BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN GUÉRINDON

Propriétés d'irréductibilité dans les modules, théorie multiplicative, S-normalité

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 459-522

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__459_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
85, 1957, p. 459 à 522.

PROPRIÉTÉS D'IRRÉDUCTIBILITÉ DANS LES MODULES, THÉORIE MULTIPLICATIVE, S-NORMALITÉ ;

PAR

JEAN GUÉRINDON (*).

(Institut Henri Poincaré).

INTRODUCTION.

Une structure algébrique s'étudie généralement au triple point de vue des relations, des homomorphismes et des systèmes d'idéaux : la géométrie algébrique fournit de nombreux exemples dans lesquels ces trois procédés sont utilisés simultanément. La notion de module sur un anneau commutatif, outil principal de ce travail, est une de celles qui se rattache à ces trois méthodes ; elle généralise autant la notion de groupe abélien (sans opérateur) que la théorie des idéaux au sens de DEDEKIND, E. NOETHER et W. KRULL, tout en étant reliée à la théorie des idéaux de LORENZEN-PRÜFER.

Ce Mémoire se rattache principalement au premier point de vue qui est celui de DEDEKIND et BIRKHOFF et, en France, de M. A. CHÂTELET, de M. et Mme DUBREIL et de leurs élèves ; on ne se préoccupera toutefois que du cas commutatif.

Si nous avons chaque fois mis en évidence le degré de généralité que comporte l'utilisation du treillis de structure (au sens de Birkhoff), de la théorie des congruences (équivalences régulières pour toutes les opérations), des diverses notions latticielles d'irréductibilité et enfin de la normalité, les comparaisons que nous avons en vue se feront dans le cas des modules. Elles se feront à la suite également des travaux de L. FUCHS, de YOSHIDA et SAKUMA et de I. S. COHEN [1]. Elles constitueront une approche de l'étude d'une

(*) *Thèse Sciences math.*, Paris, 1957.

[1] On trouvera à la fin du texte une bibliographie et, en Appendice, l'énoncé de problèmes qui se posent à l'occasion de ce travail.

structure algébrique au moyen du treillis $\mathfrak{T}$ de ses congruences et nous amèneront à dégager les cas dans lesquels on peut mettre en évidence les éléments les plus remarquables de $\mathfrak{T}$.

Toutefois cette limitation aux modules n'empêche pas de retrouver une grande généralité, par exemple dans la théorie de la S-normalité donnée au dernier chapitre qui considère des anneaux sans condition de chaîne.

Si l'on a ici écarté *a priori* les difficultés que comportent le passage à un anneau d'opérateurs quelconque, que L. Lesieur et R. Croisot ont pu récemment rattacher à la théorie nœthérienne classique, on peut commodément tirer parti de la condition modulaire et faire une théorie des chaînes maximales qui sera rattachée directement à la théorie de l'irréductibilité de Gröbner-Lesieur. Puis on relie cette dernière théorie à celle de la normalité et à des problèmes d'invariants au moyen d'un fractionnement convenable de l'équivalence d'Artin.

Un rôle essentiel est joué dans ce travail par la résiduation dont on connaît les liens avec les correspondances de Galois. Elle servira en effet à caractériser successivement les chaînes maximales de modules, les diverses irréductibilités utilisées et les congruences dans les demi-groupes d'idéaux introduits aux chapitres III et IV.

Il semblerait donc, en conclusion, que le treillis de structure ne puisse commodément s'étudier, même en présence d'une condition de chaîne, que s'il est modulaire (ou semi-modulaire) et si l'on peut définir, partiellement ou non, une résiduation entre ses éléments, au sens interne ou au sens externe.

Le chapitre I donne une théorie du recouvrement dans les modules quelconques, la précise dans le cas des anneaux et détermine toutes les chaînes maximales. La relation de cette théorie avec celles d'union ou inter-irréductibililité est établie, tandis que la notion de sous-radical est posée pour la suite.

Le chapitre II commence par indiquer la terminologie employée de façon à préciser, notamment dans le cas des anneaux, les résultats du premier chapitre. Les socles nœthériens sont rattachés à des treillis géométriques, les théorèmes de Gröbner-Lesieur sont étendus aux modules et ramenés à la théorie des chaînes au moyen de modules de quotients. On constate que c'est d'ailleurs une notion d'inter-irréductibilité renforcée qui est utile : elle est traitée dans le cas général et sert dans la suite à diverses caractérisations d'anneaux usuels.

Les résultats qui précèdent sont alors précisés en théorie des groupes abéliens (en fait dans les modules sur les anneaux principaux). On met ainsi en évidence un certain nombre d'invariants en liaison avec la théorie de la normalisation et on les rattache aux modules sur un anneau normal dont on connaît l'importance en géométrie algébrique.

Le chapitre III introduit, pour caractériser les anneaux complètement intégralement clos, une opération de fermeture parmi les équivalences régulières entre idéaux; cela conduit à des caractérisations d'anneaux au moyen de l'équivalence d'Artin. Ce procédé est précisé au chapitre suivant; il permet aussi de rattacher, au moyen de la théorie des demi-groupes, les anneaux précédents aux équivalences simplifiables. Les exemples cités conduisent de manière naturelle à définir une équivalence pour toute topologie de l'anneau d'opérateurs.

Le chapitre IV généralise, en un sens précisé, la théorie multiplicative d'Artin-Prüfer à des anneaux quelconques (avec diviseurs de zéro éventuels). Les équivalences utilisées peuvent se définir au moyen du procédé indiqué d'une manière générale au chapitre précédent. On est conduit à donner une présentation axiomatique de la normalité, qui généralise la théorie des anneaux normaux de Krull et qui prend la factorisation des éléments réguliers (sans unicité *a priori*) comme point de départ : telle est la signification de la notion de S-normalité.

Le cas dans lequel l'équivalence d'Artin du gerbier utilisé coïncide avec l'égalité est précisé et la recherche des demi-groupes pour lesquels on obtient une factorisation du type précédent est complètement effectuée, moyennant une légère restriction qui n'affecte en rien le cas classique des anneaux totaux de quotients.

Dans le cas des anneaux nœthériens la condition de S-normalité est alors équivalente à une condition de fermeture intégrale restreinte. On précise enfin les liens de cette théorie avec celle de l'inter-irréductibilité.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. P. Dubreil, rapporteur de cette thèse, à qui je dois plus d'un précieux conseil, tant au cours de mon initiation à la recherche que durant la préparation et la rédaction de ce travail et à M. C. Pisot qui a bien voulu s'intéresser à mes travaux et me donner un second sujet. Je dois dire tout le profit que j'ai retiré de la fréquentation du Séminaire d'Algèbre et Théorie des Nombres avant et pendant l'élaboration de ce Mémoire.

Je suis également heureux de remercier M. René Garnier, membre de l'Institut, qui a présenté mes Notes à l'Académie et a bien voulu accepter de présider mon jury, ainsi que MM. L. Lesieur et P. Samuel qui m'ont souvent aidé dans les domaines si divers de l'Algèbre moderne et M. G. Choquet qui a bien voulu insérer ce travail dans le *Bulletin de la Société mathématique*.

CHAPITRE I.

Généralités sur les modules.

1. Idéaux premiers attachés à un module. — Dans ce chapitre, les modules $\mathfrak{M}$ sont supposés quelconques et leur anneau d'opérateurs, commutatif, opère sans distinction de côté; le cas des modules nœthériens sera étudié au chapitre II [2]. On supposera que A possède un élément unité non nul 1, qui est un opérateur unité ($\mathfrak{M}$ est module unitaire). En tant que groupe à opérateurs le module donné possède des sous-groupes permis (ou sous-modules) dont l'ensemble $T(\mathfrak{M})$, ordonné pour la relation ordinaire d'inclusion, est un treillis modulaire, complet, avec élément nul et élément universel. L'opération d'intersection en T est prise au sens ensembliste; l'union d'une famille non vide de sous-modules de $\mathfrak{M}$ est le plus petit module les contenant : c'est l'intersection des modules contenant chacun tous les modules de la famille considérée.

$\mathfrak{M}$ sera dit de *type fini* s'il est l'union d'un ensemble fini de sous-modules monogènes, appelant monogène (ou cyclique) un module engendré par un seul élément.

Lorsque $\mathfrak{M}$ se réduit à A lui-même le treillis $T(\mathfrak{M})$ est un gerbier G résidué (*cf.* [5] et [6]. La notion de résiduation s'étend alors à un module de deux manières différentes et établit des relations entre le treillis des sous-modules et le gerbier G des idéaux de A. Il faut de plus préciser le module ambiant. On posera $\mathfrak{N}_1 : \mathfrak{N}_2$ pour l'ensemble des $x \in A$ tels que $x\mathfrak{N}_2 \subseteq \mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N} : I$ pour l'ensemble des éléments x de $\mathfrak{M}$ tels que $xI \subseteq \mathfrak{N}$ pour $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2 \in T(\mathfrak{M})$ et $I \in G$. Toutes les règles usuelles du calcul des résiduels dans le gerbier G se transposent facilement.

En particulier, $\mathfrak{O} : \mathfrak{N}$ s'appellera *l'annulateur* de $\mathfrak{N} \in T(\mathfrak{M})$ et $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ *l'ombre* du sous-module donné $\mathfrak{N}$ (*cf.* [11]). Alors $\mathfrak{M}$ sera dit *normal* si l'on a $\mathfrak{O} : \mathfrak{M} = (o)$. Par exemple, un module sans torsion (c'est-à-dire $\mathfrak{O} : Ax = (o)$ pour tout $x \in \mathfrak{M} - \{\mathfrak{O}\}$) est normal (réciproque fausse) et tout $\mathfrak{M}$ est un $A/(\mathfrak{O} : \mathfrak{M})$-module normal. Un sous-module $\mathfrak{N}$ est un e-module s'il est de la forme $I\mathfrak{M}$ avec $I \in G$. Un idéal résiduel de $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O} : \mathfrak{N}$ sera appelé a-idéal, un module $\mathfrak{O} : I$ un a-module.

La correspondance classique entre idéaux de deux anneaux emboîtés s'étend immédiatement. Soit $I \in G$ et $\mathfrak{N} \in T(\mathfrak{M})$; on a

$$(\mathfrak{N} : \mathfrak{M})\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \qquad \text{et} \qquad I\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \supseteq I,$$

l'égalité ayant lieu dans le premier cas si et seulement si $\mathfrak{N}$ est un e-module et dans le second si et seulement si l'idéal I est une ombre.

On a, par ailleurs, $\mathfrak{O} : (\mathfrak{O} : \mathfrak{N}) \supseteq \mathfrak{N}$ avec égalité dans le seul cas où $\mathfrak{N}$ est un a-module et enfin $\mathfrak{O} : (\mathfrak{O} : I) \supseteq I$ avec égalité dans le seul cas où I est un a-idéal. Les ombres et les e-modules se correspondent biunivoquement et il en est de même des a-modules et des a-idéaux.

Notamment si $\mathfrak{M}$ est un module de type fini et si P est un diviseur de $\mathfrak{O} : \mathfrak{M}$, P est une ombre, on a $P\mathfrak{M} : \mathfrak{M} = P$, comme on le voit par la méthode du déterminant de Krull. *Ceci s'étend alors à tout diviseur semi-premier du a-idéal* $\mathfrak{O} : \mathfrak{M}$.

---

[2] *Cf.* [5], [11], [16], [19] et [22]. La relation d'ordre partiel en $T(\mathfrak{M})$ est notée $\subseteq$, la notation $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2$ exprimant la double propriété : $\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{N}_2$.

Un élément $\mathfrak{N} \in T(\mathfrak{M})$ sera dit *primaire en* $\mathfrak{M}$ si $bx \in \mathfrak{N}$ avec $x \notin \mathfrak{N}$ entraîne, pour un entier r, $b^r \in \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$. Il revient au même de dire que pour tout $x \in \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ on a

$$\operatorname{rad}(\mathfrak{N} : \mathfrak{M}) \supseteq \mathfrak{N} : Ax \qquad (\supseteq \mathfrak{N} : \mathfrak{M});$$

ou encore, si $\mathfrak{M}$ est de type fini, que pour tout $x \in \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ et toute ombre première P avec $P \supseteq \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ on a $P \supseteq \mathfrak{N} : Ax$. L'élément $\mathfrak{N}$ sera dit *premier* si dans la définition précédente on a $r = 1$ (³).

Alors l'ombre d'un module primaire (resp. premier) est un idéal primaire (resp. premier), les réciproques étant fausses. On posera

$$\operatorname{rad} \mathfrak{N} = \operatorname{rad}(\mathfrak{N} : \mathfrak{M}) \qquad (\text{radical de } \mathfrak{N} \text{ en } \mathfrak{M}).$$

Si dans la définition d'un module primaire $\mathfrak{N}$ on pose $P = \operatorname{rad} \mathfrak{N}$, on dira que $\mathfrak{N}$ est P-primaire. On voit alors qu'un module primaire est premier si et seulement si son ombre est première (mais l'ombre d'un module non primaire peut être première).

L'intersection d'un nombre fini de modules P-primaires (resp. premiers) est P-primaire (resp. P-première).

Soit $\mathfrak{N}$ P-primaire de $T(\mathfrak{M})$ et $I \in G$; alors si $I \not\subseteq \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ le module $\mathfrak{N} : I$ est P-primaire et si l'on a $I \not\subseteq P$, on a $\mathfrak{N} : I = \mathfrak{N}$ (pour une réciproque, *voir* la section 8).

Idéaux reliés maximaux (⁴). — On dira qu'un $I \in G$ est relié à un $\mathfrak{N} \in T(\mathfrak{M})$ si pour tout $a \in I$ on a $\mathfrak{N} : Aa \neq \mathfrak{N}$. Par exemple, pour tout $\mathfrak{N} \in T(\mathfrak{M})$, $\operatorname{rad} \mathfrak{N}$ est relié à $\mathfrak{N}$. Par ailleurs, tout idéal relié à l'ombre de $\mathfrak{N}$ l'est à $\mathfrak{N}$, la réciproque étant fausse.

On voit, comme pour les idéaux d'un anneau, que les idéaux U reliés à $\mathfrak{N}$ fixé sont tous les idéaux contenus en quelques-uns d'entre eux P_m, que ces P_m sont maximaux parmi les U et sont par ailleurs premiers. Les P_m seront appelés les « *idéaux premiers essentiels maximaux* » suivant une terminologie qui sera justifiée dans le cas nœthérien (section 8). On notera que *le passage de* $\mathfrak{N}$ *à son ombre peut lui faire perdre des* P_m *sans qu'il puisse s'en introduire d'autres.*

Alors $\mathfrak{N}$ est primaire si et seulement si les idéaux premiers essentiels minimaux de son ombre et les P_m précédents coïncident avec un idéal premier unique P, qui est alors son radical.

On appellera *module primal* tout $\mathfrak{N} \in T(\mathfrak{M})$ tel que la famille des idéaux P_m se réduise à un seul élément P et *module quasi primaire* tout $\mathfrak{N} \in T(\mathfrak{M})$ tel que les diviseurs premiers de l'ombre de $\mathfrak{N}$ aient un élément minimum ou, ce qui revient au même, tout $\mathfrak{N}$ de radical premier (⁵). Les idéaux premiers

---

(³) La notion de module primaire est à distinguer de celle de groupe primaire.

(⁴) Les énoncés qui suivent supposent l'introduction de l'axiome du choix (on utilise le théorème de Zorn).

(⁵) *Cf.* [7], [8] et la section 7 suivante.

minimaux de l'ombre de tout $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ (par définition, les idéaux premiers essentiels minimaux de $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$, *voir* section 8) ont pour intersection le radical de $\mathfrak{N}$ en $\mathfrak{M}$.

On utilisera dans la suite la remarque suivante : *pour tout A-module de type fini $\mathfrak{M}$ il y a équivalence entre les trois conditions suivantes :*

a. Il existe un idéal premier P qui ne contient aucun annulateur d'un élément quelconque de $\mathfrak{M}$;

b. $\mathfrak{O} : \mathfrak{M}$ contient un élément non nilpotent, et

c. Il existe en A un idéal premier qui n'est pas une ombre.

En effet, a entraîne que P ne contient pas $\mathfrak{O} : \mathfrak{M}$ d'après la condition de finitude; donc $\mathfrak{O} : \mathfrak{M}$ n'est pas contenu dans l'ensemble des éléments nilpotents de A, intersection des idéaux premiers de A et l'on a b. Si b est réalisée, on voit que a l'est et l'idéal P correspondant n'est pas une ombre et l'on a c. Enfin, si c est réalisée il existe un idéal premier P' qui ne contient pas $\mathfrak{O} : \mathfrak{M}$ (sinon il serait une ombre d'après un résultat rappelé plus haut). Par exemple, un groupe de Sylow abélien de type fini satisfait à la condition b car les facteurs premiers des ordres de ses éléments ne sont pas quelconques.

Enfin la définition suivante sera utile : Étant donné un ensemble $\mathfrak{T}$ *non vide* d'idéaux premiers de l'anneau A on dit que le A-module $\mathfrak{M}$ est un *$\mathfrak{T}$-module de Sylow* si l'on a pour tout $x \in \mathfrak{M}$ la relation $\mathfrak{O} : Ax \nsubseteq P$ pour tout $P \in \mathfrak{T}$.

Exemples. — *a.* Un groupe de Sylow abélien et, en particulier, les groupes de torsion : on a $(o) \in \mathfrak{T}$.

b. Le S-composant de $\mathfrak{O}$ en un module $\mathfrak{M}$, S étant l'intersection d'une famille non vide de compléments d'idéaux premiers. Cette dernière notion est liée à celle de module quotient d'un module de type fini (section **13**).

c. Plus généralement (dans un module nœthérien, *cf.* section **8**) l'intersection $\bigcap_n I^n \mathfrak{M}$ est un $\mathfrak{T}$-module de Sylow, si $\mathfrak{T}$ est l'ensemble des diviseurs premiers de l'idéal I *supposé non trivial.*

d. Un module $\mathfrak{M}$ de type fini satisfaisant aux trois conditions données plus haut : on ne peut avoir pour tout P premier et tout $x \neq \mathfrak{O}$, $\mathfrak{O} : Ax \subseteq P$, sinon on aurait

$$\bigcap_{x \in \mathfrak{M}} (\mathfrak{O} : Ax) = \mathfrak{O} : \mathfrak{M} \subseteq P,$$

et tout idéal premier serait une ombre.

2. Loi de recouvrement dans les modules. — Soient $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ deux A-modules tels que $\mathfrak{M}_1 \supseteq \mathfrak{M}_2$. On dira que $\mathfrak{M}_1$ recouvre $\mathfrak{M}_2$ (que $\mathfrak{M}_2$ est couvert par $\mathfrak{M}_1$) si $\mathfrak{M}_2$ est un sous-module $\neq \mathfrak{M}_1$ maximal de $\mathfrak{M}_1$ ([6]). On écrira $\mathfrak{M}_1 \succ \mathfrak{M}_2$. Enfin la relation (dite de recouvrement large) $\mathfrak{M}_1 \succeq \mathfrak{M}_2$ satisfait par définition à l'équivalence

$$\mathfrak{M}_1 \succeq \mathfrak{M}_2 \rightleftharpoons \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 \quad \text{ou} \quad \mathfrak{M}_1 \succ \mathfrak{M}_2.$$

Alors $\mathfrak{M}_1 \succ \mathfrak{M}_2$ revient à dire que le A-module $\mathfrak{M}_1/\mathfrak{M}_2$ est simple. On en déduit la « *loi de recouvrement* » : si $\mathfrak{N}$ est un module simple non contenu en $\mathfrak{M}$, alors on a : $\mathfrak{M} + \mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$. Ceci conduira à une caractérisation de la relation au moyen de la notion d'inter-irréductibilité forte (section 7) et montre que, dans la relation $\succ$, le second terme est un module de nature arbitraire, tandis qu'il n'en est pas de même du premier; on peut prendre par exemple pour $\mathfrak{M}$ un module de type fini [car l'ensemble ordonné $T(\mathfrak{M}) - \mathfrak{M}$ est inductif], mais non le groupe G suivant (considéré comme module sur l'anneau Z des entiers) constitué des restes modulo 1 des fractions $\frac{a}{p^n}$, avec p premier fixé, a et n variables.

Alors on dira que $\mathfrak{M}$ est *quasi uniforme* dans le module $\mathfrak{M}'$ qui le contient si $\mathfrak{M}$ est recouvert par un sous-module de $\mathfrak{M}'$ ([7]). On démontre aisément le :

THÉORÈME 2.1. — *Pour qu'on ait $\mathfrak{M}_1 \succ \mathfrak{M}_2$, il faut et il suffit qu'on ait $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 + Ax$ pour un $x \in \mathfrak{M}_1$ tel que le résiduel $\mathfrak{M}_2 : Ax$ soit un idéal maximal arbitraire de A.*

Le second exemple, relatif à un groupe G (donné plus haut) montre ce qui arrive si A n'a pas d'élément unité. Enfin on note l'isomorphisme de A-modules $\mathfrak{M}_1 \simeq \mathfrak{M}_2 + K$ si K est le corps A/M; mais *cet isomorphisme n'est pas toujours valable pour les structures d'anneaux* ainsi que le montre le théorème 4. On voit aussi qu'on a $\mathfrak{M}_1 \succ \mathfrak{M}_2$ si et seulement si $\mathfrak{M}_1/\mathfrak{M}_2$ est monogène et si $\mathfrak{M}_2 : \mathfrak{M}_1$ est un idéal maximal en A.

Si l'on appelle « *socle* » de $\mathfrak{M}$ la somme des sous-modules $\mathfrak{N}$ simples de tout $\mathfrak{M}$, on a le :

THÉORÈME 2.2. — *Pour que le sous-module $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{M}'$ soit quasi uniforme en $\mathfrak{M}'$, il faut et il suffit que pour un idéal maximal M de A on ait $\mathfrak{M} : M \neq \mathfrak{M}$; les sous-modules $\mathfrak{M}_\tau$ qui recouvrent $\mathfrak{M}$ au sens large sont les $\mathfrak{M} + Ax$, x parcourant toutes les différences $\mathfrak{M} : M_i - \mathfrak{M}$, avec M_i idéal maximal arbitraire de A. Le socle de $\mathfrak{M}'$ est la somme discrète $\sum_i (\mathfrak{O} : M_i)$.*

([6]) Cette terminologie est en accord avec les définitions du recouvrement (ou loi de couverture) dans le treillis (modulaire) $T(\mathfrak{M})$. *Cf.* [5].

([7]) Cette terminologie sera justifiée (dans le cas des modules nœthériens) à la section 8.

Cela est une conséquence immédiate de ce qui précède. Il faut noter que la condition $\mathfrak{M} : M \neq \mathfrak{M}$ entraîne que M est l'un des *idéaux premiers essentiels* maximaux de $\mathfrak{M}$ au sens de la section 1. La réciproque est fausse dans le cas général, comme on le voit en prenant un module de torsion sur un anneau principal, sans sous-module minimal.

Toutefois la réciproque est vraie dans les modules nœthériens (section 8). Les sommes directes discrètes [8] de modules simples sont données au moyen des résultats suivants.

THÉORÈME 2.3. — *Il y a équivalence pour un A-module entre les trois conditions :*

a. $\mathfrak{M}$ *est somme de modules simples*;

b. Tout sous-module de $\mathfrak{M}$ *est somme de modules simples, et*

c. Le treillis $T(\mathfrak{M})$ *est géométrique.*

On établit aisément l'équivalence des conditions a et b. Les axiomes des treillis géométriques [9] permettent alors de montrer l'équivalence de c aux deux précédentes.

La dimension de $T(\mathfrak{M})$ est infinie en général. La somme $\sum_i (\mathfrak{O} : M_i)$ est évidemment une somme directe discrète d'après le théorème 2. Alors $T(\mathfrak{M})$ est intercontinu, complémenté (et relativement complémenté) : c'est une *algèbre de Boole* pour les lois

$$\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_2, \qquad \mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2$$

pour tous $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 \in T(\mathfrak{M})$.

