnée de $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ ([16]). Montrons d'abord que toute forme positive $\mu\in\mathcal{J}(\mathcal{R})$ admet une décomposition en somme d'une forme positive $\mu_0\in\mathcal{B}_0$ et d'une forme positive $\mu_1\in\mathcal{B}_1$. Pour toute fonction positive $f\in\mathcal{R}^*$, nous posons $\mu'_0(f) = \inf\limits_{n=1,2,\dots} \mu\left(\inf\left(\frac{1}{n}, f\right)\right)$. On a $0 \leqq \mu'_0(f) \leqq \mu(f)$. Pour deux fonctions positives $f, g\in\mathcal{R}^*$, il résulte des inégalités

$$\inf\left(\frac{1}{2n}, f\right) + \inf\left(\frac{1}{2n}, g\right) \leqq \inf\left(\frac{1}{n}, f+g\right) \leqq \inf\left(\frac{1}{n}, f\right) + \inf\left(\frac{1}{n}, g\right)$$

que $\mu'_0(f+g) = \mu'_0(f) + \mu'_0(g)$. Ainsi il existe une forme linéaire positive sur $\mathcal{R}^*$ et une seule qui prolonge μ'_0 ; nous la désignerons aussi par μ'_0. Considérons la forme linéaire positive μ'_1 sur $\mathcal{R}^*$ définie par $\mu'_1(f) = \mu(f) - \mu'_0(f)$ pour tout $f\in\mathcal{R}^*$. En répétant la conclusion ci-dessus, on montre l'existence d'une forme linéaire positive μ_1 sur $\mathcal{R}$ vérifiant $\mu_1(f) = \sup\limits_{n=1,2,\dots} \mu'_1(\inf(n, f))$ pour tout $f\in\mathcal{R}_+$. On voit immédiatement que μ_1 prolonge μ'_1 et que $0 \leqq \mu_1(f) \leqq \mu(f)$ pour tout $f\in\mathcal{R}_+$. Donc $\mu_0 = \mu - \mu_1$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{R}$ telle que $\mu = \mu_0 + \mu_1$. Montrons que μ_0 et μ_1 répondent à la question. Pour une fonction $f \geqq 0$ de $\mathcal{R}^*$, on a

$$\mu_0(f) = \mu'_0(f) = \inf \mu\left(\inf\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) = \inf \mu\left(\frac{1}{n}, \inf(1, f)\right)$$
$$= \mu'_0(\inf(1, f)) = \mu_0(\inf(1, f));$$

([15]) Pour la définition d'une bande, *voir* Bourbaki [4], p. 23 et suivantes. Comme dans chaque espace de Riesz, on pose $|\mu| = \sup(\mu, -\mu)$, $\mu^+ = \sup(\mu, 0)$, $\mu^- = (-\mu)^+$; il en résulte $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ et $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Deux formes linéaires μ, ν de $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ sont dites étrangères si $\inf(|\mu|, |\nu|) = 0$.

([16]) *Voir* Bourbaki [4], p. 28, exercice 6.

pour une fonction quelconque $f \in \mathcal{R}^*$, on a $\inf(1, f) = \inf(1, f^+) - f^-$, d'où résulte l'égalité (8) pour μ_0. La forme positive μ_0 appartient donc à $\mathcal{B}_0$. Soit maintenant f une fonction de $\mathcal{R}_+$. Pour une telle fonction, la forme μ_1 satisfait à (10) par sa définition. Il résulte de l'identité $\inf\left(\frac{1}{n}, f\right) = \inf\left(\frac{1}{n}, \inf(1, f)\right)$ que, pour la démonstration de (9), nous pouvons supposer la fonction $f \in \mathcal{R}_+$ bornée. On a alors l'égalité

$$\mu_1\left(\inf\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) = \mu_1'\left(\inf\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) = \mu\left(\inf\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) - \mu_0'\left(\inf\left(\frac{1}{n}, f\right)\right)$$
$$= \mu\left(\inf\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) - \mu_0'(f)$$

qui, avec la définition de $\mu_0'(f)$, entraîne $\lim \mu_1\left(\inf\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) = 0$. Par conséquent, μ_1 appartient à $\mathcal{B}_1$. Une forme linéaire quelconque $\mu \in \mathcal{J}(\mathcal{R})$ peut aussi se décomposer en somme d'une forme $\mu_0 \in \mathcal{B}_0$ et d'une forme $\mu_1 \in \mathcal{B}_1$, puisqu'elle est la différence de deux formes positives de $\mathcal{J}(\mathcal{R})$. Pour montrer l'unicité de cette décomposition, il suffit de prouver que l'égalité $0 = \mu_0 + \mu_1$ ($\mu_0 \in \mathcal{B}_0$, $\mu_1 \in \mathcal{B}_1$) entraîne $\mu_0 = \mu_1 = 0$. Pour toute fonction positive $f \in \mathcal{R}^*$ et tout $n = 1, 2, \ldots$ on a

$$0 = \mu_0\left(\inf\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) + \mu_1\left(\inf\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) = \mu_0(f) + \mu_1\left(\inf\left(\frac{1}{n}, f\right)\right);$$

de (9) résulte donc $\mu_0(f) = \mu_1(f) = 0$.

