JEAN FRENKEL

Cohomologie non abélienne et espaces fibrés

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 135-220
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__135_0>

Bull. Soc. math. France,
85, 1957, p. 135 à 220.

COHOMOLOGIE NON ABÉLIENNE ET ESPACES FIBRÉS;

PAR

JEAN FRENKEL.

INTRODUCTION.

Considérons les énoncés suivants :

(A) *Soient E et E' deux espaces fibrés analytiques principaux de base X et de groupe structural G. S'il existe un X-isomorphisme continu entre E et E', alors il existe aussi entre eux un X-isomorphisme analytique.*
(B) *Soit E un espace fibré principal dont la base est une variété analytique X et dont le groupe structural est un groupe de Lie G. En ce cas E possède une structure analytique compatible avec sa fibration.*

En 1950, M. H. CARTAN [2*b*] montrait que les résultats de M. K. OKA [21*a*] concernant les problèmes de Cousin étaient impliqués par l'énoncé (A) [prendre pour X un domaine d'holomorphie, et pour G le groupe additif (resp. multiplicatif) des nombres complexes]. En 1952, M. J.-P. SERRE conjecturait la validité du « principe d'Oka » : « Sur les variétés de Stein, on peut faire avec les fonctions holomorphes tout ce qu'on peut faire avec les fonctions continues » [23]; par conséquent, selon J.-P. SERRE, les énoncés (A) et (B) doivent être vérifiés sous la seule réserve que X soit une variété de Stein, et J.-P. SERRE les vérifiait effectivement lorsque G est abélien connexe.

Notre objectif primitif était l'examen de la suggestion de Serre. Nous n'avons pas réussi à atteindre cet objectif, et récemment, M. H. GRAUERT [16], (*voir* aussi [5]) a établi la validité des énoncés (A) et (B) lorsque X est une variété de Stein (et même un espace « holomorphiquement complet ») et G quelconque.

En revanche, la méthode que nous avons adoptée, si elle conduit à faire d'importantes restrictions sur le groupe structural G (nous sommes amenés en fait à le supposer résoluble), permet d'analyser aisément les hypothèses souhaitables à faire sur la base X, et de ne pas se borner aux variétés de Stein.

D'autre part, le principe d'Oka suggère l'examen d'autres énoncés. Citons en particulier les suivants :

(C) *Soit E un espace fibré analytique de base X. Alors, toute section continue de E est homotope à une section analytique.*

(D) *Soient E un espace fibré analytique de base X, et s et s' deux sections analytiques de E. Supposons que s et s' soient homotopes dans l'ensemble des sections continues de E; alors elles sont homotopes dans l'ensemble des sections analytiques de E, et l'on peut même définir une homotopie entre s et s' qui dépende analytiquement du paramètre de déformation.*

Ces énoncés — particulièrement (C) — sont d'ailleurs, comme nous le montrons, étroitement liés à (A). L'exposé fait en août 1956 des travaux de Grauert par M. H. Cartan [5] met lui aussi ce lien en évidence.

Signalons enfin l'énoncé suivant (problème de « l'extension » du groupe structural) :

(E) *Soient M un groupe de Lie, L un sous-groupe fermé abélien distingué, $N = M/L$ le groupe-quotient, et soit F un espace fibré analytique principal de base X et de groupe N. Supposons que « l'extension » du groupe structural de F soit topologiquement posssible (i. e., il existe un espace fibré principal topologique E, de groupe M, dont l'image par la projection canonique de M sur N soit topologiquement X-isomorphe à F); alors cette « extension » est possible analytiquement.*

Si l'on fait l'hypothèse que (A) [resp. (B)] est vérifié lorsque $G = N$ (resp. $G = M$), l'énoncé (E) est évidemment vérifié; nous montrerons qu'il peut être vérifié indépendamment de cette hypothèse (prop. 20.2).

Les résultats principaux de ce travail figurent au chapitre III (§ C). Voici leur contenu essentiel.

1° Supposons que X soit une variété analytique réelle plongée sans singularité dans un R^n. Alors l'énoncé (E) est vérifié; les énoncés (A) et (B) le sont si G est un groupe de Lie résoluble (réel); l'énoncé (C) est vérifié si E est un espace fibré dont chaque fibre a une structure de groupe de Lie résoluble (réel); il en est de même de l'énoncé (D) si de plus le groupe structural de E est connexe.

2° Supposons que X soit une variété analytique complexe satisfaisant aux conditions du théorème III.8 : en gros, X est un produit de variétés de Stein, d'espaces projectifs complexes de dimensions « pas trop petites », et de complémentaires de polycylindres compacts par rapport à des domaines d'holomorphie convenables plongés dans des espaces numériques complexes de dimensions « pas trop petites ». Alors les énoncés (A) et (B) sont vérifiés si G est un groupe de Lie (complexe) résoluble connexe; les énoncés (C) et (D) le sont si la fibre de E est un groupe résoluble connexe et le groupe structural de E un groupe résoluble connexe d'automorphismes de la fibre.

3° Le dernier numéro du chapitre III (n° **35**) donne la classification complète des espaces fibrés analytiques dont la base est un produit d'espaces projectifs complexes (de dimensions arbitraires) et dont le groupe structural est le groupe des similitudes planes; cette classification montre que :

a. Il existe des variétés X telles que (A) soit vérifié chaque fois que G est abélien (et par suite chaque fois que G est nilpotent, th. III.5) sans l'être chaque fois que G est résoluble;

b. Il se peut qu'il existe sur X à la fois des espaces fibrés analytiques de groupe structural G caractérisés (du point de vue de leur fibration analytique) par leurs seuls invariants topologiques, et des espaces fibrés analytiques de groupe structural G analytiquement distincts, mais topologiquement équivalents.

On trouvera de plus au chapitre II quelques résultats concernant les espaces fibrés non nécessairement munis d'une structure analytique. Le problème de la *restriction* du groupe structural est traité aux n^{os} **16** et **17** : les résultats de M. C. Ehresmann [12] sont retrouvés et précisés, une classification complète des solutions étant donnée; on en trouvera des applications au chapitre III [restriction du groupe linéaire complexe au groupe unimodulaire (n° **22**) et au groupe orthogonal complexe ou au groupe symplectique (n° **23**)]. Le problème de « l'*extension* » du groupe structural [au sens des extensions de groupe, *cf.* énoncé (E)], posé par M. C. Ehresmann [12 *a*], et qui avait conduit ce dernier à définir une infinité d'obstructions, est traité au n° **18** dans le cas où l'extension est à *noyau abélien* : on définit un seul invariant, dont la nullité est la condition nécessaire et suffisante de possibilité de l'extension.

Le chapitre I est de caractère exclusivement technique : il est destiné à étendre, dans la mesure du possible, la notion de cohomologie d'un espace à valeurs dans un faisceau au cas où ce faisceau n'est pas abélien. On obtient ainsi une suite exacte à cinq, six ou sept termes selon les hypothèses faites sur les faisceaux; cette suite exacte est l'outil à peu près unique utilisé pour établir les résultats figurant dans ce travail. Elle est commodément utilisable grâce à la proposition 4.2 qui permet en quelque sorte de doter d'un élément neutre arbitraire le premier ensemble de cohomologie d'un espace. Cette technique, qui nous a été indispensable pour établir en 1952 les résultats résumés dans [13] a été retrouvée indépendamment par M. P. Dedecker [8] et M. A. Grothendieck [18].

Les principaux résultats de ce travail ont été annoncés dans trois Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ([13], [14], [15]).

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à MM. H. Cartan et J.-P. Serre

sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour; les conseils de M. H. CARTAN ne m'ont jamais fait défaut, et je lui suis redevable de nombreuses améliorations de rédaction (en particulier les n^{os} 30 et 31). Que M. LERAY, dont les encouragements m'ont été si utiles, et qui a bien voulu me faire l'honneur de présider mon jury, veuille bien trouver ici l'expression de toute ma gratitude. Je remercie également M. DIXMIER qui a accepté de me proposer un sujet de seconde thèse et de faire partie du jury.

CHAPITRE I.

SUITE EXACTE DE COHOMOLOGIE.

1. Groupe d'opérateurs. — Dans tout ce travail, nous dirons qu'un *groupe G opère* (par exemple *à gauche*) dans un *ensemble E* s'il existe une application $(g, x) \to g.x$ de $G \times E$ dans E telle que

(1) $\quad g'.(g.x) = (g'g).x \quad$ quels que soient g, $g' \in G$ et $x \in E$;

(2) $\quad e.x = x \quad$ pour tout $x \in E$, si e est l'élément neutre de G.

Si l'ensemble E est muni d'une structure algébrique (par exemple une structure de groupe), l'expression « *G opère sur le groupe E* » signifiera, de façon plus précise, que pour chaque $g \in G$ l'application partielle $x \to g.x$ est un homomorphisme de E dans E; c'est donc un *automorphisme* de E.

Si G est un groupe topologique, E un espace topologique, l'expression « *G opère sur l'espace E* » signifiera, de façon plus précise, que l'application $(g, x) \to g.x$ de l'espace-produit $G \times E$ dans E est *continue*; l'application partielle $x \to g.x$ est donc, pour chaque $g \in G$ un *homéomorphisme* de E.

Si G et E sont des groupes de Lie, l'expression « *G opère dans le groupe de Lie E* » signifiera que G opère sur le groupe E de manière que $g.x$ soit une fonction *analytique* des deux variables g et x [ou, ce qui revient au même, de manière que $(g, x) \to g.x$ soit une application analytique]. Nous emploierons aussi, avec le même sens, l'expression « *G opère analytiquement dans le groupe E* ». L'application partielle $x \to g.x$ est donc, pour chaque $g \in G$, un automorphisme de la structure de groupe de Lie de E.

Le lecteur précisera de façon analogue les hypothèses sous-entendues par l'expression « *G opère sur le groupe topologique E* », ou « *G opère continûment sur le groupe E* », et le sens qu'il convient d'y attacher.

EXEMPLE. — Soient B un groupe, A un sous-groupe abélien distingué de B, et $C = B/A$ le groupe-quotient. Il est classique que, B opérant dans le groupe A par les automorphismes intérieurs de sorte que les éléments de A opèrent trivialement, C opère sur le groupe A. Si B est un groupe topologique (resp. de Lie) et A *fermé*, C opère *continûment* (resp. *analytiquement*) sur le groupe A.

2. Faisceaux. — Soit X un espace topologique. Un *faisceau d'ensembles* sur X est constitué par :

1° Une fonction $x \to F_x$ qui fait correspondre à tout $x \in X$ un ensemble non vide F_x.

2° Une topologie sur l'ensemble F, somme des ensembles F_x, satisfaisant à l'axiome (I) ci-dessous.

Si f est un élément de F_x, nous poserons $\pi(f) = x$; l'application π est appelée la *projection* de F sur X. Avec cette notation, l'axiome (I) s'énonce :

(I) *Pour tout $f \in F$, il existe un voisinage V de f et un voisinage U de $\pi(f)$ tel que la restriction de π à V soit un homéomorphisme de V sur U.* (*Autrement dit, π doit être un homéomorphisme local.*)

On notera que le sous-espace F_x de F a donc la topologie discrète. Il sera parfois utile de mettre sur F une topologie moins fine que sa topologie de faisceau; on prendra soin de ne pas confondre le faisceau F avec ce nouvel espace topologique.

Sections. — On appelle *section* d'un faisceau F au-dessus d'une partie Y de X une application *continue* $s : Y \to F$ telle que $\pi \circ s = 1$.

Nous renvoyons à la littérature ([2 *a*], [19], [22]) pour l'étude des sections. Notons seulement :

Proposition 2.1. — *Si deux sections de F au-dessus d'un voisinage de $x \in X$ coïncident au point x, elles coïncident en tout point assez voisin de x.*

Préfaisceau ([19], [22]). — On appelle *préfaisceau* sur l'espace topologique X la donnée, pour tout ouvert U de X, d'un ensemble F_U, associée à la donnée, pour tout couple d'ouverts (U, V) de X tels que $U \supset V$, d'une application φ_{VU} de F_U dans F_V de sorte que soit satisfaite la condition de transitivité

$$\varphi_{WV} \circ \varphi_{VU} = \varphi_{WU} \qquad (\text{si } U \supset V \supset W).$$

Un préfaisceau définit classiquement un faisceau F : F_x est la limite inductive des F_U suivant l'ordonné filtrant des voisinages ouverts de x, la topologie de F étant engendrée par les ensembles ouverts $U(f)$, où $U(f)$ est la réunion, pour tout x dans un ouvert arbitraire U de X, des images canoniques f_x dans F_x d'un élément arbitraire f de F_U.

Exemple. — Soit E un espace fibré (en un sens parfaitement arbitraire) de base X; on prend pour F_U l'ensemble des sections (continues) de E au-dessus de l'ouvert U de X. Le faisceau associé F est le faisceau des *germes de sections* (continues) de E (φ_{VU} est défini par la restriction à V d'une section au-dessus de U).

Si E est un espace fibré analytique [1], et si l'on prend au lieu des sections

[1] *Voir* une définition, chap. III, n° 19.

continues au-dessus de U seulement les sections analytiques, on obtient le faisceau des *germes de sections analytiques* de E.

Si E est un espace fibré trivial, isomorphe au produit $X \times Y$, le faisceau F s'identifie au faisceau des germes d'applications (continues) de X dans Y.

Produit diagonal. — Soient F et F' deux faisceaux sur le même espace X. Le sous-espace $F_\vee F'$ de $F \times F'$ formé des couples (f, f') tels que $\pi(f) = \pi(f')$ est trivialement muni d'une structure de faisceau [on pose $(F_\vee F')_x = F_x \times F'_x$] : c'est le *produit diagonal*, ou *produit fibré* (²) des faisceaux F et F'. On définit de même le produit diagonal de plusieurs faisceaux; il est associatif.

Faisceau de groupes. — Soit F un faisceau sur l'espace topologique X.

DÉFINITION. — On dit que F est un faisceau de groupes si tous les F_x sont des groupes, et si, outre l'axiome (I), est vérifié l'axiome suivant :

(II) *L'application $f \to f^{-1}$ est une application continue de F dans F, et l'application $(f, g) \to fg$ est une application continue de $F_\vee F$ dans F.*

Plus généralement, considérons un faisceau d'ensembles F et des faisceaux d'ensembles $A, A', \ldots$, sur le même espace X, tels que tous les F_x aient des structures algébriques de même espèce, définies par une ou plusieurs lois de composition internes, et une ou plusieurs lois de composition externes, les domaines d'opérateurs pour les lois externes de F_x étant A_x, A'_x, ... Nous dirons que F est un faisceau ayant la structure algébrique de l'espèce envisagée si l'axiome suivant est vérifié :

(II') *Les applications de $F_\vee F$, $A_\vee A'_\vee F$, et, éventuellement, F dans F définies par les lois internes et externes de F_x, et, éventuellement, la symétrisation de certaines lois internes de F_x, sont continues.*

Dans ce cas, l'ensemble des sections de F au-dessus d'une partie Y de X est muni d'une structure de même espèce que F, les domaines d'opérateurs étant les ensembles de sections de A, A', ..., au-dessus de Y. Inversement, donnons-nous pour tout ouvert U de X des ensembles F_U, A_U, ..., les F_U étant munis de structures algébriques de même espèce, les domaines d'opérateurs pour les lois externes de F_U étant les A_U, etc., et pour chaque ouvert $V \subset U$ un homomorphisme (au sens des lois internes) φ_{VU} de F_U dans F_V et une application φ'_{VU} de A_U dans A_V satisfaisant, outre les conditions de transitivité évidentes, à la relation

$$\varphi_{VU}(af) = \varphi'_{VU}(a)\, \varphi_{VU}(f) \qquad (a \in A_U, f \in F_U).$$

(²) La notion de produit diagonal vaut évidemment pour d'autres structures que celles de faisceaux; nous l'utiliserons sans autre définition au chapitre II (*cf.* en particulier n° 10.2).

Alors les F_U (resp. les A_U) définissent, par passage à la limite inductive un faisceau F (resp. A, ...), qui est muni d'une structure algébrique de l'espèce envisagée.

Exemples. — On a ainsi les notions de faisceau de groupes abéliens, d'anneaux, de modules sur un faisceau, d'espaces vectoriels sur un faisceau de corps; de faisceau de groupes opérant sur un faisceau d'ensembles ou sur un faisceau de groupe (*cf.* n° 1).

Homomorphismes. — Soient F et G deux faisceaux sur le même espace X. Un *homomorphisme* de F dans G est la donnée, pour tout $x \in X$, d'une application $\varphi_x : F_x \to G_x$ de telle sorte que l'application φ de F dans G définie par les φ_x soit *continue*. Cette condition revient à dire que φ transforme toute section $s : x \to s(x)$ de F au-dessus d'un ouvert U de X en une application $x \to \varphi_x(s(x))$ qui est une *section* de G au-dessus de U.

On notera que l'axiome (II′) revient à dire que les applications de $F_\vee F$, $A_\vee A'_\vee F$, et éventuellement F, dans F définies par les lois de composition de chaque F_x constituent des homomorphismes de faisceaux.

Si F et G ont des structures algébriques *homologues* (les faisceaux d'opérateurs étant donc les mêmes pour F et G), on dira que φ est un *homomorphisme* (au sens de la structure algébrique considérée) si de plus φ_x est, pour tout $x \in X$, une *représentation* de F_x dans G_x.

Ici encore nous renvoyons le lecteur à la littérature pour de plus amples détails (homomorphismes de deux faisceaux définis par des systèmes d'ensembles : la théorie classique des faisceaux de groupes abéliens s'étend d'elle-même).

Sous-faisceaux. — Soient F un faisceau d'ensembles, G un sous-espace de F, $G_x = G \cap F_x$; pour que les G_x et la topologie induite par F sur G fassent de F un faisceau sur X, il faut et il suffit que G soit *ouvert* dans F. Si cette condition est réalisée, nous dirons que G est un *sous-faisceau* de F. Si F est muni d'une structure algébrique, nous dirons que G est un sous-faisceau du faisceau F muni de sa structure si de plus chaque G_x est *stable* pour toutes les lois (externes et internes) définissant cette structure, et si la structure induite sur chaque G_x est homologue à celle de F_x. L'injection de G dans F est un homomorphisme de faisceaux.

Faisceau-quotient. — Soit F un faisceau d'ensembles sur X. Pour chaque $x \in X$, donnons-nous une relation d'équivalence R_x dans F_x de telle sorte que la relation d'équivalence R définie dans F par l'ensemble des R_x soit *ouverte* [ceci revient à dire que si deux sections s et s' de F au-dessus d'un voisinage U de x sont telles que $s(x)$ et $s'(x)$ sont congrus $\bmod R_x$, alors $s(y)$ et $s'(y)$ sont congrus $\bmod R_y$ pour tout y assez voisin de x]. Alors l'espace-quotient $G = F/R$ a une structure de faisceau, et l'application canonique de F sur G est un homomorphisme.

Exemples. — Soit G un sous-faisceau du *faisceau de groupes* F. La relation $f^{-1}f' \in G_x$ est une relation d'équivalence R_x dans F_x, et la relation R définie dans F par les R_x est ouverte. Le faisceau-quotient, noté F/G, est un faisceau d'*espaces homogènes* sur lequel F *opère* par les translations à gauche; F/G a une section privilégiée : celle qui à tout $x \in X$ fait correspondre la classe $G_x \in (F/G)_x$. Inversement, un faisceau A, muni d'une section e au-dessus de X tout entier, sur lequel opère transitivement un faisceau de groupes F est canoniquement isomorphe à un faisceau d'espaces homogènes.

Plus généralement, soit F un faisceau d'ensembles, G un faisceau *de groupes* opérant *à droite* dans F; la relation : « f et f' sont transformés l'un de l'autre par un élément de G » est une relation d'équivalence dans F qui permet de définir le faisceau-quotient F/G des classes d'intransitivité du faisceau G opérant dans F.

3. Ensembles de cohomologie ([19], [22]). — 1. Soit F un faisceau d'ensembles sur un espace topologique X. Soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement *ouvert* de X. Nous noterons comme d'habitude U_S l'intersection $\bigcap_{i\in S} U_i$. Par analogie avec le cas des faisceaux abéliens, nous appellerons p-cochaîne de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans F une fonction qui à tout élément S de I^{p+1} tel que U_S ne soit pas vide fait correspondre une section f_S de F au-dessus de U_S. Nous noterons $C^p(\mathfrak{U}, F)$ l'ensemble des p-cochaînes de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans F. Il se peut, si $\mathfrak{U}$ n'est pas suffisamment fin, que $C^p(\mathfrak{U}, F)$ soit vide; mais, X et F étant donnés, il résulte de l'axiome (I) qu'on peut choisir un recouvrement $\mathfrak{U}$ tel que $C^p(\mathfrak{U}, F) \neq \emptyset$.

Soit $\mathfrak{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ un recouvrement plus fin que $\mathfrak{U}$. Il existe donc par définition une application $t : \Omega \to I$ telle que $V_\alpha \subset U_{t(\alpha)}$ pour tout α. Cette application définit une application t^* de $C^p(\mathfrak{U}, F)$ dans $C^p(\mathfrak{V}, F)$ pour tout entier $p \geqq 0$ comme suit : notons encore t, par abus de langage, l'application de Ω^{p+1} dans I^{p+1} définie par t, et soit $f : S \to f_S$ une p-cochaîne de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans F; alors t^*f associe à $\Sigma \in \Omega^{p+1}$ tel que $V_\Sigma \neq \emptyset$ la restriction à V_Σ de $f_{t(\Sigma)}$.

2. *Cohomologie de dimension* 0. — Soit F un faisceau d'*ensembles* sur X, et $\mathfrak{U}$ un recouvrement ouvert de X. Nous dirons qu'une 0-cochaîne $f : i \to f_i$ de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans F est un 0-*cocycle* si les restrictions à U_{ij} des sections f_i et f_j sont identiques. On note $H^0(\mathfrak{U}, F)$ l'ensemble des 0-cocycles de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans F. Si $\mathfrak{V}$ est plus fin que $\mathfrak{U}$, la restriction à $H^0(\mathfrak{U}, F)$ de l'application t^* définie ci-dessus est une *bijection* de $H^0(\mathfrak{U}, F)$ sur $H^0(\mathfrak{V}, F)$ (du reste indépendante du choix de t) compatible avec l'identification naturelle entre un élément de $H^0(\mathfrak{U}, F)$ et une section de F au-dessus de X tout entier.

Ces considérations nous conduisent à adopter la définition :

DÉFINITION 3.1. — *On appelle* $0^{ième}$*-ensemble de cohomologie de* X *à valeurs dans* F, *et l'on note* $H^0(X, F)$, *l'ensemble des sections de* F *au-dessus de* X. *Plus généralement, pour tout* **ouvert** U *de* X, *on notera* $H^0(U, F)$ *l'ensemble des sections de* F *au-dessus de* U.

Il est clair que $H^0(U, F)$ a une structure algébrique de même espèce que celle de F.

Si le faisceau de *groupes* G *opère* dans le faisceau d'ensembles F, alors le *groupe* $H^0(X, G)$ *opère dans le faisceau* F : l'élément s de $H^0(X, G)$ définit un *automorphisme* de F par la formule $f \to s(x).f (f \in F_x)$. De là résulte en particulier que le groupe $H^0(X, G)$ opère dans l'ensemble $H^0(X, F)$. De même, si G *opère* dans le faisceau de *groupes* F, $H^0(X, G)$ *opère dans le groupe* $H^0(X, F)$ (au sens du n° 1).

Un homomorphisme φ d'un faisceau F dans un faisceau G définit une application φ^* de $H^0(X, F)$ dans $H^0(X, G)$, qui est une représentation si F et G sont des faisceaux munis de structures algébriques homologues.

3. *Cohomologie de dimension* 1. — Soit F un faisceau de *groupes* sur X, $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. Nous dirons qu'une 1-cochaîne $f : (i, j) \to f_{ij}$ de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans F est un 1-cocycle si l'on a

$$(3.1) \qquad f_{ij}(x) f_{jk}(x) = f_{ik}(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ de } U_{ijk}.$$

Deux cochaînes $\{f_{ij}\}$, $\{g_{ij}\}$ seront dites *cohomologues* s'il existe une 0-cochaîne $h = \{h_i\}$ de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans F telle que

$$(3.2) \qquad f_{ij}(x) = h_i^{-1}(x) g_{ij}(x) h_j(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ de } U_{ij}.$$

La cohomologie est une relation d'*équivalence* dans $C^1(\mathfrak{U}, F)$ respectant l'ensemble des cocycles. L'ensemble $H^1(\mathfrak{U}, F)$ des classes de cocycles de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans F qui sont cohomologues s'appelle le *premier ensemble de cohomologie du recouvrement* $\mathfrak{U}$ *à valeurs dans* F. Cet ensemble n'a de structure de groupe naturelle que si F est un faisceau de groupes *abéliens*, auquel cas c'est le premier groupe de cohomologie classique de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans le faisceau abélien F. Il a cependant un élément privilégié, que nous conviendrons d'appeler *l'élément neutre* de $H^1(\mathfrak{U}, F)$, savoir la classe du cocycle

$$f_{ij}(x) = e_x \qquad \text{pour tout } x \text{ de } U_{ij},$$

où e_x est l'élément neutre de F_x [l'application $x \to e_x$ d'un ouvert U de X dans F est bien continue en vertu de l'axiome (II)].