En particulier, dans un socle $\mathfrak{S}$ tout sous-module $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{O}$ contient un sous-module simple. Cette dernière condition se rattache à la

PROPOSITION. — *Pour que tout sous-module non nul du A-module* $\mathfrak{M}$ *contienne un sous-module simple il faut et il suffit que les annulateurs des sous-modules monogènes non nuls de* $\mathfrak{M}$ *soient quasi uniformes.*

Il suffit d'écrire la condition pour les sous-modules non nuls Au. Pour tout $u \neq \mathfrak{O}$ il doit exister un idéal maximal M tel que pour un $a \in A$ on ait $au \neq \mathfrak{O}$ et $au \in \mathfrak{O} : M$, ou encore que

$$\mathfrak{O} : uM \supset (\mathfrak{O} : Au) \qquad \text{ou} \qquad (\mathfrak{O} : Au) : M \neq (\mathfrak{O} : Au),$$

c'est-à-dire que, d'après le théorème 2, l'annulateur de u soit quasi uniforme.

---

[8] *Cf.* MC COY [16] et *Subdirect sums of rings*, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 53, 1947, p. 856.

[9] *Cf.* [5], livre III. Pour le cas de la dimension finie, *cf.* section 13.

3. Cas des anneaux. Sur les deux types d'idéaux minimaux. — Lorsque $\mathfrak{M}$ se réduit à l'anneau A on peut distinguer deux types de recouvrement en utilisant le radical de Jacobson L de A, intersection des idéaux maximaux de A. On a le :

THÉORÈME 3.1. — *Si l'idéal J recouvre l'idéal I au sens strict, J/I est un corps ou un anneau de carré nul selon que $J^2 \nsubseteq I$ (ou ce qui revient au même, $J \nsubseteq M$) ou que $J^2 \subseteq I$ (ou que $J \subseteq M$), si M est l'idéal (maximal) $I : J$.*

On applique le théorème 2 en passant à l'anneau A/I : on pourra supposer que $I = (0)$. Un idéal minimal J sera de la forme $J = Ax$ avec

$$(0) : Ax = M \qquad \text{et} \qquad x \in [(0) : M] - (0).$$

Dans un premier cas, on a $x \in M$, donc $x^2 = 0$ et $J^2 = (0)$. Dans un second, on a $x \notin M$ et alors pour tout $j = rx$ et tout $j' = r'x$ non nul (c'est-à-dire tel que $r' \notin M$, donc $r' + M$ inversible dans le corps A/M) on peut déterminer un $j'' = r''x$ tel qu'on ait $j''.j' = j$ ou encore $r'x.r'' - r \in (0) : Ax = M$: ceci est bien possible car on n'a pas $r'x \in M$, sinon on aurait $r' \in M$ et $r' \in (0) : Ax$, soit $r'x = 0$. Notons que le premier cas (corps) est celui où l'idéal minimal est un anneau simple avec élément 1. On a en plus le :

LEMME. — *Pour tout idéal maximal M de l'anneau A il y a équivalence entre les conditions*

$$\begin{aligned} &a.\quad [(0) : M]^2 = (0),\\ &b.\quad (0) : M \subseteq L,\\ &c.\quad (0) : M \subseteq M,\\ &d.\quad [(0) : M] \cap M \neq (0)\end{aligned}$$

et, dans le cas où M a une base finie, avec la condition

$$e.\quad M^2 \neq M.$$

La condition a entraîne b, car le radical L contient le nil-radical de A, union des idéaux nilpotents. b entraîne c, car $L \subseteq M$. Alors c entraîne

$$[(0) : M]^2 \subseteq [(0) : M].M,$$

donc a et, ensuite,

$$[(0) : M] \cap M = (0) : M,$$

donc d. Si d est satisfaite, il existe un u non nul en $(0) : M \cap M$ et pour tout $v \in (0) : M$, on a

$$vM = (0), \qquad vu = 0,$$

donc

$$v \in (0) : Au = M, \qquad \text{donc} \quad (0) : M \subseteq M.$$

De plus, si l'idéal donné M a une base finie le théorème des ombres (section I) montre que $(o) : M \subseteq M$ équivaut à dire que M est une ombre pour lui-même, c'est-à-dire qu'on a $M^2 : M = M$, ce qui équivaut à $M^2 : M \neq A$, soit enfin $M^2 \neq M$. On va en déduire le :

THÉORÈME 3.2. — *Les idéaux minimaux de carrés nuls sont tous les idéaux principaux non nuls contenus dans l'intersection* $L \cap \sum_i [(o) : M_i]$ *et ceux qui sont des corps sont les résiduels* $(o) : M_i$ *qui satisfont à* $(o) : M_i \not\subseteq M_i$ (*ou ne satisfont pas aux conditions du lemme précédent*).

Il suffit, d'après ce qui précède, d'étudier le cas des corps C. Si l'on désigne par e l'élément unité multiplicatif de C, on a

$$C = Ae = (o) : M \qquad \text{en posant} \quad (o) : C = M.$$

De $e^2 = e$, on déduit $1 - e \in (o) : Ae = M$. Si l'on avait un autre corps C' associé à M et d'élément unité e', on aurait de même $e' - e \in M$, donc $e(e - e') = 0$ et $e^2 = e = ee'$ et aussi $e' = ee'$, donc $e = e'$. Donc C est $(o) : M$ lui-même. Ce dernier idéal est donc principal, mais inversement il existe des idéaux minimaux de cette forme qui ne sont pas des corps. La partie e du lemme précédent conduit au :

COROLLAIRE. — *Si* A *est un anneau dont tous les idéaux maximaux ont une base finie, les idéaux minimaux qui sont des corps sont les résiduels* $(o) : M$ *des idéaux maximaux* M *idempotents* ($M = M^2$).

Alors la dernière proposition de la section 2 se précise dans le cas du recouvrement « corps ». Il est équivalent pour l'anneau A de satisfaire à l'une quelconque des conditions suivantes :

a. Tout idéal principal non nul contient un idéal minimal qui est un corps;

b. A est une somme directe discrète de corps s'annulant respectivement;

c. L'annulateur d'un élément non nul est un idéal admettant un recouvrement du type corps.

En effet, a entraîne, pour tout $u \neq \mathfrak{O}$,

$$(\mathfrak{O} : Au) : M \neq (\mathfrak{O} : Au),$$

donc M est un idéal premier essentiel maximal de $\mathfrak{O} : Au$ et l'on a encore

$$\mathfrak{O} : Au \subseteq M, \qquad \text{donc} \quad M = \mathfrak{O} : Au$$

[on le voit en considérant un idéal p premier minimal de $\mathfrak{O} : Au$ et la relation $(\mathfrak{O} : Au) : M \not\subseteq M$ conséquence de $\mathfrak{O} : M \not\subseteq M$]. D'après le théorème 2.2,

Au est simple et étant un corps coïncide avec $\mathfrak{O} : M$, d'où b. Les autres implications sont immédiates. On en déduit, comme en Mc Coy [*cf.* note (7)] qu'on a obtenu toutes les sommes sous-directes spéciales d'anneaux simples avec élément unité.

On a ainsi caractérisé tous les socles des anneaux à idéaux minimaux corps. Ceci établit une relation entre les socles et les anneaux semi-simples généraux $[L = (0)]$ qui sont des sommes sous-directes de corps.

4. Demi-groupe associé à un idéal. — La notion de sous-demi-groupe S d'un anneau A dont le complément est multiplicativement permis en A (10) s'introduit dans la formation des anneaux de quotients. En particulier, les anneaux totaux de quotients utilisent des S dont le complément est réunion (ensembliste) d'idéaux de A lui-même. Le lien entre ces derniers S et les idéaux reliés maximaux d'un idéal donne lieu à une correspondance qui est particulièrement simple dans le cas usuel des anneaux nœthériens de Jacobson (tout idéal premier non maximal est intersection d'idéaux premiers strictement plus grands qu'on peut d'ailleurs prendre maximaux).

Pour un S quelconque désignons par $\rho(A, S)$ l'intersection des idéaux (premiers) maximaux parmi les idéaux qui ne coupent pas S. On l'appellera S-radical de Jacobson de A; si S est l'ensemble des éléments inversibles de A on retrouve l'intersection des idéaux maximaux de A.

Associons à tout élément U du treillis $T = T(A)$ des idéaux de A l'intersection $\overline{U}$ des idéaux premiers reliés maximaux de U. On a les inclusions $U \subseteq \operatorname{rad} U \subseteq \overline{U}$. La dernière est l'égalité dès que U a un nombre fini d'idéaux premiers essentiels minimaux, la première caractérise les idéaux semi-premiers. Il est, de plus, immédiat que $\overline{U}$ est le $S(U)$-radical de Jacobson de A, si l'on désigne par $S(U)$ l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas reliés à tout U donné (11).

Désignons par σ l'application $U \to S(U)$ et par ρ l'application $S \to \rho(S, A)$, par $\sum$ la classe de tous les S et par $\prod$ la classe de tous les U.

Si l'on a $S \in \sum$, on voit qu'on a $\sigma\rho S \supseteq S$. En effet, si $\overline{U} = \rho(S)$, on a $\overline{U} = \bigcap\limits_m p_m$ des p_m reliés maximaux à U. Alors, si $\alpha \in S$ on a, pour tout m,

$$\alpha \notin p_m, \qquad \text{donc} \quad \Big(\bigcap_m p_m\Big) : A\alpha = \bigcap_m p_m = \overline{U}$$

et l'on a donc $\alpha \in \sigma\rho(S)$ qu'on posera égal à $\overline{S}$. On a donc $S \subseteq \overline{S}$.

---

(10) *Cf.* chap. IV.

(11) *Cf.* W. Krull, *Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung* (*Math. Ann.*, t. 101, 1929, p. 729-744). La terminologie est celle de McCoy [16].

Si l'on suppose désormais A nœthérien on voit que $\sigma\rho$ et $\rho\sigma$ sont des fermetures de Moore en $\sum$ et $\prod$ respectivement, c'est-à-dire qu'on a dans ces classes $\overline{S} = \overline{\overline{S}}$ et $\overline{\overline{U}} = \overline{U}$. Ceci résulte immédiatement de la considération de la suite

$$U \xrightarrow{\sigma} S(U) \xrightarrow{\rho} \rho\sigma(U) = \overline{U} \xrightarrow{\sigma} \overline{S} = \sigma\rho\sigma(U) \xrightarrow{\rho} \overline{\overline{U}} = \rho\,\overline{S},$$

compte tenu du fait que U a un nombre fini d'idéaux premiers reliés maximaux $p_1, p_2, \ldots, p_l$; on a alors $S = \bigcap_i (A - p_i)$ et les idéaux premiers maximaux attachés à ce dernier S sont le p_i eux-mêmes, compte tenu du fait qu'un idéal premier P qui n'est contenu en aucun de p_i contient un élément x qui n'est contenu en aucun d'eux. Il y a alors correspondance biunivoque pour un tel anneau A entre les $\overline{S}$ et les $\overline{U}$.

Soit alors $\mathfrak{T}$ l'ensemble des $\overline{U}$, muni de la relation d'ordre induite par celle de T. Comme tout idéal semi-premier est fermé pour $\rho\sigma = \psi$ et comme toute intersection (ensembliste) d'éléments de $\mathfrak{T}$ est en T un élément de $\mathfrak{T}$, ce dernier ensemble est un sous-inter-demi-treillis complet de T. On en déduit que c'est un treillis complet, l'opération d'union $\vee$ étant obtenue comme le radical (intersection des diviseurs premiers) de l'union (ou somme) prise en T.

Notons que, dans le cas général, $\mathfrak{T}$ est un *treillis distributif* donc modulaire. Cette propriété, due à J.-C. Herz, peut s'établir rapidement si l'on admet l'axiome du choix. Prenons, en effet, X, Y et Z trois éléments de $\mathfrak{T}$ et prouvons l'inclusion

$$U = X \cap (Y \vee Z) \subseteq (X \cap Y) \vee (X \cap Z)$$

en montrant que tout diviseur premier P du second membre contient U, ce qui précède entraînera alors la distributivité cherchée. Si $P \supseteq X$ la proposition est immédiate. Si l'on a $P \nsupseteq X$, alors on a les deux inclusions $P \supseteq Y$ et $P \supseteq Z$ et donc $P \supseteq Y \vee Z$ et enfin $P \supseteq U$.

5. Sous-radical d'un module de type fini. — La notion de recouvrement va permettre d'étendre à un module $\mathfrak{M}$ quelconque la notion de radical de Jacobson d'un anneau [12]. Cela donnera une caractérisation des modules dont le treillis des sous-modules est géométrique (section 13) et des modules semi-simples. Cette notion permet de caractériser toutes les unions sous-directes de modules simples et, si l'on admet le recouvrement au sens large, d'étendre aux modules la notion de groupe divisible.

Définition. — *On appelle sous-radical du A-module $\mathfrak{M}$ l'intersection des sous-modules de $\mathfrak{M}$ couverts par $\mathfrak{M}$.*

Par exemple, si $\mathfrak{M}$ est un module de type fini, le théorème de Zorn montre qu'il existe des sous-modules stricts maximaux qui contiennent tout sous-module strict choisi arbitrairement. Lorsque le sous-radical $\rho(\mathfrak{M})$ coïncide avec $\mathfrak{M}$ (ce qui implique que tout recouvrement est pris au sens large), on dit que $\mathfrak{M}$ est divisible. On utilisera plusieurs lemmes.

LEMME 1. — *Pour tout A-module de type fini $\mathfrak{N}$ et tout idéal M maximal de A il y a équivalence entre $\mathfrak{N} = M\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{O} : \mathfrak{N} \not\subseteq M$.*

En effet, si l'on a $\mathfrak{O} : \mathfrak{N} \not\subseteq M$, on a $1 = m + a$, avec $m \in M$ et $a\mathfrak{N} = \mathfrak{O}$, donc $\mathfrak{N} \subseteq M\mathfrak{N}$, d'où l'égalité. La réciproque utilise la méthode du déterminant de KRULL (*cf.* [13], section 15) : si l'on a $\mathfrak{N} = M\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N} = An_1 + \ldots + An_r$, on a

$$n_i = m_{i1}n_1 + \ldots + m_{ir}n_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, r,\ m_{ij} \in M)$$

et si D est le déterminant des $(\delta_{ij} - m_{ij})$, δ_{ij} étant le symbole de Kroneker, on a pour tout i $Dn_i = \mathfrak{O}$, donc $D\mathfrak{N} = \mathfrak{O}$ et comme $1 - D \in M$, on a $\mathfrak{O} : \mathfrak{N} \not\subseteq M$.

LEMME 2. — *Les sous-espaces d'un espace vectoriel E sur un corps qui sont couverts par E sont tous les sous-espaces définis par tous les systèmes de points obtenus en enlevant un élément à une base arbitraire.*

Ce lemme résulte immédiatement du fait que $E \succ E'$ équivaut au fait que E/E' est simple donc de dimension un et des théorèmes de la base. On a alors le :

LEMME 3. — *Les sous-modules $\mathfrak{M}_\gamma$ que recouvre un module de type fini $\mathfrak{M}$ sont tous obtenus en considérant un diviseur maximal arbitraire de $\mathfrak{O} : \mathfrak{M}$ et un système $\{m_1, \ldots, m_p\}$ (avec $m_i \in \mathfrak{M}$ pour tout i et p minimum) tel qu'on ait*

$$\mathfrak{M} = M\mathfrak{M} + Am_1 + \ldots + Am_p;$$

alors les $\mathfrak{M}_\gamma$ associés à M sont obtenus en supprimant un des m_i.

Notons que, d'après la section 1, un A-module quelconque $\mathfrak{M}$ admet des sous-modules stricts maximaux si et seulement si $\mathfrak{M}$ n'est pas divisible; en effet, si l'on a $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{M}'$, on a pour un M, $M\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'$, et inversement si l'on a $M\mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}$, l'espace vectoriel sur $A/M : \mathfrak{M}/M\mathfrak{M}$ n'est pas réduit à zéro et admet donc les sous-espaces vectoriels maximaux auxquels correspondent des modules couverts par $\mathfrak{M}$. On en déduit la proposition relative aux modules de type fini en raisonnant dans le module $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}/M\mathfrak{M}$. De plus, en retirant un, puis deux, ..., éléments m_i, on obtient une chaîne maximale de sous-modules allant de $\mathfrak{M}'$ à $M\mathfrak{M}$. On voit, par ailleurs, que l'intersection des modules $\mathfrak{M}_\gamma$ associés à un M déterminé est $M\mathfrak{M}$, en raisonnant dans l'espace vectoriel non nul associé. On a alors le :

THÉORÈME 5.1. — *Le sous-radical* $\rho(\mathfrak{M})$ *d'un A-module de type fini* $\mathfrak{M}$ *coïncide avec :*

a. L'intersection des $M\mathfrak{M}$, *M étant un idéal maximal arbitraire de A ;*

b. Celle des $M'\mathfrak{M}$, M' *étant un diviseur maximal arbitraire de* $\mathfrak{O}:\mathfrak{M}$ *et*

c. L'ensemble des $x\in\mathfrak{M}$ *tels que pour tout sous-module* $\mathfrak{N}$ *tel que* $\mathfrak{N}+Ax=\mathfrak{M}$ *on ait* $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}$.

Les intersections a et b coïncident avec $\rho(\mathfrak{M})$ d'après les lemmes précédents. Enfin si $x\in\mathfrak{M}$ satisfait à la condition définie par c, on a $x\in\rho(\mathfrak{M})$ sinon on aurait pour un $\mathfrak{M}_1$ avec $x\notin\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_1\prec\mathfrak{M}$ et comme on a $\mathfrak{M}_1+Ax=\mathfrak{M}$ on aurait $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}$ d'après c. Inversement, si $x\in\rho(\mathfrak{M})$ et si pour un $\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{M}$ on avait $\mathfrak{M}_1\neq\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_1+Ax=\mathfrak{M}$, on pourrait trouver d'après le théorème de Zorn un $\mathfrak{M}'$ avec $\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{M}'\prec\mathfrak{M}$ et alors $x\subseteq\mathfrak{M}'$ entraînerait

$$\mathfrak{M}_1+Ax\subseteq\mathfrak{M}',\qquad\text{donc}\quad \mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}'.$$

Notons que si $\mathfrak{M}$ est en plus *nœthérien* (section 8), $\rho(\mathfrak{M})$ est l'ensemble des $x\in\mathfrak{M}$ qui n'appartient à *aucun système minimal* de générateurs de $\mathfrak{M}$. En effet, si l'on prend pour un $y\in\rho(\mathfrak{M})$ un système de générateurs comprenant $y:\{y, n_1, \ldots, n_p\}$ on aurait, d'après c, $y\in An_1+\ldots+An_p$ et le système ne serait pas minimal. Inversement, si aucun système minimal ne contient un y déterminé de $\mathfrak{M}$, soit $\mathfrak{N}$ un sous-module maximal de $\mathfrak{M}$; s'il ne contenait pas y il aurait une base

$$\mathfrak{N}=An_1+An_2+\ldots+An_r$$

et comme $\mathfrak{N}+Ay=\mathfrak{M}$ on aurait $y\in An_1+\ldots+An_r$. Cette dernière caractérisation s'étend en fait à tous les modules $\mathfrak{M}$ tels que *tout système de générateurs d'un sous-module quelconque contienne un tel système minimal* (ou base). Enfin l'ombre de $\mathfrak{M}$ est donnée par le :

THÉORÈME 5.2. — *L'ombre du sous-radical du A-module de type fini* $\mathfrak{M}$ *est le radical de Jacobson de l'idéal* $\mathfrak{O}:\mathfrak{M}$ *de A. En particulier, si* $\mathfrak{M}$ *est normal et de type fini sur un anneau semi-local A, on a* $\rho(\mathfrak{M})=L\mathfrak{M}$ *en désignant par L le radical de Jacobson de A.*

En effet, tout diviseur maximal M'_i de $\mathfrak{O}:\mathfrak{M}$ sera une ombre (*cf.* [11]) et l'on a $M'_i\mathfrak{M}:\mathfrak{M}=M'_i$ et alors on a

$$\rho(\mathfrak{M})=\bigcap_i M'_i\mathfrak{M},\qquad\text{d'où}\qquad \bigcap_i(M'_i\mathfrak{M}:\mathfrak{M})=L'$$

en posant

$$L'=\bigcap M'_i.$$

Alors L' est une ombre et l'on a, en plus,

$$L'\mathfrak{M} : \mathfrak{M} = L'.$$

Lorsque l'anneau $A' = A/\mathfrak{O} : \mathfrak{M}$ est semi-local, c'est-à-dire si les idéaux M'_i sont en nombre fini, désignons L' leur intersection. On a

$$L' = M'_1 \cap M'_2 \cap \ldots \cap M'_h = M'_1 . M'_2 \ldots M'_h \qquad \text{et, donc,} \qquad \sum_i (L' : M'_i) = A'.$$

Dire que $\mathfrak{M}$ est normal revient à dire qu'on a $A' = A$. On a alors

$$L\mathfrak{M} \subseteq \bigcap_i M_i \mathfrak{M} = \rho(\mathfrak{M})$$

et, pour tout i,

$$M_i(L : M_i) \subseteq L,$$

donc

$$\mathfrak{M} = L\mathfrak{M} : L \subseteq L\mathfrak{M} : [M_i(L : M_i)], \qquad M_i\mathfrak{M} \subseteq L\mathfrak{M} : (L : M_i),$$

$$\bigcap_i M_i \mathfrak{M} \subseteq L\mathfrak{M} : \sum_i (L : M_i),$$

donc, finalement,

$$\rho(\mathfrak{M}) = L\mathfrak{M} : A = L\mathfrak{M}, \qquad \text{donc} \quad \rho(\mathfrak{M}) = L\mathfrak{M}.$$

Les sommes (directes) de A-modules simples sont caractérisées à la section 13.

6. Modules de type fini union-irréductibles. — Ce qui suit concerne un cas dans lequel $\mathfrak{M}$ possède un seul sous-module maximal et donnera d'ailleurs tous les cas où cela arrive pour un module de type fini. La notion suivante est une notion latticielle de forte irréductibilité pour l'union.

Définition. — *On dit que le A-module $\mathfrak{M}$ est union-irréductible (ou local) s'il possède un élément maximum parmi ses sous-modules $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{M}$.*

Exemples. — Un module simple, un anneau local (quasi local), un groupe cyclique primaire.

Théorème 6.1. — *Les modules union-irréductibles sont les images homomorphes des anneaux locaux. Pour qu'un A-module $\mathfrak{N}$ soit un tel module il faut et il suffit qu'il soit de type fini et couvre son sous-radical; il est alors monogène.*

Ces résultats découlent immédiatement des sections 1 et 5. De plus, si M est l'unique idéal maximal qui contient $\mathfrak{O} : \mathfrak{N}$ le sous-module maximum de $\mathfrak{N}$ est $M\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}$ est lui-même isomorphe en tant que A-module au module monogène $A/(\mathfrak{O} : \mathfrak{N})$. En particulier, les modules nœthériens qui sont locaux sont ceux qui ne recouvrent qu'un seul sous-module.

Si $\mathfrak{N}$ est local, il est monogène et, d'après le théorème 5.1, $A/(\mathfrak{O} : \mathfrak{N})$ est local, d'unique idéal maximal $M/(\mathfrak{O} : \mathfrak{N})$, si M est l'unique diviseur maximal de $\mathfrak{O} : \mathfrak{N}$ et enfin on a $\mathfrak{N} \succ M\mathfrak{N}$. On dira que $\mathfrak{N}$ est M-local. Une somme (finie ou non) de modules locaux sera appelée « *hypersocle* ». En particulier, une somme de modules tous M-locaux sera appelée « *M-hypersocle* ».

EXEMPLES. — 1. La clôture intégrale d'un anneau local géométrique (*cf.* [20]) est un tel module nœthérien. Il en est de même de la clôture intégrale d'un anneau local complet, intègre et nœthérien (NAGATA).

2. Un p-groupe abélien est un Zp-hypersocle.

7. **Modules super-irréductibles (inter-irréductibilité forte).** — La notion de module local est intrinsèque. Il n'en est pas de même de la notion duale, introduite par L. FUCHS (*cf.* [9]) pour les idéaux et qui donnera une propriété caractéristique du recouvrement (th. 7.1), de la condition minimale restreinte (section 15) et d'irréductibilité sous-directe de modules.