Ainsi les formes μ_0 et μ_1 sont nulles sur $\mathcal{R}^*$. La condition (10) montre alors que μ_1 est identiquement nulle sur $\mathcal{R}$, donc que $\mu_0 = \mu_1 = 0$. L'espace $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ est ainsi somme directe ordonnée de $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$.

La démonstration de la première partie de notre proposition est maintenant facile. Soit μ une forme linéaire de $\mathcal{J}(\mathcal{R})$. Si μ appartient à $\overset{-1}{\Phi}(0)$, le théorème 4 affirme que $\mu(g) = 0$ pour tout $g \in \mathcal{R}^0$. Pour une fonction $f \in \mathcal{R}^*$, $g = f - \inf(1, f)$ appartient à $\mathcal{R}^0$; par conséquent l'égalité (8) est vraie. Supposons inversement que (8) soit valable pour tout $f \in \mathcal{R}^*$. Comme $\mathcal{B}_0$ est une bande, la forme μ^+ appartient ainsi que μ à $\mathcal{B}_0$; on a donc $\mu^+(f) = \mu^+(\inf(\alpha, f))$ pour tout $f \in \mathcal{R}^*$ et $\alpha > 0$. Soit en particulier f une fonction de $\mathcal{R}_+^0$; il existe alors une fonction $h \in \mathcal{R}_+$ telle que $h(x) < 1$ entraîne $f(x) = 0$ ($x \in E$). Par suite on a $\inf(\alpha, f) \leq \alpha h$, donc $0 \leq \mu^+(f) = \mu^+(\inf(\alpha, f)) \leq \alpha\mu^+(h)$ pour tout $\alpha > 0$. Ainsi $\mu^+(f)$ s'annule pour tout $f \in \mathcal{R}_+^0$, donc pour tout $f \in \mathcal{R}^0$. D'après la définition de $\Phi(\mu^+)$ ceci équivaut à $\Phi(\mu^+) = 0$. En appliquant ce résultat à $-\mu$, on obtient l'égalité $\Phi(\mu^-) = 0$. Enfin, l'égalité

$$\Phi(\mu) = \Phi(\mu^+) - \Phi(\mu^-)$$

montre que μ appartient à $\overset{-1}{\Phi}(0)$.

Corollaire 1. — *La restriction de l'application Φ à l'ensemble des mesures abstraites dans $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ est biunivoque.*

Démonstration. — D'après la deuxième partie de la proposition 8, toute mesure abstraite de $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ appartient à la bande complémentaire de $\overset{-1}{\Phi}(0)$. La restriction de Φ à cette bande est biunivoque.

Il résulte du lemme du paragraphe 1 et du théorème de Lebesgue que toute fonction $g' \in \mathcal{R}'$ appartient à $\mathcal{L}_1(\Phi(\mu))$ pour tout $\mu \geqq 0$ de $\mathcal{J}(\mathcal{R})$. Une mesure de Radon non bornée n'appartient donc pas en général à l'image $\Phi(\mathcal{J}(\mathcal{R}))$ de $\mathcal{J}(\mathcal{R})$. Un cas particulier, où Φ est une application sur $\mathcal{M}(E'_{\mathcal{R}})$, est le suivant :

Corollaire 2. — *Dans le cas $\mathcal{R} = \mathcal{R}^0$, l'application Φ est un isomorphisme de l'espace de Riesz $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ sur l'espace de Riesz $\mathcal{M}(E'_{\mathcal{R}})$.*

Démonstration. — Φ est un isomorphisme, puisque $\Phi(\mu) = 0$ entraîne $\mu(g) = 0$ pour tout $g \in \mathcal{R}^0$, donc $\mu = 0$. Φ est un isomorphisme de $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ sur $\mathcal{M}(E'_{\mathcal{R}})$, puisque, d'après la proposition 6, le prolongement continu g' sur $E'_{\mathcal{R}}$ de toute fonction $g \in \mathcal{R}$ appartient à $\mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$. Toute mesure de Radon μ' sur $E'_{\mathcal{R}}$ définit donc une forme linéaire $g \to \mu'(g')$ sur $\mathcal{R}$ qui appartient à $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ car μ' est différence de deux mesures de Radon positives; on voit immédiatement que $\Phi(\mu) = \mu'$ et que $\mu' \geqq 0$ entraîne $\Phi(\mu) \geqq 0$.

Remarques. — 1° La deuxième partie de la proposition 8 peut être considérée comme cas particulier d'un théorème général de décomposition de [3], p. 116, si l'on donne à la notion de continuité introduite dans [3] le sens exprimé par les égalités (9) et (10).

2° Dans le cas particulier où toute fonction de $\mathcal{R}$ est bornée, l'égalité (10) dégénère en une identité et peut être supprimée. Dans ce cas-là on peut démontrer la deuxième partie de la proposition 8 en partant de résultats de [2] : Les espaces $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ et $\mathcal{J}(\mathcal{R}')$ sont canoniquement isomorphes puisque toute forme linéaire sur $\mathcal{R}$ peut être considérée comme forme linéaire sur $\mathcal{R}'$, et inversement. D'après [2], p. 468, cet isomorphisme fait correspondre à $\overset{-1}{\Phi}(0)$ la bande des formes linéaires purement discontinues de $\mathcal{J}(\mathcal{R}')$ et à la bande complémentaire de $\overset{-1}{\Phi}(0)$ la bande des formes linéaires continues de $\mathcal{J}(\mathcal{R}')$.