REMARQUE. — On notera qu'un 1-cocycle est automatiquement *alterné* [i. e., on a $f_{ij}(x) f_{ji}(x) = e_x$ pour tout x de U_{ij}] : il suffit pour le voir de faire dans la relation (3.1) $i = j = k$, ce qui entraîne $f_{ii}(x) = e_x$ dans U_i, puis de faire $k = i$.

Soit $\mathfrak{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ un recouvrement plus fin que $\mathfrak{U}$, et t une application de Ω dans I telle que $V_\alpha \subset U_{t(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \Omega$. L'image par t^* d'un cocycle est un cocycle, et les images de deux cochaînes cohomologues sont deux cochaînes cohomologues. t^* définit donc une application $\tilde{t}$ de $H^1(\mathcal{U}, F)$ dans $H^1(\mathcal{V}, F)$, qui respecte l'élément neutre. En fait $\tilde{t}$ ne dépend pas de t, mais seulement des recouvrements $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. En effet, supposons qu'il existe une autre application t' de Ω dans I telle que $V_\alpha \subset U_{t'(\alpha)}$. A toute 1-cochaîne $f = \{f_{ij}\}$ de $\mathcal{U}$ sont ainsi associées les 1-cochaînes t^*f et t'^*f de $\mathcal{V}$ et la 0-cochaîne $h = \{h_\alpha\}$ de $\mathcal{V}$ définie par

$$h_\alpha = \text{restriction à } V_\alpha \text{ de } f_{t(\alpha)t'(\alpha)}.$$

Si maintenant f est un 1-cocycle, comme il est alterné, on a vu (3.1) :

$$(t'^*f)_{\alpha\beta} = h_\alpha^{-1}(t^*f)_{\alpha\beta}\, h_\beta$$

de sorte que t^*f et t'^*f sont cohomologues.

En résumé, si $\mathcal{V}$ est un recouvrement ouvert plus fin que $\mathcal{U}$, il existe une application $\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ de $H^1(\mathcal{U}, F)$ dans $H^1(\mathcal{V}, F)$ respectant l'élément neutre. Si $\mathcal{W}$ est un recouvrement plus fin que $\mathcal{V}$, il est clair que

$$\sigma(\mathcal{W}, \mathcal{V}) \circ \sigma(\mathcal{V}, \mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{W}, \mathcal{U});$$

enfin $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ est l'identité; si donc $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des recouvrements ouverts *équivalents* (i. e., si chacun d'eux est plus fin que l'autre), $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ et $\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ sont des isomorphismes réciproques, de sorte que $H^1(\mathcal{U}, F)$ ne dépend que de la classe d'équivalence du recouvrement $\mathcal{U}$.

REMARQUE ([18], [19]). — Il sera utile de noter le :

LEMME 3.1. — *L'application $\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ est injective.*

En effet, soient f et g deux cocycles de $\mathcal{U}$. Supposons qu'il existe une 0-cochaîne k de $\mathcal{V}$ telle que

$$(t^*f)_{\alpha\beta} = k_\alpha^{-1}(t^*g)_{\alpha\beta}\, k_\beta. \tag{3.3}$$

Pour tout $x \in U_i$, choisissons un α tel que $x \in V_\alpha$, et posons

$$h_i(x) = g_{it(\alpha)}(x)\, k_\alpha(x)\, f_{t(\alpha)i}(x).$$

Vu (3.1) et (3.3), $h_i(x)$ ne dépend pas de α, donc est une section de F au-dessus de U_i; vu (3.1), la 0-cochaîne $h = \{h_i\}$ satisfait à (3.2).

C. Q. F. D.

DÉFINITION 3.2. — *On appelle premier ensemble de cohomologie de l'espace X à valeurs dans le faisceau de groupes F, et l'on note $H^1(X, F)$, la limite inductive des ensembles $H^1(\mathcal{U}, F)$ définie suivant l'ordonné filtrant des classes d'équivalence de recouvrements ouverts de X au moyen des applications $\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{U})$.*

Cet ensemble n'a de structure de groupe naturelle que si F est un faisceau de groupes abéliens (auquel cas c'est le classique premier groupe de cohomologie de X à valeurs dans F), mais il est pourvu d'un élément neutre e.

Si φ est un *homomorphisme* du faisceau de groupes F dans le faisceau de groupes G, l'homomorphisme de $H^0(U, F)$ dans $H^0(U, G)$ induit par définition une application de $C^1(\mathcal{U}, F)$ dans $C^1(\mathcal{V}, F)$, qui transforme un cocycle en un cocycle et respecte la cohomologie; comme elle commute évidemment avec les $\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{U})$, φ définit ainsi une application φ^* de $H^1(X, F)$ dans $H^1(X, G)$ respectant les éléments neutres.

Par suite, si le faisceau de groupe G opère sur le faisceau de groupe F, chaque section de G définit une application de $H^1(X, F)$ en lui-même : $H^0(X, G)$ opère dans $H^1(X, F)$.

4. **Recollement de faisceaux** (3). — **1.** Soit F un faisceau de *groupes* opérant (par exemple à gauche) sur un faisceau d'*ensembles* A. Soit $z = \{z_{ij}\}$ un 1-cocycle d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de X à valeurs dans F. z et les opérations de F dans A permettent de définir un nouveau faisceau A^z, isomorphe à A sur les ensembles de $\mathcal{U}$, de la façon suivante.

Soit $A_i = \pi^{-1}(U_i)$ le faisceau *induit* par A sur U_i. Dans l'espace-*somme* $\overline{A}$ des A_i introduisons la relation d'équivalence (R) suivante :

$$(R)\; a_i \equiv a_j \Longleftrightarrow [\pi(a_i) = \pi(a_j) = x \text{ et } a_i = z_{ij}(x).a_j] \qquad (x \in U_{ij},\; a_k \in A_k).$$

On vérifie sans peine que (R) est bien une relation d'équivalence, puisque z est un 1-cocycle alterné et que F opère à gauche dans A. La restriction Φ_i à A_i de la projection canonique de $\overline{A}$ sur son quotient $\overline{A}/(R) = A^z$ étant biunivoque et bicontinue, il est clair que A^z est muni d'une structure de faisceau sur X telle que Φ_i soit un isomorphisme de A_i sur le faisceau $(A^z)_i$ induit par A^z sur U_i, et $\Phi_i = \Phi_j \circ z_{ji}$.

On notera cependant que si A est un faisceau de *groupes*, A^z n'est un faisceau de groupes que si l'on postule que F *opère sur le faisceau de groupes* A (et non seulement sur le faisceau d'ensembles sous-jacent); alors Φ_i est un isomorphisme au sens des faisceaux de groupes :

$$\Phi_i(ab) = \Phi_i(a)\,\Phi_i(b) \qquad (a \text{ et } b \in A_i).$$

2. Soit z' un autre cocycle du même recouvrement $\mathcal{U}$ de X, à valeurs dans F. Supposons que z' et z soient cohomologues, et soit k une telle cohomologie : k consiste en la donnée d'une 0-cochaîne $\{z_i\}$ de $\mathcal{U}$ à valeurs dans F telle que $z_{ij} = z_i^{-1} z'_{ij} z_j$. Cette cohomologie détermine un isomorphisme $w(z, z'; k)$ du faisceau A^z sur le faisceau $A^{z'}$ comme suit : soit Φ'_i l'isomor-

(3) Cette notion est due à J.-P. SERRE ([3], exposé 20, et [22]).

phisme canonique de A_i dans $A^{z'}$; si $a \in A^z$ est la classe modulo R de $a_i \in A_i$ et si $x = \pi(a_i) \in U_i$, on pose

$$(4.1) \qquad w(z, z'; k)a = \Phi'_i(z_i(x).\Phi_i^{-1}(a)).$$

$a' = w(z, z'; k)a$ ne dépend de l'indice i qu'en apparence, car d'après les définitions de R et R' :

$$\begin{aligned}\Phi'_j(z_j.\Phi_j^{-1}(a)) &= \Phi'_i(z'_{ij}z_j.\Phi_j^{-1}\Phi_i\Phi_i^{-1}(a))\\ &= \Phi'_i(z'_{ij}z_jz_{ji}.\Phi_i^{-1}(a)) = \Phi'_i(z_i(x).\Phi_i^{-1}(a)).\end{aligned}$$

$w(z, z'; k)$ est un homomorphisme de faisceaux, car $z_i(x).a_i(x)$ est une section de A_i en même temps que $a_i(x)$, et lorsque A^z est un faisceau de groupes, c'est que par hypothèse F_x opère sur le groupe A_x. De plus si k' est une cohomologie entre le cocycle z' et un cocycle z'' du même recouvrement, on a évidemment la relation de transitivité

$$w(z', z''; k') \circ w(z, z'; k) = w(z, z''; k' \circ k),$$

ce qui, puisque $w(z, z; e)$ est l'identité *lorsque e est associé à la* o-*cochaîne-unité de F*, implique en particulier que $w(z, z'; k)$ est un *isomorphisme* du faisceau A^z sur le faisceau $A^{z'}$.

De façon analogue, si $\mathfrak{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ est un recouvrement plus fin que $\mathfrak{U}$, à toute application $t : \Omega \to I$ telle que $V_\alpha \subset U_{t(\alpha)}$ est associé un isomorphisme $\mathbf{t}$ de $A^{t^\star z}$ sur A^z, dont la restriction à $(A^{t^\star z})_\alpha$ est défini par

$$(4.2) \qquad \mathbf{t} = \Phi_{t(\alpha)}\Phi_\alpha^{-1},$$

formule où α ne figure qu'en apparence, puisque en notant encore z_{ij} l'automorphisme de $A_i \cap A_j$ que définit en opérant sur A la section z_{ij} de F au-dessus de U_{ij} :

$$\Phi_{t(\beta)}^{-1} \circ \Phi_{t(\alpha)} = z_{t(\beta)\,t(\alpha)}; \qquad \Phi_\beta^{-1} \circ \Phi_\alpha = (t^\star z)_{\beta\alpha} = z_{t(\beta)\,t(\alpha)}.$$

Ces isomorphismes $\mathbf{t}$ satisfont naturellement à des formules de transitivité évidentes; en particulier, si t' est une autre application de Ω dans I telle que $V_\alpha \subset U_{t'(\alpha)}$ et k la cohomologie faisant passer de $t^\star(z)$ à $t'^\star(z)$ telle qu'elle a été décrite au n° 5.3, on a

$$(4.3) \qquad \mathbf{t}'^{-1} \circ \mathbf{t} = w(t^\star(z), t'^\star(z); k).$$

Ainsi, à deux cocycles quelconques z, z' de deux recouvrements ouverts arbitraires, et qui ont même image dans $H^1(X, F)$, est associée une collection $W(z, z')$ d'isomorphismes de A^z sur $A^{z'}$; et si z, z', z'' ont même image dans $H^1(X, F)$, pour tout $\sigma \in W(z, z')$ et tout $\tau \in W(z', z'')$, $\tau \circ \sigma$ est un élément de $W(z, z'')$.

3. Soit F (resp. F') un faisceau de groupes opérant sur le faisceau

d'ensembles A (resp. A') et φ (resp. ψ) un homomorphisme du faisceau A dans le faisceau A' (resp. du faisceau de groupes F dans F'). Supposons que φ et ψ soient compatibles avec les opérations de F sur A et de F' sur A' [i. e., on a $\varphi(f.a) = \psi(f).\varphi(a)$ quels que soient $a \in A$ et $f \in F$]. Alors φ définit un homomorphisme φ_0 de A^z dans $A'^{\psi(z)}$, compatible avec les isomorphismes de $H^1(z, z')$ définis ci-dessus : avec des notations évidentes, φ_0 coïncide au-dessus de $(A^z)_i$ avec $\Phi'_i \varphi \Phi_i^{-1}$, homomorphisme qui ne dépend de i qu'en apparence, comme le lecteur le vérifiera aisément.

4. *Faisceaux principaux.* — Un exemple important est fourni par la notion de faisceau F-principal.

DÉFINITION. — *F étant un faisceau de* **groupes** *sur l'espace X, on dit que le faisceau A sur X est F-principal si A est localement isomorphe au faisceau d'ensembles à opérateurs F, F opérant sur lui-même par les translations à droite.*

Conformément aux définitions générales, A est donc un faisceau d'ensembles sur lequel le faisceau de groupes F opère à droite, et il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X tel que pour tout i on ait un isomorphisme Φ_i du faisceau F_i sur le faisceau A_i, cet isomorphisme n'étant pas multiplicatif, mais vérifiant

$$(4.4) \qquad \Phi_i(ff') = \Phi_i(f)f' \qquad (f \text{ et } f' \in F_x,\ x \in U_i).$$

Posons, en désignant par e_x l'élément neutre de F_x :

$$(4.5) \qquad f_{ij}(x) = \Phi_i^{-1}(\Phi_j(e_x)) \qquad (x \in U_{ij}).$$

La collection des applications $f_{ij} : U_{ij} \to F$ constitue un *1-cocycle* f de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans F, car d'après (4.4) :

$$\begin{aligned}\Phi_i((f_{ij}(x))\,(f_{jk}(x))) &= \Phi_i(f_{ij}(x))\,f_{jk}(x)\\ &= \Phi_j(e_x)f_{jk}(x) = \Phi_j(e_x f_{jk}(x)) = \Phi_j(f_{jk}(x)) = \Phi_k(e_x).\end{aligned}$$

De plus, si $x \in U_{ij}$, pour que z et z' de F_x vérifient $\Phi_i(z) = \Phi_j(z')$, il faut et il suffit que

$$z = \Phi_i^{-1}(\Phi_j(e_x z')) = f_{ij}(x)\,z',$$

de sorte que A s'identifie au faisceau F^f défini au n° 4.1.

Inversement, soit F un faisceau de *groupes* sur X, f un 1-cocycle d'un recouvrement $\mathfrak{U}$ de X à valeurs dans F. Faisons opérer F sur lui-même par les translations *à gauche*, et formons le faisceau F^f : F opère encore *à droite* sur F^f, et fait de ce dernier *un faisceau F-principal;* et si f et f' sont deux cocycles ayant même image dans $H^1(X, F)$, (4.1) et (4.2) joints à (4.4) montrent que F^f et $F^{f'}$ sont *F-isomorphes.*

Réciproquement, soient A et B deux faisceaux F-principaux, F-isomorphes : ils sont de la forme F^f et $F^{f'}$, et, d'après ce qui vient d'être dit, on peut supposer (quitte à remplacer ces faisceaux par des faisceaux F-isomorphes) que f et f' sont des cocycles du même recouvrement $\mathfrak{U}$. Soit θ l'isomorphisme $A \rightarrow B$; soit $a \in A_i$; posons

$$b = \theta(a), \qquad x = \pi(a) = \pi(b), \qquad a_i = \Phi_i^{-1}(a), \qquad b_i = \Phi_i'^{-1}(b)$$

et

$$h_i(x) = a_i b_i^{-1} \in F_x. \tag{4.6}$$

Il résulte du fait que F opère transitivement sur chaque A_x et de (4.4) que $h_i(x)$ ne dépend pas du choix de a dans A_x, et définit par suite une *section* de F au-dessus de U_i; de plus, si $x \in U_{ij}$, le même choix de a montre que

$$h_j(x) = a_j b_j^{-1} = f_{ji}(x) a_i b_i^{-1} f'_{ij}(x),$$

soit

$$f'_{ij} = h_i^{-1} f_{ij} h_j.$$

Nous avons donc établi :

Proposition 4.1. — *Soit F un faisceau de groupes sur X. Les classes de faisceaux F-principaux qui sont F-isomorphes correspondent biunivoquement aux éléments de $H^1(X, F)$.*

5. *Les automorphismes intérieurs.*

Lorsque le faisceau de groupes A opère sur lui-même par les automorphismes intérieurs, on a le résultat suivant :

Proposition 4.2. — *Soit A un faisceau de groupes sur l'espace X, opérant sur lui-même par les automorphismes intérieurs. Tout 1-cocycle a à valeurs dans A définit sans ambiguïté une bijection i_a de $H^1(X, A^a)$ sur $H^1(X, A)$ envoyant l'élément neutre de $H^1(X, A^a)$ sur la classe de cohomologie de a; à deux cocycles quelconques a et a' est donc associée une bijection $i(a, a') = (i_{a'})^{-1} i_a$ de $H^1(X, A^a)$ sur $H^1(X, A^{a'})$, et ces bijections satisfont à une condition de transitivité évidente. De plus, pour que $i(a, a')$ respecte les éléments neutres, il faut et il suffit que a et a' aient la même image dans $H^1(X, A)$: $i(a, a')$ est alors l'isomorphisme induit par l'un quelconque des éléments de $W(a, a')$.*

a. Soit $a = \{a_{ij}\}$ un 1-cocycle à valeurs dans A d'un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$. Désignons par a_{ij}^* l'automorphisme de $A_i \cap A_j$ que détermine la section a_{ij} opérant (à gauche) sur A_{ij} par les automorphismes intérieurs. Soit Φ_i l'isomorphisme de A_i sur $(A^a)_i$. On a donc

$$\Phi_j = \Phi_i \circ a_{ij}^*. \tag{4.7}$$

Nous allons d'abord définir une bijection $i(\mathfrak{U}, a)$ de $H^1(\mathfrak{U}, A^a)$ sur $H^1(\mathfrak{U}, A)$. Soit $\mathbf{b}$ un élément de $H^1(\mathfrak{U}, A^a)$, et soit $b = \{ b_{ij} \}$ un cocycle de sa classe. Posons

$$(4.8) \quad \begin{cases} c_{ij} = \Phi_i^{-1}(b_{ij}) \in H^0(U_{ij}, A), \\ d_{ij} = c_{ij} a_{ij} \in H^0(U_{ij}, A). \end{cases}$$

De (3.1) et (4.7) résulte que la 1-cochaîne $d = \{ d_{ij} \}$ est un cocycle

$$(4.9) \quad \begin{cases} d_{ij}\, d_{jk} = (\Phi_i^{-1}(b_{ij}) a_{ij})\, (a_{ji}^{\star}.(\Phi_i^{-1}(b_{jk})))\, (a_{jk}) \quad \text{dans } U_{ijk}, \\ d_{ij}\, d_{jk} = \Phi_i^{-1}(b_{ij}) a_{ij} a_{ji} (\Phi_i^{-1}(b_{jk})) a_{ij} a_{jk} = \Phi_i^{-1}(b_{ij} b_{jk}) a_{ik} = d_{ik}. \end{cases}$$

La classe $\mathbf{d}$ de d dans $H^1(\mathfrak{U}, A)$ ne dépend que de $\mathbf{b}$. En effet, si $b' = \{ b'_{ij} \}$ est un cocycle cohomologue à b, il existe une 0-cochaîne $\{ b_i \}$ telle que $b'_{ij} = b_i^{-1} b_{ij} b_j$, et en posant $c_i = \Phi_i^{-1}(b_i)$, on a

$$(4.10) \quad \begin{aligned} d'_{ij} &= \Phi_i^{-1}(b_i^{-1}) \Phi_i^{-1}(b_{ij}) \Phi_i^{-1} \Phi_j \Phi_j^{-1}(b_j) a_{ij} \\ &= c_i^{-1} c_{ij} a_{ij}^{\star}.(c_j)\, a_{ij} = c_i^{-1} d_{ij} c_j. \end{aligned}$$

Nous poserons donc

$$i(\mathfrak{U}, a)\mathbf{b} = \mathbf{d}.$$

Il est clair que si b est le cocycle-unité, $\mathbf{d}$ est la classe de cohomologie de a.

Si $d = \{ d_{ij} \}$ est un cocycle de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans A, on vérifie de suite que la 1-cochaîne $b = \{ b_{ij} \}$ de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans A^a définie par

$$b_{ij} = \Phi_i(d_{ij} a_{ij}^{-1})$$

est un cocycle dont la classe de cohomologie a évidemment pour image par $i(\mathfrak{U}, a)$ la classe de d.

Enfin, si b et b' sont deux cocycles de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans A^a tels qu'il existe une 0-cochaîne $\{ c_i \}$ à valeurs dans A vérifiant

$$\Phi_i^{-1}(b_{ij}) a_{ij} = c_i^{-1} \Phi_i^{-1}(b'_{ij}) a_{ij} c_j,$$

on a, en posant $\Phi_i(c_i) = b_i$:

$$\Phi_i^{-1}(b_{ij}) a_{ij} = \Phi_i^{-1}(b_i^{-1} b'_{ij} b_j) a_{ij}.$$

Donc

$$b_{ij} = b_i^{-1} b'_{ij} b_j.$$

On a bien vérifié que $i(\mathfrak{U}, a)$ est une *bijection*.

b. Soit $a' = \{ a'_{ij} \}$ un 1-cocycle de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans A, cohomologue à a; soit k la donnée d'une 0-cochaîne $\{ a_i \}$ telle que $a_{ij} = a_i^{-1} a'_{ij} a_j$, et soit $w^\star$ la bijection de $H^1(\mathfrak{U}, A^a)$ sur $H^1(\mathfrak{U}, A^{a'})$ induite par l'isomorphisme $w(a, a'; k)$ de A^a sur $A^{a'}$. Montrons que $i(\mathfrak{U}, a) = i(\mathfrak{U}, a') \circ w^\star$.

Si $b = \{ b_{ij} \}$ est un cocycle d'une classe $\mathbf{b}$ donnée de $H^1(\mathfrak{U}, A^a)$, $w^\star(b)$

est, d'après (4.1), la classe du cocycle $\Phi'_i(a_i\Phi_i^{-1}(b_{ij})a_i^{-1})$, et par suite $i(\mathcal{U}, a')(w^\star(b))$ celle du cocycle

$$d'_{ij} = a_i\Phi_i^{-1}(b_{ij})a_i^{-1}a'_{ij} = a_i(\Phi_i^{-1}(b_{ij})a_{ij})a_j^{-1} = a_i d_{ij} a_j^{-1}.$$

C. Q. F. D.

c. Soit toujours a un cocycle de $\mathcal{U}$ à valeurs dans A. Pour définir i_a, il suffit de définir des applications convenables $i(\mathcal{V}, a)$ de $H^1(\mathcal{V}, A^a)$ dans $H^1(\mathcal{V}, A)$ pour tous les recouvrements ouverts $\mathcal{V}$ *plus fins* que $\mathcal{U}$.

Avec les notations du n° 4.2, $t^\star(a)$ étant un cocycle de $\mathcal{V}$, $i(\mathcal{V}, t^\star(a))$ est défini; on posera

$$(4.11) \qquad i(\mathcal{V}, a) = i(\mathcal{V}, t^\star(a)) \circ (\mathbf{t}^{-1})^\star.$$

D'après (4.3) et le *b* ci-dessus, $i(\mathcal{V}, a)$ ne dépend pas du choix de t.

d. Il est clair que $i(\mathcal{V}, a)$ est une bijection, envoyant l'élément neutre de $H^1(\mathcal{V}, A^a)$ sur la classe de $t^\star(a)$; enfin si le cocycle a de $\mathcal{U}$ et le cocycle a' de $\mathcal{U}'$ induisent sur un recouvrement $\mathcal{V}$ plus fin que $\mathcal{U}$ et que $\mathcal{U}'$ des cocycles cohomologues, soit w le composé des trois isomorphismes $A^a \to A^{t^\star(a)}$, $w(t(a), t'(a'); k)$, $A^{t'^\star(a')} \to A^{a'}$ (où t, t' et k sont arbitraires) : il résulte de (4.11) et de *b* que

$$i(\mathcal{V}, a) = i(\mathcal{V}, a') \circ w^\star.$$

Par suite, la proposition 4.2 sera visiblement entièrement démontrée si, le cocycle a du recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ étant donné, on établit que, pour tout recouvrement $\mathcal{W}$ plus fin qu'un recouvrement $\mathcal{V}$ lui-même plus fin que $\mathcal{U}$, on a la relation de commutativité

$$(4.12) \qquad i(\mathcal{W}, a) \circ \sigma(\mathcal{W}, \mathcal{V}) = \sigma(\mathcal{W}, \mathcal{V}) \circ i(\mathcal{V}, a),$$

et, vu (4.11), il suffit même de le démontrer lorsque $\mathcal{V} = \mathcal{U}$, comme le montre le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^1(\mathcal{V}, A^a) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\mathcal{V}, A^{t^\star(a)}), \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(I)}"] & H^1(\mathcal{V}, A) \arrow[d] \\
H^1(\mathcal{W}, A^a) \arrow[r] \arrow[dr] & H^1(\mathcal{W}, A^{t^\star(a)}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\mathcal{W}, A) \\
& H^1(\mathcal{W}, A^{(tt')^\star(a)}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où seul le carré (I) n'est peut-être pas commutatif, et où t (resp. t') désigne une application satisfaisant aux conditions habituelles de l'ensemble d'indices de $\mathcal{V}$ (resp. de $\mathcal{W}$) dans celui de $\mathcal{U}$ (resp. de $\mathcal{V}$).