DÉFINITION. — *Un sous-module $\mathfrak{N}$ d'un module $\mathfrak{M}$ est dit super-irréductible en $\mathfrak{M}$ s'il n'est pas intersection de sous-modules de $\mathfrak{M}$ qui le contiennent strictement.*

Il revient au même de dire qu'il existe un élément minimum parmi les modules $\mathfrak{N}_i$ tels qu'on ait

$$\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}_i \subseteq \mathfrak{M}, \qquad \mathfrak{N}_i \neq \mathfrak{N}.$$

Cette notion renforce la notion usuelle d'irréductibilité (*cf.* [11]). Par exemple, les sous-modules $\mathfrak{M}_\lambda$ couverts par $\mathfrak{M}$ sont super-irréductibles en $\mathfrak{M}$. Cet exemple montre que les modules introduits en cette section sont quelconques (section 1) si l'on ne fixe pas le module ambiant, à l'inverse de ce qui se produit pour des modules locaux. On a le :

THÉORÈME 7.1. — *Pour qu'on ait $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}$ il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient réalisées :*

a. $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ *est monogène non nul;*

b. $\mathfrak{N}$ *est super-irréductible en* $\mathfrak{M}$, *et*

c. $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ *est un idéal semi-premier de* A.

Par passage au quotient par $\mathfrak{N}$ il suffit de prendre $\mathfrak{N} = \mathfrak{O}$. Si $\mathfrak{M}$ est simple, $\mathfrak{O} : \mathfrak{M}$ est un idéal maximal qui est bien semi-premier, donc a, b et c sont réalisées. Si elles le sont inversement, il suffit, d'après la section 1, de voir que le A-module $A/(\mathfrak{O} : \mathfrak{M})$ est un corps. Or $\mathfrak{M}$ est monogène, tous ses sous-modules sont des e-modules donc $\mathfrak{O} : \mathfrak{M}$ est un idéal super-irréductible en A et semi-premier, donc le quotient est un corps (McCoy, *loc. cit.* chap. VI, th. 35).

La condition b se traduit au moyen de la notion d'élément primal (*cf.* [8], [15]). *Pour que* $\mathfrak{O}$ *soit super-irréductible en* $\mathfrak{M}$, *il faut et il suffit que* :

a'. $\mathfrak{O}$ *soit primal d'adjoint maximal* M *et le résiduel* $\mathfrak{O} : M$ *soit monogène non nul, et*

b'. pour tout $u \neq \mathfrak{O}$ *on ait* $\mathfrak{O} : Mu \neq \mathfrak{O} : Au$.

Pour la proposition directe on remarque qu'on a $\mathfrak{O} < Ax$, avec $\mathfrak{O} : Ax = M$ maximal et donc $\mathfrak{O} : M$ est monogène et non nul : M est un idéal « relié » à $\mathfrak{O}$ en $\mathfrak{M}$ et, de plus, tout $a \in A$ relié à $\mathfrak{O}$ est contenu en M car on a

$$\mathfrak{O} : Aa \neq \mathfrak{O}, \qquad \text{donc} \quad \mathfrak{O} : Aa \supseteq Ax \qquad \text{et} \qquad ax = \mathfrak{O} \qquad \text{et} \qquad a \in M.$$

De plus, d'après la section 2, tout sous-module non nul de $\mathfrak{M}$ contenant un module simple on a la condition b'. La réciproque est immédiate.

En particulier, un module primaire sera super-irréductible si et seulement si il est uniforme (*cf.* section 15).

Les modules $\mathfrak{U}_\sigma$ super-irréductibles en $\mathfrak{M}$ sont facilement caractérisés par la propriété d'être les sous-modules maximaux de $\mathfrak{M}$ parmi ceux qui ne contiennent pas un élément fixé ξ de $\mathfrak{M}$ (qui est un élément arbitraire de $\mathfrak{U}'_\sigma - \mathfrak{U}_\sigma$ si $\mathfrak{U}'_\sigma$ est l'unique sous-module qui recouvre $\mathfrak{U}_\sigma$). Cela s'établit comme pour les idéaux et l'on voit aussi que *tout sous-module est intersection de sous-modules* $\mathfrak{U}_\sigma$ *super-irréductibles*. Le cas dans lequel les $\mathfrak{U}_\sigma$ sont toujours en nombre fini servira à caractériser la condition minimale restreinte dans les anneaux (*cf.* section 15). Ce résultat traduit enfin pour les modules le théorème général de Birkhoff suivant lequel toute structure algébrique (muni d'opérations finitaires) est *union sous-directe* de structures du même genre et *sous-directement irréductibles* ([12]).

CHAPITRE II.

Application de la théorie de recouvrement aux modules nœthériens.

8. **Rappels sur les modules nœthériens et les propriétés de chaînes.** — En vue de préciser dans le cas d'une condition de chaîne les résultats du précédent chapitre, on va rappeler sans démonstration certains résultats sur les modules satifaisant à la condition maximale ([13]) et donner quelques compléments.

([12]) *Cf.* [2] et [16].
([13]) *Cf.* [1], [3], [11], [13], [15], [19] et [22].

Il est équivalent pour le module $\mathfrak{M}$ de satisfaire à l'une ou à l'autre des trois conditions :

a. $T(\mathfrak{M})$ a toutes ses chaînes ascendantes stationnaires,

b. Tout sous-ensemble non vide de $T(\mathfrak{M})$ admet au moins un élément maximal, et

c. Tout $\mathfrak{N} \in T(\mathfrak{M})$ est de type fini sur A. On dira que $\mathfrak{M}$ est nœthérien (sur A).

Alors pour que le A-module *normal* $\mathfrak{M}$ soit nœthérien sur A, il faut et il suffit qu'il soit de type fini et que A soit lui-même un anneau nœthérien (module nœthérien sur lui-même). En particulier, un module de type fini sur A nœthérien est nœthérien. *On supposera dans la suite de cette section que cette dernière condition est réalisée.*

Tout $\mathfrak{N} \in T(\mathfrak{M})$ est intersection d'un nombre fini d'éléments $\mathfrak{N}_i$ inter-irréductibles en $T(\mathfrak{M})$. La condition modulaire entraîne alors que tout élément irréductible est primaire au sens de la section 1 ([14]). On en déduit pour tout $\mathfrak{N}$ de T une représentation primaire « normale », c'est-à-dire comme intersection dont le nombre n de composants est le plus petit possible, ceci impliquant qu'aucun composant $\mathfrak{N}_i$ ne contient l'intersection des autres $\mathfrak{N}_j \neq \mathfrak{N}_i$ et que les radicaux p_i des $\mathfrak{N}_i$ soient tous différents. Les p_i sont les « idéaux premiers essentiels » de $\mathfrak{N}$; ils sont déterminés et parmi eux il y a les « idéaux premiers minimaux » de $\mathfrak{N}$ en $\mathfrak{M}$ et des « idéaux premiers essentiels maximaux » tous en nombre fini. Les premiers sont des a-idéaux et sont les seuls à avoir dans le cas général des composants correspondants $\mathfrak{N}_i$ déterminés.

De plus, chaque $\mathfrak{N}_i$ est primaire fort, c'est-à-dire que $\mathfrak{N}_i : \mathfrak{M}$ contient une puissance de $\operatorname{rad}\mathfrak{N}_i$. On montre alors qu'on a pour un entier σ (appelé exposant de $\mathfrak{N}$, sous-module quelconque)

$$\mathfrak{N} : \mathfrak{M} \supseteq (\operatorname{rad}\mathfrak{N})^{\sigma} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{N} : \mathfrak{M} \not\supseteq (\operatorname{rad}\mathfrak{N})^{\sigma-1}.$$

Si I est un idéal de A, on a la réciproque d'une proposition de la section 1 : *on a* $\mathfrak{N} : I \neq \mathfrak{N}$ *si et seulement si* I *est contenu en l'un des* p_i (en fait l'un des p_i maximaux). On désignera par $\mathfrak{N}_{[I]}$ l'élément maximum parmi les $\mathfrak{N} : I^k$, d'ailleurs tous égaux pour k grand. Les sous-modules $\mathfrak{N}_{[I]}$ sont tous les composants « isolés » de $\mathfrak{N}$, c'est-à-dire l'intersection (uniquement déterminée) des composants $\mathfrak{N}_i$ dont les radicaux constituent un ensemble « isolé » $\{p_i\}$, c'est-à-dire qui comprend tout p_i contenu dans l'un d'eux.

Le théorème de structure de Krull ([15]) concerne un idéal premier essen-

([14]) En fait, la condition semi-modulaire suffit (*cf.* [5] et [11]). L'extension au cas non commutatif est possible pour les modules (*cf.* [18] et pour des cas plus généraux au moyen de la notion d'élément *tertiaire* (L. Lesieur et R. Croisot, à paraître).

([15]) *Cf.* [13] et [14].

tiel minimal p fixé de $\mathfrak{N}$ donné en T : il existe un élément minimum $\mathfrak{N}_{\mathfrak{P}}$ parmi les éléments p-primaires (primaires de radical p) qui contiennent $\mathfrak{N}$, et l'on a $\mathfrak{N}_{\mathfrak{P}} =$ maximum des $\mathfrak{N} : J$, avec $J \not\subseteq p$. On voit facilement que c'est aussi l'ensemble des $x \in \mathfrak{M}$ tels que $\mathfrak{N} : Ax \not\subseteq p$ et qu'on peut prendre pour J rendant $\mathfrak{N} : J$ maximum ($= \mathfrak{N}_{\mathfrak{P}}$) le produit $(p_2 . p_3 \ldots p_n)^s$, si l'on prend $p = p_1$ et s grand.

Le module $\mathfrak{M}$ sera dit de *longueur finie* (en tant que groupe à opérateurs) s'il possède une chaîne maximale

$$\mathfrak{O} \prec \mathfrak{N}_1 \prec \mathfrak{N}_2 \prec \ldots \prec \mathfrak{N}_{\lambda-1} \prec \mathfrak{M}$$

de sous-modules. Le théorème de Jordan-Hölder s'applique. Un tel module est caractérisé par le fait qu'il est de type fini sur $A/(\mathfrak{O} : \mathfrak{M})$ et que ce dernier anneau est un anneau d'Artin ([16]). $\mathfrak{M}$ satisfait alors aux conditions de chaînes ascendantes et descendantes. En particulier, un module de type fini sur un anneau d'Artin est un tel module. Plus généralement si $T(\mathfrak{M})$ satisfait à la condition minimale et si $\mathfrak{M}$ est normal sur A, l'ensemble des ombres satisfait à la condition minimale. De plus, si $T(\mathfrak{M})$ satisfait à la condition minimale et si tout idéal est une ombre en $\mathfrak{M}$ *supposé normal* on voit facilement que $\mathfrak{M}$ est de longueur finie (*cf.* prop. 4 suivante).

Si A satisfait à la condition minimale restreinte (c'est-à-dire si toute image homomorphe *propre* est un anneau d'Artin, tout A-module de type fini est nœthérien et il est alors de longueur finie dès qu'il est annulé par un $a \in A$ non nul. En particulier, un module de type fini sur un anneau principal (anneau d'intégrité à idéaux principaux) est de longueur finie dès qu'il satisfait à la condition minimale ([17]).

Le lemme classique d'intersection de Krull peut se mettre sous la forme suivante : si I est un idéal de A et $\mathfrak{M}$ en module nœthérien sur A, $\bigcap_n (I^n \mathfrak{M})$ est l'ensemble des $x \in \mathfrak{M}$ dont l'annulateur $\mathfrak{A}(x)$ coupe l'ensemble $1 + I$. Il revient au même de dire que les diviseurs premiers de I et $\mathfrak{A}(x)$ sont tous différents, ou qu'on a la même propriété pour les diviseurs maximaux de ces idéaux. C'est alors un module de Sylow. Établissons les :

PROPOSITION 1. — *Si $\mathfrak{N}'$ est un composant p-primaire isolé de $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}' : p\mathfrak{M}$ est l'ensemble des $x \in A$ tels que $\mathfrak{N} : px\mathfrak{M} \not\subseteq p$ ou encore celui des $x \in A$ tels que $\mathfrak{N}' : xp\mathfrak{M} \not\subseteq p$.*

([16]) *Cf.* [1]. La condition descendante n'entraîne pas la condition ascendante. Cela est toutefois vrai si $\mathfrak{M}$ est monogène, puisque c'est vrai dans les anneaux (*cf. Thèse* de P. SAMUEL, *La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique* [*J. math. pures et appl.*, t. 30, 1951, p. 159-274 (*Thése Sc. math.*, Paris, 1949), chap. I].

([17]) *Cf.* section 16.

En effet, si $\mathfrak{N}'$ est p-primaire,

$$\mathfrak{N}' : p\mathfrak{M} = (\mathfrak{N}' : \mathfrak{M}) : p$$

et comme $\mathfrak{N}' : \mathfrak{M}$ est un idéal p-primaire, les deux membres sont l'ensemble des x de A tels que

$$(\mathfrak{N}' : \mathfrak{M}) : px \nsubseteq p.$$

On remarque ensuite que si

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}' \cap \mathfrak{N}'_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}'_h$$

est une décomposition primaire normale de $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ étant p-primaire on a, pour $i = 2, \ldots, h$, $p_i \nsubseteq p$ et alors

$$\mathfrak{N} : px\mathfrak{M} = (\mathfrak{N}' : px\mathfrak{M}) \cap \ldots \cap (\mathfrak{N}'_h : px\mathfrak{M})$$

et donc $p \nsupseteq \mathfrak{N}'_i : px\mathfrak{M}$ pour tout $i = 2, \ldots, h$, sinon

$$p \supseteq [\mathfrak{N}'_i : \mathfrak{M}] : p \supseteq \mathfrak{N}'_i : \mathfrak{M}, \qquad \text{donc} \quad p \supseteq p_i,$$

d'où une contradiction, et il équivaut de dire qu'on a

$$\mathfrak{N} : px\mathfrak{M} \subseteq p \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{N}' : px\mathfrak{M} \subseteq p,$$

d'où la proposition qui n'a supposé que l'existence d'une décomposition primaire sans condition de chaîne. On en déduit la :

Proposition 2. — *Pour qu'un composant p-primaire isolé $\mathfrak{N}'$ de $\mathfrak{N}$ soit confondu avec $p = \mathfrak{N}' : \mathfrak{M}$, il faut et il suffit qu'on ait $\mathfrak{N} : p\mathfrak{M} \nsubseteq p$.*

En effet, si $\mathfrak{N} : \mathfrak{M} = p$, la décomposition primaire de $\mathfrak{N}$ montre que $\mathfrak{N} : p\mathfrak{M} \nsubseteq p$. Si l'on a inversement $\mathfrak{N} : p\mathfrak{M} \nsubseteq p$, on a *a fortiori* $\mathfrak{N}' : p\mathfrak{M} \nsubseteq p$ et alors 1 est un des éléments x de la proposition 1 et

$$1 \in \mathfrak{N}' : p\mathfrak{M}, \qquad p = p\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}' : \mathfrak{M} \qquad \text{et} \qquad p = \mathfrak{N}' : \mathfrak{M},$$

car p est une ombre et $\mathfrak{N}' : \mathfrak{M}$ est p-primaire.

Proposition 3. — *Pour tout sous-module $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$ et tout idéal maximal M il y a équivalence entre les conditions :*

a. $\mathfrak{N} = M\mathfrak{N}$;

b. $\mathfrak{N} \subseteq \bigcap_n M^n \mathfrak{M}$;

c. $\mathfrak{O} : \mathfrak{N} \nsubseteq M$.

En effet, a entraîne que

$$\mathfrak{N} = \bigcap_n M^n \mathfrak{M} \subseteq \bigcap_n M^n \mathfrak{M},$$

d'où b. Si b est réalisée, le lemme d'intersection de Krull montre que pour tout x de $\mathfrak{N}$ on a $\mathfrak{O} : Ax \not\subseteq M$ et comme $\mathfrak{N}$ est de type fini, on a c. Enfin, c entraîne a, d'après le lemme 1 de la section 5.

PROPOSITION 4. — *Soit $\mathfrak{M}$ un module type fini sur un anneau A avec élément unité. Si $\mathfrak{M}$ est de longueur finie et semi-simple* $(\rho(\mathfrak{M}) = \mathfrak{O})$, *tout diviseur de $\mathfrak{O} : \mathfrak{M}$ est une ombre et $\mathfrak{M}$ satisfait à la condition minimale pour ses sous-modules. Inversement, si $\mathfrak{M}$ satisfait à la condition minimale et si tout diviseur de $\mathfrak{O} : \mathfrak{M}$ est une ombre, $\mathfrak{M}$ est de longueur finie.*

En effet, si $\mathfrak{M}$ est de longueur finie, le quotient $A' = A/(\mathfrak{O} : \mathfrak{M})$ est un anneau d'Artin et le théorème 5.2 s'applique : le radical de Jacobson de A' est $L' = (o)$ et A' est semi-simple. Tout idéal y est semi-premier et, d'après la section 1, c'est une ombre.

Réciproquement si $\mathfrak{M}$ satisfait à la condition minimale et si tout diviseur de $\mathfrak{O} : \mathfrak{M}$ (donc tout idéal de A') est une ombre, A' satisfait alors à la condition minimale et comme A a un élément unité, A' aussi, et A' est de longueur finie. Finalement, $\mathfrak{M}$ est un module de type fini sur un anneau d'Artin, donc est de longueur finie.

PROPOSITION 5. — *Un sous-module $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$ est quasi uniforme en $\mathfrak{M}$ si et seulement si un de ses composants primaires dans une décomposition normale est uniforme* ([18]).

On appelle uniformes les modules primaires dont le radical est un idéal maximal de l'anneau A. La proposition est une conséquence immédiate du théorème 2.2 et de la caractérisation des idéaux premiers reliés maximaux d'un module (section 1).

9. Topologie associée à la notion de recouvrement. — La notion de chaîne maximale conduit à introduire sur l'anneau d'opérateurs A une topologie qui coïncide avec la topologie usuelle dans le cas des anneaux semi-locaux, et d'ailleurs dans ce cas seulement. On appellera pour tout module nœthérien *normal* $\mathfrak{M}$, « topologie sous-radicale » la topologie suivante Z définie sur $\mathfrak{M}$, dans laquelle un système fondamental de voisinages de $\mathfrak{O}$ est constitué par les sous-modules $[\rho(\mathfrak{M}) : \mathfrak{M}]^n \mathfrak{M}$, $\rho(\mathfrak{M})$ désignant le sous-radical de $\mathfrak{M}$.

On appellera, d'autre part, « *quasi-maximaux* » les sous-modules $\mathfrak{N}_i$ dont les idéaux premiers essentiels sont tous maximaux (ce sont les intersections finies de sous-modules uniformes). On appellera « *topologie quasi maxi-*

([18]) Un sous-module $\mathfrak{N}$ est quasi uniforme s'il est couvert (au sens strict) par un sous-module de $\mathfrak{M}$ au moins (section 2).

male T » celle dont un système fondamental de voisinages de zéro se[r] constitué par les $\mathfrak{N}_i$. On a le :

THÉORÈME 9.1. — *Les topologies Z et T sont séparées au sens de Haus-dorff. Z peut se définir au moyen des sous-modules $L^n\mathfrak{M}$, où L est le radical de Jacobson de A et T au moyen des sous-modules*

$$M_1^{n_1}\mathfrak{M}\cap\ldots\cap M_p^{n_p}\mathfrak{M},$$

$M_1, \ldots, M_p$ étant des idéaux maximaux arbitraires.

En effet, $\mathfrak{M}$ étant de type fini le théorème 5.2 montre que L est l'ombre de $\rho(\mathfrak{M})$ et pour Z on remarque, d'une part, que les $M^n\mathfrak{M}$ sont quasi maximaux, car on a $M^n\mathfrak{M} : \mathfrak{M}\supseteq M^n$ et $\mathfrak{M}$ est normal (section 8) et, d'autre part, qu'un $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}$ quasi maximal est tel que pour des M_j et n_j convenables on a

$$\mathfrak{N} : \mathfrak{M}\supseteq M_1^{n_1}\ldots M_p^{n_p}.$$

Alors, en prenant une décomposition primaire de $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{N}_p$, on a

$$\mathfrak{N}_1\supseteq M_1^{n_1}\mathfrak{M}, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{N}_p\supseteq M_p^{n_p}\mathfrak{M},$$

d'après le théorème du radical en un module normal, d'où

$$\mathfrak{N}\supseteq M_1^{n_1}\mathfrak{M}\cap\ldots\cap M_p^{n_p}\mathfrak{M}.$$

On en déduit la séparation de Z : il suffit de voir que $\mathfrak{O} = ux$, avec $x\in\mathfrak{M}$ et $u\in 1+L$ entraîne $x = \mathfrak{O}$. En cas contraire on aurait

$$A\neq I = \mathfrak{O} : Ax \qquad \text{et} \qquad A = \mathfrak{O} : Aux = I : Au\neq I$$

et u serait contenu en un des idéaux premiers P de I en A. Alors pour tout diviseur maximal M de P on a $u\in P\subseteq M$ et comme $1\text{-}u\in L\subseteq M$ on aurait $1\in M$. Enfin la séparation de T résulte de la définition précédente de T : si l'on a pour un x de $\mathfrak{M}$ et tous M et n, $x\in M^n\mathfrak{M}$ on a, d'après la section 8, $\mathfrak{O} : Ax\nsubseteq M$ pour tout M et donc $x = \mathfrak{O}$.

COROLLAIRE. — *Tout sous-module $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$ est fermé pour la topologie T.*

Soit, en effet, $\{\mathfrak{N}_k\}$ la famille des sous-modules quasi maximaux de $\mathfrak{M}$. L'adhérence de tout $\mathfrak{N}$ donné en $\mathfrak{M}$ est l'intersection $\bigcap_k(\mathfrak{N}+\mathfrak{N}_k)$. Or en passant aux ombres et en considérant les idéaux premiers essentiels on voit que les $\mathfrak{N}+\mathfrak{N}_k$ sont tous les sous-modules quasi maximaux de $\mathfrak{M}$ qui contiennent $\mathfrak{N}$: le passage au module quotient $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ et la séparation conduisent à $\bigcap_k(\mathfrak{N}+\mathfrak{N}_k) = \mathfrak{N}$. On a enfin le :

THÉORÈME 9.2. — *La topologie Z est plus fine que la topologie T et coïncide avec elle si et seulement si $A/(\mathfrak{O} : \mathfrak{M})$ est semi-local.*

L'inclusion cherchée résulte du théorème précédent et de $L \subseteq M$ pour tout M. Si $A' = A/(\mathfrak{O} : \mathfrak{M})$ est semi-local, $L^n\mathfrak{M}$ est pour tout entier n quasi maximal, car $L = M_1 \ldots M_p$ et

$$L^n\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \supseteq (M_1 \ldots M_p)^n \qquad \text{et} \qquad A = A';$$

T et Z coïncident. Si réciproquement on a $T = Z$, $L\mathfrak{M}$ doit être en particulier quasi maximal : on a pour des M_i et n convenables

$$L\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \supseteq (M_1 \ldots M_p)^n.$$

Or L est *semi-premier* et est donc une ombre puisque $\mathfrak{M}$ est de type fini (section 1); on a $L = L\mathfrak{M} : \mathfrak{M}$ et donc L contient le produit $M_1 \ldots M_p$ et lui est donc égal : A′ est bien semi-local.

10. Caractérisation des chaînes maximales de longueur finie. — Le recouvrement en un module nœthérien se précise de la manière suivante ([19]) : si $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ (supposé normal ou non) admet $P_1, P_2, \ldots, P_r$ comme « idéaux premiers reliés maximaux » et si P_i est l'un de ceux-ci, avec la propriété d'être maximal en A, alors $\mathfrak{N} + Ax$ recouvre $\mathfrak{N}$ pour tout $x \in (\mathfrak{N} : P_i) - \mathfrak{N}$.