Paragraphe 4. — **Le théorème de représentation.**

Comme dans le premier paragraphe, nous supposons que E est un ensemble quelconque, $\mathcal{R}$ un ensemble de fonctions numériques finies définies dans E, vérifiant les axiomes (R_1), (R_2) et (R_3), mais pas nécessairement (S_1) et (S_2).

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 5. — *Il existe un espace localement compact E' et une application linéaire positive* $\mathbf{T}$ *de l'espace de Riesz* $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ *des formes linéaires relativement bornées sur* $\mathcal{R}$ *dans l'espace de Riesz* $\mathfrak{M}(E')$ *des mesures de Radon sur E' avec les propriétés suivantes : Pour toute mesure abstraite* μ *sur* $\mathcal{R}$, *tout nombre réel* $1 \leqq p < +\infty$ *et tout espace de Banach F, les espaces* $L_F^p(E, \mathcal{R}, \mu)$ *et* $L_F^{p*}(E', \mathcal{K}(E'), \mathbf{T}(\mu))$ *sont isomorphes en tant qu'espaces de Banach et, dans le cas* $F = \mathbf{R}$, *le même isomorphisme s'applique aussi à leur structure d'espaces de Riesz. La restriction de* $\mathbf{T}$ *à l'ensemble des mesures abstraites sur* $\mathcal{R}$ *est biunivoque.*

DÉMONSTRATION. — La démonstration se fait en trois étapes dont la dernière est la plus importante.

I. Soient E_0 l'ensemble des éléments $x \in E$ tels que $f(x) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{R}$, $E_1 = \complement E_0$ le complémentaire de E_0, et $\mathcal{R}_1$ l'ensemble des restrictions des fonctions de $\mathcal{R}$ à E_1. Si $E = E_0$, $\mathcal{R}$ ne contient que la fonction 0 et le théorème est trivial : il suffit de prendre pour E' l'espace formé d'un seul point. Nous supposons donc $E_1 \neq \emptyset$. Il est clair que $\mathcal{R}_1$ vérifie les axiomes (R_1), (R_2), (R_3) et (S_1) (en remplaçant $\mathcal{R}$ par $\mathcal{R}_1$ et E par E_1 dans ces axiomes). A chaque forme linéaire $\mu \in \mathcal{J}(\mathcal{R})$ correspond canoniquement une forme linéaire $\mu_1 \in \mathcal{J}(\mathcal{R}_1)$ définie de la manière suivante : toute fonction $f_1 \in \mathcal{R}_1$ est la restriction d'une fonction unique $f \in \mathcal{R}$; on a $\mu_1(f_1) = \mu(f)$. L'application $\mu \to \mu_1$ est *un isomorphisme* $\mathbf{T}_1$ *de l'espace de Riesz* $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ *sur l'espace de Riesz* $\mathcal{J}(\mathcal{R}_1)$; μ *est une mesure abstraite sur* $\mathcal{R}$, *si et seulement si* $\mathbf{T}_1(\mu)$ *est une mesure abstraite sur* $\mathcal{R}_1$. Soient maintenant μ une mesure abstraite fixée sur $\mathcal{R}$, et $\mu_1 = \mathbf{T}_1(\mu)$ son image. Pour une fonction numérique positive définie dans E telle que $\bar{\mu}(f) < +\infty$, il existe une suite croissante (f_n) de fonctions de $\mathcal{R}_+$ telle que $f \leqq \sup f_n$; on a donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in E_0$. Il est immédiat qu'on a $\bar{\mu}_1(f_1) = \bar{\mu}(f)$ pour la restriction f_1 de f à E_1. Inversement toute fonction numérique positive f_1 définie dans E_1 telle que $\bar{\mu}_1(f_1) < +\infty$ ne possède qu'un prolongement $f \geqq 0$ sur E tel que $\bar{\mu}(f) < +\infty$: cet f doit être nul en chaque $x \in E_0$. Enfin, remarquons que le sous-espace $(\mathcal{R}_1)^0$ de $\mathcal{R}_1$ est l'ensemble des restrictions des fonctions de $\mathcal{R}^0$ à E_1. Il résulte de toutes ces remarques que, pour tout nombre réel $1 \leqq p < +\infty$ et tout espace de Banach F, la rectriction à E_1 des fonctions de $\mathcal{L}_F^p(\mu)$ définit un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{L}_F^p(\mu)$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_F^p(\mu_1)$, qui conserve les semi-normes N_p définies sur ces espaces. Pour deux fonctions numériques f, g définies dans E, on a $f \leqq g$, si et seulement si ses restrictions f_1, g_1 à E_1 vérifient $f_1 \leqq g_1$. Nous avons donc montré que : *Pour toute mesure abstraite* μ *sur* $\mathcal{R}$, *il existe un isomorphisme de l'espace de Banach* $L_F^p(E, \mathcal{R}, \mu)$ *sur l'espace de Banach* $L_F^p(E_1, \mathcal{R}_1, \mathbf{T}_1(\mu))$; *au cas où* $F = \mathbf{R}$, *les deux espaces sont, par le même isomorphisme, isomorphes en tant qu'espaces de Riesz.*