Il reste donc à établir que

$$(4.13) \qquad i(\mathcal{V}, t^\star(a)) \circ (\mathbf{t}^{-1})^\star \circ \sigma(\mathcal{V}, \mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{V}, \mathcal{U}) \circ i(\mathcal{U}, a).$$

Soit $b = \{b_{ij}\}$ un cocycle de $\mathcal{U}$ à valeurs dans A^a; soit $\mathbf{d}$ (resp. $\mathbf{d}'$) l'image dans $H^1(\mathcal{V}, A)$ de la classe de b par l'application figurant au second membre (resp. au premier membre) de (4.13); utilisons pour calculer $\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ l'application t qui figure déjà dans (4.13). Alors $\mathbf{d}$ (resp. $\mathbf{d}'$) est la classe du cocycle $\{d_{\alpha\beta}\}$ (resp. $\{d'_{\alpha\beta}\}$) donné par

$$d_{\alpha\beta} = \Phi_{t(\alpha)}^{-1}(b_{t(\alpha)t(\beta)})\, a_{t(\alpha)t(\beta)},$$
$$d'_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha}^{-1}(\Phi_{\alpha}(\Phi_{t(\alpha)}^{-1}(b_{t(\alpha)t(\beta)})))\, a_{t(\alpha)t(\beta)}.$$

La proposition 4.2 est donc entièrement démontrée.

6. Nous allons donner une interprétation en termes de faisceaux (et non de cohomologie) de la proposition 4.2 ([1]).

Soit G un faisceau *de groupes* opérant à droite dans le faisceau d'ensembles P, et à gauche dans le faisceau d'ensembles F. On notera $P\vee_G F$ le faisceau-quotient du produit diagonal $P\vee F$ par la relation

$$(4.14)\qquad (p, f) \equiv (pg, g^{-1}f) \qquad (p\in P_x, f\in F_x, g\in G_x, x\in X).$$

Plus particulièrement, si P est G-principal (les opérations de G sur P étant celles définies au nº 4.4) le faisceau $P\vee_G F$ est dit *P-associé à F, de faisceau structural G* : si $g(P)$ est un cocycle à valeur dans le faisceau G tel que P soit isomorphe à $G^{g(P)}$, alors $P\vee_G F$ est isomorphe à $F^{g(P)}$.

Dans tout ce numéro, P désignera un faisceau G-principal.

Faisons opérer G *à gauche* dans P par $(g, p)\to pg^{-1}$, et $G\vee G$ à gauche sur le faisceau *d'ensembles* sous-jacent à G par $((g, g'), x)\to gxg'^{-1}$. Alors, si Q est G-principal, $Q\vee P$ est $(G\vee G)$-principal et $Q\vee_G P$ est défini et $(Q\vee P)$-associé à G. En particulier, $P\vee_G P = G_P$ est le faisceau P-associé à G quand on fait opérer G sur lui-même par les automorphismes intérieurs (considérer l'application diagonale de G dans $G\times G$).

Le fait que G_P est un faisceau de groupes est conséquence des considérations plus générales suivantes :

Faisons opérer G à gauche et à droite dans $P\vee P$ en le faisant opérer à gauche dans le premier facteur P et à droite dans le second; il existe un homomorphisme φ de $P\vee P$ dans G, compatible avec les structures de « bimodule » sur G de $P\vee P$ et de G : on pose $\varphi(\Phi_i^{-1}(x), \Phi_i^{-1}(y)) = x^{-1}y$, relation qui ne dépend pas du choix de l'indice i. Grâce à φ, on définit lorsque P, Q, R sont des fibrés G-principaux un homomorphisme

$$(Q\vee_G P)\vee(P\vee_G R)\to Q\vee_G R,$$

qui est composé de l'isomorphisme « d'associativité »

$$(Q\vee_G P)\vee(P\vee_G R)\ \overrightarrow{\leftarrow}\ (Q\vee_G(P\vee P))\vee_G R$$

([1]) Cette interprétation (liée à la notion de faisceau F-principal) m'a été communiquée par H. CARTAN.

[défini car G opère encore à droite dans $Q_{\vee G}(P_{\vee}P)$ grâce aux opérations à droite de G dans $P_{\vee}P$], de l'application φ, et de l'isomorphisme

$$(Q_{\vee_G} G)_{\vee_G} R \rightrightarrows Q_{\vee_G} R.$$

Faisant $P = Q = R$, on retrouve la loi de groupes du faisceau G_P; faisant $R = P$, on voit que G_P *opère* à droite dans $Q_{\vee_G}P$ qui devient de ce fait un faisceau G_P-principal; faisant $Q = P$, $R = G$ (resp. $Q = G$, $R = P$) on voit que G_P opère à gauche (resp. à droite) dans P; l'associativité dans les trois cas provient de ce que, si P, Q, R, S sont G-principaux les deux homomorphismes de $(Q_{\vee_G}P)_{\vee}(P_{\vee_G}R)_{\vee}(R_{\vee_G}S)$ dans $Q_{\vee_G}S$ déduits des deux manières d'associer les trois facteurs du produit sont identiques.

On vérifie de plus que les opérations de G et de G_P dans P commutent; il en résulte que si le faisceau Q' est G_P-principal, le faisceau $Q'_{\vee_{G_P}}P$ est G-principal. Enfin φ passe au quotient dans $P_{\vee_{G_P}}P$, et définit ainsi un *isomorphisme* de ce faisceau sur G.

Cela étant, pour tout faisceau de groupes F désignons par $\tilde{F}$ l'ensemble des classes de faisceaux F-principaux qui sont F-isomorphes. Soit donné le faisceau G-principal P. Si Q (resp. Q') est G-principal (resp. G_P-principal), la correspondance $Q \to Q_{\vee_G}P$ (resp. $Q' \to Q'_{\vee_{G_P}}P$) définit une application de $\tilde{G}$ dans $\tilde{G}_P$ (resp. de $\tilde{G}_P$ dans $\tilde{G}$). Or, ces deux applications sont réciproques l'une de l'autre, car, en les composant il vient

$$(Q_{\vee_G}P)_{\vee_{G_P}}P \approx Q_{\vee_G}(P_{\vee_{G_P}}P) \approx Q_{\vee_G}G \approx Q,$$
$$(Q'_{\vee_{G_P}}P)_{\vee_G}P \approx Q'_{\vee_{G_P}}(P_{\vee_G}P) \approx Q'_{\vee_{G_P}}G_P \approx Q'.$$

Comme $P_{\vee_G}P = G_P$, la proposition 4.2 résulte alors de la proposition 4.1.

Remarque. — Les considérations précédentes valent dans un cadre beaucoup plus général que celui des faisceaux : par exemple celui des « espaces fibrés généraux » ([5]).

7. *Caractère fonctoriel.* — Les conditions de compatibilité du n° 4.3 sont évidemment satisfaites lorsque F (resp. F') est le faisceau A lui-même (resp. A') opérant sur lui-même par les automorphismes intérieurs, en prenant $\varphi = \psi$. On vérifie alors sans peine que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, A^a) & \xrightarrow{(\varphi_0)^*} & H^1(X, A'^{\varphi^*(a)}) \\ \downarrow i_a & & \downarrow i_{\varphi^*(a)} \\ H^1(X, A) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^1(X, A'). \end{array}$$

([5]) Au sens de A. Grothendieck [18].

5. Suite exacte de cohomologie. Cas général :

1° DÉFINITION 5.1. — *Une suite d'ensembles A_i dont chacun, sauf peut-être les deux premiers, a un élément privilégié* e (élément « neutre »), *et d'applications $f_i : A_i \to A_{i+1}$ sera dite* exacte *si* $f_i^{-1}(e) = f_{i-1}(A_{i-1})$ (i. e. : le « noyau » de f_i est identique à l'image de f_{i-1}).

Soit B un faisceau d'*ensembles* sur l'espace X. Soit A un faisceau de *groupes* opérant dans B, par exemple à droite, sans point fixe (i. e., $b_x a_x = b_x \Leftrightarrow a_x = e_x$, quels que soient $x \in X$, $a_x \in A_x$, $b_x \in B_x$); désignons par B/A le faisceau-*quotient* (*cf.* n° 2, dernier exemple).

PROPOSITION 5.1. — *Si le faisceau de groupes* A *opère sans point fixe sur le faisceau d'ensembles* B, *il existe une suite exacte*

$$H^0(X, B) \xrightarrow{p_0^*} H^0(X, B/A) \xrightarrow{\delta} H^1(X, A). \tag{5.1}$$

L'application p_0^* est celle induite, comme il a été dit au n° 3, par l'homomorphisme canonique $p : B \to B/A$.

DÉFINITION DE L'APPLICATION $\delta : H^0(X, B/A) \to H^1(X, A)$. — Cette définition est calquée sur celle du classique opérateur cobord de la suite exacte de cohomologie au sens ordinaire (6).

Soit c une section du faisceau $B/A = C$; pour tout x de X, $c(x)$ est l'image par p d'un élément b_x de B_x; il existe au voisinage de x une section b de B telle que $b(x) = b_x$[axiome (I)]; la fonction $p \circ b$ est, dans ce voisinage, une section de C coïncidant avec c au point x, donc dans tout un voisinage ouvert $U(x)$ de x (prop. 2.1).

1° Soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X tel que la restriction c_i de c à U_i soit, pour tout i, l'image par p^* d'une section b_i de B au-dessus de U_i : nous venons de montrer l'existence d'un tel recouvrement. Comme $c_i = c_j$ dans U_{ij}, il existe, pour tout x de U_{ij}, un élément unique $a_{ij}(x) \in A_x$ tel que $b_j(x) = b_i(x) a_{ij}(x)$; l'unicité de $a_{ij}(x)$ et la proposition 2.1 entraînent que l'application $x \to a_{ij}(x)$ est une *section* a_{ij} de A au-dessus de U_{ij}, de sorte que

$$b_j = b_i a_{ij}, \tag{5.2}$$

(5.2) entraîne que la 1-cochaîne $\{a_{ij}\}$ est un cocycle. La classe de cohomologie de ce cocycle ne dépend pas du choix des b_i, car si b'_i vérifie $p^*(b'_i) = c_i$, le même raisonnement prouve l'existence et l'unicité d'une section a_i de A au-dessus de U_i telle que $b'_i = b_i a_i$; or si aux b'_i est associée la cochaîne $\{a'_{ij}\}$, on a

$$b_i a_{ij} a_j = b_j a_j = b'_j = b'_i a'_{ij} = b_i a_i a'_{ij},$$

(6) *Voir* par exemple SERRE [22] ou HIRZEBRUCH [19].

ce qui, en raison de l'unicité, assure que les cocycles $\{a_{ij}\}$, $\{a'_{ij}\}$ sont cohomologues : à c est donc associé un élément bien déterminé $\delta_{\mathfrak{U}}(c)$ de $H^1(\mathfrak{U}, A)$.

2° Pour définir δ, il reste à vérifier que l'image dans $H^1(X, A)$ de $\delta_{\mathfrak{U}}(c)$ est indépendante du recouvrement $\mathfrak{U}$ choisi, et pour cela il suffit de voir que si $\mathfrak{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ est un recouvrement ouvert de X plus fin que $\mathfrak{U}$, $\delta_{\mathfrak{V}}(c)$ est défini et égal à $\sigma(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})\,\delta_{\mathfrak{U}}(c)$. Or comme c_α n'est autre que la restriction à V_α de $c_{t(\alpha)}$, on peut prendre pour b_α la restriction de $b_{t(\alpha)}$, et par suite pour $a_{\alpha\beta}$ la restriction de $a_{t(\alpha)t(\beta)}$. C. Q. F. D.

Démonstration de la proposition 5.1. — La première moitié de la proposition est évidente; il suffit de vérifier que $\delta(c) = e$ entraîne que c est dans l'image de p.

Or $\sigma(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$ étant injectif, il résulte de l'hypothèse qu'il existe une o-cochaîne $\{a_i\}$ de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans A telle que dans (5.2) on ait

$$a_{ij} = a_i^{-1} a_j.$$

Il en résulte que les $b_i a_i^{-1}$ constituent une *section* de B au-dessus de X tout entier, dont l'image par p_0^* est précisément c.

Complément a la proposition 5.1. — *Pour que deux éléments de $H^0(X, B)$ aient même image dans $H^0(X, B/A)$ il faut et il suffit qu'ils soient transformés l'un de l'autre par un élément de $H^0(X, A)$.*

La démonstration a été essentiellement faite, mais en écrivant U_{ij} au lieu de X.

Remarque. — Si A opérait *à gauche*, il y aurait lieu de remplacer (5.2) par

$$b_i = a_{ij} b_j. \tag{5.2'}$$

2. La situation qui se présentera le plus fréquemment dans ce travail est moins générale que celle dont la proposition 5.1 est l'objet.

Soient B un faisceau de *groupes*, A un sous-faisceau du faisceau *de groupes* B, i l'injection de A dans B, p la projection canonique de B sur le faisceau d'espaces homogènes quotient B/A (lequel a une section neutre). Nous conviendrons de dire que la suite de faisceaux et d'homomorphismes

$$e \to A \xrightarrow{i} B \to B/A \to e \tag{5.3}$$

est une « suite exacte » (bien que B/A ne soit pas un faisceau de groupes si A n'est pas un sous-faiseeau distingué).

Théorème I.1. — *A toute suite exacte* (5.3) *est associée une suite exacte*

$$e \to H^0(X, A) \xrightarrow{i_0^*} H^0(X, B) \xrightarrow{p_0^*} H^0(X, B/A) \xrightarrow{\delta} H^1(X, A) \xrightarrow{i_1^*} H^1(X, B). \tag{5.4}$$

Compte tenu de la proposition 5.1, il suffit de montrer que le noyau de i_1 est dans l'image de δ, les autres affirmations contenues dans l'énoncé de ce théorème étant immédiates.

Soit a un élément du noyau i_1. D'après le lemme 3.1, si a_{ij} est un cocycle du recouvrement $\mathfrak{U}$ dont la classe est a, il existe une o-cochaîne $\{ b_i \}$ de $\mathfrak{U}$, à valeurs dans B, vérifiant $a_{ij} = b_i^{-1} b_j$ dans U_{ij}. Les $p_0^\star(b_i)$ définissent alors une *section* de B/A au-dessus de X, dont l'image par δ est a.

COMPLÉMENT DU THÉORÈME I.1. — *Pour que deux sections de B/A au-dessus de X aient même image par δ, il faut et il suffit qu'elles appartiennent à la même classe d'intransitivité de $H^0(X, B)$.*

En effet, soient c et c' deux sections de B/A telles que $\delta(c) = \delta(c')$. Soit $\mathfrak{U} = \{ U_i \}$ un recouvrement ouvert de X assez fin pour que les restrictions c_i (resp. c'_i) de c (resp. c') à chaque U_i soient l'image par $p_0^\star$ de sections b_i (resp. b'_i) de B au-dessus de U_i. Par hypothèse, on peut supposer, quitte à multiplier à droite b_i par une section convenable de A au-dessus de U_i, que $b_i^{-1} b_j = b_i'^{-1} b'_j$ dans U_{ij}. Alors la collection des $b_i b_i'^{-1}$ définit une section b de B au-dessus de X, et l'on a $c = b.c'$. Inversement, soient c et c' deux sections de B/A telles qu'il existe une section $\mathbf{b}$ de B avec $c = \mathbf{b}.c'$. $\mathfrak{U}$ étant un recouvrement de X suffisamment fin, on a, avec les notations habituelles

$$c_i = p_0^\star(b_i); \qquad c'_i = p_0^\star(b'_i); \qquad b_i = \mathbf{b}_i b'_i.$$

Alors $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_j$ montre que c et c' ont même image par δ.

2. *Caractère fonctoriel.* — Soit f un homomorphisme du faisceau de *groupes* B dans un faisceau de *groupes* B'. Soient A un sous-faisceau de B et A' un sous-faisceau de B' *contenant* $f(A)$: f définit donc par passage aux quotients un homomorphisme (noté encore f) de B/A dans B'/A'; nous avons vu (nº 3) qu'à f sont associées des applications (respectant éventuellement les lois de composition) $f^\star$ des ensembles de cohomologie correspondants. Ces applications $f^\star$ ont évidemment un caractère fonctoriel. De plus elles commutent aux applications $i^\star$ (évident), $p^\star$ (par définition) et δ (car f est par définition une représentation de B dans B'). En résumé, *au diagramme commutatif de suites exactes*

$$(5.5) \qquad \begin{array}{ccccccccc} e & \to & A & \to & B & \to & B/A & \to & e \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ e & \to & A' & \to & B' & \to & B'/A' & \to & e \end{array} \qquad \downarrow f$$

est associé *le diagramme commutatif de suites exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc} e \to H^0(X, A) & \to & H^0(X, B) & \to & H^0(X, B/A) & \to & H^1(X, A) & \to & H^1(X, B) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ e \to H^0(X, A') & \to & H^0(X, B') & \to & H^0(X, B'/A') & \to & H^1(X, A') & \to & H^1(X, B') \end{array} \qquad \downarrow f^\star$$

Enfin, il est clair que si b (resp. c) est une section de B (resp. B/A) au-dessus de X, alors

$$f^*(b.c) = f^*(b).f^*(c).$$

6. Le cas où A est un sous-faisceau distingué de B. — Alors B/A est aussi un faisceau de groupes et p est un homomorphisme de faisceaux de groupes. Le théorème I et son complément se précisent en le :

THÉORÈME I.2. — *Si A est un sous-faisceau distingué de B, la suite*

$$(6.1)\quad \begin{aligned} e \to H^0(X, A) &\xrightarrow{i_0^*} H^0(X, B) \\ &\xrightarrow{p_0^*} H^0(X, B/A) \xrightarrow{\delta} H^1(X, A) \xrightarrow{i_1^*} H^1(X, B) \xrightarrow{p_1^*} H^1(X, B/A), \end{aligned}$$

où i_0^* et p_0^* sont des homomorphismes, est exacte; de plus deux sections c et c' de B/A ont même image par δ si et seulement si cc'^{-1} est l'image par p_0^* d'une section de B.

Les démonstrations immédiates sont laissées au lecteur.

B/A n'opère pas en général sur A. Toutefois, le groupe $H^0(X, B/A)$ opère sur $H^1(X, A)$. Soit en effet c (resp. a) un élément de $H^0(X, B/A)$ [resp. de $H^1(X, A)$]. Choisissons un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ de X assez fin pour satisfaire aux conditions du n° 5, dont nous conservons les notations, et pour que a soit l'image d'un cocycle $\{a_{ij}\}$ de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans A. Posons

$$(6.2)\qquad a'_{ij} = b_i a_{ij} b_j^{-1}.$$

Comme $p(b_i) = p(b_j) = c$, et que p est un homomorphisme, a'_{ij} est à valeurs dans A, et la collection des a'_{ij} vérifie visiblement (3.1), donc constitue un 1-cocycle. La classe de ce cocycle ne dépend pas :

a. du choix des b_i car si les b'_i vérifient $p(b'_i) = c_i$, on a, A étant distingué, $b'_i = a_i b_i$, où a_i est une section de A au-dessus de U_i, de sorte que le cocycle a''_{ij} correspondant aux b'_i vérifie

$$a''_{ij} = a_i a'_{ij} a_j^{-1};$$

b. de la classe du cocycle a_{ij} dans $H^1(\mathfrak{U}, A)$, car si

$$\mathbf{a}_{ij} = a_i a_{ij} a_j^{-1}$$

au cocycle $\{\mathbf{a}_{ij}\}$ est associé un cocycle $\{\mathbf{a}'_{ij}\}$ cohomologue, car, A étant distingué, il existe des sections a'_i de A au dessus de U_i telles que

$$b_i a_i = a'_i b_i, \qquad \text{d'où} \qquad \mathbf{a}'_{ij} = b_i \mathbf{a}_{ij} b_j^{-1} = a'_i a'_{ij} a'^{-1}_j;$$

c. du choix du recouvrement $\mathfrak{U}$: il suffit de le vérifier si $\mathfrak{V}$ est un recouvrement plus fin que $\mathfrak{U}$, et cette vérification est triviale.

En résumé, nous venons de définir une application

(6.3) $(c, a) \to \sigma(c)a$ de $H^0(X, B/A) \times H^1(X, A)$ dans $H^1(X, A)$

dont on vérifie aisément qu'elle fait de $H^0(X, B/A)$ un *groupe d'opérateurs* de $H^1(X, A)$ (à gauche). De plus si e est la classe neutre de H^1 :

$$\sigma(c)e = \delta(c^{-1}). \tag{6.4}$$

COMPLÉMENT AU THÉORÈME 1.2. — *Pour que deux éléments de $H^1(X, A)$ aient même image par i_1^*, il faut et il suffit qu'ils appartiennent à la même classe d'intransitivité de $H^0(X, B/A)$.*

Il est clair, d'après la définition, que a et $\sigma(c)a$ ont même image dans $H^1(X, B)$. La réciproque est immédiate, car (6.2) (écrit pour un recouvrement suffisamment fin) entraîne que les $p(b_i)$ définissent une section de C au-dessus de X.

REMARQUE. — Dans les applications nous utiliserons une forme de ce complément beaucoup plus maniable (*cf.* chap. II).

7. Le cas où A est un sous-faisceau abélien distingué de B. — Alors les ensembles de cohomologie de A existent en toutes dimensions, et sont des groupes abéliens. De plus B/A opère sur le faisceau de groupes A, B_x/A_x opérant sur A_x par les automorphismes intérieurs de B, comme il a été dit au n° 1 (exemple). Par suite, $H^0(X, B/A)$ opère *dans le groupe* $H^1(X, A)$; nous noterons $(c, a) \to c.a$ ces opérations. Il est intéressant de comparer $c.a$ et $\sigma(c)a$.

PROPOSITION 7.1. — *On a la relation*

$$\sigma(c)a = c.a + \delta(c^{-1}), \tag{7.1}$$

la loi de composition de $H^1(X, A)$ étant notée additivement.

La relation (7.1) provient de ce que (6.2) s'écrit

$$a'_{ij} = b_i a_{ij} b_j^{-1} = b_i a_{ij} b_i^{-1} + b_i b_j^{-1}. \tag{7.2}$$

COROLLAIRE. — *Lorsque A est abélien, σ ne réalise pas $H^0(X, B/A)$ comme un groupe d'opérateurs du groupe $H^1(X, A)$; et δ n'est pas en général un homomorphisme, mais un homomorphisme semi-croisé* (*).

La seconde partie du corollaire vient de ce que

$$\delta(cc') = \sigma(c'^{-1})\sigma(c^{-1})e = \sigma(c'^{-1})\,\delta(c).$$

(*) Cependant, dans l'interprétation en termes de groupoïdes de M. Dedecker [10] δ devient un homomorphisme de groupoïdes.

soit

$$\delta(cc') = c'^{-1}.\delta(c) + \delta(c') \tag{7.3}$$

et que $H^0(X, B/A)$ n'opère pas en général trivialement sur l'image δ.

Nous allons maintenant profiter de l'existence de $H^2(X, F)$ lorsque F est un faisceau de groupes abéliens pour définir une application Δ de $H^1(X, B/A)$ dans un ensemble convenable, permettant dans une certaine mesure de prolonger d'un élément la suite exacte de cohomologie. Cependant, comme dans le cas des faisceaux de groupes abéliens, Δ n'est pas en général défini sur tout l'ensemble $H^1(X, B/A)$ (7) si l'on ne fait pas d'hypothèses restrictives sur X. Bien que dans nos applications ces hypothèses restrictives seront remplies, nous allons donner quelques définitions permettant de ne les faire intervenir que le plus tard possible. Ces hypothèses sont naturellement indépendantes du caractère non abélien des faisceaux envisagés.

Définition. — Nous dirons qu'une section de B/A au-dessus d'un ouvert U de X est *ascensionnelle* si elle est l'image par p^* d'une section de B au-dessus de U. Une i-cochaîne ($i = 0, 1$) d'un recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de X, à valeurs dans B/A sera dite *ascensionnelle* si toutes les sections qui la constituent sont ascensionnelles. Deux cochaînes $\{c_{ij}\}$, $\{c'_{ij}\}$ seront dites *ascensionnellement* cohomologues si elles sont ascensionnelles et s'il existe des o-cochaînes *ascensionnelles* c_i telles que

$$c'_{ij} = c_i^{-1} c_{ij} c_j \quad \text{dans } U_{ij}. \tag{7.4}$$

Nous appellerons $H^1_a(\mathfrak{U}, B/A)$ l'ensemble des classes de cocycles ascensionnels de $\mathfrak{U}$ (à valeurs dans B/A) ascensionnellement cohomologues. Si $\mathfrak{V}$ est un recouvrement ouvert plus fin que $\mathfrak{U}$, l'application t^* définie au n° 3 transforme toute cochaîne ascensionnelle de $\mathfrak{U}$ en une cochaîne *ascensionnelle* de $\mathfrak{V}$, et la classe ascensionnelle du transformé par t^* d'un cocycle ascensionnel ne dépend pas du choix de l'application t. On peut donc, comme au n° 3, définir l'ensemble $H^1_a(X, B/A)$, limite inductive des $H^1_a(\mathfrak{U}, B/A)$. De plus, il existe des applications canoniques

$$H^1_a(\mathfrak{U}, B/A) \to H^1(\mathfrak{U}, B/A)$$

qui, lorsque le recouvrement $\mathfrak{V}$ est plus fin que $\mathfrak{U}$, satisfont au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1_a(\mathfrak{U}, B/A) & \to & H^1(\mathfrak{U}, B/A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1_a(\mathfrak{V}, B/A) & \to & H^1(\mathfrak{V}, B/A) \end{array}$$

Il existe donc une application canonique $k : H^1_a(X, B/A) \to H^1(X, B/A)$.

(7) *Cf.* [22] ou [18].