De plus, dire qu'il existe une chaîne maximale de longueur finie de $\mathfrak{N}$ à $\mathfrak{N}'$ ($\mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{N}$) équivaut à dire que le A-module $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}'$ est de longueur finie, c'est-à-dire d'après la section 8 que $A/(\mathfrak{N}' : \mathfrak{N})$ est un anneau d'Artin, ou encore $\mathfrak{N}' : \mathfrak{N}$ est quasi maximal en A, donc qu'on a, pour des M_i et n convenables,

$$\mathfrak{N}' : \mathfrak{N} \supseteq (M_1 \ldots M_p)^n.$$

Ce résultat peut être affiné au moyen de la section 5 (lemme 3). Notons enfin que si $\mathfrak{M}$ est normal, la section précédente montre que $\mathfrak{N}' : \mathfrak{N}$ est quasi maximal. On a donc la :

PROPOSITION 10.1. — *Il y a équivalence pour $\mathfrak{M}$ normal sur A et $\mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ entre les conditions :*

a. $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}'$ *est de longueur finie;*

b. $\mathfrak{N}' : \mathfrak{N} \supseteq M_1^{n_1} \ldots M_p^{n_p}$ *pour des M_i et n_i convenables; et*

c. $\mathfrak{N}' : \mathfrak{N}$ *est quasi maximal en A.*

Un module fixé $\mathfrak{N}$ en $\mathfrak{M}$ sera le terme initial d'une telle chaîne maximale ascendante si et seulement si un de ses composants primaires est uniforme (ceci étant indépendant de la décomposition normalisée choisie). La déter-

([19]) *Cf.* sections 2 et 8 (prop. 5).

mination de toutes ces chaînes pour $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{M}$ fixés conduira à une équivalence déduite de la topologie T antérieurement définie (*cf.* section 17) et se fait au moyen de la :

Proposition 10.2. — *Toute chaîne maximale de modules contenus en $\mathfrak{M}$ et croissant à partir de $\mathfrak{A}_i$ fixé peut être plongée en une chaîne de même nature de $\mathfrak{A}_i$ à un élément bien déterminé $\mathfrak{A}_i^\star$ qu'on obtient en supprimant les composants primaires uniformes de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{M}$.*

En effet, les sous-modules $\mathfrak{A}_{i,h}$ de $\mathfrak{M}$ tels qu'on ait une chaîne

$$\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}_{i,1} \prec \ldots \prec \mathfrak{A}_{i,h} \subseteq \mathfrak{M}$$

ont un élément maximum : leur somme $\mathfrak{A}^\star$ est la somme d'un nombre fini d'entre eux (car $\mathfrak{M}$ est nœthérien), soit

$$\mathfrak{A}^\star = \mathfrak{A}''_{i,1} + \ldots + \mathfrak{A}''_{i,h}$$

et l'on a

$$\mathfrak{A}_i : \mathfrak{A}_i^\star = \bigcap_h \mathfrak{A}_i : \mathfrak{A}''_h.$$

Comme le second membre est intersection finie d'idéaux quasi uniformes (d'après la proposition 1), il est lui-même quasi uniforme comme on le voit en considérant ses diviseurs premiers. Alors (d'après la même proposition) $\mathfrak{A}^\star$ est un $\mathfrak{A}_i$ particulier. La section 8 montre aussi que $\mathfrak{A}^\star$ est le maximum des résiduels de la forme $\mathfrak{A} : (M_1^{\alpha_1} \ldots M_p^{\alpha_1})$. En sens inverse, cette proposition donne toutes les chaînes maximales dans un module $\mathfrak{M}$ fixé : on prend un sous-module $\mathfrak{A}^\star \subseteq \mathfrak{M}$ arbitraire *sans idéal relié qui soit idéal maximal en A* et l'on applique le lemme 3 de la section 5 : on considère un diviseur maximal de $\mathfrak{O} : \mathfrak{A}^\star$ et ainsi de suite. Le problème est résolu.

On sait que dans un ensemble partiellement ordonné quelconque toute chaîne est contenue en une chaîne maximale : c'est une proposition équivalente à l'axiome du choix. Dans l'ensemble $T(\mathfrak{M})$ des sous-modules de $\mathfrak{M}$ les chaînes seront donc des sous-chaînes arbitraires des chaînes maximales que nous allons décrire. Soit C l'une d'elles.

C aura un élément maximal (donc maximum) I_0 et $C - \{I_0\}$ de même. On en déduit une chaîne $I_0 \succ I_1 \succ \ldots \succ I_p \succ \ldots$ Dans un premier cas I_p décrit tout C qui sera ainsi de type au plus dénombrable. Dans le cas contraire, il existe en $C - \{I_0, \ldots, I_p, \ldots\}$ un plus grand élément I' qui est nécessairement l'intersection des I_p. On continue avec I'. Alors C est constituée dans le cas général par une succession transfinie de chaînes dénombrables du type précédent.

11. Cas des anneaux nœthériens. — Si A est un anneau nœthérien et I un idéal de A, I possédera des diviseurs stricts minimaux si et seulement s'il est quasi uniforme (sections 8 et 9), c'est-à-dire finalement s'il existe un diviseur maximal M de I qui ne contienne que des éléments reliés à I. Si l'on a une décomposition primaire

$$I = Q \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_s, \qquad \text{avec} \quad \operatorname{rad} Q = M,$$

on a

$$I : M = (Q : M) \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_s;$$

on en déduit tous les J tel qu'on ait $J \succ I$ au moyen de la proposition 1 de la section 8.

Le cas particulier où J/I est un corps est ainsi caractérisé : d'après la section 3, il faut et il suffit pour qu'il en soit ainsi qu'on ait $I : M \not\subseteq M$, c'est-à-dire (prop. 1 et 2, section 8) que $Q = M$: on le voit d'ailleurs directement en prenant une base finie de M sur A. On a alors

$$J = Q_2 \cap \ldots \cap Q_s \qquad \text{et} \qquad J/I \simeq K = A/M.$$

On en déduit *qu'un anneau d'Artin est semi-simple si et seulement si ses idéaux minimaux sont tous des corps* C_i *et qu'il est alors somme (directe) des* C_i. La proposition directe est classique ([20]). En fait tous les idéaux minimaux de l'anneau d'Artin donné A seront des corps si et seulement si les composants primaires de (o) sont des idéaux maximaux (et donc tous) de A : on en déduit que A est semi-simple, et réciproquement. Alors A est un socle (section 12).

12. Modules dont le treillis des sous-modules est géométrique. Socles et hypersocles. — Les sous-modules $\mathfrak{N}$ d'un A-module nœthérien $\mathfrak{M}$ qui satisfont à la condition d'union-irréductibilité définie à la section 6 vont être caractérisés ainsi que leurs sommes : on en verra ensuite la relation avec les socles nœthériens. On a le :

LEMME 1. — *Le sous-A-module monogène* Ax *de* $\mathfrak{M}$ *est local s'il existe parmi les idéaux maximaux* M_i *de* A *un* M_j *tel qu'on ait*

$$Ax \in \bigcap_{i \neq j, n > 0} M_i^n \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_j$$

et l'on a alors

$$Ax \succ M_j x.$$

La condition sur Ax équivaut, d'après la section 6, à écrire que l'annulateur $\mathfrak{A}(x) = \mathfrak{O} : Ax$ est contenu en un seul idéal maximal : on sait d'après le lemme d'intersection de Krull (section 8) que pour tout i, $\mathfrak{O} : Ax \not\subseteq M_i$

([20]) *Cf.* [22], t. 2, section 118.

équivaut à $x \in \bigcap_n M_i^n \mathfrak{M}$, d'où moyennant le théorème 6.1, le lemme 1.

On en déduit aussi que $\mathfrak{M}_j$ est le composant de $\mathfrak{O}$ en $\mathfrak{M}$ qui est déterminé par l'ensemble des idéaux maximaux $M_j \neq M_i$: c'est donc aussi *l'intersection des composants primaires de* $\mathfrak{O}$ *dont le radical n'est pas contenu en* M_i.

De plus, il existera un sous-module local non nul si et seulement si un des idéaux premiers essentiels de $\mathfrak{O}$ en $\mathfrak{M}$ n'est pas contenu en tout idéal maximal de A, c'est-à-dire est non contenu dans le radical de Jacobson de A, d'où le :

LEMME 2. — *Il existe en* $\mathfrak{M}$ *des sous-modules locaux si et seulement si le radical de Jacobson de* A *ne contient pas tous les idéaux reliés à* $\mathfrak{O}$ *en* $\mathfrak{M}$.

La caractérisation des hypersocles nœthériens (section 8) utilisera le :

LEMME 3. — *Un anneau nœthérien* A *est un hypersocle sur lui-même si et seulement si c'est une somme directe finie d'anneaux locaux.*

D'une manière générale si $\mathfrak{U}$ est un hypersocle de type fini sur A nœthérien, la condition de chaîne ascendante montre que c'est une somme finie de sous-modules locaux : $Ax_1 + \ldots + Ax_r$. Alors on a

$$\mathfrak{O} : \mathfrak{U} = (\mathfrak{O} : Ax_1) \cap \ldots \cap (\mathfrak{O} : Ax_r)$$

et tout diviseur P premier de $\mathfrak{O} : \mathfrak{U}$ est diviseur de l'un des $\mathfrak{O} : Ax_i$. Alors, d'après la section 6, P est contenu en un seul idéal maximal. Posons $A' = A/(\mathfrak{O} : \mathfrak{U})$. On a $A' = A$ si l'on a $\mathfrak{U} = A$ (conditions du lemme 3).

Appliquons à l'idéal nul de A' la troisième décomposition classique en idéaux premiers entre eux deux à deux [21] : $(o) = I'_1 \cap \ldots \cap I'_h$, on a

$$A' = (A'/I'_1) \oplus \ldots \oplus (A'/I'_h).$$

Alors les idéaux premiers essentiels minimaux de tout I'_j en A' sont tous contenus en un idéal maximal unique M'_j, et les M'_j sont tous différents. Les A'/I'_h sont donc des anneaux locaux. La réciproque est immédiate. On va en déduire le :

THÉORÈME 12.1. — *Les hypersocles nœthériens sont les modules de type fini sur les sommes directes finies d'anneaux locaux.*

En effet, si $\mathfrak{U}$ est hypersocle sur A, il est normal sur $A' = A/(\mathfrak{O} : \mathfrak{U})$ et A' peut se représenter comme plus haut comme somme directe d'un nombre fini d'anneaux locaux. Inversement, si $\mathfrak{U}$ est de type fini sur une somme directe $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_s$ d'anneaux locaux A_k, $\mathfrak{U} = Ax_1 + \ldots + Ax_t$, on

(21) *Cf.* [22], t. 2, section 89.

a pour tout i l'isomorphisme de A-modules

$$Ax_i \simeq A/\mathfrak{A}(x_i) = A_1/(\mathfrak{A}(x_i) \cap A_1) \oplus \ldots \oplus A_s/(\mathfrak{A}(x_i) \cap A_s)$$

et comme chaque terme de la somme précédente est un module monogène sur un A_k (et aussi sur A, la somme étant directe) il est local sur A_k, ne recouvre qu'un seul sous-module et est aussi local sur A ; Ax_i est un hypersocle et il en est de même de $\mathfrak{U}$.

On déduit de ce qui précède une nouvelle caractérisation : *Un A-module nœthérien est un hypersocle si et seulement si toute ombre première est contenue en un idéal maximal unique* [22].

Appelons *hypersocle* d'un A-module nœthérien donné $\mathfrak{M}$ la somme $\mathfrak{H}(\mathfrak{M})$ des sous-A-modules locaux contenus en $\mathfrak{M}$. La somme $\mathfrak{H}(\mathfrak{M})$ est la *somme directe* des modules $\mathfrak{M}_j = \bigcap_{i \neq j;\, n > 0} M_i^n \mathfrak{M}$ dont chacun est constitué, d'après le lemme 1, par la somme des sous-A-modules locaux attachés à M_j. En effet, si l'on a $j \neq j'$ et $y \in \mathfrak{M}_j \cap \mathfrak{M}_{j'}$, d'après la proposition 3 de la section 8, $y \neq 0$ entraîne $M_j = M_{j'}$.

Puisque d'une manière générale tout module simple est évidemment local on a l'inclusion $\mathfrak{H}(\mathfrak{M}) \supseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{M})$ si $\mathfrak{S}(\mathfrak{M})$ désigne le socle de $\mathfrak{M}$. La condition maximale pour les sous-modules de $\mathfrak{M}$ entraîne que la géométrie projective associée au socle $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}) = \sum_j (\mathfrak{O} : M_j)$ est de dimension finie.

On a enfin le :

THÉORÈME — 12.2. — *Pour un A-module nœthérien $\mathfrak{S}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

a. $\mathfrak{S}$ est un socle (de dimension finie);

b. $\mathfrak{S}$ est de longueur finie et semi-simple ($\rho(\mathfrak{S}) = \mathfrak{O}$);

c. $\mathfrak{S}$ est de longueur finie et tout sous-module local de $\mathfrak{S}$ est simple;

d. $\mathfrak{S}$ est semi-simple, satisfait à la condition minimale et tout diviseur de $\mathfrak{O} : \mathfrak{S}$ est une ombre.

Si a est réalisée, le treillis géométrique $T(\mathfrak{S})$ est de dimension finie, puisqu'il satisfait à la condition maximale, et, d'après le théorème 2.3, $\mathfrak{S}$ est somme (finie) de A-modules simples : on a donc $\rho(\mathfrak{S}) = \mathfrak{O}$ et $T(\mathfrak{S})$ est de longueur finie. Notons que l'anneau $A' = A/(\mathfrak{O} : \mathfrak{S})$ est un anneau d'Artin

---

[22] Alors $A/(\mathfrak{O} : \mathfrak{M})$ est un anneau du type de Dedekind au sens de P. JAFFARD (*Théorie arithmétique des anneaux du type de Dedekind*, II, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 81, 1953, p. 41-61). Réciproquement un module non normal nœthérien sur un tel anneau est un hypersocle. Un autre exemple d'hypersocle est donné par les modules de type fini sur les anneaux semi-locaux complets (*cf.* [20]).

semi-simple. L'anneau A' est donc la somme directe d'un nombre fini de corps (*cf.* la thèse de P. SAMUEL, chap. I).

Montrons que si l'on a b, tout sous-module local $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{S}$ est simple et c sera vérifiée. En effet, $\mathfrak{S}$ étant de longueur finie, il existera, d'après la section 10 des idéaux maximaux M_i et des entiers α_i $(i=1, 2, \ldots, p)$ tels qu'on ait

$$\mathfrak{O}:\mathfrak{U}\supseteq\mathfrak{O}:\mathfrak{S}\supseteq M_1^{\alpha_1}\ldots M_p^{\alpha_p}.$$

Alors on aura, d'après la section 6, par exemple $\mathfrak{O}:\mathfrak{U}\subseteq M_1$ et donc

$$\mathfrak{O}:\mathfrak{U}\nsubseteq M_2, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{O}:\mathfrak{U}\nsubseteq M_p$$

et donc d'après le lemme 1 de la section 5,

$$\mathfrak{U}\succ M_1\mathfrak{U}, \qquad \mathfrak{U}=M_2\mathfrak{U}=\ldots=M_p\mathfrak{U}$$

et le théorème 5.1 montre qu'on a

$$\rho(\mathfrak{U})=M_1M_2\ldots M_p\mathfrak{U}\subseteq M_1M_2\ldots M_p\mathfrak{S}\subseteq\rho(\mathfrak{S})=\mathfrak{O},$$

donc

$$\rho(\mathfrak{U})=\mathfrak{O}.$$

Si la condition c est réalisée, $\mathfrak{S}$ est un module de type fini sur l'anneau d'Artin $A'=A/(\mathfrak{O}:\mathfrak{S})$, lui-même somme directe d'anneaux d'Artin locaux (SAMUEL, *loc. cit.*). Le théorème 12.1 entraîne que $\mathfrak{S}$ est un hypersocle et puisque par hypothèse tout module local est simple, $\mathfrak{S}$ est un socle, d'ailleurs de longueur finie et a est réalisée. Enfin la proposition 4 de la section 8 montre, d'une part que b entraîne d et, d'autre part, que d entraîne b. L'équivalence des quatre conditions du théorème est ainsi complètement établie.

13. Conditions d'inter-irréductibilité, modules super-irréductibles. — Le passage à l'anneau classique des quotients d'un anneau relativement à un idéal premier ([23]) ramène l'étude de l'irréductibilité à celle de l'inter-irréductibilité forte qu'on donnera ici d'une manière générale dans les modules. On obtiendra en particulier une caractérisation de l'irréductibilité ordinaire établie sous une autre forme par GRÖBNER et LESIEUR ([24]).

De plus, pour étendre aux modules l'étude de l'irréductibilité ordinaire on est conduit à étendre à un module de type fini la notion classique d'anneau des quotients.

Soit $\mathfrak{M}$ un A-module de type fini et S un sous-demi-groupe ne *compre-*

([23]) *Cf.* [20], chap. I.

([24]) *Cf.* [14] avec une bibliographie et [11], section 13. Le cas des anneaux est traité en P. SAMUEL, *Commutative Algebra*, (Cornell. University, 1953), chap. IV, le lemme 1 se réduit au cas où l'on a $n=1$.

nant pas zéro de A, on désignera par $\mathfrak{M}_S$ le quotient de l'ensemble des couples (m, s), avec $m \in \mathfrak{M}$, $s \in S$, par la relation d'équivalence R :

$$(m_1, s_1) \equiv (m_2, s_2) \bmod R \rightleftarrows \exists\, s_3 \in S, \qquad \text{avec} \quad s_3(s_1 m_2 - s_2 m_1) = \mathfrak{O}.$$

Si $\mathfrak{M} = A$ on retrouve l'anneau A_S classique des quotients. On désignera par N le S-composant de (o) en A et par φ l'homomorphisme naturel $A \to A/N = A'$, par $\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}$ le S-composant de $\mathfrak{O}$ en $\mathfrak{M}$, ψ l'homomorphisme naturel $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}$. Si $\mathfrak{M}$ (resp. A) est nœthérien, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}$ est l'intersection des composants primaires de $\mathfrak{O}$ dont le radical ne coupe pas S (resp. composants de l'idéal nul). On voit simplement que $\mathfrak{M}_S$ est un A-module et même un A_S-module; ce dernier est de type fini si le module donné l'est (donc en particulier nœthérien si $\mathfrak{M}$ l'est, ainsi que A). On a $A_p \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_S$.

On a, de plus, des plongements naturels

$$A' = A/N \subseteq A_S \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}} \subseteq \mathfrak{M}_S.$$

On désignera pour tout $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ par $\mathfrak{N}^\star$ le module $A_S \psi(\mathfrak{N})$ engendré par $\psi(\mathfrak{N})$ en $\mathfrak{M}_S$ et pour tout $\overline{\mathfrak{N}} \subseteq \mathfrak{M}_S$ par $(\overline{\mathfrak{N}})_1$ le sous-module de $\mathfrak{M}$ engendré par l'ensemble des $m \in \mathfrak{M}$ dont l'image $\psi(m)$ est en $\overline{\mathfrak{N}}$:

$$(\overline{\mathfrak{N}})_1 = A\, \psi^{-1}(\overline{\mathfrak{N}}).$$

On voit comme en Samuel (*loc. cit.*, th. 1) qu'on a $[(\overline{\mathfrak{N}})_1]^\star = \overline{\mathfrak{N}}$ (il suffit de montrer que tout $\rho \in \overline{\mathfrak{N}}$ est dans le premier membre. Or ρ s'écrit (m', s') avec $m' \in \mathfrak{M}'$, $s' \in S' = \varphi(S)$ et l'on a $m' = s'$. $\rho \in \mathfrak{N}$, alors $m' = \psi(m)$, avec $m \in \mathfrak{M}$ et donc

$$\rho \in A_S\, \psi(m) \subseteq [(\overline{\mathfrak{N}})_1]^\star.$$

Démontrons alors le :

Lemme 1. — *Si $\mathfrak{M}$ est de type fini et $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, on a $\mathfrak{N}^\star = \mathfrak{M}_S$ si et seulement si l'ombre $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ coupe S.*

L'égalité précédente a lieu si et seulement si pour tout système de générateurs $\{\mu_i\}$ de $\mathfrak{M}$ qui donne un système de générateurs $\{\mu'_i\}$ de $\mathfrak{M}$ sur A' on a pour tout i : $\mu'_i \in \mathfrak{N}^\star$. Ceci s'écrit, en prenant un système d'antécédents $\mu_i \in \mathfrak{M}$ des μ'_i selon ψ, un système de $x_i \in \mathfrak{N}$ et des $s_i \in S$, avec

$$\mu'_i = \frac{\psi(x_i)}{\varphi(s_i)}, \qquad \psi(x_i - s_i \mu_i) = \mathfrak{O}.$$

Alors il existe des σ_i en S avec

$$\sigma_i(x_i - s_i \mu_i) = \mathfrak{O}, \qquad \text{soit} \quad \sigma_i x_i = \sigma_i s_i \mu_i,$$

d'où une condition valable pour tous les i ($i = 1, 2, \ldots, n$), En posant

$$\tau = \sigma_1 \ldots \sigma_n s_1 \ldots s_n, \qquad \text{il vient} \quad \tau \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}.$$

Réciproquement, si l'on a un τ en S, avec $\tau\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ on aura pour tout i un $x_i \in \mathfrak{N}$, avec $x_i = \tau\mu_i$ et en multipliant par un $\tau'_i \in S$ arbitraire (S ne contient pas nécessairement l'unité dans nos hypothèses) on en déduit la proposition.

On aura besoin pour la suite de caractériser les correspondants des sous-modules primaires *non triviaux* de $\mathfrak{M}_S$. On les donnera au moyen du théorème suivant qui établit simultanément la propriété cherchée pour $\mathfrak{M}_S$ et pour A_S et qui se déduit aisément du lemme précédent :

THÉORÈME 13.1. — *Si $\mathfrak{M}$ est de type fini sur A, il existe une correspondance biunivoque $\Gamma(\mathfrak{M}, S)$ entre les sous-modules primaires $\mathfrak{N}^\star_\pi$ strictement contenus en $\mathfrak{M}_S$ et les sous-A-modules primaires $\mathfrak{N}_\pi$ de $\mathfrak{M}$ dont le radical ne coupe pas S. De plus, les radicaux de $\mathfrak{N}^\star_\pi$ et $\mathfrak{N}_\pi$ se correspondent par $\Gamma(A, S)$.*

On voit d'abord que si $\mathfrak{N}$ est p-primaire et $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, on a $\mathfrak{N}^\star \neq \mathfrak{M}_S$ si et seulement si p ne coupe pas S : d'après le lemme 1, ceci équivaut à $(\mathfrak{N} : \mathfrak{M}) \cap S = \emptyset$ et comme on a

$$p = \{a \in A,\ a^n \in \mathfrak{N} : \mathfrak{M}\}$$

on en déduit la propriété et aussi que $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}$, noyau de ψ, car

$$\xi \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{O}},\ s\xi = \mathfrak{O} \in \mathfrak{N},\quad s \notin p \qquad \text{entraînent} \qquad \xi \in \mathfrak{N}.$$

On montre facilement qu'on a :

a. $\mathfrak{N}^\star$ est $A_S\varphi(p)$-primaire;

b. Que $(\mathfrak{N}^\star)_1 = \mathfrak{N}$ et $[A_S\varphi(p)]_1 = p$;

c. Tout $\overline{\mathfrak{N}}$ contenu strictement en $\mathfrak{M}_s$ et primaire donne un $(\overline{\mathfrak{N}})_1$ primaire dont le radical p_1 coupe S.