II. Soit Q la relation d'équivalence suivante dans E_1 : deux éléments x, $y \in E_1$ seront dits équivalents modulo Q, si et seulement si $f_1(x) = f_1(y)$ pour toute fonction $f_1 \in \mathcal{R}_1$. Désignons par E_2 l'ensemble quotient E_1/Q, par φ l'application canonique de E_1 sur E_2, par $\mathcal{R}_2$ l'ensemble des fonctions numériques f_2 définies sur E_2 telles que $f_2 \circ \varphi$ appartienne à $\mathcal{R}_1$. Il est clair que $\mathcal{R}_2$ vérifie les axiomes (R_1), (R_2), (R_3) et (S_1), (S_2) (en remplaçant $\mathcal{R}$ par $\mathcal{R}_2$ et E par E_2). A toute forme linéaire $\mu_1 \in \mathcal{J}(\mathcal{R}_1)$ correspond canoniquement une forme linéaire $\mu_2 \in \mathcal{J}(\mathcal{R}_2)$ définie comme suit : $\mu_2(f_2) = \mu_1(f_2 \circ \varphi)$ pour tout $f_2 \in \mathcal{R}_2$. L'application $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ est un *isomorphisme* $\mathbf{T}_2$ *de l'espace de Riesz* $\mathcal{J}(\mathcal{R}_1)$ *sur l'espace de Riesz* $\mathcal{J}(\mathcal{R}_2)$; μ_1 *est une mesure abstraite sur* $\mathcal{R}_1$, *si et seulement si* $\mathbf{T}_2(\mu_1)$ *est une mesure abstraite sur* $\mathcal{R}_2$. Soient maintenant μ_1 une mesure abstraite fixée sur $\mathcal{R}_1$ et $\mu_2 = \mathbf{T}_2(\mu_1)$ son image. On voit immédiatement que $\bar{\mu}_2(f_2) = \bar{\mu}_1(f_2 \circ \varphi)$ pour toute fonction numérique positive f_2 définie dans E_2. Remarquons encore qu'une fonction f_2 définie dans E_2 appartient à $(\mathcal{R}_2)^0$, si et seulement si $f_2 \circ \varphi$ appartient à $(\mathcal{R}_1)^0$. Nous obtenons donc le résultat suivant : pour tout nombre $1 \leqq p < +\infty$ et tout espace de Banach F, une application $\mathbf{f}_2$ de E_2 dans F appartient à $\mathcal{L}^p_F(\mu_2)$, si et seulement si $\mathbf{f}_2 \circ \varphi$ appartient à $\mathcal{L}^p_F(\mu_1)$; les semi-normes correspondantes de $\mathbf{f}_2$ et $\mathbf{f}_2 \circ \varphi$ sont égales. L'application $\mathbf{f}_2 \rightarrow \mathbf{f}_2 \circ \varphi$ est donc un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{L}^p_F(\mu_2)$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}^p_F(\mu_1)$ conservant les semi-normes. En particulier l'image inverse $\overset{-1}{\varphi}(Z_2)$ d'un ensemble μ_2-négligeable Z_2 de E_2 est μ_1-négligeable. Inversement, l'image directe $\varphi(Z_1)$ d'un ensemble μ_1-négligeable Z_1 de E_1 est μ_2-négligeable. En effet, soit (f_n) une suite croissante de fonctions positives de $\mathcal{R}_1$, telle que $\chi_{Z_1} \leqq \sup f_n$, où χ_{Z_1} est la fonction caractéristique de Z_1 dans E_1. Si Z'_1 désigne le plus petit ensemble contenant Z_1 et saturé relativement à Q, on a aussi $\chi_{Z'_1} \leqq \sup f_n$. On a donc $\bar{\mu}(\chi_{Z'_1}) = \bar{\mu}_1(\chi_{Z_1}) = 0$, d'où l'assertion. Ceci montre que, pour deux fonctions numériques f_2, g_2 définies dans E_2, on a, μ_2-presque partout dans E_2, la relation $f_2(x) \leqq g_2(x)$, si et seulement si, μ_1-presque partout dans E_1, on a la relation $(f_2 \circ \varphi)(x) \leqq (g_2 \circ \varphi)(x)$.