LEMME. — *Quel que soit X, k est biunivoque.*

Soient $\mathbf{c}$ et $\mathbf{c}'$ deux éléments de H^1_a ayant même image par k : on peut donc supposer qu'il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ de X assez fin pour qu'il existe des 1-cocycles ascensionnels $\{c_{ij}\}$, $\{c'_{ij}\}$ de $\mathfrak{U}$, dont les classes soient $\mathbf{c}$ et $\mathbf{c}'$, et pour tout i une section c_i (pas nécessairement ascensionnelle) de B/A au-dessus de U_i, tels que (3.2) soit vérifié : or il existe (n° 5) un recouvrement ouvert $\mathfrak{V}_i$ de chaque U_i tel que la restriction de c_i à chaque ensemble de $\mathfrak{V}_i$ soit une section ascensionnelle; les $\mathfrak{V}_i$ définissent un recouvrement $\mathfrak{V}$ de X plus fin que $\mathfrak{U}$, et tout cocycle de $\mathfrak{V}$ induit par le cocycle $\{c_{ij}\}$ est évidemment *ascensionnellement* cohomologue à tout cocycle de $\mathfrak{V}$ induit par c'_{ij}. *Nous identifierons désormais $H^1_a(X, B/A)$ à l'image de k.*

L'ensemble de définition de Δ étant $H^1_a(X, B/A)$, nous dirons, jusqu'à la fin de ce numéro, classe pour « classe ascensionnelle »; nous supposerons donc toujours les recouvrements assez fins pour que les cochaînes de ces recouvrements (réalisant une cohomologie ascensionnelle) ou les 1-cocycles (dont l'image est une classe ascensionnelle) soient ascensionnels. Cela étant nous sommes en mesure de donner la définition de Δ.

DÉFINITION DE Δ. — Soit $\mathbf{z} \in H^1_a(X, B/A)$. Alors $\mathbf{z}$ est l'image d'un cocycle ascensionnel $z = \{z_{ij}\}$ d'un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ suffisamment fin de X; par hypothèse, chaque z_{ij} est l'image par p^* d'une section b_{ij} de B au-dessus de U_{ij}, et, vu (3.1), on peut supposer que $b_{ij}b_{ji} = e$. Posons pour tout x de U_{ijk} :

$$a_{ijk}(x) = b_{ij}(x)\, b_{jk}(x)\, b_{ki}(x). \tag{7.5}$$

En vertu de (3.1) a_{ijk} est une section du sous-faisceau A au-dessus de U_{ijk}. Soit A_i la restriction du faisceau A à U_i. Par *recollement* de faisceaux (n° 4), le cocycle z définit un faisceau de groupes abéliens A^z, et si l'on considère $a_{ijk}(x)$ *comme un élément* de A_i, les a_{ijk} définissent une 2-*cochaîne* α_{ijk} du recouvrement $\mathfrak{U}$ à valeurs dans A^z.

a. Cette cochaîne est alternée. Il suffit de vérifier que dans A^z :

$$\alpha_{ijk} + \alpha_{ikj} = \alpha_{ijk} + \alpha_{jik} = 0,$$

c'est-à-dire que, dans A_i :

$$a_{ijk} + a_{ikj} = (b_{ij}b_{jk}b_{ki})\,(b_{ik}b_{kj}b_{ji}) = e,$$
$$a_{ijk} + z_{ij}.a_{jik} = (b_{ij}b_{jk}b_{ki})\,b_{ij}\,(b_{ji}b_{ik}b_{kj})\,b_{ij}^{-1} = e,$$

ce qui résulte des relations du type $b_{ij}b_{ji} = e$.

b. Cette cochaîne est *un cocycle.* Il faut vérifier que dans A^z :

$$\alpha_{jkl} = \alpha_{ikl} - \alpha_{ijl} + \alpha_{ijk}.$$

C'est-à-dire que dans A_i :

$$z_{ij}.a_{jkl} = a_{ikl} - a_{ijl} + a_{ijk},$$

soit

$$(b_{ik}b_{kj})(b_{jk}b_{kl}b_{lj})(b_{ik}b_{kj})^{-1} = b_{ik}b_{kl}b_{li}(b_{ij}b_{jl}b_{li})^{-1}b_{ij}b_{jk}b_{ki},$$

puisque $p(b_{ik}b_{kj}) = p(b_{ik})p(b_{kj}) = z_{ik}z_{kj} = z_{ij}$, en vertu de (3.1).

c. La classe de cohomologie dans $H^2(\mathfrak{U}, A^z)$ de ce cocycle ne dépend que de z. En effet, choisissons les b_{ij} autrement : on a donc des sections b'_{ij} de B (resp. des sections a_{ij} de A) au-dessus de U_{ij} telles que

$$b'_{ij} = a_{ij}b_{ij}.$$

Considérons $a_{ij}(x)$ *comme un élément de* A_i : il définit un élément $\alpha_{ij}(x)$ de A^z. D'autre part, les b'_{ij} définissent un nouveau cocycle :

$$\alpha'_{ijk} = \text{image dans } A^z \text{ de } a'_{ijk} = a_{ij}b_{ij}a_{jk}b_{jk}a_{ki}b_{ki} \text{ élément de } A_i.$$

Or par définition α_{jk}, classe de l'élément a_{jk} de A_j, est la classe de $(z_{ij}.a_{jk})$, élément de A_i. Comme

$$a'_{ijk} = a_{ij}(b_{ij}a_{jk}b_{ji})(b_{ij}b_{jk}a_{ki}b_{kj}b_{ji})(b_{ij}b_{jk}b_{ki})$$

et que $b'_{ij}b'_{ji} = e$ entraîne $a_{ij} + z_{ij}.a_{ji} = 0$, on a

$$a'_{ijk} = a_{ij} + z_{ij}.a_{jk} + z_{ik}.a_{ki} + a_{ijk},$$

soit

$$\alpha'_{ijk} = \alpha_{ijk} + \alpha_{ij} - \alpha_{ik} + \alpha_{jk}.$$

C. Q. F. D.

En résumé, à un cocycle ascensionnel z d'un recouvrement $\mathfrak{U}$ de X, à valeurs dans B/A, est associé un élément bien déterminé $\Delta_{\mathfrak{U}}(z)$ de $H^2(\mathfrak{U}, A^z)$ donc un élément $\Delta(z)$ de $H^2(X, A^z)$.

d. Soit $\mathfrak{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ un recouvrement plus fin que $\mathfrak{U}$; à toute application $t : \Omega \to I$ telle que $V_\alpha \subset U_{t(\alpha)}$ sont associés un cocycle t^*z de $\mathfrak{V}$, un isomorphisme $\mathbf{t} \in W(t^*z, z)$ de A^{t^*z} sur A^z, donc un isomorphisme $\mathbf{t}^*$ de $H^2(X, A^{t^*z})$ sur $H^2(X, A^z)$. Il est immédiat que $\mathbf{t}^*(\Delta(t^*z)) = \Delta(z)$.

e. Soient z et z' deux cocycles ascensionnels d'un même recouvrement $\mathfrak{U}$ de X, dont l'image dans $H^1_a(X, B/A)$ soit $\mathbf{z}$. Supposons-les d'abord ascensionnellement cohomologues, et soit

$$k : \quad z_{ij} = z_i^{-1}z'_{ij}z_j$$

une telle cohomologie. k définit un isomorphisme w de A^z sur $A^{z'}$, donc des isomorphismes w^* des groupes de cohomologie de $\mathfrak{U}$ et de X correspondants. Or, par hypothèse, il existe des sections b_i, b'_{ij} de B dont les images par p^*

soient z_i et z'_{ij} respectivement : on peut donc choisir

$$b_{ij} = b_i^{-1} b'_{ij} b_j,$$

de sorte que

$$a_{ijk} = b_i^{-1} a'_{ijk} b_i,$$

soit

$$\alpha'_{ijk} = z_i . \alpha_{ijk} = w(\alpha_{ijk}).$$

L'image par w^* de $\Delta(z)$ est donc $\Delta(z')$.

En particulier, si $z_{ij} = z'_{ij}$ (w est donc un automorphisme, non nécessairement trivial), on peut choisir pour « remonter » z_{ij} soit b'_{ij}, soit b_{ij} : on obtiendra des cocycles de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans A^z cohomologues (*cf.* *c*), et transformés l'un de l'autre par w : donc w^* laisse invariant $\Delta_{\mathfrak{U}}(z)$, et, *a fortiori*, $\Delta(z)$.

Soit maintenant $w \in W(z; z)$ un automorphisme *quelconque* de A^z (i. e. défini à partir d'une cohomologie non nécessairement ascensionnelle). D'après le lemme, il existe un recouvrement $\mathfrak{V}$ plus fin que $\mathfrak{U}$ tel que la cohomologie w' induite par la cohomologie w dans $\mathfrak{V}$ soit ascensionnelle. *d* et les propriétés de transitivité des isomorphismes des $W(z, z')$ montre alors qu'on a encore $w^*(\Delta(z)) = \Delta(z)$.

f. Nous sommes maintenant en mesure de définir $\Delta(\mathbf{z})$. Soit z un cocycle ascensionnel de la classe de $\mathbf{z}$ fixe, et z' un cocycle ascensionnel arbitraire, d'un recouvrement arbitraire, ayant pour image $\mathbf{z}$: tout isomorphisme $w \in W(z', z)$ envoie $\Delta(z')$ en $\Delta(z)$: cela résulte de la transitivité de ces isomorphismes, et de ce que tout automorphisme de $W(z, z)$ laisse $\Delta(z)$ invariant. Nous poserons donc

$$\Delta(\mathbf{z}) = \Delta(z)$$

quel que soit du reste le choix du représentant z.

Théorème I.3. — *Pour qu'un élément* $\mathbf{z}$ *de* $H^1(X, B/A)$ *soit dans l'image de* $H^1(X, B)$, *il faut et il suffit qu'il appartienne à* $H^1_a(X, B/A)$ *et que* $\Delta(\mathbf{z}) = 0$.

La nécessité est évidente, car si $\mathbf{z} = p_1^*(b)$, il existe un recouvrement $\mathfrak{U}$ de X assez fin pour que b soit l'image d'un cocycle $\{b_{ij}\}$ de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans B. Alors $\mathbf{z}$ est l'image du cocycle $\{z_{ij} = p(b_{ij})\}$, et l'on peut prendre

$$a_{ijk} = b_{ij} b_{jk} b_{ki} = 0.$$

Réciproquement, supposons que $\Delta(\mathbf{z}) = 0$ [ce qui implique que $\mathbf{z} \in H^1_a(X, B/A)$]. Soit $z = \{z_{ij}\}$ un cocycle ascensionnel d'un recouvrement $\mathfrak{U}$ de X, à valeurs dans B/A, dont l'image soit $\mathbf{z}$: il existe donc par hypothèse des sections b_{ij} (resp. a_{ij}) de B (resp. de A) au-dessus de U_{ij} vérifiant les relations

$$p(b_{ij}) = z_{ij}; \qquad b_{ij}b_{jk}b_{ki} = -a_{ij} - z_{ij}.a_{jk} + a_{ik}; \qquad b_{ij}b_{ji} = 0.$$

Posons

$$b'_{ij} = a_{ij}b_{ij}.$$

Alors

$$b'_{ij}b'_{jk} = a_{ij}b_{ij}a_{jk}b_{jk} = a_{ij}(z_{ij}.a_{jk})b_{ij}b_{jk} = a_{ik}b_{ik} = b'_{ik},$$

ce qui montre que les b'_{ij} définissent un *cocycle* de $\mathfrak{U}$, donc un élément b de $H^1(X, B)$ tel que $p_1^*(b) = \mathbf{z}$.

Remarque. — Avec des hypothèses convenables, de nature purement topologique, portant sur l'espace X, on peut affirmer que $H^1(X, B/A)$ est égal à $H^1_a(X, B/A)$, quels que soient les faisceaux B et A : il suffit de montrer que toute classe de $H^1(X, B/A)$ est l'image d'un cocycle ascensionnel d'un recouvrement assez fin de X. C'est par exemple le cas si X est paracompact (*cf.* Serre [22]) : le théorème I.3 est alors d'une application plus aisée.

Remarque. — Les applications p_1^* et σ (définies au n° 6), l'application Δ ont un caractère fonctoriel : elles commutent avec les applications induites par les homomorphismes de suite exacte du type (5.5). Par exemple, si dans (5.5) A et A' sont abéliens distingués, soit z un 1-cocycle à valeurs dans B/A, et soit $\mathbf{z}$ son image dans $H^1(X, B/A)$. D'après le n° 4.3, f définit un homomorphisme $\mathbf{f}$ de A^z dans $A'^{f^*(z)}$; d'autre part si z est un cocycle ascensionnel, il en est de même de $f^*(z)$. On vérifie alors que

$$(\mathbf{f})^*(\Delta(\mathbf{z})) = \Delta(f^*(\mathbf{z})).$$

8. Le cas où A est central. — Nous dirons que le sous-faisceau A du faisceau de groupes B est *central*, si A_x est, pour tout x, contenu dans le centre de B_x. Nous sommes dans la situation du n° 7, avec la circonstance simplificatrice que B/A opère *trivialement* sur A. D'où le :

Théorème I.4. — *Si X est paracompact, à toute suite exacte* (5.3) *où A est central est associée une suite exacte*

$$(8.1) \quad e \to (H^0 X, A) \xrightarrow{i_0^*} \mathrm{H}^0(X, B) \xrightarrow{p_0^*} H^0(X, B/A)$$
$$\xrightarrow{\delta} H^1(X, A) \to H^1(X, B) \to H^1(X, B/A) \xrightarrow{\Delta} H^2(X, A).$$

où i_0^*, p_0^*, δ sont des homomorphismes de groupes.

En effet, tous les A^z sont canoniquement isomorphes à A.

Il est facile d'autre part de vérifier que le groupe $H^1(X, A)$ opère dans l'ensemble $H^1(X, B)$: en effet, si des sections a_{ij} (resp. b_{ij}) de A (resp. de B) au-dessus de U_{ij} vérifient (3.1), il en est de même de $a_{ij}b_{ij}$; le produit d'un cocycle de B et d'un cocycle de A est donc un cocycle de B dont l'image dans $H^1(X, B)$ ne dépend que des images de ces cocycles dans $H^1(X, B)$ et $H^1(X, A)$ respectivement. Nous noterons $(a, b) \rightarrow a.b$ l'application de $H^1(X, A) \times H^1(X, B) \rightarrow H^1(X, B)$ ainsi définie.

Il est évident que, pour tout $a \in H^1(X, A)$, b et $a.b$ ont même image par p_1^* dans $H^1(X, B/A)$; inversement, si deux éléments b et b' de $H^1(X, B)$ ont même image par p_1^*, soient $\{b_{ij}\}$, $\{b'_{ij}\}$ des cocycles d'un même recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de X représentatifs de b et de b'. Posons

$$c_{ij} = p(b_{ij}), \qquad c'_{ij} = p(b'_{ij}).$$

Par hypothèse, on peut supposer qu'il existe (quitte à remplacer $\mathfrak{U}$ par un recouvrement plus fin), pour tout i, une section ascensionnelle c_i de B/A au-dessus de U_i telle que

$$c_{ij} = c_i^{-1} c'_{ij} c_j, \qquad p(b_i) = c_i.$$

Il existe donc une cochaîne $\{a_{ij}\}$ de $\mathfrak{U}$ à valeur dans A telle que

$$b_{ij} = b_i^{-1} b'_{ij} b_j a_{ij}.$$

Un élément de A_x permutant avec tout élément de B_x, $\{a_{ij}\}$ est, comme $\{b_{ij}\}$ et $\{b'_{ij}\}$ un cocycle, dont l'image a dans $H^1(X, A)$ vérifie

$$b = a.b'.$$

Enfin (7.1) s'écrit ici

$$\sigma(c)a = a + \delta(c^{-1}). \tag{8.2}$$

Proposition 8.1. — *Si A est un sous-faisceau central de B, pour que deux éléments a et a' de $H^1(X, A)$ aient même image par i_1^*, il faut et il suffit que $a - a'$ soit dans l'image de δ; pour que deux éléments de $H^1(X, B)$ aient même image par p_1^*, il faut et il suffit qu'ils appartiennent à la même classe d'intransitivité de $H^1(X, A)$.*

9. Le cas où B est un produit direct croisé. — Soit C un faisceau de *groupes* opérant sur le faisceau de *groupes* A.

Définition. — *On appelle faisceau-produit direct croisé du faisceau A par le faisceau C d'opérateurs sur A l'ensemble $P(A, C) = B$, somme des ensembles $A_x \times C_x = B_x$, muni :*

1° de la topologie induite par la topologie-produit de $A \times C$;
2° de la loi de la composition définie dans chaque B_x par

$$(a, c)(a', c') = (a(c.a'), cc') \qquad (a, a' \in A_x;\ c, c' \in C_x). \tag{9.1}$$

Il est bien connu que (9.1) définit sur chaque B_x une loi de groupe (celle du produit direct croisé de A_x par C_x). On vérifie aisément alors que les axiomes (I) et (II) des faisceaux de groupes sont vérifiés, grâce à l'axiome (II').

Notons e_x l'élément neutre de A_x (resp. C_x). Pour $a \in A_x$, c et $c' \in C_x$:

$$(9.2) \qquad (e_x, c)(a, c')(e_x, c)^{-1} = (c.a, cc'c^{-1}).$$

(9.2) montre que l'application $a \to (a, e_x)$ identifie A à un sous-faisceau *distingué* de $P(A, C)$; le quotient $(P(A, C))/A$ est canoniquement isomorphe à C. Si p est la projection canonique de $P(A, C)$ sur C, l'application $j : c \to (e_x, c)$ de C dans $P(A, C)$ est un *homomorphisme* vérifiant

$$p \circ j = 1.$$

Nous sommes donc dans la situation du n° 6, avec $P(A, C) = B$. L'existence de j montre que toute section de B/A au-dessus d'un ouvert de X est image d'une section de B : en particulier, δ applique $H^0(X, B/A)$ sur l'élément neutre de $H^1(X, A)$; dans (6.2), on peut prendre

$$b_i(x) = (e_x, c(x)) \qquad (x \in U_i)$$

ce qui, joint à (9.2) montre que

$$(9.3) \qquad \sigma(c)a = c.a \qquad [c \in H^0(X, B/A), a \in H^1(X, A)]$$

où, comme d'habitude, le . indique qu'il s'agit de l'opération de $H^0(X, C)$ dans $H^1(X, A)$ induite par les opérations C dans A.

Notons enfin que toute 1-classe de cohomologie de X à valeurs dans C est image par p_1^* d'une 1-classe de X à valeurs dans B.

Proposition 9.1. — *Si le faisceau de groupes C opère sur le faisceau de groupes A, les classes d'intransitivité de $H^0(X, C)$ opérant sur $H^1(X, A)$ correspondent biunivoquement aux 1-classes de cohomologie de X à valeurs dans le faisceau-produit direct croisé $P(A, C)$, qui par projection donnent la 1-classe neutre de X à valeurs dans C.*

Remarque. — Dans la situation des n^{os} 7 et 9, il est possible de caractériser les ensembles $p_1^{-1}(c)$ $[c \in H^1(X, B/A]$. Nous ne le ferons que dans un cas particulier (*voir* chap. II), pour éviter les complications techniques analogues à celles des n^{os} 4 et 8.

CHAPITRE II.

Les espaces fibrés.

Dans tout ce chapitre, « espace fibré » signifiera « espace fibré localement trivial » [8].

[8] Soit au sens classique (*cf.* par exemple Steenrod [8]), soit au sens qui sera expliqué au n° 10.2.

10. Espaces fibrés localement triviaux et espaces fibrés localement E-triviaux. — 1. Soit E un espace fibré localement trivial, de groupe structural G, de fibre F, et de base X. Par définition, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{ U_i \}$ de X et des homéomorphismes Φ_i de $U_i \times F$ dans E; nous noterons ϖ la projection canonique de E sur X; $\Phi_{i,x}$ l'homéomorphisme de F sur $F_x = \varpi^{-1}(x)$ $(x \in U_i)$ défini par la restriction de Φ_i à $\{ x \} \times F$; ϖ_i l'application de $E_i = \varpi^{-1}(U_i)$ dans F défini par la composition de Φ_i^{-1} et de la projection canonique de $U_i \times F$ sur F. Rappelons enfin les formules

(10.1) $$\varpi(\Phi_i(x, f)) = x \qquad (x \in U_i, f \in F),$$

(10.2) $\Phi_{j,x}^{-1} \circ \Phi_{i,x} = g_{ji}(x)$ est une application continue : $U_{ij} \to G$.

La formule (10.2) est équivalente à

(10.3) $$\Phi_{i,x} = \Phi_{j,x} \circ g_{ji}, \qquad g_{ij} \circ \varpi_j = \varpi_i.$$

Si $\mathcal{V} = \{ V_\alpha \}_{\alpha \in \Omega}$ est un recouvrement ouvert plus fin que $\mathcal{U}$, et si $t : \Omega \to I$ est une application telle que $V_\alpha \subset U_{t(\alpha)}$, E est *a fortiori* trivial sur les ouverts de $\mathcal{V}$, Φ_α étant la restriction de $\Phi_{t(\alpha)}$ à $V_\alpha \times F$.

Soit Θ un X-isomorphisme de E sur un espace fibré E' de même fibre F, même groupe structural G, et même base X. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X assez fin pour que E et E' soient triviaux au-dessus des ensembles de $\mathcal{U}$. A E' sont associés des homéomorphismes Φ'_i des $U_i \times F$ dans E', et dire que Θ est un X-isomorphisme revient à dire que l'automorphisme $\Phi'^{-1}_{i,x} \circ \Theta \circ \Phi_{i,x}$ de F est un élément $g_i^{-1}(x)$ (dépendant continûment de x, $x \in U_i$). On a donc

(10.4) $$g'_{ij}(x) = g_i^{-1}(x) g_{ij}(x) g_j(x) \quad \text{dans } U_{ij}.$$

Cette même formule (10.4), interprétée autrement, est celle qui relie les systèmes de fonctions g_{ij}, g'_{ij}, que deux systèmes d'homéomorphismes différents Φ_i, Φ'_i, de $U_i \times F$ dans E associent au même espace fibré E.

2. *Espaces fibrés localement E-triviaux* [9]. — En fait, il pourra être utile de considérer une classe d'espaces fibrés plus générale que celle faisant l'objet du n° 10.1.

Soit E un espace fibré en groupes de base X : cela implique en particulier qu'il existe une application continue ouverte π de E sur X et que les fibres sont des groupes topologiques tous isomorphes (mais sans qu'il existe nécessairement un isomorphisme canonique entre eux). On peut faire jouer à E le rôle que jouait dans le n° 10.1 l'espace fibré trivial $X \times G$.

On appelle *espace E-principal* la donnée d'un espace topologique P, d'une application ϖ de P sur X, d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{ U_i \}_{i \in I}$ de X, et,

---

[9] Cette notion est due à H. Cartan.

pour chaque i, d'un homéomorphisme Φ_i de $\pi^{-1}(U_i) = E_i$ dans P tels que

(10.1') $\varpi \Phi_i(z) = \pi(z) \qquad (z \in E_i)$.

(10.2') Il existe une section f_{ji} de E au-dessus de U_{ji} telle que l'homéomorphisme $\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i$ soit l'application $z \to f_{ji}(\pi(z))z$ (le produit étant pris au sens de la multiplication dans les fibres de E).

E opère à droite dans P ([10]) (i. e. il existe une application continue, associative en un sens évident, compatible avec les projections sur X, de $P_\vee E$ dans E) de manière simplement transitive sur chaque fibre de P. On a une notion évidente de E-isomorphisme pour deux espaces fibrés E-principaux : c'est un homéomorphisme, qui induit l'application identique sur la base X, et est compatible avec les opérations (à droite) de E.

Soit $\mathcal{E}$ le faisceau des germes de sections (continues) de E. Une section de $\mathcal{E}$ sur un ouvert de X s'identifie à une section de l'espace fibré E sur cet ouvert; (10.2') associe donc à tout espace E-principal P une cochaîne — et même un cocycle — $f = \{f_{ij}\}$ d'un recouvrement $\mathfrak{U}$ de X, à valeurs dans $\mathcal{E}$. Inversement, au cocycle f, associons l'espace E^f défini comme suit : dans l'espace somme des E_i, on identifie le point z de E_i au point $f_{ji}(\pi(z))z$ de E_j [ce qui est une relation d'équivalence, vu (3.1)]; E^f est visiblement un espace E-principal, E-isomorphe à P.

Comme au n° 4, il existe une application de $P_\vee P$ ([11]) dans E, qui fait correspondre à deux points u et v d'une même fibre de P un point de E noté $u^{-1}v$ (pour rappeler son expression en « coordonnées locales »).

Si F est un espace fibré de même base X que E dans lequel E opère *à gauche* (i. e. il existe une application continue $E_\vee F \to F$, compatible avec les projections sur X, et associative en un sens évident), pour tout espace E-principal P on définit un espace fibré *P-associé* à F : c'est l'espace $P_{\vee_E} F$, quotient du fibré produit diagonal $P_\vee F$ par la relation d'équivalence

(10.5) $(p, f) = (pz, z^{-1}f) \qquad (p \in P_x, f \in F_x, z \in E_x, x \in X)$.

Si F et E sont des espaces fibrés *triviaux*, on retrouve la notion d'espace fibré localement trivial à groupe structural rappelée au n° 10.1.

11. Interprétation géométrique de $H^1(X, \mathcal{E})$. — Soit E un espace fibré en groupes, $\mathcal{E}$ le faisceau des germes de sections continues de E, $\tilde{E}$ l'ensemble des classes d'espaces E-principaux, E-isomorphes.