Les modules caractérisés à la section 7 le seront ici plus particulièrement au moyen du :

THÉORÈME 13.2. — *Pour un sous-module $\mathfrak{N}$ d'un A-module nœthérien $\mathfrak{M}$, il y a équivalence entre les conditions suivantes :*

a. *$\mathfrak{N}$ est super-irréductible en $\mathfrak{M}$;*

b. *$\mathfrak{N}$ est primaire et l'on a* $\mathfrak{N} : \mathrm{rad}\ \mathfrak{N} \succ \mathfrak{N}$*;*

c. *$\mathfrak{N}$ est uniforme et l'on a* $(\mathfrak{N} : \mathrm{rad}\ \mathfrak{N}) \succ \mathfrak{N}$*;*

c'. *$\mathfrak{N}$ est irréductible et uniforme;*

d. *$\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ est de longueur finie et contient un sous-module simple unique.*

Si l'on a a, $\mathfrak{N}$ est primaire et aussi quasi uniforme, donc uniforme (section 8, prop. 5), et, d'après le théorème 2.2, on a b, sinon $\mathfrak{N}$ serait recouvert par plusieurs modules dont l'intersection serait $\mathfrak{N}$. Si l'on a b, on a c, car $\mathfrak{N}$ est recouvert, donc quasi uniforme (section 2). Si l'on a c, $A/(\mathfrak{N} : \mathfrak{M})$ est un anneau d'Artin et comme $\mathfrak{N}$ est recouvert par un module unique on a d, et l'on a aussi c', car si $\mathfrak{N}$ était réductible il serait, d'après le théorème de la décomposition primaire, intersection finie de $\mathfrak{N}_i$ primaires donc uniformes (avec $\mathfrak{N}_i \neq \mathfrak{N}$) et contenant chacun $\mathfrak{N}$: rad $\mathfrak{N}$, d'où une contradiction : on a c'. Inversement c' entraîne que $\mathfrak{N}$ est recouvert par un seul élément et l'on a c. Enfin d entraîne a, car alors tout sous-module non nul de $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ contient un sous-module simple et celui-ci étant unique, $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ est super-irréductible en $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$.

D'une manière générale tout sous-module de $\mathfrak{M}$ est intersection de sous-modules super-irréductibles : c'est un résultat général de BIRKHOFF ([25]), mais cette intersection sera en général infinie (section 15) : d'après la condition c', l'intersection sera finie si et seulement si le sous-module en question est quasi maximal au sens de la section 9. Enfin on voit sur des exemples simples que la *condition d'irréductibilité ordinaire est indépendante de la propriété d'uniformité.*

On va, par passage à un module $\mathfrak{M}_S$, ramener l'irréductibilité ordinaire à la même notion renforcée ([26]).

Soit alors $\mathfrak{N}$ un sous-module p-primaire fixé de $\mathfrak{M}$. C'est alors l'intersection d'un nombre r de sous-modules $\mathfrak{N}_i$ primaires et irréductibles. Si aucun élément $\mathfrak{N}_i$ ne contient l'intersection des autres (intersection irrédontante) r est déterminé par $\mathfrak{N}$ en $\mathfrak{M}$ (KUROSH-ORE) et les $\mathfrak{N}_i$ sont nécessairement p-primaires. On aura donc $r = 1$ si et seulement si $\mathfrak{N}$ est inter-irréductible dans l'inter-demi-treillis (complet) $\mathfrak{T}$ des modules p-primaires $\mathfrak{N}_j$, avec $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}_j \subseteq \mathfrak{M}$, lui-même en correspondance biunivoque (isomorphisme de demi-treillis) avec l'inter-demi-treillis $\mathfrak{T}^*$ des sous-modules $p.A_p$-uniformes $\mathfrak{N}_j^*$, avec $\mathfrak{N}^* \subseteq \mathfrak{N}_j^* \subseteq \mathfrak{M}_p$ avec les notations du théorème **13.1** dans lequel on prend : $S = A - p$, posant suivant une notation classique $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}_S$.

La condition est donc en $\mathfrak{T}^*$ qu'il y ait un élément primaire minimum parmi ceux qui contiennent strictement $\mathfrak{N}^*$: le passage à $\mathfrak{T}$ donne le :

THÉORÈME 13.3. — *Un sous-module $\mathfrak{N}$ du A-module nœthérien $\mathfrak{M}$ est irréductible en $\mathfrak{M}$ si et seulement s'il est primaire pour un idéal premier p et si les sous-modules p-primaires qui le contiennent strictement ont un élément minimum $\mathfrak{N}_0$ (qui est $\mathfrak{N} : p$).*

([25]) *Cf.* [2].

([26]) Dans le cas des anneaux, L. LESIEUR (*loc. cit.*) précise l'invariant de Kurosh-Ore au moyen de la dimension d'un treillis géométrique : nous n'avons en vue ici que le cas extrême $r = 1$. Le A-module $\mathfrak{M}_p/\mathfrak{N}^*$ est de type fini sur $A_p/p^{\vee}A_p$ si $\vee$ est l'exposant de $\mathfrak{N}^*$ (*cf.* section 16) et r dans le cas général nombre minimum de composants irréductibles du sous-module $\mathfrak{N}^*/\mathfrak{N}^*$.

14. Modules définis par des conditions d'inter-irréductibilité. — On va préciser dans ce qui suit ceux des socles dont le treillis (géométrique) associé est une chaîne, d'abord dans le cas général puis lorsqu'on impose encore des conditions supplémentaires. Le cas nœthérien particularisera les résultats de la section 12 et conduira aux anneaux A tels que tout A-module soit somme directe de sous-modules monogènes.

On dira qu'un A-module (unitaire) $\mathfrak{M}$ est *caténaire* (ou que c'est un c-module) si le treillis $T(\mathfrak{M})$ de ses sous-modules est une chaîne. Il sera dit *discret* si en plus T satisfait à la condition maximale, *fortement discret* s'il satisfait en plus à la condition d'être de longueur finie.

Par exemple A, sans diviseur de O, considéré comme module sur lui-même sera un c-module si et seulement si c' est un anneau de valuation de Krull [27]. Ce sera en plus un anneau de valuation discrète s'il est nœthérien, ce qui justifie la terminologie. Soit enfin un anneau quelconque qui est sur A un c-module fortement discret (par exemple A est une image homomorphe propre B d'un anneau de valuation discrète). On appellera un tel anneau un *pseudo-corps*; comme les corps il possède un nombre fini d'idéaux en chaîne. D'après un lemme connu (*cf.* Mc Coy [16], section 28) un anneau d'intégrité avec un nombre fini d'idéaux est un corps. On en déduit *qu'un pseudo-corps est un corps si et seulement si c'est un anneau d'intégrité.*

Enfin un sous-module $\mathfrak{N}$ d'un module $\mathfrak{M}$ sera dit *primitif* (ou inter-premier) si $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_h$ entraîne $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{N}_i$ pour un i. Il sera dit *fortement primitif* si cela est vrai d'une intersection infinie [28].

Proposition 14.1. — *Il y a équivalence pour le A-module unitaire $\mathfrak{M}$ entre les propriétés :*

a. $\mathfrak{M}$ est un c-module;

b. Les sous-modules monogènes forment une chaîne;

c. Les-sous-modules sont tous irréductibles;

d. Les sous-modules sont tous primitifs.

En effet, a entraîne b. Inversement, si l'on a b, si l'on a les deux sous-modules $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ avec $\mathfrak{N}_1 \not\supseteq \mathfrak{N}_2$, il n'existe en $\mathfrak{N}_1$ aucun x tel que $Ax \supseteq \mathfrak{N}_2$. Donc à tout $x \in \mathfrak{N}_1$ on peut faire correspondre au moins un $y \in \mathfrak{N}_2$ tel que $Ax \not\supseteq Ay$: on aura alors $Ax \subseteq Ay$, donc finalement on a $\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}_2$ et l'on a a. Ceci généralise la proposition citée de L. Fuchs : un anneau d'intégrité est un

(21) *Cf.* [10]. Les anneaux de valuation discrète sont caractérisés autrement à la section 23 (th. 23.2).

(28) Cette notion est due à L. Fuchs (*Über arithmetische Ringen*, *Comm. Math. Helv.*, t. 2, 1949, p. 344). Cette notion ne doit pas être confondue avec celle d'idéal primitif qui donne ici les seuls idéaux maximaux.

anneau de valuation si et seulement si ses idéaux entiers sont tous irréductibles. L'équivalence de a et c est immédiate. Si l'on a a, on a aussitôt d. Inversement, si l'on a d, on a c, car tout module primitif est inter-irréductible. Notons que les conditions précédentes entraînent que tout sous-module de type fini est monogène : le cas dans lequel il sera local au sens de la section 6 conduit à la

PROPOSITION 14.2. — *Il y a équivalence pour un A-module* $\mathfrak{M}$ *entre les conditions suivantes :*

a. Tout sous-module est union et inter-irréductible;

b. $\mathfrak{M}$ *est un c-module nœthérien (c-module discret);*

c. Les sous-modules forment une chaîne descendante dénombrable dans laquelle chaque élément a un suivant déterminé;

d. $\mathfrak{M}$ *est local pour un idéal maximal* M, *les sous-modules étant les* $M^n\mathfrak{M}$, *et*

e. $\mathfrak{M}$ *est un module monogène sur l'anneau* $B = A/(\mathfrak{O} : \mathfrak{M})$ *qui est un anneau de valuation discrète ou un pseudo-corps selon que* $\mathfrak{M}$ *n'est pas ou est fortement discret.*

En effet, a entraîne que tout sous-module est monogène et l'on a b. b entraîne que tous les sous-modules sont monogènes et en chaîne : la somme de ceux qui sont strictement contenus en l'un d'eux $\mathfrak{N}$ est la somme d'un nombre fini d'entre eux et donc égal à l'un d'eux et $\mathfrak{N}$ est local, et l'on a c. Cette dernière condition entraîne d, d'après la section 5. De plus, si d est vérifiée, $\mathfrak{M}$ est isomorphe en tant que A-module à l'anneau B de l'énoncé : deux cas peuvent se produire. Si l'anneau nœthérien B est sans diviseur de zéro, c'est un anneau de valuation discrète. S'il y a en B des diviseurs de zéro, l'idéal nul est primaire et son radical contient une puissance de M, donc est M lui-même. Une puissance de M est nulle et il y a un nombre fini d'idéaux en chaîne : donc e est vraie. Enfin, si l'on a e, la propriété a est réalisée comme on le voit en considérant à nouveau $A/(\mathfrak{O} : \mathfrak{M})$.

On voit facilement qu'un module discret $\mathfrak{M}$ est fortement discret si et seulement si tout sous-module de $\mathfrak{M}$ est super-irréductible (en particulier $\mathfrak{O}$) ou bien si tout sous-module est totalement primitif ([29]).

Ce qui précède conduit à une formulation simple de la caractérisation connue des anneaux A tels que tout module unitaire sur A soit somme directe de sous-modules monogènes; le résultat est dû à PRÜFER et KÖTHE si l'on suppose *a priori* la condition minimale, et à COHEN et KAPLANSKY dans le cas général ([30]) : la condition est que A soit un *anneau d'*ARTIN *à*

([29]) Les anneaux dans lesquels tout idéal irréductible est primitif sont les anneaux arithmétiques (L. FUCHS, *loc. cit.*).

([30]) *Cf.* COHEN et KAPLANSKY, *Rings for which every module is a direct sum of cyclic modules* (*Math. Z.*, t. 54, 1951, p. 97).

idéaux principaux. Établissons-le :

LEMME. — *Un anneau A est un anneau d'Artin à idéaux principaux si c'est la somme directe d'un nombre fini de pseudo-corps. Il a alors un nombre fini d'idéaux.*

La réciproque résulte du fait que les idéaux d'un pseudo-corps sont tous principaux. La proposition directe se montre par induction sur la longueur (finie) $L(A)$ de l'anneau d'Artin donné A. Si l'on a $L(A)=1$, A est un corps. Dans les autres cas soit

$$(0)=Q_1\cap Q_2\cap\ldots\cap Q_r$$

une décomposition primaire normale de l'idéal zéro, chaque Q_i étant primaire pour un idéal maximal M_i. On a alors

$$A=A/Q_1\cap\ldots\cap A/Q_r$$

et l'on a pour tout i l'inégalité $L(A/Q_i)<L(A)$. Il suffit donc de montrer que dans le cas où l'on a $r=1$ l'idéal nul est super-irréductible. Ceci résulte de la section 13, car si l'on pose $M_1=M$, (0) est primaire pour M et $(0):M$ est principal et minimal d'après le théorème 2.1, d'où le lemme.

Le résultat de COHEN-KAPLANSKY montre aussitôt, compte tenu de ce qui précède, que pour *tout anneau A il y a équivalence entre les conditions* :

a. *Tout A-module est une somme directe de sous-modules monogènes;*

b. *A a un nombre fini d'idéaux tous principaux;*

c. *A est un anneau d'Artin à idéaux principaux*, *et*

d. *A est une somme directe d'un nombre fini de pseudo-corps.*

Ainsi que l'a montré KAPLANSKY la même condition imposée à tous les sous-modules de *type fini* conduit à une classe plus générale et plus complexe d'anneaux, comprenant en plus des anneaux principaux *les anneaux de valuation presque maximaux*, c'est-à-dire les anneaux de valuation A qui satisfont à la condition suivante. Si K est la corps des quotients de A, $\{I_r\}$ une famille non vide d'idéaux fractionnaires *d'intersection non nulle*, $\{\alpha_r\}$ un système de constantes de K tels que les congruences $x\equiv\alpha_r \pmod{I_r}$ soient résolubles par couples, alors ces mêmes congruences ont une solution dans leur ensemble.

15. Application à des propriétés caractéristiques des domaines de Dedekind et des anneaux locaux de rang fini. — Les notions d'irréductibilité pour l'intersection, caractérisées aux sections 13 et 14, donnent lieu à la caractérisation suivante de la « condition minimale restreinte » qui s'applique en particulier aux anneaux de Dedekind et aux anneaux de rang fini [31]. On a les :

PROPOSITION 1. — *Un domaine d'intégrité satisfait à la condition minimale restreinte si et seulement si l'on a les conditions :*

a. Tout idéal maximal a une base finie, et

b. Tout idéal non nul est intersection finie d'idéaux super-irréductibles.

Si la condition minimale restreinte est satisfaite par A, A est nœthérien et l'on a a. De plus, tout idéal I est intersection finie d'idéaux irréductibles U_i qui sont en plus super-irréductibles dès qu'ils ne sont pas nuls (car tout diviseur premier de l'un d'eux est maximal). La condition b est conséquence de la section 14.

Inversement, si l'on a a et b, tout idéal premier P non nul est super-irréductible donc maximal (section 7) et donc a, d'après l'hypothèse, une base finie. On en déduit, d'après l'énoncé connu de COHEN (*loc. cit.*), suivant lequel un anneau A pour lequel tout idéal premier a une base finie est nœthérien, que finalement toute image homomorphe *propre* de A est un anneau d'Artin. La réciproque est établie.

Dans la terminologie de BIRKHOFF et MCCOY la condition b équivaut à :

b'. Toute image homomorphe propre de A est union sous-directe finie d'anneaux sous-directement irréductibles. Cette dernière forme ne fait intervenir que le « treillis de structure » de A, c'est-à-dire le treillis des congruences de A, chaque congruence G de A (pris en tant qu'anneau) est intersection *finie* de congruences G_i chacune telle que G_i n'est pas l'intersection de congruences $G_{ij} \neq G_i$, la seule exception possible étant l'égalité G_0. Enfin b entraîne que tout idéal irréductible non nul est super-irréductible. La réciproque est vraie dans le cas nœthérien car tout idéal irréductible l'est fortement dès qu'il n'est pas nul et comme tout idéal est intersection finie d'idéaux irréductibles, on a b.

THÉORÈME 15.1. — *Un domaine d'intégrité nœthérien est un domaine de Dedekind si et seulement si tout idéal primaire est irréductible.*

Si A est un domaine de Dedekind, l'idéal nul est premier donc irréductible et tout autre idéal primaire est de de la forme M^n (M maximal, n entier : le critère de Gröbner s'applique : on a $M^n : M = M^{n-1}$ et l'on a $M^{n-1} \succ M^n$. De plus, on voit que tout idéal primaire non nul est super-irréductible, d'après la section 14.

Montrons que si inversement tout idéal primaire non nul est irréductible on a pour tout idéal maximal M le recouvrement $M \succ M^2$, il s'ensuivra (*cf.* COHEN, [3] par exemple) que A a la propriété désirée. Or si l'on prend

[31] *Cf.* COHEN [3] et KRULL [13].

une décomposition primaire normale de M^2 soit $Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_l$, les $Q_i (i = 1, 2, \ldots, l)$ sont primaires pour M, donc aussi leur intersection. Alors le critère général de Gröbner (ou le théorème 13.3) montre qu'on a $M \succ M^2$. On est alors conduit au résultat. On a enfin le :

THÉORÈME 15.2. — *Un domaine d'intégrité est un domaine de Dedekind si et seulement si l'on a les deux conditions :*

a. Tout idéal maximal a une base finie;

b. Tout idéal primaire non nul est super-irréductible.

La proposition directe résulte de ce qui précède. Si inversement a et b sont réalisées, tout idéal premier non nul sera uniforme d'après la section 7, donc maximal et aura donc une base finie. Alors A est nœthérien et la condition b entraîne que tout idéal primaire est irréductible et le théorème précédent conduit au résultat. Enfin comme on sait que pour un anneau *local* (*loc. cit.*) la condition minimale restreinte équivaut au fait que tout idéal a une base finie d'au plus N éléments, N étant un nombre fixe (on dit que A est de rang fini), on a le :

COROLLAIRE. — *Un anneau d'intégrité avec un seul idéal maximal M est de rang fini si et seulement si M a une base finie et si tout idéal irréductible non nul est super-irréductible.*

Pour la réciproque, on voit que tout idéal premier non nul est M lui-même et A étant alors nœthérien, vérifie la condition b de la proposition 1. Le rang introduit ici est à distinguer du rang défini par les chaînes d'idéaux premiers.

16. Application aux modules sur les anneaux principaux. Cas des groupes abéliens. Calcul d'invariants. — Lorsque l'anneau des opérateurs A est principal, les résultats des deux premiers chapitres peuvent se compléter. En particulier, si l'on a $A = Z$ (anneau des entiers ordinaires) on aura des propriétés des groupes abéliens, écrits additivement ([32]).

On sait qu'on appelle « principal » un anneau d'*intégrité A* dont tout idéal est principal : ce sont les anneaux d'intégrité nœthériens normaux dont tous les idéaux premiers non nuls sont maximaux et principaux. En particulier, ceux d'entre eux qui sont locaux sont les anneaux de valuation discrète (*cf.* [20]).

Le théorème 2.1 et le lemme 5.2 lient alors la notion de recouvrement des modules et la notion de groupe *indéfiniment divisible.* Il y a plus géné-

([32]) *Cf.* BOURBAKI, *Algèbre*, chap. V et VI et KAPLANSKY, *Infinite abelian groups*, Michigan University, 1954. On appellera « cyclique » un groupe (additif) avec un générateur (sur Z).

ralement équivalence pour un groupe additif G entre les conditions :

a. Il n'existe pas en G de sous-groupe maximal, et

b. On a pour tout n entier *non nul* $G \equiv nG$.

Les conditions de super-irréductibilité (section 7) se simplifient du fait que tout idéal premier non nul est maximal. On a la :

PROPOSITION 16.1. — *Un groupe abélien additif G possède un sous-groupe non-nul minimum si et seulement si l'on a les deux conditions :*

a. Pour tout n il existe un g non nul de G qui est d'ordre n s'il existe un p premier fixé tel que $n = 0\,(p)$;

b. Les éléments d'ordre p de G forment un sous-groupe cyclique non nul.

La notion de p-groupe (groupe dont tous les éléments ont un ordre fini, puissance d'un nombre premier fixé p non nul : *cf.* section 1) donne tous les Z-modules locaux au moyen de la proposition suivante, conséquence immédiate des sections 6 et 14 :

PROPOSITION 16.2. — *Il y a équivalence entre les conditions :*

a. G est un groupe cyclique avec un seul sous-groupe maximal;

b. G a un nombre fini de sous-groupes en chaîne;

c. G est un p-groupe cyclique.

Soit alors G un *groupe de type fini* sur Z (il y a un nombre fini de générateurs). Il possède des sous-groupes maximaux (contenant tout sous-groupe donné) et n'est donc pas divisible. Le résultat suivant donne selon la section 12 le cas où G est hypersocle. En traduisant le fait que G est un hypersocle de type fini sur Z au moyen des ombres premières il vient la :

PROPOSITION 16.3. — *Les hypersocles du type fini sur Z sont les groupes de torsion d'ordre borné avec un nombre fini de générateurs.*

Remarquons alors qu'un groupe G de type fini est de longueur finie si et seulement si $Z/(\mathbb{O} : G)$ est un anneau d'Artin, c'est-à-dire si les ordres des éléments de G sont tous bornés par un $N \in Z$. On a alors $\mathbb{O} : G = ZN_1$ et si $N_1 = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_r^{\alpha_r}$ on a, d'après le théorème 5.1, $\rho(G) = (P_1 \dots P_r)G$. Le théorème 12.2 conduit alors à la :

PROPOSITION 16.4. — *Si G est de type fini il y a équivalence entre :*

a. G est somme de sous-groupes simples;

b. Les ordres des $g \in G$ *sont bornés par un n minimum et si* $P_1, \dots, P_r$ *sont les facteurs premiers de n on a* $P_1 G \cap \dots \cap P_r G = \mathbb{O}$;

c. G est de longueur finie et tout sous-groupe cyclique non simple possède deux sous-groupes maximaux au moins.

Cela détermine les socles nœthériens sur Z et de manière semblable sur tout anneau principal B.

Un autre exemple d'*hypersocle* est fourni par la considération du module associé à un endomorphisme U fixé E sur un espace vectoriel U de dimension finie, sur un corps algébriquement clos K (*cf.* Bourbaki, *loc. cit.*). Par extension de l'anneau d'opérateurs K de E à $B = K[X]$ [on prend pour le produit $F.\alpha$ de $F = F[X] \in B$ et $\alpha \in E$ l'image $F(U).\alpha$] E devient un module de type fini E_U sur l'anneau principal $K[X]$.

Alors si $(\varphi(X))$ est l'annulateur de E_U, $\varphi(X)$ étant le polynome minimal correspondant, on aura la décomposition en facteurs irréductibles $\varphi = \varphi_1^{\sigma_1}(X)\ldots\varphi_r^{\sigma_r}(X)$, les $(\varphi_i(X))$ étant tous les diviseurs maximaux de cet annulateur. Le sous-radical de E_U est, d'après le théorème 5.1,

$$\rho(E_U) = (\varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_r)E_U.$$

On en déduit que E_U est un hypersocle de longueur finie. Le théorème 12.2 montre que ce sera un socle si et seulement si l'on a $\rho(E_U) = \mathfrak{O}$, c'est-à-dire si les exposants σ_i valent 1, on a la :

Proposition 16.5. — *Pour que le module associé à l'endomorphisme U de l'espace de dimension finie E soit un socle, il faut et il suffit que le polynome minimal de U soit sans facteur multiple.*

Le cas dans lequel E_U est un B-module local est, d'après la section 6, celui dans lequel E_U est monogène (sur B) et $r = 1$. On a alors

$$\varphi = (X - a)^n \qquad (a \in K,\ n \geqq 1)$$

et U s'écrit de manière unique $U = \bar{a} + N$, $\bar{a}$ étant l'homothétie $x \to ax$ et N un endomorphisme nilpotent.

Enfin les invariants introduits dans la décomposition d'un idéal primaire en idéaux irréductibles (*cf.* [11], [14] et section 13) sont liés aux invariants de certains hypersocles. Pour le montrer on utilisera les définitions suivantes.

Soit A un anneau normal (au sens de Krull, *cf.* chap. IV) et $\mathfrak{M}$ un module de type fini sur A. On dira en abrégé que $\mathfrak{M}$ est un module de Krull. Soit $\{P_\tau\}$ $(\tau \in T)$ la famille de ses idéaux premiers non nuls minimaux et $\mathfrak{M}_\tau$ le module des quotients (défini à la section 13) de $\mathfrak{M}$ relativement à P_τ; c'est un module de type fini sur $A_\tau = A_{P_\tau}$ qui est d'ailleurs un anneau de valuation discrète; on en désignera l'idéal maximal $P_\tau A_\tau$ par P'_τ. Considérons pour tout n et tout τ, le A_τ-module

$$\Gamma_{\tau,n} = (\mathfrak{M}_\tau / P'_\tau \mathfrak{M}_\tau) \oplus \ldots \oplus (\mathfrak{M}_\tau / P'^n_\tau \mathfrak{M}_\tau);$$

c'est un module de longueur finie $\gamma_{\tau,n}$, car chacun des facteurs directs est de type fini sur l'un des quotients $A_\tau/P_\tau'^k$, avec $k = 1, 2, \ldots$.