Montrons maintenant que, pour toute fonction $\mathbf{f}_1 \in \mathcal{L}^p_F(\mu_1)$, il existe une fonction $\mathbf{f}'_1 \in \mathcal{L}^p_F(\mu_1)$ constante dans chaque classe d'équivalence, telle que $N^1_p(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}'_1) = 0$, où N^1_p désigne la semi-norme de $\mathcal{L}^p_F(\mu_1)$. Il existe ([17]) une suite $(\mathbf{g}_n)$ de fonctions de $(\mathcal{R}_1)^0_F$, une fonction numérique $g \geqq 0$ définie dans E_1 avec une semi-norme $N^1_p(g)$ finie et un ensemble μ-négligeable Z_1 de E_1 tels qu'on ait $\mathbf{f}_1(x) = \lim \mathbf{g}_n(x)$ et $|\mathbf{g}_n(x)| \leqq g(x)$ pour tout $x \in \complement Z_1$. Mais nous savons que le plus petit ensemble Z'_1, contenant Z_1 et saturé relativement à Q, est aussi μ_1-négligeable. La fonction $\mathbf{f}'_1$ égale à $\mathbf{f}_1$ dans $\complement Z'_1$, et à 0 dans Z'_1 est alors constante dans chaque classe d'équivalence; d'après le théorème de Lebesgue, elle appartient à $\mathcal{L}^p_F(\mu_1)$ et l'on a $N^1_p(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}'_1) = 0$.

([17]) *Voir* la remarque qui suit la proposition 2, et BOURBAKI [4], p. 133-143.

De notre isomorphisme de $\mathcal{L}_F^p(\mu_2)$ dans $\mathcal{L}_F^p(\mu_1)$ on déduit ainsi un isomorphisme de $L_F^p(\mu_2)$ sur $L_F^p(\mu_1)$. Il résulte des remarques précédentes que : *Pour toute mesure abstraite* μ_1 *sur* $\mathcal{R}_1$, *il existe un isomorphisme de l'espace de Banach* $L_F^p(E_1, \mathcal{R}_1, \mu_1)$ *sur l'espace de Banach* $L_F^p(E_2, \mathcal{R}_2, \mathbf{T}_2(\mu_1))$; *dans le cas où* $F = \mathbf{R}$, *les deux espaces sont, par le même isomorphisme, isomorphes en tant qu'espaces de Riesz.*

III. Le théorème 3 assure l'existence de l'espace $(E_2)'_{\mathcal{R}_2}$ que nous désignerons par E'. Montrons que E' possède les propriétés énoncées dans le théorème 5. Soit Φ l'application linéaire positive de $\mathcal{J}(\mathcal{R}_2)$ dans $\mathcal{M}(E')$ établie au n° 3.2 et posons $\mathbf{T} = \Phi \circ \mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_1$. Les deux premières parties de notre démonstration et le corollaire 1 de la proposition 8 montrent que $\mathbf{T}$ est une application linéaire positive de $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ dans $\mathcal{M}(E')$ dont la restriction à l'ensemble des mesures abstraites sur $\mathcal{R}$ est biunivoque. Le théorème 2 assure, pour toute mesure de Radon positive μ' sur E', l'isomorphie des espaces de Banach $L_F^p(E', \mu')$ et $L_F^{p*}(E', \mu')$; si $F = \mathbf{R}$, l'isomorphie s'étend aussi à leur structure d'espace de Riesz. Il reste donc à démontrer que, pour toute mesure abstraite μ_2 sur $\mathcal{R}_2$, les espaces de Banach $L_F^p(\mu_2)$ et $L_F^p(\Phi(\mu_2))$ sont isomorphes et que, dans le cas où $F = \mathbf{R}$, les deux espaces sont, par le même isomorphisme, isomorphes en tant qu'espaces de Riesz. Mais ceci est une conséquence immédiate du théorème suivant :

THÉORÈME 6. — *Soient* $\mathcal{R}$ *un ensemble de fonctions numériques finies définies sur un ensemble* E, *vérifiant les axiomes* (R_1), (R_2), (R_3) *et* (S_1), (S_2), μ *une mesure abstraite définie sur* $\mathcal{R}$, p *un nombre réel tel que* $1 \leq p < +\infty$, F *un espace de Banach. Toute fonction* $\mathbf{f}$ *de* $\mathcal{L}_F^p(E, \mathcal{R}, \mu)$ *peut être prolongée en une fonction* $\mathbf{f}'$ *de* $\mathcal{L}_F^p(E'_{\mathcal{R}}, \mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}}), \Phi(\mu))$; *inversement, la restriction* $\mathbf{f}$ *de toute fonction* $\mathbf{f}'$ *de* $\mathcal{L}_F^p(E'_{\mathcal{R}}, \mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}}), \Phi(\mu))$ *à* E, *appartient à* $\mathcal{L}_F^p(E, \mathcal{R}, \mu)$. *On a*

$$N_p(\mathbf{f}) = N'_p(\mathbf{f}') \tag{11}$$

si N_p *et* N'_p *désignent les semi-normes déduites de* μ *et* $\Phi(\mu)$ *respectivement (au sens du premier procédé d'intégration de Stone). Si* $F = \mathbf{R}$, *toute fonction positive* f *de* $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{R}, \mu)$ *peut être prolongée en une fonction positive* f' *de* $\mathcal{L}^p(E'_{\mathcal{R}}, \mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}}), \Phi(\mu))$.