PROPOSITION 11.1. — *L'ensemble $H^1(X, \mathcal{E})$ s'identifie canoniquement à $\tilde{E}$.*

([10]) Qui est naturellement un espace fibré dont les fibres sont des espaces homéomorphes entre eux (et aux fibres de E), mais n'ont plus en général de structure de groupe.

([11]) *Voir* la note ([2]), p. 140.

En effet, soit $P = E^f$ un espace fibré E-principal. Avec les notations du n° 4, le faisceau $\mathfrak{P}$ des sections continues de P s'identifie au faisceau $\mathcal{E}$-principal $\mathcal{E}^f$, et un E-isomorphisme de P sur un espace E-principal P' induit un $\mathcal{E}$-isomorphisme du faisceau $\mathfrak{P}$ sur le faisceau $\mathfrak{P}'$. Si P et P' sont E-principaux, un $\mathcal{E}$-isomorphisme de leurs faisceaux de germes de sections induit un E-isomorphisme de l'un sur l'autre. Inversement, puisque tout faisceau $\mathcal{E}$-principal est de la forme $\mathcal{E}^f$, il peut s'interpréter comme faisceau des germes de sections continues d'un espace E-principal, savoir E^f. Nous avons donc démontré :

LEMME 11.1. — *Il existe une correspondance biunivoque canonique entre les classes de fibrés E-principaux et les classes de faisceaux $\mathcal{E}$-principaux.*

La proposition 11.1 résulte alors de la proposition 4.1.

REMARQUE. — Il est facile d'expliciter les applications réciproques $K : \tilde{E} \to H^1(X, \mathcal{E})$ et $L : H^1(X, \mathcal{E}) \to \tilde{E}$: K associe à la classe de l'espace E-principal E^f l'image dans $H^1(X, \mathcal{E})$ du cocycle f du recouvrement $\mathfrak{U}$; L associe à l'élément $\mathbf{f} \in H^1(X, \mathcal{E})$ la classe de l'espace E^f, où f est un cocycle quelconque ayant $\mathbf{f}$ pour l'image.

En particulier, à l'élément neutre de $H^1(X, \mathcal{E})$ est associée la classe des espaces E-isomorphes à E.

12. Caractère fonctoriel. — Soient E et E' deux espaces fibrés en groupes, sur le même espace X, et soit f un *homomorphisme* de E dans E' : on entend par là une application continue de E dans E', induisant l'application identique de X, *et respectant les lois de groupe* [i. e., si x et y sont deux points d'une même fibre de E, $f(xy) = f(x)f(y)$]. Faisons opérer (à gauche) l'espace fibré E dans E' par $x.x' = f(x)x'$ (où $x \in E$ et $x' \in E'$ ont même projection sur X). A tout espace fibré E-principal P on peut ainsi faire correspondre l'espace fibré $P \vee_E E'$ P-associé à E', dans lequel E' opère encore à droite grâce aux translations à droite de E' : on vérifie ainsi que $P \vee_E E'$ est canoniquement isomorphe à un espace fibré *E'-principal*; f définit donc une application $\tilde{f}$ de $\tilde{E}$ dans $\tilde{E}'$. D'autre part, f définit un homomorphisme du faisceau *de groupes* $\mathcal{E}$ dans le faisceau de groupes $\mathcal{E}'$, donc une application f^* des ensembles de cohomologie correspondants. On vérifie sans peine que

$$f^* \circ K = K \circ \tilde{f}. \tag{12.1}$$

13. Une identification. — Soient E un espace fibré en groupes, de base X, P un espace E-principal, et F un espace fibré sur lequel E opère à gauche. Les sections d'un espace fibré (en un sens très général) s'identifiant aux sections de son faiseeau de germes de sections, les opérations de E dans F

induisent des opérations de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$, de sorte qu'avec les notations du n° 4, le faisceau des germes de sections de $P\vee_E F$ s'identifie au faisceau $\mathcal{P}\vee_{\mathcal{E}}\mathcal{F}$. Pour tout cocycle z d'un recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de X, à valeurs dans $\mathcal{E}$, dont l'image dans $H^1(X, \mathcal{E})$ est identique à l'image $K(P)$ par K de la *classe* de P dans $\tilde{\tilde{E}}$, il existe donc une collection d'isomorphismes du faisceau des germes de sections $P\vee_E F$ sur le faisceau $\mathcal{F}^z$, deux tels isomorphismes différant par un automorphisme de $\mathcal{F}^z$ appartenant à $W(z, z)$: un tel isomorphisme est entièrement déterminé par le choix d'un E-isomorphisme de P sur l'espace E^z (défini par passage aux quotients dans un espace-somme); en effet, cet E-isomorphisme induit un isomorphisme de $\mathcal{P}\vee_{\mathcal{E}}\mathcal{F}$ sur $\mathcal{E}^z\vee_{\mathcal{E}}\mathcal{F}$, lequel est canoniquement isomorphe à $\mathcal{F}^z$.

Conventions de notations. — Dans toute la suite de ce travail, où l'objet de notre étude sera non les espaces fibrés, mais les classes d'espaces E-isomorphes (E étant fixé), nous noterons souvent l'espace $P\vee_E F$ par F^P, et le faisceau de ses germes de sections (continues) par $\mathcal{F}^P$, ou même par $\mathcal{F}^z$, cette dernière notation impliquant qu'on a fait un choix (arbitraire, mais fixé) d'un E-isomorphisme de P sur E^z.

14. Une bijection. — Si E est un espace fibré en groupes opérant (à gauche) sur l'espace fibré en groupes F de manière à respecter la structure de groupe des fibres de F (i. e. l'homéomorphisme de F_x défini par un point E au-dessus de x est un automorphisme de la structure de F_x), et si P est E-principal, l'espace $F^P = P\vee_E F$ est aussi fibré en groupes. Ce sera le cas si l'on prend $F = E$, E opérant sur lui-même par les automorphismes intérieurs. Dans ce cas la proposition 4.2 se traduit en ces termes :

PROPOSITION 14.1. — *Supposons que l'espace fibré en groupes E, de base X, opère sur lui-même par les automorphismes intérieurs de chaque fibre. Pour tout espace E-principal P, il existe une bijection i_P de $H^1(X, \mathcal{E}^P)$ sur $H^1(X, \mathcal{E})$; $i_P(e) = K(P)$; si θ est un E-isomorphisme de P sur $\theta(P)$, et θ^* la bijection de $H^1(X, \mathcal{E}^P)$ dans $H^1(X, \mathcal{E}^{\theta(P)})$ induite par θ, on a la relation de compatibilité $i_P = i_{\theta(P)} \circ \theta^*$.*

Caractère fonctoriel. — Soit f un *homomorphisme* (*cf.* n° 12) de l'espace fibré en groupes E dans l'espace fibré en groupes E' : f fait correspondre à tout espace E-principal P un espace E'-principal $\mathbf{f}(P)$ (*cf.* n° 12), et définit une application f^* de $H^1(X, \mathcal{E})$ dans $H^1(X, \mathcal{E}')$. On constate que si $P = E^z$, $\mathbf{f}(P) = E'^{f(z)}$. Faisons opérer E et E' sur eux-mêmes par les automorphismes intérieurs : d'après le n° 4.3, f induit alors un homomorphisme du faisceau $\mathcal{E}^P$ sur le faisceau $\mathcal{E}'^{\mathbf{f}(P)}$, d'où un homomorphisme $\mathbf{f}^*$ des groupes de cohomologie correspondants. On vérifie alors que

$$f^* \circ i_P = i_{\mathbf{f}(P)} \circ \mathbf{f}^*. \tag{14.1}$$

15. Classification des espaces fibrés dont le groupe structural est un produit direct croisé. — Nous nous bornerons désormais à employer le langage des espaces fibrés localement triviaux à groupe structural [i. e., l'espace désigné par E (resp. F) au n° 10.2 est le produit direct de X par le groupe structural (resp. de X par la fibre sur laquelle le groupe structural opère à gauche]. Cette restriction n'aura naturellement rien d'essentiel.

Supposons que le groupe topologique G *opère* (*voir* définition n° 1) dans le groupe topologique M. Soit $P(M, G)$ le produit direct croisé de M par G (*cf.* n° 9), muni de la topologie-produit; faisons opérer G sur lui-même par les automorphismes intérieurs; alors G *opère* dans le groupe $P(M, G)$ grâce aux opérations définies dans chaque composant, et la formule (9.2) montre que l'automorphisme défini par $z \in G$ n'est autre que l'automorphisme intérieur de $P(M, G)$ défini par l'élément (e, z) de $P(M, G)$.

Cela étant, considérons un espace fibré principal de groupe G et de base X, que nous pouvons supposer défini par un 1-cocycle g à valeurs dans le faisceau de groupes $\mathcal{G}$; soit $\mathbf{g}$ l'image de g dans $H^1(X, \mathcal{G})$.

G opérant dans M, G, $P(M, G)$ comme il a été dit, les espaces fibrés M^g, $(P(M, G))^g$ et G^g sont définis ([12]), et les faisceaux de germes de sections continues $\mathcal{M}^g$, $\mathcal{G}^g$, $(\mathfrak{P}(M, G))^g$ sont des faisceaux de groupes, et ce qui a été dit sur les automorphismes intérieurs définis par les éléments de $\{e\} \times G$ montre que $(\mathfrak{P}(M, G))^g$ s'identifie au produit direct croisé $P(\mathcal{M}^g, \mathcal{G}^g)$ des faisceaux $\mathcal{M}^g$ et $\mathcal{G}^g$. D'après le n° 14, on a donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X, \mathcal{M}^g) & \xrightarrow{i_1^*} & H^1(X, (\mathfrak{P}(M, G))^g) & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{G}^g) \\ & & \downarrow i_g & & \downarrow i_g \\ & & H^1(X, \mathfrak{P}(M, G)) & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{G}). \end{array}$$

L'identification ci-dessus et la proposition 9.1 permettent alors de conclure :

THÉORÈME II.1. — *Les classes d'espaces fibrés principaux de base X et de groupe $P(M, G)$ qui ont pour image $L(\mathbf{g})$ dans la projection canonique de $P(M, G)$ sur G correspondent biunivoquement aux classes d'intransitivité de $H^0(X, \mathcal{G}^g)$ opérant sur $H^1(X, \mathcal{M}^g)$.*

REMARQUES. — 1° Le théorème II.1, ramène la classification des espaces fibrés dont le groupe structural est un produit direct croisé à deux invariants, dont le premier ne dépend (la base mise à part) que de G, et dont le second varie dans un ensemble ne dépendant que de M et du premier. Nous avons donné ce théorème dans le cadre restreint des classes d'espaces fibrés (i. e. : nos faisceaux sont des germes de sections d'espaces fibrés); on pourrait l'étendre au cas général, au prix de quelques complications techniques (*cf.* remarque du n° 9).

([12]) *Voir* n° 10.2.

2° La proposition 14.1 (que nous avons utilisée pour la démonstration du théorème II.1) est contenue dans ce théorème. En effet, si l'on prend pour G le groupe M opérant sur lui-même par les automorphismes intérieurs, $H^0(X, \mathcal{G}^g)$ opère *trivialement* sur $H^1(X, \mathcal{M}^g)$: soit $\mathbf{m} \in H^1(X, \mathcal{M}^g)$, $\{m_{ij}\}$ un cocycle, à valeurs dans $\mathcal{M}^g$, d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, dont la classe ait $\mathbf{m}$ pour image, et soit n une section de $\mathcal{G}^g$; n_i étant la restriction de n à U_i, la classe $n.\mathbf{m}$ est l'image du cocycle

$$m'_{ij} = n_i . m_{ij} = n_i m_{ij} n_i^{-1} = n_i m_{ij} n_j^{-1}.$$

Le théorème II.1 exprime donc que $H^1(X, \mathcal{M}^g)$ est un sous-ensemble de $H^1(X, \mathfrak{P}(M, M))$. Mais l'application $k : (m, n) \rightarrow (mn, n)$ est un *isomorphisme* du groupe $P(M, M)$ sur le produit direct $M \times M$ [cela provient par exemple de ce que l'ensemble des éléments de la forme (m^{-1}, m) constitue un sous-groupe distingué de $P(M, M)$, et qu'on peut écrire d'une façon et d'une seule $(m, n) = (mn, e)\ (n^{-1}, n)$]. Cet isomorphisme induit une bijection $k^* : H^1(X, \mathfrak{P}(M, M)) \rightarrow H^1(X, \mathcal{M} \times \mathcal{M})$; ce dernier ensemble est évidemment en correspondance biunivoque avec le produit

$$H^1(X, \mathcal{M}) \times H^1(X, \mathcal{M}),$$

et en composant i_1^*, i_g, et k^*, on voit que $H^1(X, \mathcal{M}^g)$ s'interprète comme le sous-ensemble $H^1(X, \mathcal{M}) \times \{\mathbf{g}\}$ de ce dernier produit direct.

3° Il est facile, dans le cas général, d'interpréter directement une classe de $H^1(X, \mathcal{M}^g)$ en terme d'espace fibré (non principal) de groupe structural $P(M, G)$ ([13]). Soit $\mu \in H^1(X, \mathcal{M}^g)$. Choisissons un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X assez fin pour que M^g soit trivial au-dessus de chaque ensemble de $\mathcal{U}$, et pour que μ soit l'image d'un élément m de $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{M}^g)$. Soit $\{m_{ij} : U_{ij} \rightarrow M^g\}$ un cocycle de la classe m. Soit $m_{ij}(x)y$ le transformé d'un point $y \in M_x^g$ par multiplication à gauche (au sens de la fibre M_x^g) par le point $m_{ij}(x) \in M_x^g$. Posons $M_i^g = \varpi^{-1}(U_i)$, et faisons avec les notations du n° 10.1, choix d'un système d'homéomorphismes Φ_i de $U_i \times M$ sur M_i^g (ce qui est possible d'après le choix de $\mathcal{U}$). Dans l'espace-somme $E_{\mathcal{U}}$ des M_i^g introduisons la relation d'équivalence

$$(15.1) \quad m_i \equiv m_j \Leftrightarrow \{m_i \in M_i^g, m_j \in M_j^g, \varpi(m_i) = \varpi(m_j) = x\,;\, m_j = m_{ji}(x) m_i\}.$$

L'espace-quotient E est localement homéomorphe à M^g. De façon précise, si l'on pose, quels que soient les indices i, j, k,

$$\varpi_k(m_k) = m_k^0, \qquad \varpi_i(m_{ij}) = m_{ij}^0, \qquad \text{d'où} \qquad \varpi_j(m_{ij}) = g_{ji}.m_{ij}^0,$$

([13]) Il faut se garder de confondre les classes d'espaces fibrés M^g-principaux, et les classes d'espaces fibrés $(X \times P(M, G))$-principaux (le théorème II.1 et la proposition 11.1 montrent précisément qu'une telle identification n'est en général pas possible) : cependant un espace M^g-principal peut être regardé comme un espace fibré de base X, de groupe structural $P(M, G)$, et de fibre M.

la relation (15.1) devient, en identifiant, grâce aux Φ_i, $E_{\mathfrak{U}}$ à l'espace-somme des $U_i \times M$:

$$(15.2) \quad (x_i, m) \equiv (x_j, m') \Longleftrightarrow \{ x_i = x_j \in U_{ij}, m \text{ et } m' \in M, m' = m^0_{ji}(g_{ji}.m) \}.$$

On voit ainsi que E est un espace fibré de fibre M, et dont le groupe est l'espace-produit $M \times G$ opérant sur l'espace M par la formule

$$(m, g).m' = m(g.m') \qquad (m \text{ et } m' \in M, g \in G).$$

Ce groupe est bien $P(M, G)$. On peut vérifier que E est (à un X-isomorphisme près) indépendant des choix faits (recouvrement $\mathfrak{U}$, m, m_{ij}, Φ_i); nous ne le ferons pas ici, car il est clair que l'espace fibré principal de groupe $P(M, G)$ associé à E appartient à la classe $L(i_g(i_1(\mu)))$, ce qui assure le caractère intrinsèque de la correspondance. Nous noterons ψ l'application ainsi définie de $H^1(X, \mathfrak{M}^g)$ dans l'ensemble des classes d'espaces fibrés de base X, de fibre M, et de groupe $P(M, G)$.

4° L'image par ψ de l'élément neutre de $H^1(X, \mathfrak{M}^g)$ est (la classe de) l'espace M^g lui-même [considéré par « accroissement du groupe structural » [14] comme ayant $P(M, G)$ comme groupe structural].

5° Soit $\mu \in H^1(X, \mathfrak{M}^g)$. Pour que $\psi(\mu)$ possède une section, il faut et il suffit qu'il existe une collection de sections m_i de M^g_i telle que $m_j = m_{ji} m_i$ d'après (15.1), donc que μ soit l'élément neutre de $H^1(X, \mathfrak{M}^g)$; l'image par ψ de $H^1(X, \mathfrak{M}^g)$ ne contient donc qu'un espace dont les fibres aient une structure de groupe, savoir M^g. De plus, l'existence d'une section entraîne la :

Proposition 15.1. — *Supposons X localement compact et paracompact; alors si M est homotopiquement rétractile, ou si X est contractile, $H^1(X, \mathfrak{M}^g)$ est réduit à son élément neutre.*

6° *Caractère fonctoriel.* — Supposons que G opère sur les groupes topologiques M et N, et soit f une G-représentation continue de M dans N [i. e. une représentation continue de M dans N telle que $f(g.m) = g.f(m)$, $m \in M$, $n \in N$, $g \in G$]; f induit d'une part un homomorphisme du faisceau $\mathfrak{M}^g$ dans le faisceau $\mathfrak{N}^g$, donc une application f^* de $H^1(X, \mathfrak{M}^g)$ dans $H^1(X, \mathfrak{N}^g)$, d'autre part une représentation de $P(M, G)$ dans $P(N, G)$, d'où une application $\tilde{f}$ de $\widetilde{(X \times P(M, G))}$ dans $\widetilde{(X \times P(N, G))}$, et de l'ensemble des

[14] *N. B.* — Nous emploierons l'expression « accroissement du groupe structural » là où le Séminaire Cartan 1949-1950 dit *extension* du groupe. Nous préférons en effet garder ce dernier terme pour le cas où l'espace fibré de groupe N est l'image (par projection canonique) d'un espace fibré de groupe M, N étant un *quotient* du groupe M : le groupe M étant une extension du groupe N, nous dirons aussi que le second espace fibré est une extension du premier.

classes d'espaces fibrés de fibre M, groupe $P(M, G)$ dans l'ensemble des classes d'espaces fibrés de fibre N, groupe $P(N, G)$. Il résulte immédiatement du n° **14** que

$$(15.3) \qquad \tilde{f}\circ\psi = \psi\circ f^{\star}.$$

16. Restriction du groupe structural. — Soit L un sous-groupe de M.

Hypothèse (LT). — *Nous dirons que le sous-groupe L du groupe topologique M satisfait à l'hypothèse* (LT) *si la fibration de M sur M/L est localement triviale.*

Il revient au même de dire qu'il existe au voisinage de la classe L de M/L une application continue $M/L \to M$ « remontant » la projection $p : M \to M/L$: par translation, il existe alors des sections de M au voisinage de chaque point de M/L. Si M est séparé, L est alors nécessairement *fermé*. Sauf mention explicite du contraire, nous supposerons toujours désormais qu'un sous-groupe d'un groupe topologique *satisfait à l'hypothèse* (LT), et nous poserons $N = M/L$.

Cette hypothèse entraîne que le faisceau-quotient $\mathcal{M}/\mathcal{L}$ du faisceau $\mathcal{M}$ des germes d'applications continues de X dans M par le sous-faisceau de celles qui sont à valeurs dans L *s'identifie* au faisceau $\mathcal{N}$ des germes d'applications continues de X dans l'espace homogène $N = M/L$: en effet, l'application canonique de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est un homomorphisme de faisceaux, qui par passage au quotient définit une application de $\mathcal{M}/\mathcal{L}$ dans $\mathcal{N}$ qui est *injective* sans aucune hypothèse sur L, vu la proposition 2.1; or si $x \to n(x)$ est une section de $\mathcal{N}$ au voisinage de x, et s une section locale de M au voisinage de $n(x)$, l'application $x \to s(n(x))$ est une section de $\mathcal{M}$ au voisinage de x dont l'image dans $\mathcal{N}$ est précisément n; $\mathcal{M}/\mathcal{L} \to \mathcal{N}$ est donc un *isomorphisme de faisceaux.*

Plus généralement, soit G un groupe topologique opérant sur le groupe topologique M en respectant L. Tout espace fibré principal E de base X et de groupe G (localement trivial) définit alors les espaces associés M^E, L^E, $(M/L)^E$; le faisceau des germes de sections continues $\mathcal{L}^E$ est un sous-faisceau de $\mathcal{M}^E$, et le faisceau-quotient $\mathcal{M}^E/\mathcal{L}^E$ s'identifie au faisceau $\mathcal{N}^E$ des germes de sections continues de $(M/L)^E$: en effet, la question étant purement locale, on se ramène au cas particulier ci-dessus en supposant E trivial.

On a donc la suite exacte de faisceaux

$$(16.1) \qquad e \to \mathcal{L}^E \to \mathcal{M}^E \to \mathcal{N}^E \to e.$$

Cela étant, posons $G = L$; nous ferons opérer le groupe structural L sur le groupe (resp. l'espace) M par les automorphismes intérieurs (resp. les translations à gauche), et noterons $M^{\cdot E}$ (resp. M^E) l'espace fibré associé à E, de fibre M.

$E' = M^E$ est un espace fibré principal de groupe M, obtenu par « accroissement » à M du groupe structural de E; réciproquement, E est un sous-espace de E', obtenu par « restriction » du groupe structural de E'.

E' étant donné, nous nous proposons de chercher tous les sous-espaces E donnant E' par accroissement du groupe structural, et de les classer.

1° Supposons que le problème admette une solution E. Considérons les espaces $L^{\cdot E}$, $M^{\cdot E}$, $N^{\cdot E}$. Les opérations de L sur N déduites des automorphismes intérieurs de M par des éléments de L n'étant autres que les translations à gauche de l'espace homogène N par des éléments de L, $N^{\cdot E}$ est isomorphe à N^E; de plus, M opérant sur N par les translations à gauche et sur lui-même par les automorphismes intérieurs, il est classique (et trivial!) que $N^{E'} = N^E$ et que $M^{\cdot E'} = M^{\cdot E}$.

D'autre part $\mathcal{N}^{\cdot E}$ possède au moins une section (faisceau-quotient d'un faisceau de groupes), et l'on a le diagramme commutatif

$$(16.2)\qquad \begin{array}{ccccccc} H^0(X, \mathcal{M}^{\cdot E}) & \xrightarrow{p_0^*} & H^0(X, \mathcal{N}^{\cdot E}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathcal{L}^{\cdot E}) & \xrightarrow{i_1^*} & H^1(X, \mathcal{M}^{\cdot E}) \\ & & \downarrow \approx & & \downarrow i_E & & \downarrow i_{E'} \\ H^0(X, \mathcal{M}^{E'}) & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{N}^{E'}) & \xrightarrow{\delta'} & H^1(X, \mathcal{L}) & \xrightarrow{i_1^*} & H^1(X, \mathcal{M}) \end{array}$$

où les trois premiers ensembles de la deuxième ligne constituent la suite exacte (5.1) ($M^{E'} = E'$, $N^{E'}$ est isomorphe à l'espace-quotient E'/L, quotient de E' par la relation d'équivalence qu'y définit L opérant par translations *à droite* sur les fibres de E', en sorte que $\mathcal{L}$ opère sans point fixe sur le faisceau d'ensembles $\mathcal{M}^{E'}$, le faisceau-quotient s'identifiant à $\mathcal{N}^{E'}$). Le reste du diagramme résulte de l'application du théorème I et de la proposition **14.1**.

Il reste à vérifier que ce diagramme est bien commutatif, c'est-à-dire à calculer δ' et $i_E \circ \delta$. Soit $n \in H^0(X, \mathcal{N}^{\cdot E})$. Un choix d'homéomorphismes Φ_i de $U_i \times L$ dans E ($\mathcal{U}$ étant un recouvrement ouvert suffisamment fin de X) réalise canoniquement la trivialité locale des autres espaces intervenant dans (16.2), et détermine les applications λ_{ij} de U_{ij} dans L permettant d'effectuer les changements de cartes locales. La section n s'exprime alors par une collection d'applications n_i de U_i dans N, et U_i est supposé assez petit pour que n_i soit composé d'une application m_i de U_i dans M et de la projection $p : M \rightarrow M/L$. Dans ces conditions, la vérification est immédiate, car

$$\begin{aligned} i_E(\delta(n)) &= \text{classe de } \{ m_i^{-1} (\lambda_{ij} m_j \lambda_{ji}) \lambda_{ij} \}, \\ \delta'(n) &= \text{classe de } \{ l_{ij} \}, \qquad \text{où} \quad m_i = \lambda_{ij} m_j l_{ji}. \end{aligned}$$

2° Réciproquement, soit $\{ m_{ij} \} : U_{ij} \rightarrow M$ les changements de cartes locales associés à des systèmes d'homéomorphismes de $U_i \times M \rightarrow E'$, et n une section de $N^{E'}$ supposée exister; la classe

$$\delta'(n) = \text{classe de } \{ l_{ij} \}, \qquad \text{où} \quad m_i = m_{ij} m_j l_{ji}$$

permet de définir un espace fibré principal E et de groupe L, et les cocycles $\{l_{ij}\}$, $\{m_{ij}\}$ de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans $\mathcal{M}$ étant cohomologues, M^E est isomorphe à E'. On peut donc reconstituer avec E le diagramme (16.2). Remarquons enfin que les opérations de $H^0(X, \mathcal{M}^{\cdot E})$ sur $H^0(X, \mathcal{N}^{\cdot E})$ ne dépendent pas de E, mais seulement de E', et appliquons le complément du théorème I.1 : on retrouve ainsi et l'on complète un théorème de C. Ehresmann [12].