Ce dernier est un *pseudo-corps* au sens de la section 14, on le notera $K_{\tau,k}$. Les $K_{\tau,1}$ s'identifient au corps des quotients de l'anneau d'intégrité A/P_τ; on les notera en abrégé par K_τ.

LEMME. — *Pour tout τ fixé les $\gamma_{\tau,n}$ déterminent les entiers*

$$f(\tau, n) = \dim_{K_\tau}(P_\tau'^{n-1}\mathfrak{M}_\tau/P_\tau'^n\mathfrak{M}_\tau)$$

et inversement.

On a, en effet,

$$\gamma_{\tau,n} = f(\tau, 1) + [f(\tau, 1) + f(\tau, 2)] + \ldots,$$

soit

$$\gamma_{\tau,n} = \sum_{i=1}^{n}(n - j + 1)f(\tau, j).$$

Comme $\gamma_{\tau,n}$ est la somme de $f(\tau, n)$ et d'un polynôme à coefficients entiers en $f(\tau, 1), \ldots, f(\tau, n-1)$, la réciproque est immédiate.

Les *invariants d'irréductibilité* introduits par GRUNDY (*cf.* [11], section 16) qu'on appellera ici « *invariants de Loewy* », par analogie avec le cas des anneaux, seront alors définis par

$$\bar{\lambda}_{\tau,i,j} = \dim_{K_\tau}(P_\tau'^{j-1}\Gamma_{\tau,i}/P_\tau'^j\Gamma_{\tau,i}).$$

On les met en évidence en formant, pour τ et i fixés les modules $P_\tau'^j\,\Gamma_{\tau,i}$. On a $P_\tau'^j\Gamma_{\tau,i} = 0$ pour $j \geqq i$ et, pour $i > j$ les relations

$$(1) \qquad \bar{\lambda}_{\tau,i,j} = (i - j + 1)f(\tau, j),$$

$$(2) \qquad \gamma_{\tau,i} = \sum_{i=1}^{i}\bar{\lambda}_{\tau,i,j} = \sum_{j=1}^{i}(i - j + 1)f(\tau, j).$$

Examinons alors les relations entre les constantes γ et f précédentes et les *invariants d'Ulm-Zippin* du A_τ-module

$$(3) \qquad \Gamma^\tau = (\mathfrak{M}_\tau/P_\tau'\mathfrak{M}_\tau) \oplus \ldots \oplus (\mathfrak{M}_\tau/P_\tau'^n\mathfrak{M}_\tau) \oplus \ldots.$$

Tout élément de Γ_τ est annulé par une puissance de P_τ' et l'intersection

$$\bigcap_n P_\tau'^n\Gamma^\tau \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

est nulle et donc l'ordinal ultime de Γ^τ [33] est fini ou $\aleph_0 = \omega$.

---

[33] *Cf.* MACKEY and KAPLANSKY, *A generalization of Ulm's theorem* (*Summa Bras. Math.*, t. 2, 1947-1951) et KAPLANSKY (déjà cité).

En fait, on a une suite d'entiers finis ou égaux à ω,

$$\{\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_T\}$$

dans laquelle T ne dépend que de τ et qui donne lieu, moyennant les conventions $P'^{0}_{\tau} = A'_{\tau}$ et $P'^{\omega}_{\tau} = (0)$, à l'isomorphisme sur A_τ

$$\mathfrak{M}_\tau \simeq (A_\tau / P'^{\alpha_1}_{\tau}) \oplus \ldots \oplus (A_\tau / P'^{\alpha_T}_{\tau}). \tag{4}$$

On a alors :

$$P'^{n}_{\tau} \mathfrak{M}_\tau \simeq (P'^{\min(n,\alpha_1)}_{\tau} / P'^{\alpha_1}_{\tau}) \oplus \ldots \oplus (P'^{\min(n,\alpha_T)}_{\tau} / P'^{\alpha_T}_{\tau}), \tag{5}$$

$$\mathfrak{M}_{\tau,n} = \mathfrak{M}_\tau / P'^{n}_{\tau} \mathfrak{M}_\tau \simeq (A_\tau / P'^{\min(n,\alpha_1)}_{\tau}) \oplus \ldots \oplus (A_\tau / P'^{\min(n,\alpha_T)}_{\tau}), \tag{6}$$

$$P'^{k}_{\tau} \mathfrak{M}_{\tau,n} \simeq (P'^{\min(k,n,\alpha_1)}_{\tau}) / P'^{\min(n,\alpha_1)}_{\tau}) \oplus \ldots \oplus (P'^{\min(k,n,\alpha_T)}_{\tau} / P'^{\min(n,\alpha_T)}_{\tau}). \tag{7}$$

Alors le sous-module précédent est réduit à zéro si et seulement si les exposants d'un même quotient sont tels que pour tout $\rho = 1, 2, \ldots, T$ on ait $k \geqq \min(n, \alpha_\rho)$: pour n fixé $P'^{k}_{\tau} \mathfrak{M}_{\tau,n}$ est réduit à zéro si et seulement si l'on a

$$k \geqq \max_\rho [\min(n, \alpha_\rho)].$$

Comme n est quelconque l'ordinal ultime de $\Gamma^\tau = \sum_n \mathfrak{M}_{\tau,n}$ est bien ω, de plus Γ^τ est un module réduit.

Le sous-module $U_{\tau,k}$ formé des éléments de $P'^{k}_{\tau} \Gamma^\tau$ qui sont annulés par P'_τ est la somme directe (pour n variable) des modules

$$V_{\tau,k,n} = \sum_{\rho=1}^{T} P'^{\sigma(k,n,\rho)}_{\tau} / P'^{\min(n,\alpha_\rho)}_{\tau}, \tag{8}$$

la somme précédente étant directe et $\sigma(k, n, \rho)$ désignant le nombre entier

$$\sigma(k, n, \rho) = \max[\min(k, n, \alpha_\rho), \min(n, \alpha_\rho) - 1)].$$

Alors le $k^{\text{ième}}$ invariant d'Ulm-Zippin est la dimension $d_{\tau,k}$ sur le corps résiduel K_τ de A_τ du quotient des A_τ-modules

$$\sum_n V_{\tau,k,n} \quad \text{et} \quad \sum_n V_{\tau,k+1,n}.$$

On a donc

$$d_{\tau,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{T} [\sigma(k+1, n, \rho) - \sigma(k, n, \rho)].$$

On sait d'après le théorème d'Ulm-Zippin, que pour τ fixé les $d_{\tau,k}$ ($k = 1, 2, \ldots$) déterminent Γ^τ à un A_τ-isomophisme près.

Un calcul facile permet de retrouver ici ce fait directement.

En effet, si l'on a $n \leqq k$, on a $\min(n, k) = \min(n, k+1) = n$ et le crochet est nul. Si l'on a $n = k+1$, le crochet est nul si l'on a $\alpha_\rho \leqq k$ et vaut 1 si l'on a $\alpha_\rho \geqq k+1$.

Enfin si l'on a $n \geqq k+2$, le crochet n'est pas nul et vaut 1 dans le seul cas où l'on a l'égalité $\alpha_\rho = k+1$.

Les différences non nulles qui apparaissent donc dans $d_{\tau,k}$ sont celles qui correspondent à l'un des deux cas suivants :

$$n = k+1 \leqq \alpha_\rho \qquad \text{et} \qquad k+1 = \alpha_\rho < k+2 \leqq n$$

et valent alors 1. On en déduit que $d_{\tau,k}$ vaut ω si et seulement si k est l'un des entiers $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \ldots, \alpha_T - 1$ et coïncide dans les autres cas avec le *nombre des* α_ρ (*non tous distincts en général*) *qui sont strictement supérieurs à* $k+1$.

Les formules (5) montrent qu'on a

$$f(\tau, n) = \sum_{\rho=1}^{T} [\min(n, \alpha_\rho) - \min(n-1, \alpha_\rho)] \tag{9}$$

et l'on voit de la même manière que $f(\tau, n)$ *est le nombre des* α_ρ *qui sont supérieurs ou égaux à* n.

Pour un τ fixé, la suite des $f(\tau, n)$ détermine de proche en proche les $\alpha_1, \ldots, \alpha_T$ et donc à un A_τ-isomorphisme près les modules $\mathfrak{M}_\tau$ et Γ^τ, donc aussi les $d(\tau, k)$, et d'après le lemme, les $\gamma_{\tau,n}$ eux-mêmes.

Inversement, si l'on donne la suite des $d(\tau, k)$, on en déduit, en considérant les d égaux à ω, l'ensemble des valeurs des α_ρ, puis ces α_ρ eux-mêmes en considérant les valeurs finies des $d(\tau, k)$. On en déduit les $f(\tau, n)$ et aussi les $\gamma_{\tau,n}$.

En résumé, il est équivalent de donner pour τ *fixé l'une des suites suivantes* : $\gamma_{\tau,n}$, $f(\tau, n)$, $d(\tau, n)$ ou $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_T)$. Ce qui précède montre alors qu'on a le :

THÉORÈME 16.1. — *La donnée du* A_τ*-module* Γ^τ *détermine, à un* A_τ*-isomorphisme près, celle du module* $\mathfrak{M}_\tau$. *La donnée pour chaque valuation fixée des invariants d'inter-irréductibilité de Loewy* $\bar{\lambda}_{\tau,i,j}$ *détermine les deux modules précédents à un* A_τ*-isomorphisme près.*

CHAPITRE III.

SUR DES ÉQUIVALENCES LIÉES A LA RÉSIDUATION.

17. Sur une équivalence attachée à la notion de recouvrement. — La caractérisation des chaînes maximales dans un module nœthérien conduit simplement à une relation d'équivalence qui présente certaines analogies avec l'équivalence d'Artin. Le chapitre présent est consacré aux équivalences qui, plus généralement, peuvent s'obtenir par considération d'une topologie sur l'anneau des opérateurs.

Soit T l'ensemble des sous-modules d'un A-module $\mathfrak{M}$ nœthérien et T' l'ensemble des idéaux de A dont les diviseurs premiers sont A et les idéaux maximaux (idéaux presque maximaux) : T' *est un treillis multiplicatif, résidué.* Ceci résulte des relations

$$\operatorname{rad} U.V = \operatorname{rad} U \cap \operatorname{rad} V \qquad \text{et} \qquad U : V \supseteq U$$

et du fait que T' est la réunion de chaînes finissantes du gerbier des idéaux entiers de A. Il y a alors équivalence entre les deux conditions imposées à deux éléments N et N' de T :

a. Les résiduels $N : N'$ et $N' : N$ appartiennent à T' ;

b. Le A-module $N + N'/N \cap N'$ est de longueur finie.

En effet, la condition *a* peut s'écrire

$$(N : N') \cap (N' : N) \in T'$$

et entraîne que $(N + N')/N$ et donc le A-module isomorphe $N'/(N \cap N')$ sont de longueur finie d'après la section 10, il en est de même de $N/(N \cap N')$ et par passage au quotient de $\mathfrak{M}$ par $N \cap N'$ de même de $N + N'/(N \cap N')$. On a *b*.

Inversement, si l'on a *b*, le théorème de Jordan-Hölder montre que $N + N'/N$ et $N + N'/N'$ sont de longueurs finies et l'on a *a*.

Les conditions *a* et *b* précédentes introduisent en T une équivalence R. On voit facilement que R est régulière pour la multiplication par un idéal quelconque de A, régulière pour l'addition en T et même pour les additions infinies, puisque toute somme de sous-modules de $\mathfrak{M}$ est la somme d'une sous-famille finie. On en déduit que toute classe de T/R contient un élément $\mathfrak{N}^*$ maximum qui la détermine : ces éléments $\mathfrak{N}^*$ sont, d'après la section 10, tous les sous-modules sans composant primaire uniforme, ou ce qui revient au même, d'après les sections 2 et 8, les sous-modules qui ne sont recouverts que par eux-mêmes.

Enfin, notons que si S est l'équivalence

$$N \equiv N' \pmod{S} \rightleftharpoons \exists I \ \text{ et } \ I' \text{ de } T', \qquad \text{avec} \quad IN = I'N',$$

on a l'inclusion $S \subseteq R$ puisque la dernière égalité entraîne $I'N' = IN \subseteq N$, donc $N : N' \in T'$, par exemple [34]. Cette équivalence S est régulière pour la

[34] L'inclusion $S \subseteq R$ est en général stricte, contrairement à une affirmation de la note [CR_3].

multiplication par un élément de T' (mais non par un élément arbitraire de T si A n'est pas un anneau d'Artin et non régulière pour l'addition en T en général.

18. Correspondance de Galois entre une topologie et une équivalence. — Dans l'équivalence de la section précédente et dans l'équivalence d'Artin classique ([35]) on se trouve dans la situation suivante qui est susceptible de s'appliquer aux groupes de diviseurs d'un anneau complètement entier fermé.

Soit Γ un $\cup$-demi-treillis muni d'un ensemble G d'opérateurs (sans distinction de côté) qui est un gerbier pour les lois $\cup$ et ., les relations suivantes étant satisfaites :

$$g,\quad g_1,\quad g_2 \in G: \qquad \alpha,\quad \alpha_1,\quad \alpha_2 \in \Gamma$$

entraînent

$$g_1(g_2\alpha) = (g_1 g_2)\alpha, \qquad g(\alpha_1 \cup \alpha_2) = g\alpha_1 \cup g\alpha_2,$$
$$(g_1 \cup g_2)\alpha = g_1\alpha \cup g_2\alpha.$$

Alors Γ est une *structure algébrique à opérateurs*, on désignera par W son treillis de structure ([36]) ensemble (partiellement ordonné) des relations d'équivalence E sur Γ qui sont régulières pour toutes les opérations (externes et internes).

Exemples :

1° Γ est l'ensemble des sous-modules d'un A-module $\mathfrak{M}$ et G le gerbier des idéaux (entiers) de A. L'équivalence de la section **17** est un élément de W d'après les inclusions

$$\text{(i)} \qquad IN : IN' \supseteq N : N' \qquad \text{et} \qquad (N + N'') : (N' + N'') \supseteq N : N'$$

si l'on a $I \in G$, N, N', $N'' \in \Gamma$, et puisqu'un diviseur d'un idéal quasi maximal est lui-même quasi maximal.

2° Γ est l'ensemble des idéaux fractionnaires d'un anneau d'intégrité A et G le gerbier des idéaux entiers. L'équivalence d'Artin est un élément $\mathfrak{A}$ de W car on a ici le plongement $G \subseteq \Gamma$. On a

$$\alpha_1,\ \alpha_2 \in \Gamma,\ \alpha_1 \equiv \alpha_2 (\operatorname{mod} \mathfrak{A}) \rightleftharpoons [a\alpha_1 \subseteq As \rightleftharpoons a\alpha_2 \subseteq As]$$
$$(a \in A \text{ et } s \in A - \{\mathbb{O}\}).$$

3° Le cas dans lequel l'anneau précédent est complètement entier fermé (on dira fermé dans la suite) conduit à l'exemple suivant. On prend pour Γ

([35]) *Cf.* [4], [5] et plus loin section 21. Pour les correspondances de Galois, *Cf.* [6] et [7].

([36]) *Cf.* [2].

le groupe des diviseurs (il est réticulé et c'est même un treillis distributif et muni d'une multiplication interne : on le notera multiplicativement) et pour G le gerbier *entier* des idéaux entiers : ceci est bien possible car si l'on désigne par $D(g)$ le diviseur de tout $g \in G$ on a, en posant $g\alpha = D(g)\alpha$ $(\alpha, \beta \in \Gamma)$

$$g(\alpha \cup \beta) = D(g)(\alpha \cup \beta) = D(g)\alpha \cup D(g)\beta = g\alpha \cup g\beta$$

et même ici $g(\alpha \cap \beta) = g\alpha \cap g\beta$. Alors Γ est un groupe multiplicatif à opérateurs. Il se trouve de plus ici que W est modulaire (ce qui n'est pas vrai en général dans les exemples 1° et 2°) et les éléments E_λ s'identifient à l'ensemble des sous-groupes stables Φ_λ avec l'isomorphisme $\Gamma/E_\lambda \simeq \Gamma/\Gamma_\lambda$.

4° On prend $G = \Gamma$, treillis multiplicatif *modulaire* des idéaux d'un anneau *nœthérien* dont le radical est fixé.

Dans tous les cas le théorème des représentations sous-directes de Birkhoff montre que *tout élément de W est l'intersection d'une famille non vide* (infinie en général) *d'éléments fortement inter-irréductibles en W*.

De plus, on vérifie dans les quatre cas qu'on a une *résiduation externe* : il existe un élément maximum (noté $\alpha_1 : \alpha_2$) parmi les $g \in G$ tels que $g\alpha_2 < \alpha_1$. Ceci est immédiat pour les cas 1°, 2° et 4° et résulte pour le cas 3° du fait que Γ étant réticulé est résidué (de manière interne). On aura pour $\alpha_1 : \alpha_2$ l'intersection $(\alpha_1\alpha_2^{-1})^* \cap A$ si U^* est l'élément maximum de la classe de tout idéal fractionnaire donné U (modulo l'équivalence d'Artin). On posera dans les trois cas

$$[\alpha_1, \alpha_2] = (\alpha_1 : \alpha_2) \cap (\alpha_2 : \alpha_1)$$

et l'élément de G ainsi défini s'appellera le *double-résiduel* de α_1 et α_2. Notons enfin que la régularité de tout $E \in W$ par rapport à l'union entraîne que les classes de Γ modulo E sont convexes

$$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2, \qquad \alpha_1 \equiv \alpha_2 (\operatorname{mod} E) \qquad \text{entraînent} \quad \alpha + \alpha_1 \equiv \alpha + \alpha_2,$$

donc $\alpha \equiv \alpha_2$ et aussi $\alpha \equiv \alpha_1$.

Fermeture de résiduation. — Dans le cas où existe pour Γ une résiduation *externe* on met en évidence certains éléments de W au moyen d'une condition de fermeture de Galois déduite d'une condition (C) qui se trouve satisfaite dans plusieurs cas usuels.

Pour tout $E \in W$, soit E' l'équivalence définie par

$$\alpha \equiv \beta \ (\operatorname{mod} E') \ (\alpha, \beta \in \Gamma) \rightleftharpoons \text{il existe des } \alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_\rho, \beta_\rho$$

tels que

$$\alpha_1 \equiv \beta_1, \qquad \ldots, \alpha_\rho \equiv \beta_\rho \qquad (\operatorname{mod} E)$$

et

$$[\alpha, \beta] \supseteq [\alpha_1, \beta_1] \cap \ldots \cap [\alpha_\rho, \beta_\rho].$$

LEMME 1. — *L'opération* $\mu(E \rightarrow E')$ *est une opération de fermeture de Moore en* W.

En effet, on a d'abord $E \subseteq E' \in W$ comme on le voit au moyen d'inclusions analogues aux inclusions (i) données plus haut. On voit aussi que $(E')' = E'$ puisqu'une intersection *finie* d'intersections finies de doubles résiduels est encore du même type. Enfin l'isotonie se vérifie immédiatement. Alors l'ensemble V des éléments de W qui sont fermés sont ceux des E qui satisfont à

$$\text{(C)} \qquad [\alpha, \beta] \supseteq [\alpha_1, \beta_1] \cap \ldots \cap [\alpha_\rho, \beta_\rho],$$

avec pour $i = 1, \ldots, \rho$,

$$\alpha_i \equiv \beta_i \pmod{E} \quad \text{entraîne} \quad \alpha \equiv \beta \pmod{E}.$$

Par exemple, l'égalité (dans les cas 1°, 2°, 3°) et l'équivalence absolue (dans tous les cas) satisfont à (C) et il en est de même de l'équivalence de la section 17, car une intersection *finie* d'idéaux quasi maximaux est du même type. Il en est de même de l'équivalence d'Artin (théorème 21.1). On dira que $E \in W$ est *résiduellement fermée* si la condition (C) est réalisée par E.

Lorsque G est le gerbier des idéaux entiers d'un anneau (cas 1°, 2° et 3°, par exemple) la forme de (C) amène à introduire l'ensemble $\mathfrak{T}$ des topologies τ définies sur A par un système fondamental d'idéaux $\{I_\rho\}$. Si l'on ordonne $\mathfrak{T}$ par la relation $\tau_1 < \tau_2$ si τ_1 est plus fine que τ_2, on a le :

THÉORÈME 18.1. — *V est un treillis complet avec élément nul et élément universel, dans les cas* 1°, 2° *et* 3°. *Il est isomorphe à $\mathfrak{T}$. On peut définir E' au moyen de la topologie τ associée en $\mathfrak{T}$ par*

$$\alpha \equiv \beta \quad (\mathrm{mod}(E') \rightleftharpoons [\alpha, \beta] \ \textit{est un voisinage de zéro pour } \tau.$$

On vérifie, en effet, pour V les conditions de MOORE ([37]) qui sont ici réalisées car l'intersection (en W qui est un treillis complet) d'une famille non nécessairement finie d'éléments de W qui satisfont à la condition (C) y satisfait aussi et de plus l'équivalence absolue est en V. L'union en V sera alors définie par une intersection (en W) et différera de l'union en W. Ceci est aussi conséquence du lemme 1.

Soit alors $E' \in V$ et soit $\tau(E')$ la topologie sur A dont un système fondamental de voisinages de zéro est constitué par les intersections finies de double-résiduels d'éléments de Γ congrus respectivement modulo E. La condition (C), satisfaite par E', montre que E' se définit comme dans l'énoncé. Posons $\tau(E') = f(E')$.

Inversement, à toute topologie τ, définie par des $\{I_\rho\}$ comme voisinages fondamentaux [les I_ρ sont assujettis à la seule condition qu'une intersection *finie* de $I_{\rho_\lambda}(\lambda \in L)$ contienne un I_{ρ_0}] on associe par l'équivalence de l'énoncé

([37]) *Cf.* [6], chap. I.

un élément E de W qui est évidemment fermé (donc $E = E' \in V$) d'après la propriété caractéristique des I_ρ. On posera $E' = \varphi(\tau)$. Alors f et φ sont isotones, on a $E \subseteq \varphi f(E)$ et la *circonstance particulière* $\tau = f\varphi(\tau)$ pour tous E, τ [38]. La correspondance φf s'identifie alors à la correspondance μ du lemme 1, d'où le théorème.

Dans les cas usuels (1° et 2°, par exemple) il y a en toute classe (modulo un $E' \in V$) d'un α fixé de Γ un élément maximum. On voit alors que dans la correspondance du théorème précédent les topologies telles qu'il en soit ainsi pour tout α sont celles qui satisfont à la condition :

$(M)_\tau$: *Pour tout α de Γ il existe un élément maximum parmi les β tels que $[\alpha, \beta]$ soit un voisinage pour τ.*

19. Sur une classe étendue d'équivalences. — Dans beaucoup de cas usuels la topologie τ utilisée dans la section précédente satisfait à la condition :

(P) : *Le produit de deux idéaux voisinages est un voisinage.*

Il en est ainsi pour la topologie quasi maximale (section 9), pour toute topologie I-adique (section 20) et la topologie définie par la classe unité de l'équivalence d'Artin (section 21 et chapitre IV).

L'ensemble S des idéaux-voisinages constitue alors un demi-groupe qui est unitaire dans les cas suivants, c'est-à-dire satisfait à la condition :

(U) : *Si $I.J \in S$ et $J \in S$, on a aussi $I \in S$.*

Il en est, par exemple, ainsi dans les trois cas précédents dès qu'on suppose A nœthérien (car tout idéal primaire contient une puissance de son radical).

On peut alors associer à toute équivalence E résiduellement fermée et dont la topologie associée τ (définie à la section 18) satisfait aux conditions (P) et (U) une équivalence E'', *plus fine* en général et donnée par

$$N_1 \equiv N_2 \ (\mathrm{mod}\, E'') \rightleftharpoons \text{il existe } I_1 \text{ et } I_2 \text{ en } S,$$

avec

$$I_1 N_1 \equiv I_2 N_2.$$

On a, en général, $E \not\leq E''$. Au contraire, on a l'égalité dans le cas de l'équivalence d'Artin sous la forme générale étudiée au chapitre IV et cela est vrai plus généralement dans les gerbiers complètement entiers fermés (si l'on suppose toutefois la classe de l'élément unité entière). E'' est régulière pour la multiplication, mais non en général pour l'addition et en général strictement plus fine que E elle-même.