DÉMONSTRATION. — Nous désignerons par g' le prolongement continu d'une fonction $g \in \mathcal{R}^0$ sur $E'_{\mathcal{R}}$, par $\mathcal{R}^{0\prime}$ l'ensemble des fonctions g', où g parcourt $\mathcal{R}^0$. Soit μ'_0 la forme linéaire positive sur $\mathcal{R}^{0\prime}$ définie par $\mu'_0(g') = \mu(g)$ pour tout $g \in \mathcal{R}^0$. La mesure de Radon $\mu' = \Phi(\mu)$ est, d'après le théorème 4, le seul prolongement possible de μ'_0 en une forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$; et μ'_0, μ' sont des mesures abstraites [même avec la propriété (M^*)]. Nous allons montrer que μ'_0 définit la même semi-norme N'_p que μ' et que

$\mathcal{L}_F^p(E'_{\mathcal{R}}, \mathcal{R}^{0'}, \mu'_0) = \mathcal{L}_F^p(E'_{\mathcal{R}}, \mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}}), \mu')$. De la même façon que nous avons déduit le corollaire 1 du lemme du paragraphe 1, nous déduisons de la proposition 7 que, pour toute suite croissante (f'_n) de fonctions positives de $\mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$, il existe une suite croissante (g'_n) de fonctions de $\mathcal{R}^{0'}$ telles que $0 \leqq g'_n \leqq f'_n (n = 1, 2, \ldots)$ et $\sup f'_n = \sup g'_n$. De cela et du fait que $\mathcal{R}^{0'} \subset \mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$, il résulte que $\bar{\mu}'_0(f') = \bar{\mu}'(f')$ pour toute fonction numérique $f' \geqq 0$ dans $E'_{\mathcal{R}}$. Donc, la mesure μ'_0 définit la même semi-norme N'_p que μ'. L'égalité $\mathcal{L}_F^p(\mu'_0) = \mathcal{L}_F^p(\mu')$ est une conséquence immédiate du fait que toute combinaison linéaire $\mathbf{f}' = \sum \mathbf{a}_i f'_i$ de fonctions positives de $\mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$ à coefficients dans F appartient à $\mathcal{L}_F^p(\mu'_0)$. Soit, en effet, h'_0 une fonction de $\mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$ telle que $0 \leqq h'_0 \leqq 1$ et $h'_0(x') = 1$ pour tout point x' du support compact de $\mathbf{f}'$. La proposition 7 assure, pour un $\varepsilon > 0$ quelconque, l'existence d'une fonction $g'_i \in \mathcal{R}^{0'}$ telle que $0 \leqq g'_i \leqq f'_i \leqq g'_i + \varepsilon$, d'où résulte $|f'_i - g'_i| \leqq \varepsilon h'_0 (i = 1, \ldots, n)$. La fonction $\mathbf{g}' = \sum \mathbf{a}_i g'_i$ de $\mathcal{R}_F^{0'}$ vérifie donc $N'_p(\mathbf{f}' - \mathbf{g}') \leqq \varepsilon N'_p(h'_0) \sum |\mathbf{a}_i| = \varepsilon Q$, où $Q = N'_p(h'_0) \sum |\mathbf{a}_i|$ ne dépend que de $\mathbf{f}'$. Par conséquent, $\mathbf{f}'$ appartient à $\mathcal{L}_F^p(\mu'_0)$. Ces résultats nous permettent de démontrer le théorème en question sous la forme modifiée suivante : on remplace $\mu' = \Phi(\mu)$ par la mesure abstraite μ'_0 définie sur $\mathcal{R}^{0'}$, et l'on considère N'_p comme la semi-norme déduite de μ'_0.

Nous étudierons d'abord les relations entre N_p et N'_p. Soient $f' \geqq 0$ une fonction numérique définie dans $E'_{\mathcal{R}}$, et f la restriction de f' à E. Si (g'_n) est une suite croissante de fonctions positives de $\mathcal{R}^{0'}$ telle que $f' \leqq \sup g'_n$, les restrictions g_n à E forment une suite croissante de fonctions de $\mathcal{R}_+^0$ telle que $f \leqq \sup g_n$. On en déduit $\bar{\mu}(f) \leqq \bar{\mu}'_0(f')$. Inversement, si f' s'annule en tous les points de $E'_{\mathcal{R}} \cap \complement E$, toute suite croissante (g_n) de fonctions de $\mathcal{R}_+^0$ donne naissance à la suite croissante (g'_n) de fonctions positives de $\mathcal{R}^{0'}$ vérifiant l'inégalité $f' \leqq \sup g'_n$. D'après la proposition 2, il en résulte que $\mu(f) = \bar{\mu}'_0(f')$. Nous obtenons donc le résultat suivant : pour toute application $\mathbf{f}'$ de $E'_{\mathcal{R}}$ dans F et sa restriction $\mathbf{f}$ à E, on a $N_p(\mathbf{f}) \leqq N'_p(\mathbf{f}')$; si $\mathbf{f}'(x') = 0$ pour tout $x' \in E'_{\mathcal{R}} \cap \complement E$, on a même $N_p(\mathbf{f}) = N'_p(\mathbf{f}')$.