Proposition 16.1. — *Pour qu'on puisse restreindre le groupe structural M d'un espace fibré principal E' à un sous-groupe L vérifiant l'hypothèse* (LT), *il faut et il suffit que l'espace E'/L ait une section; à toute section de E'/L est associée une classe d'espaces fibrés principaux de groupe L qui, par accroissement du groupe structural, appartiennent à la classe de E'; deux sections de E'/L sont associées à la même classe de groupe L si et seulement si elles sont transformées l'une de l'autre par une section de* $M^{\cdot E'}$ (espace fibré de fibre M, groupe structural M opérant sur lui-même par les automorphismes intérieurs, espace principal associé E').

Corollaire. — *Pour que la solution* (si elle existe) *soit unique, il faut et il suffit que* $H^0(X, \mathcal{M}^{\cdot E'})$ *opère transitivement sur* $H^0(X, \mathcal{N}^{E'})$ ([15]).

Remarques. — 1° Si L est un sous-groupe *distingué* de M, on retrouve plus rapidement la première partie (classique) de la proposition 16.1 en considérant la suite exacte

$$H^1(X, \mathcal{L}) \xrightarrow{i_1^*} H^1(X, \mathcal{M}) \xrightarrow{p_1^*} H^1(X, \mathcal{N}),$$

qui montre que les espaces E' tels que le problème soit possible sont ceux tels que l'espace associé $N^{E'}$ (qui, L étant distingué, est fibré *principal* de groupe N) soit *trivial* [élément neutre de $H^1(X, \mathcal{N})$], c'est-à-dire *ait une section.*

2° On vérifie aisément que si φ désigne l'application canonique de E sur $E'/L = N^{E'}$, n une section de E'/L, et P l'espace $\overset{-1}{\varphi}(n(X))$, P (qui est classiquement un espace fibré principal de groupe L) vérifie $K(P) = \delta'(n)$, relation de compatibilité rassurante !

3° Si l'on veut abandonner la partie classique de la proposition 16.1, les démonstrations sont beaucoup plus courtes, car il n'y a pas lieu de faire intervenir les deux premiers ensembles de la deuxième ligne du diagramme, ni de démontrer de relation de commutativité.

17. Les classes d'homotopie de sections. — Soit A un espace fibré de base *localement compacte* X, $\mathcal{A}$ le faisceau des germes de sections (continues)

([15]) C'est évidemment le cas lorsque E' est trivial, et que M est le groupe $P(L, N)$.

de A. Munissons l'ensemble des applications de X dans A de la topologie de la convergence compacte : l'ensemble $H^0(X, \mathcal{A})$ des sections de A devient de ce fait un espace topologique; nous dirons que deux sections s, s' de A sont *homotopes* s'il existe une application continue f du segment $I=[0, 1]$ dans l'espace $H^0(X, \mathcal{A})$ avec $f(0)=s$, $f(1)=s'$.

Remarque. — Toute application $f : I \to H^0(X, \mathcal{A})$ définit une application continue $f' : X \times I \to A$, et pour que f soit continue, il faut et il suffit que f' le soit [16] : autrement dit, deux sections sont homotopes si elles le sont dans l'ensemble des applications continues de X dans A, l'homotopie déplaçant en outre chaque point dans *sa* fibre.

Nous noterons $\tilde{H}^0(X, \mathcal{A})$ l'ensemble des classes d'homotopie des sections de A au-dessus de X.

Si chaque fibre de l'espace est munie (canoniquement) d'une structure de groupe, $\mathcal{A}$ est un faisceau de groupes, $H^0(X, \mathcal{A})$ est un groupe topologique et son quotient $\tilde{H}^0(X, \mathcal{A})$ n'est autre que le quotient de $H^0(X, \mathcal{A})$ par le sous-groupe distingué des sections homotopes à la section-unité : en effet, l'homotopie respecte évidemment la loi de composition des sections. Dans ce cas, $\tilde{H}^0(X, \mathcal{A})$ est donc aussi un groupe.

Supposons que le groupe topologique G opère sur le groupe topologique M, en respectant le sous-groupe L [qui satisfait à l'hypothèse (LT)]. Avec les notations du n° 16, E étant un espace fibré principal de groupe G, on définit trivialement la suite d'applications

$$\tilde{H}^0(X, \mathcal{L}^E) \to \tilde{H}^0(X, \mathcal{M}^E) \to \tilde{H}^0(X, \mathcal{N}^E). \tag{17.1}$$

Nous supposerons désormais l'espace X localement compact et paracompact. Le théorème de relèvement des homotopies d'applications de X dans la base d'un espace fibré localement trivial est donc applicable. Or M^E est un espace fibré localement trivial sur N^E parce que la fibration de M sur N est localement triviale.

1° La suite (17.1) est *exacte*. Il suffit de montrer que si une section de M^E a une projection homotope à la section-unité e_N de N^E, cette section m est homotope à une section de L^E. L'homotopie $h : X \times I \to N^E$, telle que $h(x, 0)=e_N$, $h(x, 1)=p \circ m$ se remonte en une homotopie $\mathbf{h} : X \times I \to M^E$ telle que $\mathbf{h}(x, 1)=m$, $p\mathbf{h}(x, 0)=e_N$. Comme $\mathbf{h}(x, t)$ est automatiquement, pour tout t, une section de M^E, $\mathbf{h}(x, 0)$ est une section de L^E.

C. Q. F. D.

2° Nous allons montrer que l'application δ passe aux quotients dans deux cas particuliers :

---

[16] *Voir* par exemple Bourbaki, *Topologie générale*, chap. X, § 2, corollaire de la proposition 9.

a. L est un sous-groupe *distingué* de M : il suffit alors de voir que si une section n de N^E est homotope à e_N, elle est l'image par p d'une section de M^E (th. I.2). Or cela résulte du théorème de relèvement des homotopies, puisque l'application e_N de X dans N^E se relève (par exemple en la section-unité de M^E).

b. L est quelconque, mais G opère dans L soit par les automorphismes intérieurs de L, soit trivialement.

Soit alors $n(x, t)$ une homotopie entre les deux sections n^0 et n^1 de N^E. Soit $\mathfrak{U} = \{ U_i \}$ un recouvrement ouvert de X assez fin pour que la restriction n_i^0 de n^0 à U_i se remonte en une section de M^E au-dessus de U_i; U_i étant paracompact, la restriction n_i de $n(x, t)$ à $U_i \times I$ se relève en une application $m_i(x, t)$ à valeurs dans M^E; l'application $l_{ij} = m_i^{-1} m_j$ est à valeurs dans L^E, et, pour chaque valeur de t, l'application partielle $\{ l_{ij}^t \} : x \to l_{ij}(x, t)$ est une section de $\mathcal{L}^E$ au-dessus de U_{ij}, variant continûment avec t; il s'agit de montrer que les cocycles l_{ij}^0, l_{ij}^1 de $\mathfrak{U}$ sont cohomologues. Or soit $\{ k_{ij}^t \}$ le cocycle de $\mathfrak{U}$ dans $\mathcal{L}$ que (4.8) associe au cocycle $\{ l_{ij}^t \}$: $\{ k_{ij}(x, t) = k_{ij}^t(x) \}$ est un cocycle du recouvrement $\mathfrak{U} \times I$ de $X \times I$ à valeurs dans $\mathcal{L}$, et définit donc un espace fibré K de base $X \times I$, groupe L, isomorphe, puisque X est paracompact, à un produit direct $K' \times I$, où K' est fibré de base X; ceci est une autre façon de dire que tous les cocycles k_{ij}^t sont cohomologues, donc puisque i_E (n° 14) est biunivoque, que tous les cocycles l_{ij}^t le sont (lemme 3.1) : en définitive $\delta(n^0) = \delta(n^1)$.

Proposition 17.1. — *Soient X un espace localement compact et paracompact, E un espace fibré principal de base X dont le groupe G opère sur le groupe topologique M en respectant un sous-groupe L satisfaisant à l'hypothèse* (LT). *Soit $N = M/L$. Alors, si L est distingué, ou si G opère sur L par les automorphismes intérieurs de L, on a le diagramme commutatif de suites exactes*

$$(17.1)\qquad \begin{array}{ccccccccc} e \to H^0(X, \mathcal{L}^E) & \to & H^0(X, \mathcal{M}^E) & \to & H^0(X, \mathcal{N}^E) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathcal{L}^E) & \to & H^1(X, \mathcal{M}^E) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \nearrow \tilde{\delta} & & & \\ \tilde{H}^0(X, \mathcal{L}^E) & \to & \tilde{H}^0(X, \mathcal{M}^E) & \to & \tilde{H}^0(X, \mathcal{N}^E) & & & & \end{array}$$

Ce diagramme a un caractère fonctoriel évident, que nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et de vérifier. Il en résulte :

Proposition 17.2. — *Supposons X localement compact et paracompact. Alors l'énoncé obtenu en remplaçant dans la proposition* 16.1 « *section* » *par* « *classe de sections homotopes* » *est vérifié.*

Corollaire. — *Si X a le type d'homotopie d'un point, tout espace fibré de groupe M détermine, de façon unique, un espace fibré de groupe L dont il se déduit par accroissement du groupe structural.*

18. Extension à noyau abélien du groupe structural. — Soit M un groupe topologique *extension* d'un groupe topologique N (autrement dit, N est un *quotient* de M). Un espace fibré principal E de groupe M est une *extension* de l'espace fibré principal F de groupe N si F est isomorphe à l'espace N^E (M opérant dans l'espace N de façon évidente). On dit aussi que E se déduit de F par extension du groupe structural ([17]).

Supposons que X soit paracompact, et que le noyau L de l'extension M de N soit *abélien* et satisfasse à l'hypothèse (LT). Soit F un espace fibré principal de base X et de groupe N. Soit $n = K(F)$ l'image canonique (n° 11) de F dans $H^1(X, \mathcal{N})$. D'après l'hypothèse faite sur X, $\Delta(n)$ est défini, et d'après le n° 13, on peut supposer que $\Delta(n)$ est un élément de $H^2(X, \mathcal{L}^F)$, où $\mathcal{L}^F$, faisceau des germes de sections continues de l'espace fibré L^F associé à F et aux opérations de N dans L (n° 7), est *canoniquement* associé à F. D'après les n^os^ 7 et 11, pour qu'il existe une *extension* E de F, il faut et il suffit que $\Delta(n)$ soit nul. Si cette condition est remplie, faisons opérer M sur lui-même par les automorphismes intérieurs, et utilisons les notations du n° 16. Alors les espaces fibrés $N^{\cdot E}$, $L^{\cdot E}$ sont canoniquement isomorphes aux espaces $N^{\cdot F}$ et L^F.

D'après (16.1) et le n° 14, on a donc le diagramme

$$
(18.1)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
H^0(X, \mathcal{M}^{\cdot E}) & \to & H^0(X, \mathcal{N}^{\cdot F}) & \to & H^1(X, \mathcal{L}^F) & \to & H^1(X, \mathcal{M}^{\cdot E}) & \to & H^1(X, \mathcal{N}^{\cdot F}) \\
 & & & & & & \downarrow{\scriptstyle i_E} & & \downarrow \\
 & & & & & & H^1(X, \mathcal{M}) & \to & H^1(X, \mathcal{N})
\end{array}
$$

Appliquons maintenant le complément au théorème I.2 (n° 6) :

Proposition 18.1. — *Si X est paracompact et si L, sous-groupe abélien distingué de M, satisfait à l'hypothèse* (LT), *pour qu'un espace fibré principal F de base X et de groupe M/L admette une extension de groupe M, il faut et il suffit que $\Delta K(F) \in H^2(X, \mathcal{L}^F)$ soit nul. Une telle extension E définit des opérations du groupe $H^0(X, \mathcal{N}^{\cdot F})$ dans l'ensemble $H^1(X, \mathcal{L}^F)$: toutes les extensions correspondent biunivoquement aux classes d'intransitivité de $H^0(X, \mathcal{N}^{\cdot F})$, E correspondant à la classe de l'élément nul de $H^1(X, \mathcal{L}^F)$.*

Remarque. — On notera que les opérations de $H^0(X, \mathcal{N}^{\cdot F})$ dans $H^1(X, \mathcal{L}^F)$ ne sont *pas* celles déduites des opérations de N dans L (*cf.* prop. 7.1), et dépendent, *sauf si L est central*, du choix de E. De même, la correspondance qui à un élément de $H^1(X, \mathcal{L}^F)$ associe une extension de F n'est définie que lorsqu'on a choisi E. Si L est *central*, les classes d'extension correspondent biunivoquement à un quotient Q_E de $H^1(X, \mathcal{L})$ par un sous-groupe isomorphe à $H^0(X, \mathcal{N}^{\cdot F})$/image de $H^0(X, \mathcal{M}^{\cdot F})$ car M opérant trivialement dans L, N opère dans M (par les automorphismes intérieurs

([17]) Cette terminologie est celle de C. Ehresmann [12*a*].

de M) et $M^{\cdot E}$ est isomorphe à $M^{\cdot F}$. Cependant l'application

$$H^1(X, \mathcal{L}) \to H^1(X, \mathcal{M})$$

dépend encore du choix de E, et non pas seulement de F, même si M est abélien : cette application est en effet l'application $\lambda \to \lambda.K(E)$ [$\lambda \in H^1(X, \mathcal{L})$] déduite des opérations de $H^1(X, \mathcal{L})$ dans $H^1(X, \mathcal{M})$ telles qu'elles ont été définies au n° 8. Elle est donc en général distincte de i_1^*.

CHAPITRE III.

Les espaces fibrés analytiques.

A. — Généralités.

19. Transcription des résultats du chapitre II dans le cas analytique. — Dans ce chapitre les espaces seront des variétés analytiques (paracompactes), et dans le paragraphe A les résultats vaudront aussi bien, sauf mention expresse du contraire, pour l'analytique réel que pour l'analytique complexe. Il sera cependant entendu que dans le cas complexe « groupe de Lie » signifiera groupe de Lie complexe.

Soit E un espace fibré analytique de base X, de groupe G, et de fibre F. Cela signifie que, le groupe de Lie G opérant analytiquement sur F, on s'est donné un système de cartes locales représentant localement E comme un produit direct (chap. II, n° 10.1) de manière que les applications $x \to g_{ij}(x)$ de U_{ij} dans G correspondantes soient *analytiques* : alors les homéomorphismes $\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i : (x, f) \to (x, g_{ji}(x).f)$ de $U_{ij} \times F$ sur lui-même sont des isomorphismes de sa structure analytique (U_{ij} étant naturellement muni de la structure induite par celle de X), de sorte que les Φ_i déterminent sur E une structure analytique : c'est toujours cette structure analytique qui sera considérée sur E. Deux systèmes d'homéomorphismes différents $\{\Phi_i\}$ et $\{\Phi'_i\}$ (que, pour simplifier les notations nous supposons attachés au même recouvrement ouvert de X) définiront sur E la *même structure* d'espace fibré analytique si et seulement si l'application $x \to g_i(x) = \Phi_{i,x}^{-1} \circ \Phi'_{i,x}$ de U_i dans G est, pour tout i, *analytique* ([18]).

La structure d'espace fibré analytique de E fait de E un espace fibré ordinaire (nous dirons « topologique »). Inversement, étant donné un espace fibré topologique sur X, de groupe G et de fibre F sur laquelle G opère analytiquement, on ne peut pas en général doter cet espace d'une structure

---

([18]) La notion de X-isomorphisme analytique se définit comme dans le cas topologique, mais en spécifiant que les homéomorphismes sont *analytiques*; elle conduit à des formules analogues à celles du n° 10.1, l'homéomorphisme Θ étant analytique à la condition nécessaire et suffisante que les applications g_i des U_i dans G soient analytiques.

analytique compatible avec sa fibration ([19]); lorsqu'on le peut, ce n'est pas nécessairement de façon unique ([20]).

Si E est analytique, ϖ est une application analytique de E sur X, F_x est un sous-ensemble analytique de E, et Φ_i une application analytique. Le faisceau ${}^a\mathcal{S}$ des germes de sections analytiques de E est un sous-faisceau du faisceau ${}^c\mathcal{S}$ des germes de sections continues de E au sens du n° 2, et $H^0(X, {}^a\mathcal{S})$ est l'ensemble (peut-être vide) des sections analytiques de E au-dessus de X. Plus particulièrement, le faisceau ${}^a\mathcal{F}$ des germes d'applications analytiques de X dans F s'identifie au faisceau des germes de sections analytiques de l'espace fibré analytique trivial $X \times F$ et $H^0(U, {}^a\mathcal{F})$ est pour tout ouvert U de X, l'ensemble des applications analytiques de U dans F.

Les résultats du chapitre II se transposent pour la plupart sans difficulté en remplaçant partout *continu* par *analytique*. En particulier :

PROPOSITION 19.1. — *L'ensemble $H^1(X, {}^a\mathcal{G})$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des classes d'équivalence des espaces fibrés analytiques, de groupe structural G et de base X, qui sont analytiquement X-isomorphes.* Nous noterons ${}^aK$, ${}^aL$ les applications réalisant cette identification ([21]).

PROPOSITION 19.2. — *Soit L un sous-groupe fermé du groupe de Lie M; pour qu'il existe un espace fibré analytique principal E de groupe L tel que M^E soit analytiquement X-isomorphe à un espace fibré principal analytique E' de groupe M donné à l'avance, il faut et il suffit que l'espace fibré analytique E'/L* (de fibre M/L) *ait une section analytique; les solutions du problème correspondent biunivoquement* (à un X-isomorphisme *analytique* près) *aux classes d'intransitivité du groupe des sections analytiques de l'espace fibré analytique ${M'}^E$ opérant dans l'ensemble des sections analytiques* de E'/L.

([19]) Il est facile de construire des espaces fibrés *principaux* de groupe C^* qui ne possèdent *aucune* structure analytique compatible avec leur structure fibrée. En effet, d'après un théorème de Dolbeault ([11], th. II.3), pour qu'un tel espace, de base X, possède une telle structure analytique, il faut et il suffit que sa classe de Chern [élément arbitraire de $H^2(X, Z)$] ait pour image dans la cohomologie réelle de X une classe définissable par une forme différentielle fermée de type (1, 1). Or le quotient de $H^2(X, Z)$ par son groupe de torsion engendrant (par extension des scalaires) la cohomologie de X à coefficients dans un corps, il suffit de prendre pour X une variété kählérienne compacte ayant des classes de cohomologie de type (2, 0) pour être assuré de l'existence de classes de Chern dont les images ne sont pas définissables par des formes de type (1, 1). De telles variétés existent : par exemple, les tores complexes.

([20]) Des exemples sont donnés par la dernière remarque du n° 31, ou par la proposition 35.1.

([21]) Plus généralement, si E est un espace fibré analytique dont les fibres sont des groupes de Lie, on définit comme au n° 10.2 des espaces fibrés analytiques localement E-triviaux [5]. La proposition 19.1 s'étend alors, et interprète $H^1(X, {}^a\mathcal{E})$ comme l'ensemble des classes d'espaces fibrés analytiques E-principaux qui sont analytiquement E-isomorphes.

Le lecteur se reportera, pour les notations et la démonstration, au chapitre II (n° **16**) : L étant fermé, la fibration de M sur $M/L = N$ est non seulement localement triviale, mais encore analytique : il en résulte que les faisceaux $({}^{a}\mathfrak{M})/({}^{a}\mathcal{L})$ et ${}^{a}(\mathfrak{N})$ sont isomorphes, d'où l'on déduit facilement, pour tout espace fibré analytique principal E dont le groupe G opère analytiquement sur le groupe M en respectant L, la suite exacte des faisceaux

$$e \to {}^{a}\mathcal{L}^{E} \to {}^{a}\mathfrak{M}^{E} \to {}^{a}\mathfrak{N}^{E} \to e. \tag{19.1}$$

La suite de la démonstration est identique à celle du n° **16**.

De même, la suite exacte (**19.1**) et les considérations du n° **18** permettent d'énoncer :

Proposition 19.3. — *Soit L un sous-groupe fermé, abélien, distingué du groupe de Lie M. Pour qu'un espace fibré analytique principal F de base X et de groupe $N = M/L$ admette une extension analytique, il faut et il suffit que $\Delta\,{}^{a}K(F) \in H^{2}(X, {}^{a}\mathcal{L}^{F})$ soit nulle. Une telle extension analytique E définit des opérations du groupe $H^{0}(X, {}^{a}\mathfrak{N}^{\cdot F})$ dans l'ensemble $H^{1}(X, {}^{a}\mathcal{L}^{F})$: toutes les extensions correspondent biunivoquement, à un X-isomorphisme analytique près, aux classes d'intransitivité de $H^{0}(X, {}^{a}\mathfrak{N}^{\cdot F})$, E correspondant à la classe de l'élément nul de $H^{1}(X, {}^{a}\mathcal{L}^{F})$.*

20. Comparaison des cas analytique et topologique. — Il existe une application canonique évidente de la suite exacte (**19.1**) dans la suite exacte (**16.1**), d'où l'on déduit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
e \arrow[r] & H^{0}(X, {}^{a}\mathcal{L}^{E}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{0}(X, {}^{a}\mathfrak{M}^{E}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{0}(X, {}^{a}\mathfrak{N}^{E}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{1}(X, {}^{a}\mathcal{L}^{E}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{1}(X, {}^{a}\mathfrak{M}^{E}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{1}(X, {}^{a}\mathfrak{N}^{E}) \arrow[d] \\
e \arrow[r] & H^{0}(X, {}^{c}\mathcal{L}^{E}) \arrow[r] & H^{0}(X, {}^{c}\mathfrak{M}^{E}) \arrow[r] & H^{0}(X, {}^{c}\mathfrak{N}^{E}) \arrow[r] & H^{1}(X, {}^{c}\mathcal{L}^{E}) \arrow[r] & H^{1}(X, {}^{c}\mathfrak{M}^{E}) \arrow[r] & H^{1}(X, {}^{c}\mathfrak{N}^{E})
\end{tikzcd}$$

où cependant les derniers ensembles et applications de chaque ligne ne sont définis que si L est *distingué*.

On en déduit en particulier :

Proposition 20.1. — *Soient L un sous-groupe fermé du groupe de Lie M, E un espace fibré analytique principal dont le groupe opère analytiquement sur M en respectant L. Soit N l'espace homogène M/L. Supposons que l'application $H^{1}(X, {}^{a}\mathcal{L}^{E}) \to H^{1}(X, {}^{c}\mathcal{L}^{E})$ ait un noyau nul. Alors, pour qu'une section analytique de N^{E} se remonte analytiquement en une section analytique de M^{E} il suffit qu'elle se remonte en une section continue de M^{E}.*

De même, si L est *abélien distingué*, on a, pour tout espace fibré analytique principal F de groupe N le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "{}^{a}K"] \arrow[d] & H^{1}(X, {}^{a}\mathfrak{N}) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & H^{2}(X, {}^{a}\mathcal{L}^{F}) \arrow[d] \\
F \arrow[r, "K"] & H^{1}(X, {}^{c}\mathfrak{N}) \arrow[r, "\Delta"] & H^{2}(X, {}^{c}\mathcal{L}^{F})
\end{tikzcd}$$

On en déduit en particulier :

Proposition 20.2. — *Si l'application* $H^2(X, {}^a\mathcal{L}^F) \to H^2(X, {}^c\mathcal{L}^F)$ *est biunivoque, pour que l'espace fibré analytique* F *de groupe* N *admette une extension analytique de groupe* M, *il faut et il suffit qu'il admette une extension topologique.*

L'hypothèse de la proposition 20.1 (resp. 20.2) est remplie notamment si M est un *revêtement* de N, quelle que soit la variété X : L est alors un sous-groupe *discret* de M, et les deux faisceaux ${}^a\mathcal{L}^F$, ${}^c\mathcal{L}^F$ sont isomorphes (et localement constants).

Nous verrons dans la suite des cas où, pour des variétés X particulières, les hypothèses de la proposition 20.1 (resp. 20.2) sont remplies pour des groupes L non discrets.

21. Les classes d'homotopie analytique des sections analytiques. — Soit G un groupe de Lie *opérant* (n° 1) sur le groupe de Lie M, E un espace fibré analytique principal sur X de groupe G, M^E l'espace fibré associé de fibre M : la fibre au-dessus de chaque point est donc munie canoniquement d'une structure de groupe de Lie isomorphe à M.

Définition. — Soit I le segment $[0, 1]$ (considéré comme plongé dans le plan complexe si X est analytique complexe). Nous dirons que deux sections analytiques μ, μ' de M^E sont *analytiquement homotopes* s'il existe une *application analytique* $F(x, t)$ de $X \times I$ dans M^E telle que :

(i) pour chaque t de I, $F_t(x) = F(x, t)$ est une section de M^E;

(ii) $F(x, 0) = \mu$; $F(x, 1) = \mu'$.