20. Application aux anneaux nœthériens. — Si dans l'exemple 1 de la section précédente (cas des modules) on suppose en plus qu'on a $\mathfrak{M} = A$, $\Gamma = G$ (gerbier des idéaux entiers de l'anneau A) la condition $(M)_\tau$ relative

---

[38] Cette double correspondance (f, φ) est la restriction à V d'une correspondance de Galois inversée entre W et $\mathfrak{T}$: la théorie [6] chap. III donne aussi le résultat.

à une topologie donnée τ, déterminée par le système $\{I_\alpha\}$, se met sous la forme suivante :

$(M')_\tau$: *Pour tout I de G il y a un élément maximal parmi les résiduels $I:I_\alpha$.*

En effet, si τ satisfait à $(M)_\tau$, tout élément J de la classe I sera caractérisé par l'existence d'un α tel qu'on ait

$$(I:J)\cap(J:I)\supseteq I_\alpha,$$

l'élément maximum I^* de la classe de I contient I (régularité pour l'addition) et est donc l'élément maximum de la forme $I:I_\alpha$ et l'on a donc $(M')_\tau$.

Inversement, si τ vérifie $(M')_\tau$ et si $I:I_{\alpha_1}$ et $I:I_{\alpha_2}$ sont deux éléments maximaux parmi les résiduels $I:I_\alpha$, ils sont égaux, car $I_{\alpha_1}\cap I_{\alpha_2}$ est un voisinage et il existera un I_{α_3} avec $I_{\alpha_1}\cap I_{\alpha_2}\supseteq I_{\alpha_3}$ et donc

$$I:I_{\alpha_i}\subseteq I:(I_{\alpha_1}\cap I_{\alpha_2})\subseteq I:I_{\alpha_3} \qquad \text{pour} \quad i=1,\,2$$

et donc

$$I:I_{\alpha_1}=I:(I_{\alpha_1}\cap I_{\alpha_2})=I:I_{\alpha_2}.$$

En particulier, si τ est la topologie discrète δ, $(M')_\delta$ devient :

(M_0) : *Toute chaîne de résiduels d'un I fixé quelconque est stationnaire* si l'on admet l'axiome du choix [pour prouver l'implication $(M_0)\to(M')_\delta$]. Comme on est dans le cas 1°, le théorème **18.1** s'applique. On a le :

THÉORÈME 20.1. — *Si un anneau A satisfait à* (M_0) (par exemple s'il est nœthérien), *il y a correspondance biunivoque entre les topologies τ définies par un systèmes d'idéaux $\{I_\alpha\}$ et les équivalences $\mathfrak{E}$ régulières pour l'addition et la multiplication qui satisfont à*

$$[I,\,J]\supseteq[I_1,\,J_1]\cap\ldots\cap[I_p,\,J_p],$$
$$I_k\equiv J_k \qquad \text{pour} \quad k=1,\quad\ldots,\quad p\Rightarrow I\equiv J.$$

Alors en toute classe d'un idéal modulo une $\mathfrak{E}$ il y a un élément maximum.

Par exemple, si l'on prend pour τ la topologie I-adique sur A supposé nœthérien, l'équivalence $E(\tau)$ correspondante est caractérisée par

$$J_1\equiv J_2\rightleftharpoons J_1:I^n=J_2:I^n$$

pour n grand ou encore

$$J_{1_{[I]}}=J_{2_{[I]}},$$

alors les deux membres de la précédente égalité coïncident avec l'élément maximum de la classe (commune) de J_1 et J_2. Comme pour l'équivalence de la section **17**, toute classe est déterminée par son élément maximum.

REMARQUE. — La condition (M_0) donnée plus haut entraîne que tout *idéal J*

irréductible est primaire comme on le voit en appliquant le raisonnement classique à la chaîne $(J : A b^n)$ pour tout $b \in A$.

21. Sur une définition de l'équivalence d'Artin. — Si l'on reprend l'exemple 2° de la section **18** dans le cas où A est un anneau d'intégrité complètement intégralement clos on voit que l'équivalence d'Artin $\mathfrak{A}$ est résiduellement fermée (th. 1) et la réciproque est d'ailleurs vraie. Le procédé conduit aussi à la notion de S-normalité dans un anneau quelconque (chap. IV).

On sait ([39]) qu'il est équivalent pour l'anneau d'*intégrité* donné A de satisfaire à l'une ou à l'autre des deux conditions :

α. $\lambda\left(\frac{a}{s}\right)^n \in A$ pour tous n et λ, a, $s \in A - \{0\}$ (A est complètement intégralement clos) entraîne $\frac{a}{s} \in A$;

β. Le demi-groupe quotient $\Gamma/\mathfrak{A}$ est un groupe (A est complètement entier fermé).

THÉORÈME 21.1. — *Pour que les conditions α et β précédentes soient vérifiées, il faut et il suffit que l'équivalence d'Artin soit résiduellement fermée. La topologie associée est alors définie au moyen de la classe unité de l'équivalence $\mathfrak{A}$.*

Dans ce qui suit la résiduation est prise en Γ, et la résiduation externe (définie à la section **18**) lui est reliée par la relation

$$[U, V] = (U : V) \cap (V : U) \cap A.$$

Si l'on suppose donc β vérifiée et I, $J \in \Gamma$, alors $I \equiv J$ entraîne $[I, J] \equiv A$ puisque $\mathfrak{A}$ est régulière pour l'intersection. De plus, la classe unité définit une topologie T sur A pour la même raison et l'on a donc $\mathfrak{A} \subseteq E(T)$ et l'inclusion inverse est vraie car si $I \equiv J \bmod E(T)$, il existe un voisinage V tel que $I \supseteq JV$ et $J \supseteq IV$ et de $A : V = A$ on déduit

$$A : I = A : JV = (A : V) : J = A : J$$

et en permutant I et J, on a $I \equiv J \bmod \mathfrak{A}$ qui est bien fermée au sens de la section **18**.

Si, inversement, $\mathfrak{A}$ est fermée et si l'on a $I \equiv J \bmod \mathfrak{A}$, si l'on pose

$$L = (I : J) \cap (J : I) \cap A,$$

([39]) *Cf.* [5], livre II, p. 162-165 et 240-247 : le treillis (multiplicatif résidué) Γ est caractérisé par $\gamma : \gamma = A$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. *Cf.* aussi [22] : VAN DER WAERDEN emploie le terme « integrally closed » que nous réservons ici à la condition (moins forte) de fermeture intégrale. Le cas des anneaux avec diviseurs de zéro sera examiné au chapitre IV.

on a

$$[L, A] = (L : A) \cap (A : L) \cap A = (L : A) \cap A \supseteq L$$

et donc $[L, A] \supseteq [I, J]$ et donc enfin $L \equiv A \operatorname{mod} \mathfrak{A}$ et, par convexité, on a aussi $A \cap (I : J) \equiv A$. En particulier, on a pour tout $I \in \Gamma$

$$A \cap (I^{-1} : I^{-1}) \equiv A.$$

Posons alors $I.I^{-1} = R$; on a $R \subseteq A$ et donc $[R, A] = R$ et aussi, d'après la définition des double-résiduels,

$$R = A \cap (A : R) = A \cap (I^{-1} : I^{-1});$$

on a donc pour tout $I \in \Gamma$, $I.I^{-1} \equiv$ A, $\operatorname{mod} \mathfrak{A}$ et l'on a donc β.

Le raisonnement fait montre plus généralement que dans tout gerbier quasi entier complètement entier-fermé l'équivalence d'Artin se définit par

$$I \equiv J \operatorname{mod} \mathfrak{A} \rightleftharpoons (I : J) \cap (J : I) \cap A \equiv A.$$

On voit, de plus, pour la suite (section 22) que cela équivaut à

$$(I : J) \cap (J : I) \equiv A,$$

puisque la classe d'un élément entier est entière et puisque pour tous U, $V \in \Gamma$ on a $U : V \equiv U.V^{-1} \operatorname{mod} \mathfrak{A}$.

22. Caractérisation des anneaux complètement intégralement clos. — Une caractérisation des groupes due à G. Thierrin (*Thèse*, Paris, 1954, th. **85**) va donner d'autres formes de la condition α ou β de la précédente section et cela donnera, par exemple, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau d'intégrité nœthérien soit intégralement clos. Dans le cas abélien on a l'énoncé : *un demi-groupe abélien est un groupe si et seulement si toute équivalence régulière est simplifiable* ([40]).

Théorème 22.1. — *Un anneau d'intégrité A est complètement intégralement clos dans son corps des quotients si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :*

a. L'équivalence d'Artin est résiduellement fermée;

([40]) G. Thierrin, *Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes* (*Bull. Soc math. Fr.*, t. 83, 1955, p. 103-159 : *Thèse Sc. math.*, Paris, 1954), théorème 83 et P. Dubreil, *Contribution à la théorie des demi-groupes* (*Rend. Matem. Roma*, 5e série, t. 10, 1951, fasc. 1, 2) : une équivalence principale est attachée à un complexe H de D :

$$a \equiv a' \rightleftharpoons \text{on a } ax \in H \rightleftharpoons a'x \in H;$$

elle est régulière pour la multiplication.

b. Toute équivalence régulière pour la multiplication et moins fine que $\mathfrak{A}$ *est simplifiable ;*

c. Toute équivalence principale qui contient $\mathfrak{A}$ *est simplifiable.*

D'après le théorème 21.1, il suffit de montrer que b et c sont équivalentes à la condition β donnée précédemment et selon laquelle $\Gamma/\mathfrak{A}$ est un groupe. Or ceci résulte immédiatement du fait qu'il y a correspondance biunivoque entre les équivalences régulières en D et les équivalences en Γ qui contiennent $\mathfrak{A}$ et sont régulières pour la multiplication. De plus, toute équivalence régulière en un demi-groupe étant intersection d'équivalences principales on en déduit le résultat.

CHAPITRE IV.

Théorie multiplicative des idéaux.

23. **Définitions de la S-normalité d'un anneau.** — Le procédé de définition de certaines équivalences à partir de topologies va permettre de généraliser, en un sens précisé, à un anneau commutatif quelconque A la théorie multiplicative classique ([41]).

On sait que l'absence de factorisation des éléments eux-mêmes d'un anneau A (supposé d'abord sans diviseur de zéro pour simplifier) conduit à introduire les idéaux et les domaines d'intégrité D dans lesquels tout idéal non nul est produit unique d'idéaux maximaux.

Cohen a publié ([42]) une démonstration simplifiée d'un résultat de Matusita suivant lequel on obtient un tel domaine D en supposant seulement la factorisation de tout idéal non nul en produit d'idéaux premiers p_i. Ces idéaux p_i sont alors *a posteriori* maximaux en A et déterminés à l'ordre près.

En fait, la théorie a été étendue au cas où A est nœthérien et intégralement fermé dans son anneau total des quotients, mais la factorisation n'est valable qu'à une équivalence près. L'étude d'une équivalence satisfaisant à certaines conditions (en fait plus précises que les conditions introduites au chapitre précédent) a conduit à étendre la théorie classique d'Artin-Prüfer à des gerbiers généraux : c'est le point de vue qu'on adopté M.-L. Dubreil-Jacotin et P. Dubreil dans l'étude des variétés arithmétiquement normales ([43]).

Toutefois, dans les théories précédentes, la condition de chaîne ascendante est supposée et les propriétés de factorisation sont alors obtenues *a posteriori*. La construction axiomatique qui suit prend la factorisation comme point de départ.

([41]) *Cf.* [4], [5] et [22].

([42]) *Cf.* [3], th. 6.

([43]) *Cf.* [4] et [20] et pour S la section 4 et la remarque précédant le théorème 23.2. En fait, S est souvent l'ensemble des éléments non reliés à un idéal fixé.

Soit alors A un anneau, commutatif, muni d'un élément unité non nul (avec d'éventuels diviseurs de zéro) et S un sous-demi-groupe de A *ne contenant pas zéro* et tel que

$$x \in A - S \quad \text{et} \quad a \in A \Rightarrow ax \notin S.$$

Soit $N = N(S)$ le S-composant de (o), φ l'homomorphisme naturel de A sur $A/N = A'$, S' l'image $\varphi(S)$ et A_S l'anneau classique $A'_{S'}$. *On voit que S' ne contient aucun diviseur de zéro de A'.*

Soit aussi $T(S)$ le treillis, multiplicatif, muni d'une résiduation *interne* des idéaux fractionnaires réguliers de A, c'est-à-dire des sous-A-modules de A_S qui ont en S' un dénominateur commun et contiennent chacun un élément de la forme $\frac{s'_1}{s'_2}$ (s'_1 et $s'_2 \in S'$) appelé *régulier*. On désignera par $\mathfrak{A}(S)$ l'équivalence d'Artin dans le gerbier (quasi entier) $G(S)$ des idéaux réguliers précédents. Posons alors la :

Définition. — *On dit que l'anneau A est S-normal si tout idéal entier régulier I' de A' est congru modulo $\mathfrak{A}(S)$ à un produit d'idéaux entiers réguliers premiers p'_i de A'.*

Exemples. — *a.* Si A est un anneau *d'intégrité* normal (au sens de Krull) il est S-normal avec $S = A - \{o\}$ ([44]). La réciproque sera établie avec le théorème 25.1, ce qui justifie la terminologie employée.

b. Si A est un domaine d'intégrité nœthérien et si $T(S)$ est entier fermé (il revient au même ici de dire que A est intégralement clos en son anneau des quotients A_S), alors A est S-normal ([45]) et réciproquement. Cette réciproque est fausse dans le cas général. En particulier, un anneau m-adique de Zariski est S-normal si l'on prend $S = 1 + m$.

c. La S-normalité peut aller de pair avec un anneau A_S normal (c'est le cas si A est un anneau nœthérien intégralement clos) et avec un anneau A_S non normal (prendre A non normal et pour S l'ensemble des éléments inversibles).

On réservera dans la suite l'expression *intégralement clos* (complètement ou non) aux éléments eux-mêmes et l'expression « fermé » au treillis $T(S)$: *les deux notions ne coïncident pas si A n'est pas nœthérien.*

On a alors le résultat fondamental suivant :

Théorème 23.1. — *Si A est S-normal, $T(S)$ est complètement entier fermé et les idéaux premiers p'_i attachés à I' et incongrus à A' sont déterminés à l'ordre près et sont les idéaux premiers minimaux de I' qui sont*

([44]) *Cf.* W. Krull [13], section 43, et aussi Samuel, *Commutative Algebra*, Cornell University, 1953.

([45]) *Cf.* [5], livre II, chap. VI, théorème 15. Le résultat n'est plus valable si A a des diviseurs de o (*cf.* section 27).

incongrus à A'. *Pour* I' *variable, la famille* E *de tous les idéaux* p_i *coïncide avec :*

E_1 *: Ensemble des éléments minimaux de l'ensemble des idéaux premiers qui coupent* S';

E_2 *: Ensemble des idéaux premiers réguliers minimaux;*

E_3 *: Ensemble des idéaux premiers réguliers* p' *tels que* p' *incongru à* A' *et* $p' \subset J' \subseteq A'$ *entraîne* $J' \equiv A'$.

On peut supposer qu'on a $S = S'$ et alors que S ne contient aucun diviseur de o. Tout I satisfait mod $\mathfrak{A}(S)$ à $I \equiv p_1 p_2 \ldots p_r$ et il suffit de voir, par exemple, que $p_1 = p$ est $\mathfrak{A}(S)$-inversible, car les classes d'équivalence d'idéaux réguliers formeront un groupe. Or p contient un $x \in S$ et l'on a mod $\mathfrak{A}(S)$, $Ax \equiv q q_2 \ldots q_r$ et comme on a $Ax = (Ax)^\star$, p contient q par exemple. Alors comme q est $\mathfrak{A}(S)$-inversible, il suffit de montrer qu'on a $p \equiv q$.

Si l'on avait $p \not\equiv q$, on va voir qu'on aurait $p \equiv A$ contrairement à l'hypothèse. En effet, qp^{-1} est régulier et entier d'après $qp^{-1} \subseteq pp^{-1} \subseteq A$ et l'on a

$$qp^{-1} \equiv u_1 \ldots u_t \qquad \text{et} \qquad pp^{-1} \equiv v_1 v_2 \ldots v_s.$$

Or on voit par convexité qu'on a $qq^{-1} \equiv A$ et donc

$$qpp^{-1} \equiv u_1 u_2 \ldots u_t p \equiv q v_1 v_2 \ldots v_s,$$
$$u_1 u_2 \ldots u_t p q^{-1} \equiv (qq^{-1}) v_1 v_2 \ldots v_s \equiv v_1 v_2 \ldots v_s \subseteq A$$

et comme la classe d'un élément entier est entière on a

$$u_1 u_2 \ldots u_t p (q^{-1} q) \subseteq q.$$

Or q ne contient pas p et non plus qq^{-1} (par convexité on aurait $q \equiv A$ en cas contraire), donc on a $q^\star \supseteq (qp^{-1})^\star$ et donc

$$A = (qq^{-1})^\star = (q^\star q^{-1})^\star \supseteq [(qp^{-1})^\star q^{-1}]^\star$$

et donc $(p^{-1})^\star \subseteq A$, donc $p^{-1} \subseteq A$, ce qui est impossible.

On en déduit que $T(S)$ est complètement entier fermé et que tous les p'_i attachés à un I' fixé sont $\mathfrak{A}(S)$-inversible, et si l'on se borne à considérer ceux qui sont incongrus à A' ils sont chacun maximaux dans leur classe (*cf.* [5], livre II, p. 245), donc contiennent chacun $I' = I$: l'unicité des p'_i en résulte alors par récurrence sur r. De plus, si l'on a $I \subseteq J \subseteq A$, les inclusions étant larges, l'unicité de la décomposition de l'idéal entier IJ^{-1} donne la loi Φ : tout composant premier de J incongru à A, qui figure dans la décomposition de J avec un exposant égal au moins à k figure dans celle de I avec un exposant k' tel qu'on ait $k' \geq k$. De plus, chaque p'_i est premier minimal pour I d'après la loi Φ, car $p'_i \supset p' \supseteq I'$ entraînerait $p' \not\equiv A$, donc $p' = p'^\star$, donc pour un j différent de i, $p'_i \supseteq p'_j$, ce qui est impossible.

Inversement, tout idéal premier minimal p' qui est en plus incongru à A est l'un des p'_i précédents d'après la relation $p = p^*$. La loi Φ montre encore qu'on a $E = E_2 = E_3$.

Pour voir qu'on a $E_3 \supseteq E_1$ on remarque que tout $p \in E_1$ contient un $s \in S$ tel que $As \equiv W_1 W_2 \ldots W_h$ et l'on a $p \supseteq As = (As)^*$, donc, par exemple, $p \supseteq W_1$ qui est en $E = E_3$. Il reste à voir que les relations $p \in E_3$ et les inclusions strictes $A \supset p \supset m \supset (0)$ sont incompatibles pour tout idéal premier m qui coupe S et enfin que p coupe S lui-même.

Or m est régulier et comme par convexité on a $m \not\equiv A$, on a $m = m^*$ et p contiendrait un des composants de m, d'où une contradiction. Enfin on a $p \in E_2$, donc $p^{-1} \not\equiv A$ [sinon $p = p^* = (p . p^{-1})^* = A$] et il existe un $a \in A$ et un $s \in S$, avec $\frac{a}{s} p \subseteq A$ et $\frac{a}{s} \notin A$ et donc $(As : p) \cap A$ contiendrait strictement As : la loi Φ montre que $s \in p$.

NAKAYAMA a montré qu'il existe des anneaux complètement intégralement clos en leur corps des quotients qui ne sont pas intersection d'anneaux de valuation discrète, donc ne sont pas des anneaux normaux au sens de ce chapitre ([46]). Ceci montre que *la notion de S-normalité est strictement plus forte que la notion d'anneau complètement entier fermé* (section **21**).

Extension des définitions. — On a supposé dans ce qui précède $A - S$ multiplicativement stable en A, c'est-à-dire aussi que S contient ses diviseurs en $A^* = A - (0)$. Alors un *idéal fractionnaire est S-régulier si et seulement s'il coupe S'*, car tout I' qui contient $\frac{s'_1}{s'_2}$ (s'_1, $s'_2 \in S'$) contient s'_1.

Si λ est la fermeture qui associe à tout sous-demi-groupe S de A^* le demi-groupe S^* de ses diviseurs en A^*, on a $N(S) = N(S^*)$, l'homomorphisme $\varphi : A \xrightarrow{\varphi} A/N(S) = A/N(S^*)$ et l'identité de A_S et A_{S^*}. On voit facilement que $T(S)$ et $T(S^*)$ coïncident, donc que $T(S)$ est résidué. On pourra donc dans la suite parler indifféremment de S-normalité ou de S^*-normalité.

Le résultat classique de MATUSITA-COHEN (*cf.* [3] : un domaine d'intégrité dont tout l'idéal est produit d'idéaux premiers est un anneau de Dedekind) est un cas particulier de l'implication $c \to a$ du résultat plus général suivant, valable en présence de diviseurs de o :

THÉORÈME 23.2. — *Si A est S-normal et si E désigne l'ensemble des idéaux premiers réguliers minimaux, il y a équivalence entre les trois conditions suivantes :*

a. Tout idéal premier S-régulier appartient à E;

b. L'équivalence d'Artin en $T(S)$ est l'égalité;

([46]) *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, t. 18, 1942.

c. Tout idéal régulier entier est égal à un produit d'idéaux entiers premiers (réguliers).

Si l'on suppose a vérifiée, tout U congru à A est entier. S'il était contenu en un idéal premier maximal M de A on aurait $M \in E$ et donc, d'après le théorème précédent, on aurait U incongru à A : on a alors pour tous I, J de $T(S)$ congrus $\operatorname{mod} \mathfrak{A}(S)$ $I : J \equiv IJ^{-1} \equiv A$, donc $I \supseteq J$ et aussi $J \supseteq I$, d'où $I = J$ et l'on a b.

La définition de la S-normalité montre que la condition b entraîne la condition c.

Supposons c vérifiée, et soit p un idéal premier S-régulier : il contient d'après le corollaire précédent un $s \in S$ (on peut supposer $S = S'$) et comme As est maximum dans sa classe $\operatorname{mod} \mathfrak{A}(S)$, elle-même régulière pour l'intersection, on a l'égalité

$$As = p_1^{(\alpha_1)} \cap p_2^{(\alpha_2)} \cap \ldots \cap p_r^{(\alpha_r)}$$

si $p^{(\alpha)}$ désigne l'élément maximum de la classe de p^α. Or, par hypothèse, As est égal à un produit d'idéaux premiers (nécessairement réguliers) π_j, soit $\pi_1^{\beta_1} \ldots \pi_s^{\beta_s}$ et comme on a $(As)(As)^{-1} = A$, on a pour tout j, $\pi_j \pi_j^{-1} = A$. On a, d'autre part, la congruence

$$As \equiv p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} \qquad \text{et} \qquad As = (As)^* \subset p_1 \cap p_2 \cap \ldots \cap p_r,$$

chaque p_i contient un des π_j et coïncide avec lui. On aura par exemple (d'après l'unicité) : $As \equiv \pi_1^{\alpha_1} \ldots \pi_{r-\lambda}^{\alpha_{r-\lambda}}$, donc

$$As \supseteq \pi_1^{\alpha_1} \ldots \pi_{r-\lambda}^{\alpha_{r-\lambda}} \supseteq \pi_1^{\alpha_1} \ldots \pi_r^{\alpha_r},$$

d'où l'égalité

$$\pi_1^{\alpha_1} \ldots \pi_{r-\lambda}^{\alpha_{r-\lambda}} = \pi_1^{\alpha_1} \ldots \pi_r^{\alpha_r}.$$

Comme les π_j sont A-inversibles, on a $\lambda = 0$. Finalement on a l'identité (pour les idéaux As) entre la factorisation et la quasi-factorisation : on peut alors terminer comme en COHEN ([11]) : Si l'on avait p non en E on aurait $p \supset \pi_1$, par exemple et l'on posera $\pi = \pi_1$, π étant alors A-inversible. Il existerait $x \in p - \pi$ et l'on aurait, d'après l'hypothèse, deux décompositions

$$\pi + Ax = u_1 u_2 \ldots u_k \qquad \text{et} \qquad \pi + Ax^2 = v_1 v_2 \ldots v_l$$

et en passant à $A' = A/\pi$, on voit qu'on a $(\pi + Ax)^2 = \pi + Ax^2$, d'où finalement

$$\pi(\pi + Ax) = \pi \qquad \text{et} \qquad \pi + Ax = A,$$

d'où une contradiction.