Soit maintenant $\mathbf{f}' \in \mathcal{L}_F^p(\mu'_0)$ et $\mathbf{f}$ la restriction de $\mathbf{f}'$ à E. Nous démontrerons que $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_F^p(\mu)$ et que $N_p(\mathbf{f}) = N'_p(\mathbf{f}')$. On a $N_p(\mathbf{f}) \leqq N'_p(\mathbf{f}') < +\infty$, donc $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_F^p(\mu)$. Il existe une suite $(\mathbf{g}'_n)$ de fonctions de $\mathcal{R}_F^{0'}$ (combinaisons linéaires de fonctions de $\mathcal{R}^{0'}$ à coefficients dans F) telle que $\lim N'_p(\mathbf{f}' - \mathbf{g}'_n) = 0$. La restriction $\mathbf{g}_n$ de chaque $\mathbf{g}'_n$ à E appartient à $\mathcal{R}_F^0$; on a $N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}_n) \leqq N'_p(\mathbf{f}' - \mathbf{g}'_n)$, donc $\lim N_p(\mathbf{f} - \mathbf{g}_n) = 0$, d'où résulte que $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_F^p(\mu)$. Comme dans la démonstration de la proposition 4, on montre qu'il suffit de prouver l'égalité $N_p(\mathbf{f}) = N'_p(\mathbf{f}')$ seulement pour $p = 1$ et $F = \mathbf{R}$. Soient donc $f' \in \mathcal{L}^1(\mu'_0)$,

f la restriction de f' à E, (g'_n) une suite de fonctions de $\mathcal{R}^{0'}$ telle que $\lim N'_1(f'-g'_n)=0$, (g_n) la suite des restrictions des g'_n à E. On a

$$N'_1(f')=\lim N'_1(g'_n) \qquad \text{et} \qquad N_1(f)=\lim N_1(g_n);$$

de $|g'_n|\in\mathcal{R}^{0'}$ résulte $N'_n(g'_n)=\mu'_0(|g'_n|)=\mu(|g_n|)=N_1(g_n)$, d'où $N_1(f)=N'_1(f')$.

Inversement, soit $\mathbf{f}$ une fonction de $\mathcal{L}^p_F(\mu)$; nous montrerons l'existence d'un prolongement $\mathbf{f}'$ de $\mathbf{f}$ appartenant à $\mathcal{L}^p_F(\mu'_0)$. Il existe une suite $(\mathbf{g}_n)$ de fonctions de $\mathcal{R}^0_F$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} N_p(\mathbf{f}-\mathbf{g}_n)=0$, donc telle que $\lim\limits_{m,n\to\infty} N_p(\mathbf{g}_n-\mathbf{g}_m)=0$. Le prolongement continu $\mathbf{g}'_n$ de $\mathbf{g}_n$ sur $E'_{\mathcal{R}}$ appartient à $\mathcal{R}^{0'}_F$, donc à $\mathcal{L}^p_F(\mu'_0)$. Nous avons ainsi $N_p(\mathbf{g}_n-\mathbf{g}_m)=N'_p(\mathbf{g}'_n-\mathbf{g}'_m)$ d'après la partie du théorème déjà démontrée. L'espace $\mathcal{L}^p_F(\mu'_0)$ étant complet, il existe un $\mathbf{f}^*\in\mathcal{L}^p_F(\mu'_0)$ tel que $\lim N'_p(\mathbf{f}^*-\mathbf{g}'_n)=0$. Nous posons $\mathbf{f}'(x)=\mathbf{f}(x)$ pour tout $x\in E$, $\mathbf{f}'(x')=\mathbf{f}^*(x')$ pour tout $x'\in E'_{\mathcal{R}}\cap \complement E$; nous allons montrer que ce prolongement $\mathbf{f}'$ de $\mathbf{f}$ répond à la question. Soit $\mathbf{f}^*_E$ la restriction de $\mathbf{f}^*$ à E; on a $N_p(\mathbf{f}-\mathbf{f}^*_E)=N'_p(\mathbf{f}'-\mathbf{f}^*)$ puisque $\mathbf{f}'-\mathbf{f}^*$ s'annule sur $E'_{\mathcal{R}}\cap\complement E$. Nous savons en outre que, pour tout n, $N_p(\mathbf{f}^*_E-\mathbf{g}_n)\leqq N'(\mathbf{f}^*-\mathbf{g}'_n)$, d'où $\lim N_p(\mathbf{f}^*_E-\mathbf{g}_n)=0$. L'inégalité $N_p(\mathbf{f}-\mathbf{f}^*_E)\leqq N_p(\mathbf{f}-\mathbf{g}_n)+N_p(\mathbf{f}^*_E-\mathbf{g}_n)$ entraîne alors $N_p(\mathbf{f}-\mathbf{f}^*_E)=N'_p(\mathbf{f}'-\mathbf{f}^*)=0$. La fonction $\mathbf{f}'$ appartient donc, comme $\mathbf{f}^*$, à $L^p_F(\mu'_0)$. Si $F=\mathbf{R}$, si f est une fonction positive de $\mathcal{L}^p(\mu)$, et si f' est une fonction de $\mathcal{L}^p(\mu'_0)$ prolongeant f, la fonction positive $f''=\sup(f',0)$ appartient à $\mathcal{L}^p(\mu'_0)$ et prolonge f.