Pour que μ et μ' soient analytiquement homotopes, il faut et il suffit que la section $\mu^{-1}\mu'$ soit analytiquement homotope à la section-unité; l'ensemble des sections analytiques analytiquement homotopes à la section-unité constitue un sous-groupe distingué de $H^0(X, {}^a\mathcal{M}^E)$. L'homotopie analytique constitue donc une relation d'équivalence compatible avec la loi de multiplication des sections. Nous noterons $\tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{M}^E)$ le groupe-quotient des classes de sections analytiques analytiquement homotopes ([22]).

Si L est un *sous-groupe fermé distingué* de M, stable par les opérations

([22]) On peut définir aussi une notion d'homotopie analytique entre les sections analytiques d'un espace fibré principal de groupe G (resp. un espace fibré analytique E-principal) définies au-dessus d'un ouvert de la base; en effet la définition s'étend *et est encore une relation d'équivalence* $\mu^{-1}\mu'$ désignant alors une application de cet ouvert dans G (resp. une section de E au-dessus de cet ouvert), d'après le n° 10.2.

de G, et si $N = M/L$, on a un diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
S: & e \arrow[r] & H^0(X, {}^a\mathcal{L}^E) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X, {}^a\mathcal{M}^E) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X, {}^a\mathcal{N}^E) \arrow[r, "{}^a\delta"] \arrow[d] & H^1(X, {}^a\mathcal{L}^E) \arrow[ddd] \\
{}^a\tilde{S}: & & \tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{L}^E) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{M}^E) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{N}^E) \arrow[ur, dashed] \arrow[d] & \\
{}^c\tilde{S}: & & \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{L}^E) \arrow[r] & \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{M}^E) \arrow[r] & \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{N}^E) \arrow[dr] & \\
{}^cS: & e \arrow[r] & H^0(X, {}^c\mathcal{L}^E) \arrow[r] \arrow[u] & H^0(X, {}^c\mathcal{M}^E) \arrow[r] \arrow[u] & H^0(X, {}^c\mathcal{N}^E) \arrow[r] \arrow[u] & H^1(X, {}^c\mathcal{L}^E)
\end{tikzcd}
$$

dans lequel seule la suite ${}^a\tilde{S}$ n'est peut-être pas exacte; cependant dans cette suite il est évident que l'image de i est contenue dans le noyau de p. De plus, désignons par E' l'espace fibré analytique principal $E \times I$ de base $X \times I$. Alors :

PROPOSITION 21.1. — *Si $H^1(X, {}^a\mathcal{L}^E) \to H^1(X, {}^c\mathcal{L}^E)$ est à noyau nul, ${}^a\delta$ passe aux quotients; si $H^1(X \times I, {}^a\mathcal{L}^{E'}) \to H^1(X \times \mathrm{I}, {}^c\mathcal{L}^{E'})$ est à noyau nul, la suite ${}^a\tilde{S}$ est exacte.*

En effet, dans le premier cas, pour vérifier que deux sections analytiques de N^E, n et n', ont même image par δ si elles sont homotopes, il suffit, vu le théorème I.2 (n° 6), de montrer qu'une section n analytiquement homotope à la section neutre de N^E est projection d'une section analytique de M^E : c'est ce qui résulte de la proposition 20.1, puisque n, étant *a fortiori* continûment homotope à la projection de la section neutre de M^E, se remonte déjà continûment d'après le théorème de relèvement des homotopies.

Dans le second cas, soit m une section de M^E dont la projection est analytiquement homotope à la section neutre de N^E, et soit $F(x, t)$ la fonction réalisant cette homotopie. F est une section analytique de $N^{E'}$; comme $F(x, o)$ se remonte analytiquement en m, $F(x, t)$ se remonte continûment (relèvement des homotopies), donc analytiquement d'après l'hypothèse faite et la proposition 20.1 ; soit $G(x, t)$ l'homotopie analytique de sections de M^E ainsi obtenue : $G(x, o)m^{-1}$ est une section analytique de L^E, et en multipliant à gauche $G(x, t)$ par l'inverse de cette section, on réalise une homotopie analytique entre m et une section analytique de L^E, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. — Lorsque ${}^a\delta$ passe aux quotients, la suite

$$\tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{M}^E) \to \tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{N}^E) \to H^1(X, {}^a\mathcal{L}^E)$$

est visiblement exacte. Cela permet (*cf.* propos. 17.2) de remplacer dans la proposition 19.2 les groupes de sections analytiques par les groupes de classe d'homotopie analytique des sections analytiques.

PROPOSITION 21.2. — *Soient L un sous-groupe fermé distingué du groupe* *de Lie M, et E' un espace fibré analytique principal de groupe M et de base X. Supposons qu'il existe un espace fibré analytique principal E de groupe L tel que M^E soit analytiquement X-isomorphe à E' et que l'application ${}^a\delta : H^0(X, {}^a\mathcal{M}^{\cdot E}) \rightarrow H^1(X, {}^a\mathcal{L}^{\cdot E})$ passe aux quotients. Alors les classes d'espaces fibrés principaux analytiques analytiquement X-isomorphes de groupe L, qui par accroissement du groupe structural deviennent analytiquement X-isomorphes à E', correspondent biunivoquement aux classes d'intransitivité du groupe des classes de sections analytiques analytiquement homotopes de $M^{\cdot E'}$, ce groupe opérant dans le groupe des sections analytiques analytiquement homotopes de E'/L.*

Remarque. — Nous verrons au paragraphe B des exemples de variétés où l'on sera assuré (grâce à la proposition **21.1**) que ${}^a\delta$ passe aux quotients quel que soit l'espace fibré principal de groupe L (L étant *résoluble*) : dans ce cas, il suffira de savoir que E'/L a une section analytique pour être assuré que les hypothèses de la proposition **21.2** sont remplies.

Dans les deux numéros suivants, nous allons donner des applications aux problèmes de la restriction du groupe structural.

22. Restriction du groupe structural au groupe unimodulaire. — Soient $G = GL(n, C)$ le groupe linéaire complexe général à n variables, $S = SL(n, C)$ le sous-groupe des matrices complexes de déterminant $+1$. L'application $x \rightarrow \det(x)$ de G dans C^* est un homomorphisme ψ de noyau S. D'autre part, le centre de G s'identifie à C^* (multiples scalaires de la matrice-unité) et celui de S à Z_n (multiples de la matrice-unité par une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité). On a donc le diagramme commutatif de suites exactes de groupes

(**22.1**)
$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Z_n \arrow[r] \arrow[d] & C^* \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & C^* \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & C^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S/Z_n \arrow[r] \arrow[d] & G/C^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

où φ est l'endomorphisme $z \rightarrow z^n$ de C^* et où l'on vérifie que i est l'identité

Faisons opérer S sur G par les automorphismes intérieurs, ce qui induit des opérations de S dans tous les groupes du diagramme (**22.1**), d'ailleurs triviales sur Z_n et les différents exemplaires de C^*. X étant un espace topologique (resp. une variété analytique), soit s un 1-cocycle d'un recouvrement ouvert de X à valeurs dans $\mathcal{S}$, faisceau des germes d'applications continues (resp. analytiques) de X dans S; $\mathcal{G}$, ..., etc., désignant les faisceaux analogues, on déduit de (**22.1**) un diagramme commutatif de suites exactes de faisceaux d'où le diagramme commutatif

$$
\text{(22.2)}\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & 0 & 0 \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & & 0 \to H^0(X, Z_n) & \to H^0(X, \mathcal{C}^*) & \xrightarrow{\sigma} H^0(X, \mathcal{C}^*) \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \approx \\
 & & 0 \to H^0(X, \mathcal{S}^s) & \to H^0(X, \mathcal{G}^s) & \xrightarrow{\psi} H^0(X, \mathcal{C}^*) \\
 & & \downarrow & \downarrow \varpi & \\
 & & 0 \to H^0(X, \mathcal{S}^s/Z_n) & \xrightarrow{\rho} H^0(X, \mathcal{G}^s/\mathcal{C}^*) \to 0 & \\
 & & \downarrow \Delta & \downarrow & \\
H^0(X, \mathcal{C}^*) & \xrightarrow{\varphi} H^0(X, \mathcal{C}^*) & \xrightarrow{\partial_1} H^1(X, Z_n) & \xrightarrow{u} H^1(X, \mathcal{C}^*) & \\
\downarrow & \downarrow \approx & \downarrow k & \downarrow & \\
H^0(X, \mathcal{G}^s) & \xrightarrow{\psi} H^0(X, \mathcal{C}^*) & \xrightarrow{\partial_2} H^1(X, \mathcal{S}^s) & \to H^1(X, \mathcal{G}^s) & \\
 & & \downarrow & \downarrow & \\
 & & H^1(X, \mathcal{S}) & \to H^1(X, \mathcal{G}) &
\end{array}
$$

Il en résulte que les éléments de $H^1(X, \mathcal{S})$ ayant même image dans $H^1(X, \mathcal{G})$ que la classe de s s'identifient aux éléments de l'image de $k \circ \partial_1$, c'est-à-dire à l'image par k du noyau $\operatorname{Ker} u$ de u. Soit H_s l'image de Δ.

Proposition 22.1. — *Les espaces fibrés principaux de groupe $SL(n, C)$ qui sont $GL(n, C)$-équivalents à celui que définit le cocycle s sont en correspondance biunivoque avec les éléments de* $\operatorname{Ker} u/(\operatorname{Ker} u \cap H_s)$.

Corollaire. — *Supposons que l'homomorphisme $u : H^1(X, Z_n) \to H^1(X, \mathcal{C}^*)$ induit par l'injection $Z_n \to C^*$ soit injectif; alors si deux espaces fibrés sur X de groupe $SL(n, C)$ sont $GL(n, C)$-équivalents, ils sont isomorphes.*

Remarques. — 1° L'hypothèse du corollaire est en particulier remplie si $H^1(X, Z_n) = 0$, dans le cas topologique comme dans le cas analytique; elle est aussi remplie (et φ est même surjectif) dans le cas analytique complexe si X est une variété compacte : en effet toute application analytique de X dans C^* étant constante, elle possède une racine $n^{\text{ième}}$.

2° Lorsque $\operatorname{Ker} u \neq 0$, $\operatorname{Ker} u \cap H_s$ dépend effectivement de la classe de cohomologie de s. Le diagramme (22.2) permet d'en donner diverses interprétations : considéré comme image de $\Delta \bar{\rho}^1 \varpi$, il est isomorphe à

$$H^0(X, \mathcal{G}^s)/H^0(X, \mathcal{S}^s)\, H^0(X, \mathcal{C}^*),$$

donc à (Image ψ)/(Image φ). En particulier, il est isomorphe à $\operatorname{Ker} u$ lorsque s est un cobord : $\mathcal{G}^s$ est alors isomorphe à $\mathcal{G}$, donc au produit direct croisé $\mathfrak{T}(\mathcal{S}, \mathcal{C}^*)$, car la fibration de G sur C^* possède un *sous-groupe section*, savoir le sous-groupe des matrices diagonales inversibles dont tous les éléments non nuls sont égaux à 1, sauf celui de la première ligne qui reste arbitraire; il en résulte que ψ est surjective, ce qui entraîne notre assertion.

23. Restriction du groupe structural au groupe orthogonal. — Soient $O_n = O(n, C)$ le groupe orthogonal complexe à n variables, Y l'espace des matrices inversibles d'ordre n, complexes, symétriques. Si g' désigne la transposée d'une matrice $g \in G$, G opère sur Y par $\rho(g)y = gyg'$. Le groupe d'isotropie de la matrice-unité est O_n. Pour montrer que G opère transitivement sur Y, nous utiliserons le lemme suivant, dû à Weitzenbroeck (*Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.*, vol. 35, 1932, p. 328-330) :

Lemme. — *Le polynome caractéristique $f(\lambda)$ d'une matrice complexe non dégénérée g permet le calcul d'une racine carrée de g.*

En effet, il suffit de déterminer un polynome $h(\lambda)$ tel que $h^2 - \lambda$ soit divisible par f : $y = h(g)$ vérifiera bien $y^2 = g$. Or, cette détermination est possible : $\lambda^{\frac{1}{2}}$ étant holomorphe au voisinage de chacune des racines de f (qui sont toutes différentes de zéro par hypothèse), il suffit de déterminer h par la condition qu'il ait en chacune de ces racines même développement de Taylor que l'une des déterminations de $\lambda^{\frac{1}{2}}$ en ce point, du moins jusqu'à un ordre au moins égal à la multiplicité de cette racine : les racines de f seront alors racines de $h^2 - \lambda$ avec un ordre de multiplicité au plus égal.

On notera que si g est symétrique, il en est de même de $h(g)$. Il en résulte que, quel que soit g symétrique, $\rho[h(g)]e = g$, ce qui montre que Y s'identifie (comme variété analytique) à G/O_n.

Cela étant, nous nous proposons d'établir la :

Proposition 23.1. — *Si X est une variété analytique complexe compacte, deux espaces fibrés analytiques principaux sur X de groupe $O(n, C)$ qui sont $GL(n, C)$-équivalents analytiquement, sont analytiquement isomorphes.*

Nous devons donc montrer, vu la proposition 19.2, que toute section analytique z de l'espace fibré Y^E est image d'une section analytique de G^E : E est fibré analytique principal sur X de groupe O_n, et O_n opère sur lui-même par les automorphismes intérieurs, d'où les opérations de O_n sur G et G/O_n; l'identification de G/O_n à Y définit alors des opérations de O_n sur Y, et l'on vérifie immédiatement que ce sont aussi les automorphismes intérieurs induits par les éléments de O_n (de même que la stabilité de Y par ces automorphismes, cela résulte de ce que $g^{-1} = g'$ pour $g \in O_n$). Il en résulte que Y^E s'identifie à un sous-espace de G^E; à tout point de G^E, donc de Y^E, est associé canoniquement un « polynome caractéristique » (puisque deux matrices congrues modulo un automorphisme intérieur ont même polynome caractéristique); tout polynome à une variable $h(\lambda)$ associe à un point y de Y^E un point $h(y)$ de Y^E situé sur la même fibre.

Cela étant, à une section z de Y^E est associé un polynome caractéristique $f(\lambda)$, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes sur X, donc constantes sur chaque composante connexe de X. On peut se borner, pour faire la démonstration, à supposer X connexe. Soit $h(\lambda)$ le polynome que le lemme associe à f. L'application $x \to h(z(x))\,(x \in X)$ définit une section analytique de Y^E, donc de G^E; comme $\rho(h(z))\,e = z$, on a bien relevé z en une section analytique de G^E, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — On démontrerait de façon analogue la

Proposition 23.2. — *Si X est une variété analytique complexe compacte, deux espaces fibrés analytiques principaux sur X dont le groupe est le groupe symplectique complexe, qui sont équivalents dans le groupe linéaire complexe général, sont analytiquement isomorphes.*

B. — Les espaces fibrés dont la fibre est un groupe résoluble.

24. Trois lemmes. — Soient L un groupe de Lie abélien, L_e sa composante connexe de l'élément neutre, $\bar{L}$ le revêtement universel de L_e, $N = L/L_e$, K le groupe de Poincaré de L_e. Si un groupe de Lie G opère analytiquement sur le groupe L, il respecte L_e et opère donc sur N. D'autre part $\bar{L}$ est le groupe additif d'un espace vectoriel, et les opérations de G sur L proviennent, par passage aux quotients, d'automorphismes de l'espace vectoriel $\bar{L}$ respectant $K \subset \bar{L}$. Soit E un espace fibré analytique principal sur X de groupe G. Dans ce numéro (et dans la suite, dans la mesure où aucun risque de confusion ne sera à craindre), nous désignerons souvent, pour simplifier les notations, par L (resp. M, etc.) l'espace fibré de fibre L (resp. M, etc.) que définissent E et les opérations de G sur *le groupe* L (resp. M, etc.) : ${}^a\mathcal{L}$, ${}^c\mathcal{L}$, etc., désigneront donc des faisceaux de germes de sections d'un espace fibré non nécessairement trivial. Le faisceau ${}^a\mathcal{K}$ (resp. ${}^a\mathcal{N}$) est localement constant et isomorphe à ${}^c\mathcal{K}$ (resp. ${}^c\mathcal{N}$) puisque K (resp. N) est discret : nous le noterons simplement $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{N}$).

Lemme 24.1. — *L'homomorphisme canonique $\tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{L}) \to \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{L})$ est injectif.*

Si une section analytique de L^E est continûment homotope à la section neutre, elle est à valeurs dans L_e^E, de sorte qu'il suffit de démontrer le lemme pour L_e^E. Cette section est l'image d'une section s de $\bar{L}^E$, *a priori* seulement continue (relèvement des homotopies), mais en fait analytique (puisque $\bar{L}$ est un revêtement). Or les opérations de G sur $\bar{L}$, automorphismes du groupe additif, sont linéaires, donc commutent avec les homothéties : ces homothéties rétractent donc analytiquement s sur la section neutre $\bar{L}^E$; il existe donc *a fortiori* une homotopie de la section donnée sur la section neutre de L^E.

Lemme 24.2. — *Pour chaque* $i \geqq 2$ (resp. $i = 1$) *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $$H^i(X, {}^a\overline{\mathcal{L}}) = 0\,;$$

(*b*) $H^i(X, {}^a\mathcal{L}_e) \to H^i(X, {}^c\mathcal{L}_e)$ est injectif et $H^{i-1}(X, {}^a\mathcal{L}_e) \to H^{i-1}(X, {}^c\mathcal{L}_e)$ [resp. $\tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{L}_e) \to \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{L}_e)$] est surjectif;

(*c*) $H^i(X, {}^a\mathcal{L}) \to H^i(X, {}^c\mathcal{L})$ est injectif et $H^{i-1}(X, {}^a\mathcal{L}) \to H^{i-1}(X, {}^c\mathcal{L})$ [resp. $\tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{L}) \to \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{L})$] est surjectif.

Démonstration. — 1° $(a) \Leftrightarrow (b)$. A la suite exacte de faisceaux $0 \to \mathcal{K} \to \overline{\mathcal{L}} \to \mathcal{L}_e \to 0$ est associé, pour $i \geqq 2$, le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
H^{i-1}(X, {}^a\overline{\mathcal{L}}) & \to & H^{i-1}(X, {}^a\mathcal{L}_e) & \to & H^i(X, \mathcal{K}) & \to & H^i(X, {}^a\overline{\mathcal{L}}) & \to & H^i(X, {}^a\mathcal{L}_e) & \to & H^{i+1}(X, \mathcal{K}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^{i-1}(X, {}^c\overline{\mathcal{L}}) & \to & H^{i-1}(X, {}^c\mathcal{L}_e) & \to & H^i(X, \mathcal{K}) & \to & H^i(X, {}^c\overline{\mathcal{L}}) & \to & H^i(X, {}^c\mathcal{L}_e) & \to & H^{i+1}(X, \mathcal{K})
\end{array}$$

Pour $i = 1$, on remplacera les groupes H^0 par les groupes $\tilde{H}^0$: les suites restent encore définies et exactes en vertu des propositions **21.1** et **17.1**. D'autre part, pour $k \geqq 1$, $H^k(X, {}^c\overline{\mathcal{L}})$ [resp. $\tilde{H}^0(X, {}^c\overline{\mathcal{L}})$] est nul car le faisceau $\overline{\mathcal{L}}$ est fin (resp. la fibre $\overline{L}$ est homotopiquement rétractile). $H^k(X, {}^c\mathcal{L}_e)$ [resp. $\tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{L}_e)$] est donc isomorphe à $H^{k+1}(X, \mathcal{K})$ [resp. $H^1(X, \mathcal{K})$].

Il est donc clair que (*a*) entraîne (*b*). Réciproquement si (*b*) est vérifié, le lemme des 5 montre que $H^i(X, {}^a\overline{\mathcal{L}}) \to H^i(X, {}^c\overline{\mathcal{L}})$ est injective, donc que (*a*) est vérifié.

2° $(b) \Leftrightarrow (c)$. La démonstration est analogue pour $i \geqq 2$: à la suite exacte de faisceaux $0 \to \mathcal{L}_e \to \mathcal{L} \to \mathcal{N} \to 0$ on associe les diagrammes

$$\text{(I)}\quad \begin{array}{ccccccc}
H^{i-1}(X, {}^a\mathcal{L}_e) & \to & H^{i-1}(X, {}^a\mathcal{L}) & \to & H^{i-1}(X, \mathcal{N}) & \to & H^i(X, {}^a\mathcal{L}_e) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^{i-1}(X, {}^c\mathcal{L}_e) & \to & H^{i-1}(X, {}^c\mathcal{L}) & \to & H^{i-1}(X, \mathcal{N}) & \to & H^i(X, {}^c\mathcal{L}_e)
\end{array}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{array}{ccccccc}
H^{i-1}(X, \mathcal{N}) & \to & H^i(X, {}^a\mathcal{L}_e) & \to & H^i(X, {}^a\mathcal{L}) & \to & H^i(X, \mathcal{N}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^{i-1}(X, \mathcal{N}) & \to & H^i(X, {}^c\mathcal{L}_e) & \to & H^i(X, {}^c\mathcal{L}) & \to & H^i(X, \mathcal{N})
\end{array}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{array}{ccccccc}
H^{i-1}(X, {}^a\mathcal{L}) & \to & H^{i-1}(X, \mathcal{N}) & \to & H^i(X, {}^a\mathcal{L}_e) & \to & H^i(X, {}^a\mathcal{L}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^{i-1}(X, {}^c\mathcal{L}) & \to & H^{i-1}(X, \mathcal{N}) & \to & H^i(X, {}^c\mathcal{L}_e) & \to & H^i(X, {}^c\mathcal{L})
\end{array}$$

$$\text{(IV)}\quad \begin{array}{ccccccc}
H^{i-2}(X, \mathcal{N}) & \to & H^{i-1}(X, {}^a\mathcal{L}_e) & \to & H^{i-1}(X, {}^a\mathcal{L}) & \to & H^{i-1}(X, \mathcal{N}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^{i-2}(X, \mathcal{N}) & \to & H^{i-1}(X, {}^c\mathcal{L}_e) & \to & H^{i-1}(X, {}^c\mathcal{L}) & \to & H^{i-1}(X, \mathcal{N})
\end{array}$$

Le lemme des 5 appliqué à (I) et (II) montre que (*b*) entraîne (*c*); appliqué à (III) et (IV), il montre que (*c*) entraîne (*b*).

Pour $i=1$, le fait que $H^0(X, \mathfrak{N}) = \tilde{H}^0(X, \mathfrak{N})$ et qu'une section continue de L^B homotope à la section nulle est à valeurs dans L^B_e, l'homotopie ne faisant du reste pas sortir d'une composante connexe, montre que le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{L}_e) & \to & \tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{L}) & \to & H^0(X, \mathfrak{N}) & \to & H^1(X, {}^a\mathcal{L}_e) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{L}_e) & \to & \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{L}) & \to & H^0(X, \mathfrak{N}) & \to & H^1(X, {}^c\mathcal{L}_e) \end{array}$$

(dont la définition est claire) est constitué de suites exactes. On peut alors former, à partir de ce diagramme, des diagrammes analogues aux diagrammes (I) à (IV), auxquels on applique le lemme des 5 pour achever la démonstration lorsque $i=1$.

Dans la suite nous désignerons par V_n un espace fibré analytique *complexe* de fibre vectorielle de dimension (complexe) n : la fibre type F est donc l'espace numérique complexe C_n, et les opérations du groupe structural sont compatibles avec la structure d'espace vectoriel complexe de C_n.

LEMME 24.3. — *Soit $i \geq 1$; supposons que $H^i(X, {}^a\mathcal{V}_1) = 0$ pour tout espace fibré analytique V_1 de base X et de fibre vectorielle de dimension* 1; *alors $H^i(X, {}^a\mathcal{V}_n) = 0$ pour tout espace fibré analytique V_n de base X, de fibres vectorielles de dimension finie, et dont le groupe structural est résoluble connexe.*

En effet, le groupe structural opérant sur la fibre type C_n de V_n laisse invariant d'après le théorème de Lie un espace vectoriel C_1 de dimension 1, et opère donc sur C_n/C_1; V_n définit donc deux espaces fibrés V_1 et V_{n-1} à fibres vectorielles de dimension 1 et $n-1$ respectivement, et l'on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to {}^a\mathcal{V}_1 \to {}^a\mathcal{V}_n \to {}^a\mathcal{V}_{n-1} \to 0,$$

d'où une suite exacte de cohomologie

$$H^i(X, {}^a\mathcal{V}_1) \to H^i(X, {}^a\mathcal{V}_n) \to H^i(X, {}^a\mathcal{V}_{n-1}).$$

On obtient donc le résultat en faisant une récurrence sur n.

Dans la suite, l'utilisation du lemme 24.3 impliquera qu'il s'agit d'*analytique-complexe*.

25. Classes d'homotopie continue et classes d'homotopie analytique des sections. — Le but de ce numéro et des suivants est d'établir les résultats principaux de ce chapitre. Ils seront valables pour des variétés X vérifiant les conditions du lemme 24.2 pour $i=1$ ou 2. Nous donnerons au paragraphe C des exemples de telles variétés. Quitte cependant à introduire des restrictions de connexion accessoires, nous croyons préférable d'énoncer ici les résultats dans le cadre des hypothèses du lemme 24.3 plutôt que dans celles du lemme 24.2.

Comme au n° 24, nous désignerons simplement par ${}^a\mathcal{M}$ (resp. ${}^c\mathcal{M}$) les faisceaux de germes de sections analytiques (resp. continues) d'un espace fibré analytique de fibre M [au lieu de ${}^a\mathcal{M}^E$, ${}^c\mathcal{M}^E$] lorsque aucune confusion ne sera à craindre; G désignera toujours un groupe de Lie *opérant* (au sens du n° 1) sur le *groupe de Lie* M, E un espace fibré *analytique* principal de groupe G.