On remarque enfin que la condition a s'exprime aussi (en A S-normal) de la manière suivante : *tout idéal premier* (entier) *est maximal en A*. De même pour c : *pour tout idéal entier I régulier A/I est un anneau d'Artin* : c'est la condition minimale restreinte pour l'ensemble des idéaux entiers réguliers. La loi Φ et la condition b montrent qu'on a la condition maximale pour les idéaux entiers réguliers.

La question se poserait de trouver des conditions générales sur S telles que cette condition minimale restreinte entraîne cette condition maximale.

Le cas dans lequel l'ensemble E du théorème précédent se réduit à un élément unique constitue une généralisation assez naturelle au cas des anneaux avec des diviseurs de zéro, de la notion d'anneau de valuation discrète (anneau local régulier de dimension 1). Lorsqu'il en est ainsi les seuls idéaux réguliers entiers sont les puissances $p, p^2, \ldots$ d'un idéal premier déterminé.

Les théorèmes 23.1 et 23.2 montrent facilement qu'un *anneau d'intégrité* est un anneau de valuation discrète si et seulement si les idéaux entiers non triviaux sont les puissances d'un idéal premier p fixé. On appellera donc plus généralement *anneau de valuation discrète* tout anneau A tel que les idéaux I qui ne contiennent pas que des diviseurs de zéro sont des puissances d'un idéal premier p déterminé.

24. **Propriétés générales des équivalences $\mathfrak{A}(S)$.** — L'étude précédente de la normalité relative à un demi-groupe unitaire donné S conduit alors, dans le cas général à une équivalence $\mathfrak{A}(S)$ qu'on peut déduire d'une topologie sur A comme dans le cas de l'équivalence d'Artin classique.

Avec les notations des sections 18 et 23 on prendra pour Γ l'ensemble des idéaux fractionnaires S-réguliers, et pour ensemble des résiduels externes le gerbier G des idéaux entiers réguliers de A.

On voit alors, comme aux sections 21 et 22, que si A est S-normal, $\mathfrak{A}(S)$ est résiduellement fermé et que la topologie $T(S)$ associée peut se définir avec pour voisinages fondamentaux de zéro ceux des idéaux entiers de A qui coupent S et ne sont contenus en aucun idéal premier régulier minimal p $[p \in E(S)]$.

Alors le groupe L des classes peut s'écrire additivement comme la somme directe (discrète) de ε copies de l'anneau Z des entiers ordinaires, ε désignant la puissance cardinale de $E(S)$. Écrit multiplicativement, ce groupe est libre, engendré par les éléments de $E(S)$. Aux équivalences régulières $\mathfrak{C}_t$ contenant $\mathfrak{A}(S)$ correspondent les sous-groupes de L. Aux sommes de sous-groupes super-irréductibles de Z en L (*cf.* section 7) sont associées les équivalences super-irréductibles parmi les $\mathfrak{C}_t$ et chacune d'elles est principale, puisque toute équivalence régulière est intersection d'équivalences principales (THIERRIN [21]).

Ce procédé permet d'étendre à tout idéal fractionnaire (régulier ou non) l'équivalence $\mathfrak{A}(S)$ en $\mathfrak{B}(S)$: deux idéaux seront dits congrus modulo $\mathfrak{B}(S)$ si leur double résiduel est un voisinage pour $T(S)$.

25. **Caractérisation des anneaux normaux généraux.** — La théorie de

la section 23 redonne dans le cas d'un anneau d'intégrité A et $S = A - \{o\}$ celle des anneaux normaux de (Krull), c'est-à-dire des anneaux qui sont intersection d'anneaux de valuation discrète A_i tels que tout $x \in S$ soit inversible en tout A_i, sauf pour un nombre fini d'entre eux ([47]). Ceci caractérisera en particulier les anneaux nœthériens intégralement clos.

THÉORÈME 25.1. — *Un anneau d'intégrité est un anneau normal de Krull si et seulement si tout idéal entier non nul est quasi égal à un produit d'idéaux premiers non nuls de A.*

En effet, si A est normal la théorie des diviseurs montre qu'on a la propriété en question. Les composants premiers sont alors déterminés si l'on se limite à ceux qui sont incongrus à A : ce sont les idéaux premiers-non-nuls minimaux.

Le théorème 23.1 permet de démontrer la réciproque sans la v-factorisation ni hypothèse d'unicité *a priori*. On va construire les valuations essentielles v_i attachées aux idéaux premiers p_i de l'ensemble $E(=E_2)$ de ce même théorème. Pour tout x de $S = A - \{o\}$ on définit les $v_i(x)$ comme les exposants (presque toujours nuls) de Ax dans sa quasi-factorisation. La propriété d'unicité montre qu'on a pour tous x, y de S la relation : $v_i(xy) = v_i(x) + v_i(y)$ pour tout i et cela s'étend à tout élément non nul du corps K des quotients de A. La loi Φ montre alors que si l'on a en plus $x + y \neq o$, on a pour tout i

$$v_i(x+y) \geqq \min[v_i(x), v_i(y)]$$

et cela s'étend (au moyen de la formule du produit) à des éléments quelconques de K.

Enfin si l'on a $u \in K$ et pour tout i, $v_i(u) \geqq o$, alors on a $\mathrm{A}u = \prod_i p_i^{v_i(u)}$ et comme la classe d'un élément entier est entière on a $A\mathrm{u} = (Au^* \subseteq)A$.

COROLLAIRES α. — *Un domaine d'intégrité est un anneau de Dedekind si et seulement s'il est normal et l'équivalence d'Artin se réduit à l'égalité.*

Cela est une conséquence de la section 23. On peut aussi dire : *A est normal et l'équivalence d'Artin est régulière pour les intersections infinies.* En effet, si A est un domaine de Dedekind, il satisfait à la condition minimale restreinte et toute intersection est égale à une sous-intersection finie. Comme A est fermé $\mathfrak{A}(S)$ est régulière pour les intersections finies et l'on a la proposition directe.

Si inversement on a cette régularité infinie, désignons par p un idéal pre-

---

([47]) *Cf.* [13]. La terminologie est celle de SAMUEL (*cf.* [20]), par exemple. NAGATA appelle ces anneaux « anneaux de KRULL » et appelle « normaux » les anneaux intégralement clos.

mier avec $p \in E$. Si p n'était pas maximal, il ne serait pas super-irréductible d'après la section 7 et serait donc l'intersection d'une famille U_j de diviseurs stricts, donc tous congrus à A ; il en serait de même de p, ce qui contredit le théorème 23.1.

β. *Un domaine d'intégrité est à factorisation unique si et seulement si tout idéal entier est quasi égal à un produit fini d'idéaux p_i chacun principal et premier.*

Il revient au même de dire que les idéaux premiers principaux engendrent multiplicativement les classes de l'équivalence d'Artin.

En effet, si A est un domaine à factorisation unique, il est normal et les éléments de l'ensemble E associé sont principaux, d'où la proposition directe.

Pour la réciproque on voit, d'après la section 23, que A est normal ; alors tout idéal minimal p est maximum dans sa classe et comme il est par hypothèse quasi égal à un idéal principal Au, lui-même maximum dans sa classe, l'idéal p est principal et la proposition est démontrée.

26. Cas des anneaux avec diviseurs de zéro : normalité forte ([48]). — Si l'on veut étudier les demi-groupes S rendant un anneau A donné S-normal au sens de la section 23, on est conduit, par généralisation du cas où l'on a un anneau d'intégrité D à une notion de normalité renforcée. Le cas de l'anneau D est moins général que celui des hypothèses du :

LEMME. — *Soit S un sous-demi-groupe de A. Pour que les noyaux attachés à tous les sous-demi-groupes $\sum$ de S soient les mêmes, il faut et il suffit qu'on ait, désignant par $N(S)$ le S-composant de* (o)

$$(F) \qquad S \subseteq \operatorname{rad}[(o) : N(S)].$$

En effet, la condition cherchée revient à écrire que pour tous les sous-demi-groupes cycliques Γ de S, on a $N(S) \subseteq N(\Gamma)$, c'est-à-dire que, pour tout $x \in A$, $[(o) : Ax]$ coupe Γ dès qu'il coupe S. Ceci revient à dire que pour tout $x \in N(S)$ et tout $s \in S$ on a pour un n, $s^n \in (o) : Ax$ ou encore $S \subseteq \operatorname{rad}[(o) : Ax]$. Finalement, la condition est qu'on ait

$$S \subseteq \bigcap_{x \in N} \operatorname{rad}[(o) : Ax],$$

d'où le lemme. Il revient aussi au même de dire (lorsque A est nœthérien) que *S est contenu en tout idéal premier minimal de* (o) *qui le coupe*, comme on le voit en prenant une décomposition primaire de (o).

([48]) Dans cette section les demi-groupes S sont des demi-groupes quelconques, contenus en $A^* = A - \{o\}$.

EXEMPLE. — Soit B un anneau de Dedekind et I un idéal non nul avec la décomposition $I = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_h^{\alpha_h}$ et $h \geq 2$ (c'est-à-dire que $A = B/I$ n'est pas un pseudo-corps au sens de la section 14). On sait qu'il existe au moins un s avec $s \in P_{r+1}, \ldots, s \in P_h$ et avec $s \notin P_1, \ldots, s \notin P_r$. Prenons alors pour S le sous-ensemble de A constitué par les classes des puissances de s : le demi-groupe S est contenu dans les idéaux premiers qui le coupent, savoir les images homomorphes de $P_{r+1}, \ldots, P_h$: donc S satisfait à la condition du lemme. On voit aussi, puisque tout idéal de A est produit d'idéaux premiers, que A est S-normal. On est même dans le cas d'application du théorème 23.2.

DÉFINITION. — *On dit qu'un anneau A est fortement S-normal s'il est S-normal et si S satisfait à la condition (F).*

Alors si l'on désigne par $G(S)$ le groupe des classes mod $\mathfrak{A}(S)$ pour tout S rendant A S-normal, on a le :

THÉORÈME 26.1. — *Si l'anneau A est fortement S_1-normal, il l'est également pour tout S_2 contenu en S_1 et l'on a $G(S_2) \subseteq G(S_1)$.*

En effet, si l'on désigne par N le noyau commun à S_1 et S_2, par A' l'image A/N, par T_1 et T_2 les treillis correspondants d'idéaux réguliers (pour S_1 et S_2 respectivement), on a $T_2 \subseteq T_1$. Soit alors I' un élément entier de T_2 : c'est un élément entier de T_1 et l'on a mod $\mathfrak{A}(S_1)$, $I' \equiv P_1'^{\alpha_1} \ldots P_r'^{\alpha_r}$. Or, d'après la section 23, chaque P' contient I', donc est S_2-régulier : on a donc la même congruence modulo la restriction à T_2 de $\mathfrak{A}(S_1)$ donc mod $\mathfrak{A}(S_2)$. Finalement, A' est S_2-normal et l'inclusion des groupes correspondants résulte immédiatement de la section 24.

La famille des S rendant A fortement normal est alors caractérisée au moyen du :

THÉORÈME 26.2. — *Pour tout anneau A il existe des sous-demi-groupes-maximaux rendant A fortement normal et les autres sont les demi-groupes qui sont contenus en l'un d'eux.*

Soit, en effet, Γ l'ensemble des S qui rendent A fortement S-normal. Il n'est pas vide car l'ensemble S_0 des éléments inversibles est en Γ. Il suffit, compte tenu du théorème précédent et *moyennant l'axiome du choix*, de montrer que l'ensemble est inductif pour la relation d'inclusion : le théorème de Zorn conduira au théorème.

Soit alors $\{S_k\}$ une chaîne (non vide) contenue en Γ, S l'union ensembliste des S_k : c'est un sous-demi-groupe ne comprenant pas zéro. Désignons par T_k et T les treillis correspondants, par N le noyau (évidemment fixe) qui correspond aux S_k et à S, par A' l'anneau A/N. De plus, d'après l'argument du théorème 26.1, l'ensemble des T_k est totalement ordonné et l'on a $T = \cup T_k$. Soient S'_k et S' les images correspondantes.

Si I' est S'-régulier, il contient un $s' \in S'$ et, d'après la condition d'ordre total, on peut enlever ceux des S_k qui ne contiennent pas s' et alors la définition de la S-normalité donne le résultat.

Alors la fermeture introduite dans la section **23**, $S \to S^*$ respectant la normalité, on en déduit que les S_m du théorème précédent ont des compléments multiplicativement permis.

27. Cas des anneaux nœthériens. — Lorsque l'anneau A considéré dans ce chapitre est nœthérien on peut préciser les énoncés en tenant compte des propriétés des idéaux irréductibles (section **13**) et établir que la S-normalité équivaut au fait que $A' = A/N(S)$ est intégralement clos en A_S (et même complètement) au sens des éléments eux-mêmes avec toutefois une ***restriction de la condition aux éléments réguliers***. En particulier, un anneau d'intégrité nœthérien est intégralement clos en son corps des quotients ([49]) si et seulement si les idéaux premiers engendrent multiplicativement les classes de l'équivalence d'Artin. Si la même propriété est vraie avec les idéaux maximaux, A est un domaine de Dedekind. L'Hauptidealsatz de KRULL se généralise aussitôt suivant le :

LEMME **1**. — *Si A est nœthérien S-normal, il y a équivalence pour tout idéal p' premier S-régulier entre les conditions :*

a. p' appartient aux ensembles E du théorème **23.1**;

b. p' est premier essentiel d'un idéal $A's'$ ($s' \in S'$, $A's' \neq A'$).

On suppose évidemment que le demi-groupe S n'est pas réduit aux seuls éléments inversibles de A. Si donc p' est régulier minimal, il contient un $s' \in S'$ tel que $A's' \neq A'$ et sera essentiel minimal pour $A's'$.

Supposons qu'on ait b. On a alors

$$A's' \equiv q_1'^{\alpha_1} \ldots q_h'^{\alpha_h} (\mathfrak{A}(S)).$$

Comme chaque composant (incongru à A') est primaire fort et maximum dans sa classe, c'est une puissance symbolique $p_i'^{(\alpha_i)}$ et comme $\mathfrak{A}(S)$ est régulière pour les intersections et $A's'$ maximum dans sa classe on a

$$A's' = p_1'^{(\alpha_1)} \cap \ldots \cap p_h'^{(\alpha_h)}.$$

Enfin p' contient l'un des p_i' et coïncide avec lui, et l'on a a, d'après le théorème **23.1**.

S. MORI, YOSHIDA et SAKUMA ont étudié le cas dans lequel S est l'ensemble des éléments non diviseurs de zéro de A ([50]). On établit de manière analogue le :

([49]) C'est à-dire normal au sens de NAGATA (*Some basic theorems on commutative rings*, *Mem. Coll. Sc. Kyoto*, 1955, p. 59).

([50]) *Cf.* [23], lemmes 3 et 4, la régularité devenant ici la S-régularité.

LEMME 2. — Si A est nœthérien et S-normal et si p' est premier essentiel minimal d'un idéal $A's'(s' \in S', A's' \neq A')$, le p'-composant de (o) est un idéal premier U' et $A'_{p'}$ est un anneau de valuation discrète. On a alors le :

THÉORÈME 27.1. — *Pour tout anneau nœthérien A et tout demi-groupe unitaire S il y a équivalence entre les conditions :*

a. A est S-normal;

b. Tout idéal premier essentiel p' d'un idéal $A's'$ $(s' \in S', A's' \neq A')$ est S'-minimal, tout idéal p'-primaire est irréductible et $A'_{p'}$ est un anneau de valuation discrète;

c. A est intégralement clos en A_S au sens des éléments S-réguliers $\left[\right.$ c'est-à-dire que $\lambda'\left(\frac{s'}{\sigma'}\right)^n \in A'$ pour tout n, avec $\lambda', s', \sigma' \in S'$, entraîne $\frac{s'}{\sigma'} \in A'\left.\right]$.

Si a est réalisée, on peut, pour montrer que b l'est, supposer qu'on a $N(S) = (o)$, donc $A = A'$ et $S = S'$ et aussi $p = p'$. Tout idéal p-primaire est incongru à A et si α est son exposant on a $q \equiv p^{(\alpha)}$, donc $q = p^{(\alpha)}$ et le critère de GRÖBNER s'applique. On a, en effet, $q : p \equiv p^{\alpha-1}$, donc $q : p = p^{(\alpha-1)}$ et, d'après ce qui précède, il n'y a aucun idéal p-primaire entre q et $q : p$, ce qui entraîne que q est irréductible. Le reste de la condition b résulte du lemme 2 rappelé.

Si l'on suppose que b est vérifiée, prenons un élément S-régulier $\frac{s_1}{s}$ de A_S tel qu'il existe un $\sigma \in S$, avec pour tout entier n, $\sigma\left(\frac{s_1}{s}\right)^n \in A$ et montrons qu'on a $\frac{s_1}{s} \in A$: on dira en abrégé que *A est intégralement clos en A_S au sens des éléments S-réguliers*. Prenons alors une décomposition primaire normale de As,

$$As = q \cap q_2 \cap \ldots \cap q_r, \qquad \text{avec} \quad p = \operatorname{rad} q$$

et désignons par U le p-composant de (o). La condition c sera établie si l'on prouve qu'on a $s_1 \in As$ et il suffit de montrer, par exemple, qu'on a $s_1 \in q$. On suppose encore $N(S) = (o)$.

Soit φ l'homomorphisme naturel $A' = A \rightarrow \overline{A} = A/U$, $\bar{v}$ l'image $\varphi(v)$ de tout v en A. On a $q \supseteq U$ et U est premier (lemme 2). Alors, A_p étant un anneau de valuation discrète, est intégralement clos dans le corps des quotients de $\overline{A}$ et l'on a $\bar{s}_1 \in A_p\bar{s}$. On en déduit facilement qu'on a $s_1 \in q$.

Enfin si c est réalisée, on voit comme dans le cas classique ([22], section 105) que si I est S-régulier on a $II^{-1} \equiv A$. Alors $T(S)$ est complètement entier fermé et, d'après la section 23, A est S-normal. Le théorème est établi. Dans le cas général, les conditions a, b, c précédentes ne coïncident pas avec la condition de clôture intégrale de A' en A_S au sens ordinaire.

APPENDICE.

Parmi les problèmes qui se posent, signalons les suivants :

a. A quelles conditions un module super-irréductible est-il primaire dans le cas général ?

b. Étudier le corollaire du théorème **15.2** dans le cas des anneaux non nécessairement locaux.

c. Étudier les structures algébriques dont le treillis de structure $\mathfrak{T}$ est géométrique. Même problème pour $\mathfrak{T}$ supposé modulaire.

d. Étendre les calculs d'invariants de la section **16** à des modules qui sont des hypersocles quelconques. En outre, la donnée de tous les entiers $\gamma_{\tau.n}$ (τ et n variables) détermine-t-elle le A-module $\mathfrak{M}$ lui-même ?

e. Comparer pour tout anneau local A, les groupes de S-normalité attachés à A et à son complété.

f. Caractériser les équivalences principales introduites dans le théorème **22.1**.

g. Identifier pour un anneau nœthérien A les demi-groupes de normalité forte maximaux. Caractériser les A qui n'en possèdent qu'un nombre fini.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] E. Artin, C. J. Nesbitt et R. M. Thrall, *Rings with minimum condition*, Ann. Arbor, Michigan University Press, 1948 (*Univ. Mich. Publ. Math.*, n° 1).

[2] G. Birkhoff, *Subdirect unions in universal algebra* (*Bull. Amer. math. Soc.*, t. 50, 1944, p. 764-768).

[3] I. S. Cohen, *Commutative rings with restricted minimum condition* (*Duke math. J.*, t. 17, 1950, p. 27-42).

[4] M.-L. Dubreil-Jacotin et P. Dubreil, *Divers types d'anneaux intervenant en géométrie algébrique* (*Colloque de Géométrie algébrique*, 1949, Liège), Thone, Liège, 1950 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[5] M.-L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, *Leçons sur la théorie des treillis*, Gauthier-Villars, Paris, 1953 (*Cahiers scientifiques*, n° 21).

[6] P. Dubreil, *Algèbre*, 2ᵉ édit., Gauthier-Villars, Paris, 1954 (*Cahiers scientifiques*, n° 20).

[7] P. Dubreil et R. Croisot, *Propriétés générales de la résiduation en liaison avec les correspondances de Galois* (*Coll. Math. Barcelone*, t. 7, 1954, p. 193-203).

[8] L. Fuchs, *On primal ideals* (*Proc. Amer. math. Soc.*, t. 1, 1950, p. 1-6).

[9] L. Fuchs, *A note on descending chain condition* (*Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim*, t. 22, n° 9, 1949, p. 28-30).

[10] L. Fuchs, *The generalization of the valuation theory* (*Duke math. J.*, t. 18, 1951, p. 19-26).

[11] P. M. Grundy, *A generalisation of additive ideal theory* (*Proc. Cambridge phil. Soc.*, t. 38, 1942, p. 241-279).

[12] N. Jacobson, *The radical and semi-simplicity for arbitrary rings* (*Amer. J. Math.*, t, 67, 1945, p. 300-320).

[13] W. KRULL, *Idealtheorie*, Berlin, Springer, 1935 (*Erg. math. Wiss.*, Vierter, Band 3).
[14] L. LESIEUR, *Sur les idéaux irréductibles d'un demi-groupe* (*Rend. Sem. math. Univ. Padova*, 2e série, t. 24, 1955, p. 29-36).
[15] L. LESIEUR, *Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaîne* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 83, 1955, p. 161-193).
[16] N. H. MCCOY, *Rings and ideals*, Mathematical Association of America, 1948 (*Carus math. Monogr.*, n° 8).
[17] S. MORI, *Zusammenhang zwischen Primäridealen und Minimalidealen* (*J. Sc. Hiroshima Univ.*, Series *A*, t. 1, 1931, p. 77-106).
[18] E. NŒTHER, *Hypercomplexe Grössen und Darstellungstheorie* (*Math. Z.*, t. 30, 1929, p. 641-692).
[19] B. G. NORTHCOTT, *Ideal theory*, Cambridge, University Press, 1953 (*Cambridge Tracts in Math. and math. Phys.*, n° 42).
[20] P. SAMUEL, *Algèbre locale* (*Mém. Sc. math.*, n° 123, 1953, p. 1-76).
[21] G. THIERRIN, *Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes* (*Bull. Soc. math., Fr.*, t. 83, 1955, p. 103-159).
[22] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra*, 2 Teil, 3e Aufl., Berlin, Springer, 1955.
[23] M. YOSHIDA et M. SAKUMA, *On integrally closed nœtherian rings* (*J. Sc. Hiroshima Univ.*, Series *A*, t. 17, 1954, p. 311-315).
[24] O. ZARISKI, *Generalized semi-local rings* (*Summa Brasil. Math.*, t. 1, 1945-1946, n° 8, p. 169-195).

Les principaux résultats de ce travail ont été résumés en quelques Notes de l'auteur aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* :

[CR_1] *Sur les idéaux minimaux dans les anneaux commutatifs*, t. 239, 1954, p. 145-147.
[CR_2] *Sur les modules union ou inter-irréductibles*, t. 240, 1955, p. 2042-2044.
[CR_3] *Sur une famille d'équivalences en théorie des idéaux*, t. 242, 1956, p. 2693-2695.
[CR_4] *Théorie multiplicative des idéaux*, t. 243, 1956, p. 936-939.
[CR_5] *Recherche d'invariants de modules usuels*, t. 244, 1957, p. 1863-1866.

Manuscrit reçu en juin 1957.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE IV.

Théorie multiplicative des idéaux.

Jean Guérindon, 16, rue de Maubeuge, Paris (9e).