Ceci achève la démonstration du théorème 6 et celle du théorème 5.

Remarques. — 1° C'est une conséquence immédiate des théorèmes 2 et 5 que, pour toute mesure abstraite μ sur $\mathcal{R}$ ayant la propriété (M^*), les espaces de Banach $L^{p*}_F(E, \mathcal{R}, \mu)$ et $L^{p*}_F(E', \mathcal{K}(E'), \mathbf{T}(\mu))$ sont isomorphes. En supposant que la mesure abstraite μ du théorème 6 vérifie l'axiome (M^*), on peut aussi montrer que toute fonction $\mathbf{f}\in\mathcal{L}^{p*}_F(E, \mathcal{R}, \mu)$ peut être prolongée en une fonction $\mathbf{f}'\in\mathcal{L}^{p*}_F(E'_{\mathcal{R}}, \mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}}), \Phi(\mu))$, qu'inversement la restriction $\mathbf{f}$ à E de toute fonction $\mathbf{f}'\in\mathcal{L}^{p*}_F(E'_{\mathcal{R}}, \mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})), \Phi(\mu)$ appartient à $\mathcal{L}^{p*}_F(E, \mathcal{R}, \mu)$, et que $N^*_p(\mathbf{f})=N^{*\prime}_p(\mathbf{f}')$, où N^*_p et $N^{*\prime}_p$ désignent les semi-normes déduites de μ et $\Phi(\mu)$ respectivement d'après le second procédé d'intégration de Stone. La démonstration reste en principe la même que pour le cas traité dans le théorème 6. Il faut seulement remplacer les suites croissantes de fonctions positives de $\mathcal{R}^{0'}$ ou de $\mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$ par des ensembles filtrants de fonctions positives de $\mathcal{R}^{0'}$ ou de $\mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$. Dans la première partie de la démonstration, on utilise la remarque suivante : Pour tout ensemble filtrant H (pour $\leqq$) de fonctions positives de $\mathcal{K}(E'_{\mathcal{R}})$, il existe un ensemble filtrant H^0 de fonctions positives de $\mathcal{R}^{0'}$ tel que toute fonction de H^0 soit majorée par au moins une fonction de H, et que $\sup_{f' \in H} f' = \sup_{g' \in H^0} g'$. On déduit cette remarque de la proposition 7 comme on a déduit le corollaire 2 du lemme du paragraphe 1.

2° Soit Γ une algèbre booléenne de sous-ensembles de l'ensemble E. Nous supposons que E appartient à Γ et que, pour tout couple x, y d'éléments de E, il existe un ensemble $A \in \Gamma$ tel que $x \in A$ et $y \in \complement A$. L'ensemble $\mathcal{R}$ des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques d'ensembles de Γ vérifie alors les axiomes (R_1), (R_2), (R_3) et (S_1), (S_2) : l'espace $E'_{\mathcal{R}}$ existe et est identique à l'espace E' du théorème 5. Nous avons démontré dans [2], p. 480, que $E'_{\mathcal{R}}$ est un espace compact contenant E comme sous-ensemble dense, et que l'application $A \to \overline{A}$, où $\overline{A}$ est l'adhérence de $A \in \Gamma$ dans $E'_{\mathcal{R}}$, est un isomorphisme de Γ sur l'algèbre booléenne des sous-ensembles de $E'_{\mathcal{R}}$, à la fois ouverts et fermés ([18]).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. BAUER, *Zur Theorie des Riemann-Integrals in lokal kompakten Räumen* (*Sitzungsber. math.-nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München*, 1955, p. 187-208).

[2] H. BAUER, *Uber die Beziehungen einer abstrakten Theorie des Riemann-Integrals zur Theorie Radonscher Masse* (*Math. Z.*, t. 65, 1956, p. 448-482).

[3] H. BAUER, *Eine Rieszsche Bandzerlegung im Raum der Bewertungen eines Verbandes* (*Sitzungsber. math.-nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München*, 1953, p. 89-117).

[4] N. BOURBAKI, *Intégration*, Chap. I-IV (*Actual. scient. et ind.*, n° 1175, Paris, Hermann, 1952).

[5] HAUPT-AUMANN-PAUC, *Differential und Integralrechnung*, Bd. 3, 2. Aufl., Göschens Lehrbücherei 26, Berlin, 1955.

[6] S. KAKUTANI, *Concrete representations of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem* (*Ann. Math.*, t. 42, 1941, p. 523-537).

[7] L. H. LOOMIS, *Linear functionals and content* (*Amer. J. Math.*, t. 76, 1954, p. 168-182).

[8] G. NÖBELING et H. BAUER, *Allgemeine Approximationskriterien mit Anwendungen* (*J. ber. Deutsch. Math. Verein.*, t. 58, 1955, p. 54-72).

[9] M. H. STONE, *Notes on integration*, I-IV (*Proc. Nat. Acad. Sc., U. S. A.*, t. 34, 1948, p. 336-342, 447-455, 483-490, et t. 35, 1949, p. 50-58).

([18]) *Voir* l'introduction de ce travail (p. 52).

Manuscrit reçu le 31 juillet 1956.