THÉORÈME III.1. — *Supposons que* $H^1(X, {}^a\mathcal{V}_1) = 0$ *pour tout espace fibré analytique* V_1 *à fibres vectorielles de dimension* 1. *Alors si* G *est connexe résoluble et* M *résoluble, l'application canonique* $\tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{M}^E) \to \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{M}^E)$ *est surjective.*

La démonstration procède par récurrence sur la longueur de M. Le lemme 24.3 entraîne que les conditions du lemme 24.2 sont remplies pour $i = 1$ chaque fois que M est abélien, ce qui montre en particulier que le théorème est vrai si M est de longueur 0.

Soit alors L l'adhérence d'un groupe dérivé de M d'ordre assez grand pour être abélien; la longueur de $N = M/L$ est inférieure à celle de M, et L étant caractéristique, est stable pour les opérations de G qui opère donc dans N. En vertu de la condition (c) du lemme 24.2 et de la proposition 21.1 on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{L}) & \to & \tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{M}) & \to & \tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{N}) & \to & H^1(X, {}^a\mathcal{L}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{L}) & \to & \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{M}) & \to & \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{N}) & \to & H^1(X, {}^c\mathcal{L})
\end{array}$$

Utilisant encore la double condition (c), on déduit alors le résultat de l'hypothèse de récurrence grâce au raisonnement du lemme des 5 [raisonnement applicable bien que les opérateurs cobords ne soient pas des homomorphismes et que la suite supérieure ne soit que partiellement exacte (*cf.* n° 21)].

REMARQUE. — On notera que les restrictions « connexe et résoluble » faites sur G ne sont intervenues que pour déduire de l'hypothèse du théorème que la condition (c) du lemme 24.2 était vérifiée.

Dans le théorème suivant, I désigne un voisinage ouvert dans C, arbitrairement petit, du segment [0, 1] (*cf.* n° 21).

THÉORÈME III.2. — *Supposons que* $H^1(X \times I, {}^a\mathcal{V}_1) = 0$ *pour tout espace fibré analytique* V_1 (à fibres vectorielles de dimension 1) *de base* $X \times I$. *Alors si* G *est connexe résoluble et* M *résoluble, l'application canonique* $\tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{M}^E) \to \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{M}^E)$ *est injective.*

La démonstration procède encore par récurrence sur la longueur de M. Avec les notations ci-dessus, le lemme des 5 montre qu'elle sera achevée, vu le lemme 24.1, si l'on établit qu'on a le diagramme commutatif *de suites exactes*, du moins lorsque M est connexe :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{L}) & \to & \tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{M}) & \to & \tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{N}) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{L}) & \to & \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{M}) & \to & \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{N}) \end{array}$$

Or d'après le n° 17 et la proposition 21.1 (applicable dans sa seconde partie en vertu de l'hypothèse et des lemmes 24.3 et 24.2), il ne reste à justifier que la présence du o à gauche de chacune de ces suites, et, vu le lemme 24.1, il suffit même d'établir que $\tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{L}) \to \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{M})$ est un monomorphisme pour justifier la présence du o à gauche de la première suite. Cela va résulter du :

Lemme 25.1. — *Soit E un espace fibré (topologique) principal de base X dont le groupe G opère (continûment) comme groupes d'automorphismes d'un groupe de Lie M. Supposons que G soit connexe et laisse stable un sous-groupe fermé résoluble connexe distingué L de M. Alors l'application canonique $\tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{L}^E) \to \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{M}^E)$ est un monomorphisme.*

Montrons d'abord comment ce lemme entraîne le théorème III.2 : il l'entraîne évidemment si M est connexe, car alors L est aussi connexe, ainsi que N; on peut donc faire la récurrence. Mais si le théorème est vrai pour la composante connexe M_e de M, il est vrai pour M, puisque une section analytique de M^E continûment homotope à la section nulle est à valeurs dans M_e^E, et est homotope continûment à la section nulle dans M_e^E; donc elle est analytiquement homotope à o non seulement dans M^E, mais même dans M_e^E d'après ce qui vient d'être démontré.

Il reste donc à établir le lemme. D'après la proposition 17.1, si M est connexe, on a le diagramme commutatif de suites exactes, $\overline{M}$ étant le revêtement universel de M et $\overline{L}$ la composante connexe de l'image réciproque de L dans $\overline{M}$:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}^0(X, {}^c\overline{\mathcal{L}}^E) & \to & \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{L}^E) & \to & H^1(X, (\pi_1(L))^E) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}^0(X, {}^c\overline{\mathcal{M}}^E) & \to & \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{M}^E) & \to & H^1(X, (\pi_1(M))^E) \end{array}$$

puisque, $N = M/L$ étant de Lie (donc ayant un second groupe d'homotopie nul) $\overline{L}$ s'identifie au revêtement universel de L et $\pi_1(L)$ à un sous-groupe de $\pi_1(M)$. Or $\overline{L}$, revêtement universel d'un groupe de Lie résoluble est homéomorphe à R^n, donc $\tilde{H}^0(X, {}^c\overline{\mathcal{L}}^E) = 0$ et $\tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{L}^E) \to H^1(X, \pi_1(L))^E)$ est injectif (c'est même une bijection, vu la proposition 15.1). Il suffit donc de voir que le dernier homomorphisme vertical est un monomorphisme. Or, G étant connexe, le système de coefficients locaux sur X intervenant en coefficients des H^1 est simple sur X, et la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de coefficients

$$\pi_2(N) = 0 \to \pi_1(L) \to \pi_1(M) \to \pi_1(N) \to 0 = \pi_0(L)$$

montre que le noyau de cet homomorphisme vertical s'identifie au quotient de $H^0(X, \pi_1(N))$ par l'image de $H^0(X, \pi_1(M))$: le système de coefficients étant simple, la nullité vient de ce que $\pi_1(M) \to \pi_1(N)$ est surjectif.

Enfin le cas M non connexe se ramène aisément comme on l'a déjà vu au cas M connexe.

Le théorème III.2 est donc entièrement démontré ; combiné avec le lemme 25.1, il entraîne la :

Proposition 25.1. — *Supposons que X vérifie les hypothèses du théorème* III.2. *Alors si G est connexe résoluble de Lie et opère sur le groupe de Lie M en respectant un sous-groupe fermé résoluble connexe distingué L de M, l'application canonique*

$$\tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{L}^e) \to \tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{M}^e)$$

est un monomorphisme.

Remarque. — On notera que la restriction *résoluble* faite sur G n'est intervenue, commc dans le théorème III.1 que pour pouvoir appliquer la condition (c) du lemme 24.2. Par contre la restriction *connexe* semble cette fois liée à des difficultés se présentant déjà au stade topologique.

26. La classification topologique et la classification analytique.

Théorème III.3. — *Supposons que $H^1(X, {}^a\mathcal{V}_1) = 0$ pour tout espace fibré analytique V_1 (de base X) à fibres vectorielles de dimensions* 1. *Alors si G et M sont résolubles connexes, l'application canonique r : $H^1(X, {}^a\mathcal{M}^E) \to H^1(X, {}^c\mathcal{M}^E)$ est injective.*

Nous énoncerons d'abord un lemme :

Lemme. — *Supposons que les faisceaux de groupes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ opèrent sur le faisceau d'ensembles $\mathcal{L}$, et que $\mathcal{G}$ opère sur le faisceau de groupes $\mathcal{M}$ de manière à satisfaire à la relation de compatibilité*

$$g.(m.l) = g(m).g(l) \qquad (l \in \mathcal{L},\ m \in \mathcal{M},\ g \in \mathcal{G}).$$

Soit $\mathbf{g}$ *un* 1*-cocycle de recouvrement de X, à valeurs dans $\mathcal{G}$. Avec les notations du* n° 4, *le faisceau de groupes $\mathcal{M}^{\mathbf{g}}$ opère sur le faisceau d'ensembles $\mathcal{L}^{\mathbf{g}}$; soit alors* $\mathbf{m}$ *un* 1*-cocycle du même recouvrement à* *valeurs dans* $\mathcal{M}^{\mathrm{g}}$. *Alors le faisceau* $(\mathcal{L}^{\mathrm{g}})^{\mathrm{m}}$ *s'identifie canoniquement à un faisceau* $\mathcal{L}^{\mathrm{p}}$ *où* p *est un* 1-*cocycle du même recouvrement, à valeurs dans le faisceau* $\mathfrak{T}(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ *produit direct croisé de* $\mathcal{M}$ *par* $\mathcal{G}$.

La démonstration du lemme ne présente aucune difficulté et est calquée sur le nº 15, 3e remarque : elle est laissée au lecteur.

Cela étant, montrons d'abord que le noyau de r est nul. La démonstration procède par récurrence sur la longueur de M, et reste valable même si M n'est pas connexe. Les notations étant les mêmes qu'au nº 25, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{N}) & \to & H^1(X, {}^a\mathcal{L}) & \to & H^1(X, {}^a\mathcal{M}) & \to & H^1(X, {}^a\mathcal{N}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{N}) & \to & H^1(X, {}^c\mathcal{L}) & \to & H^1(X, {}^c\mathcal{M}) & \to & H^1(X, {}^c\mathcal{N}) \end{array}$$

En vertu des hypothèses, il résulte des lemmes 24.3 et 24.2 et du théorème III.1 que la première application verticale est surjective et la seconde injective; la première suite est donc exacte; on peut supposer la quatrième application verticale de noyau nul par hypothèse de récurrence. Alors le classique raisonnement du lemme des 5 montre que r est de noyau nul (le lemme des 5 lui-même n'est pas applicable, en particulier parce que le diagramme n'est pas constitué de suites exactes de *groupes*; aussi a-t-on une conclusion moins forte que dans le lemme des 5 : on ne peut conclure de la nullité du noyau de r à son caractère injectif).

Pour passer au cas général, faisons opérer M sur lui-même par les automorphismes intérieurs : ces opérations respectent L, et induisent sur N les automorphismes intérieurs de N; $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ opèrent ainsi sur $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ en satisfaisant à la condition de compatibilité du lemme. Les faisceaux $\mathcal{L}'$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}'$ obtenus à partir de $\mathcal{L}^E$, $\mathcal{M}^E$, $\mathcal{N}^E$ par recollement défini par un cocycle μ à valeurs dans le faisceau d'opérateurs $\mathcal{M}$ s'identifient donc à des faisceaux de germes de sections d'espaces fibrés sur X de fibres respectives L, M, N et de groupe structural $P(M, G)$: ce groupe est résoluble, et connexe si M est connexe. Supposons que μ soit un cocycle analytique : on peut alors distinguer les faisceaux ${}^a\mathcal{L}'$, etc., et les faisceaux ${}^c\mathcal{L}'$, etc., qui s'identifient respectivement à des faisceaux de germes de sections analytiques ou continues d'un espace fibré analytique. Or on vient d'établir que $H^1(X, {}^a\mathcal{M}') \to H^1(X, {}^c\mathcal{N}')$ était à noyau nul : vu la proposition 4.2 cela signifie précisément que si deux cocycles de ${}^a\mathcal{M}^E$ sont cohomologues dans ${}^c\mathcal{M}^E$, ils le sont déjà dans ${}^a\mathcal{M}^E$, ce qui achève la démonstration du théorème.

THÉORÈME III.4. — *Supposons que* $H^2(X, {}^a\mathcal{V}_1) = 0$ *pour tout espace fibré analytique* V_1, *de base* X, *et de fibres vectorielles dimension* 1. *Alors si* G *et* M *sont résolubles connexes, l'application canonique* r : $H^1(X, {}^a\mathcal{M}^E) \to H^1(X, {}^c\mathcal{M}^E)$ *est surjective.*

L, N ayant toujours la même signification, nous désignerons d'une manière générale par i (resp. p) les applications induites par l'injection $L \to M$ (resp. la projection $M \to N$). N étant connexe, nous supposerons, par récurrence sur la longueur de M, le théorème vrai pour N (il l'est si M est de longueur o d'après les lemmes **24.3** et **24.2**).

Soit m un élément de $H^1(X, {}^c\mathcal{M}^E)$; par hypothèse, $p(m) = n$ est l'image d'une classe analytique $\mathbf{n}$. Soit ν un cocycle de la classe $\mathbf{n}$: N opérant sur lui-même par les automorphismes intérieurs et sur L (qui est abélien) par l'intermédiaire de ceux de M, on est dans la situation du lemme : le faisceau ${}^a\mathcal{L}'$ (resp. ${}^c\mathcal{L}'$) localement isomorphe à ${}^a\mathcal{L}^E$ (resp. ${}^c\mathcal{L}^E$) que définit par recollement le cocycle ν est isomorphe au faisceau des germes de sections analytiques (resp. continues) d'un espace fibré *analytique* de fibre L et de groupe résoluble connexe. D'après les lemmes **24.3** et **24.2**, $H^2(X, {}^a\mathcal{L}') \to H^2(X, {}^c\mathcal{L}')$ est biunivoque et d'après la proposition **20.2** il existe un $\mathbf{m} \in H^1(X, {}^a\mathcal{M}^E)$ tel que $\mathbf{n} = p(\mathbf{m})$.

Faisons maintenant opérer M sur lui-même (donc sur L et N) par les automorphismes intérieurs, et considérons les faisceaux ${}^a\mathcal{L}'$, ${}^c\mathcal{L}'$, ${}^a\mathcal{M}'$,..., ${}^c\mathcal{N}'$ localement isomorphes à ${}^a\mathcal{L}^E$, ..., ${}^c\mathcal{N}^E$ que définit par recollement un cocycle μ de la classe $\mathbf{m}$ (il n'y a pas de confusion de notation, ${}^a\mathcal{L}'$ et ${}^c\mathcal{L}'$ étant isomorphes à ceux que nous avions ainsi désignés il y a un instant), et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X, {}^a\mathcal{L}') & \to & H^1(X, {}^a\mathcal{M}') & \to & H^1(X, {}^a\mathcal{N}') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1(X, {}^c\mathcal{L}') & \to & H^1(X, {}^c\mathcal{M}') & \to & H^1(X, {}^c\mathcal{N}') \end{array}$$

D'après la proposition **4.2** les ensembles de cohomologie de dimension un à valeurs dans les faisceaux $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{N}'$ sont respectivement isomorphes à ceux à valeurs dans les faisceaux $\mathcal{M}^E$ et $\mathcal{N}^E$; nous désignerons par la même lettre k tous ces isomorphismes. Enfin, en vertu du n° **24**, la première application verticale est surjective.

Soit $m' = k(m)$; puisque $p(m') = kp(m) = e$, il existe l dans $H^1(X, {}^c\mathcal{L}')$ [resp. $\mathbf{l} \in H^1(X, {}^a\mathcal{L}')$], tels que

$$m' = i(l), \qquad l = r(\mathbf{l}),$$

Alors

$$ir(\mathbf{l}) = m' = ri(\mathbf{l}).$$

Donc $k^{-1}(i(\mathbf{l})) \in H^1(X, {}^a\mathcal{M}^E)$ a m pour image par r, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Dans les deux théorèmes ci-dessus la restriction connexe imposée à M, les restrictions connexe et résoluble imposées à G ne sont intervenues que pour appliquer le théorème de Lie à $P(M, G)$ opérant sur un revêtement de L (lemme **24.3**). Or il peut arriver que le quotient de

$P(M, G)$ opérant effectivement sur L soit connexe résoluble sans que $P(M, G)$ lui-même le soit. C'est en particulier le cas si M est *nilpotent*, car on peut dans la récurrence des théorèmes III.1, III.3 et III.4 supposer que L est central, de sorte que le quotient de $P(M, G)$ opérant effectivement sur L s'identifie à un quotient de G et est résoluble connexe. Il en résulte d'abord que $\tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{N}') \to \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{N}')$ (démonstration du théorème III.3) est surjective (quoique le groupe structural ne soit pas connexe); le reste de la démonstration est alors sans changement.

THÉORÈME III.5. — *Les théorèmes* III.3 *et* III.4 *restent valables si l'on remplace l'hypothèse « M résoluble connexe » par l'hypothèse « M nilpotent » les autres conditions restant inchangées.*

27. La classification des espaces fibrés (*suite*). — D'après les propositions 11.1 et 19.1, les théorèmes du n° 26 prennent une signification géométrique particulière lorsqu'on les interprète avec le langage des classes d'espaces fibrés analytiques M^E-principaux.

A cause de leur importance, nous allons les transcrire lorsque E est trivial dans le langage des espaces fibrés. Remarquons alors que dans le cas particulier où M est nilpotent, les faisceaux $\mathcal{L}'$ intervenant dans les démonstrations sont des faisceaux de sections d'un espace *trivial*; il en est donc de même du faisceau ${}^a\bar{L}$ (lemme 24.2), et des faisceaux ${}^a\mathcal{V}_r$ (lemme 24.3). On obtient en définitive :

THÉORÈME III.3'. — *Supposons que* $H^1(X, {}^a\mathcal{V}_1) = 0$ *pour tout espace fibré analytique* V_1, *de base* X *et de fibres vectorielles de dimension* 1. *Alors si deux espaces fibrés analytiques sur* X, *de groupe structural résoluble connexe, sont topologiquement* X-*isomorphes ils le sont analytiquement.*

THÉORÈME III.4'. — *Supposons que* $H^2(X, {}^a\mathcal{V}_1) = 0$ *pour tout espace fibré analytique* V_1 *de base* X *et de fibres vectorielles de dimension* 1. *Alors tout espace fibré principal sur* X, *de groupe structural résoluble connexe, peut être muni d'une structure analytique compatible avec sa structure fibrée.*

THÉORÈME III.5'. — *Supposons que* $H^1(X, {}^a\mathcal{C}) = 0$. *Alors tout espace fibré analytique sur* X, *de groupe structural résoluble, topologiquement trivial, l'est analytiquement; si deux espaces fibrés analytiques sur* X *de groupe structural nilpotent, sont topologiquement* X-*isomorphes, ils le sont analytiquement.*

THÉORÈME III.5''. — *Supposons que* $H^2(X, {}^a\mathcal{C}) = 0$. *Alors tout espace fibré principal sur* X, *de groupe structural nilpotent, peut être muni d'une structure analytique compatible avec sa structure fibrée.*

COMPLÉMENT AUX THÉORÈMES III.3′ ET III.4′. — *Soit X une variété analytique connexe et simplement connexe. Supposons que* $H^1(X, {}^a\mathcal{V}_1) = 0$ [resp. $H^2(X, {}^a\mathcal{V}_1) = 0$] *pour tout espace fibré analytique V_1 de base X et de fibres vectorielles de dimension* 1. *Alors la conclusion du théorème* III.3′ (*resp.* III.4′) *reste valable même si le groupe structural n'est pas connexe.*

En effet, soit M_e la composante connexe du groupe structural M, et soit $N = M/M_e$. Comme N est discret, $H^1(X, {}^a\mathcal{N})$ et $H^1(X, {}^c\mathcal{N})$ sont isomorphes, et du reste nuls puisque tout espace fibré de groupe structural discret sur un espace connexe et simplement connexe est trivial. De là suit que les applications $H^1(X, {}^a\mathcal{M}_e) \to H^1(X, {}^a\mathcal{M})$ et $H^1(X, {}^c\mathcal{M}_e) \to H^1(X, {}^c\mathcal{M})$ sont surjectives. On en déduit immédiatement que si $H^1(X, {}^a\mathcal{M}_e) \to H^1(X, {}^c\mathcal{M}_e)$ est surjectif, il en est de même de $H^1(X, {}^a\mathcal{M}) \to H^1(X, {}^c\mathcal{M})$.

Supposons que $H^1(X, {}^a\mathcal{M}_e) \to H^1(X, {}^c\mathcal{M}_e)$ soit injectif. Soient E et E' deux espaces fibrés analytiques principaux de groupe M topologiquement X-isomorphes à un espace fibré topologique F. Faisons opérer M_e sur lui-même par les automorphismes intérieurs : on en déduit des opérations de M_e dans M et dans N. La restriction à M_e du groupe structural de E (resp. de E') définit un espace fibré analytique E_e (resp. E'_e). Soit x l'image par i_E de la classe E'_e. Vu (14.1), l'image de x dans $H^1(X, {}^c\mathcal{M}_e{}^{\cdot E}e)$ a une image nulle dans $H^1(X, {}^c\mathcal{M}^{\cdot F})$, donc est de la forme ${}^c\delta(s)$, où s est une section de $\mathcal{N}^{\cdot E}e$. D'après (14.1) et l'hypothèse, l'application $H^1(X, {}^a\mathcal{M}_e{}^{\cdot E}e) \to H^1(X, {}^c\mathcal{M}^{\cdot E}e)$ est injective; par suite ${}^a\delta(s) = x$, ce qui entraîne que E_e et E'_e, donc *a fortiori* E et E' sont analytiquement X-isomorphes.

REMARQUE 27.1. — Dans le cas analytique réel, il n'y a pas d'analogue au lemme 24.3. Les conclusions du théorème III.1 à III.4 subsistent si l'on convient de désigner par V_1 un espace fibré *analytique réel* à fibres vectorielles *de dimension finie quelconque*. On pourra alors prendre pour E un espace fibré de groupe structural G *quelconque*, sauf dans le théorème III.2 où G doit être supposé *connexe*; il ne sera plus nécessaire de supposer M connexe dans les théorèmes III.3 et III.4. Toutefois, si G est supposé *résoluble*, on pourra se borner à vérifier l'hypothèse pour la classe des espaces fibrés vectoriels de groupe structural résoluble.

Enfin les théorèmes III.5′ et III.5″ restent valables en désignant par ${}^a\mathcal{C}$ le faisceau des germes de fonctions analytiques réelles sur X.

C. — Une classe de variétés satisfaisant à la condition du lemme 24.3.

28. Les variétés de Stein. — Soit X une variété de Stein ([23]). On sait ([24]) que pour tout faisceau $\mathcal{F}$ analytique cohérent sur X, $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $i > 0$,

([23]) *Voir* une définition des variétés de Stein dans [4] (§ 6, p. 49) ou dans [3], exposé 9.

([24]) *Voir* [3], exposé 19.

Or si V est un espace fibré analytique à fibre vectorielle sur X, le faisceau ${}^a\mathcal{V}$ des germes de sections analytiques de V est analytique cohérent. Il en résulte que non seulement X satisfait pour tout i aux conditions du lemme 24.3, mais que la condition (a) du lemme 24.2 est remplie, que le groupe structural soit connexe ou non. Par suite :

Proposition 28.1. — *Soient X une variété de Stein, G un groupe de Lie complexe, M un espace fibré analytique de groupe structural G, de base X, et dont les fibres sont des groupes résolubles. L'application canonique $\tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{M}) \to \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{M})$ est surjective, et l'application canonique $H^1(X, {}^a\mathcal{M}) \to H^1(X, {}^c\mathcal{M})$ est bijective; de plus si G est connexe, l'application $\tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{M}) \to \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{M})$ est en outre injective* (25).

En effet, tout domaine du plan complexe étant une variété de Stein, $X \times I$ est aussi une variété de Stein.

D'autre part on sait (26) que si Y est un sous-ensemble fermé d'une variété analytique complexe Z et possède un système fondamental de voisinages ouverts dont chacun est une variété de Stein, alors pour tout faisceau $\mathcal{F}$ (sur Y) analytique cohérent on a $H^i(Y, \mathcal{F}) = 0$ si $i > 0$. D'après une remarque de H. Cartan (26), on peut prendre pour Y toute variété analytique réelle plongée sans singularité dans R^n (considérer cet R^n comme plongé dans l'espace numérique complexe).
On en déduit donc :

Proposition 28.2. — *Si X est une variété analytique réelle plongée sans singularité dans un R^n, la proposition* 28.1 *reste valable, en entendant « analytique réel » partout où il était question d' « analytique complexe* (27).

Nous laissons au lecteur dans ces deux cas le soin d'étendre les théorèmes III.3′ et III.4′ (les théorèmes III.5′ et III.5″ devenant sans objet).

29. Les faisceaux de Fréchet. — Nous aurons besoin pour donner d'autres exemples de variétés satisfaisant à la condition du lemme 24.3 (*cf.* n° 34) d'un résultat d'ailleurs pourvu par lui-même d'intérêt. Il sera commode de donner d'abord quelques définitions (28).

---

(25) *Voir* Frenkel [13]. Ce résultat a été considérablement généralisé par H. Grauert (*cf.* [16]; *voir* aussi [5]) qui a montré qu'il était valable sans aucune restriction sur les fibres et sur le groupe structural. Nous laissons au lecteur le soin de traduire ce résultat en termes de classes d'espaces fibrés.

(26) *Voir* [4], § 9, p. 54.

(27) Ce résultat n'est pas, à l'heure actuelle, contenu dans ceux de H. Grauert.

(28) *Voir* Frenkel [15].

DÉFINITION 29.1. — *Soit X un espace topologique localement compact et paracompact. Nous conviendrons d'appeler* faisceau de Fréchet *sur X la donnée d'un faisceau $\mathcal{A}$ d'espaces vectoriels réels, et, pour tout ouvert U de X, d'une topologie d'espace de Fréchet sur l'espace vectoriel $H^0(U, \mathcal{A})$ des sections de $\mathcal{A}$ au-dessus de U, de telle sorte que si $U' \subset U$ l'application canonique $H^0(U, \mathcal{A}) \to H^0(U', \mathcal{A})$ soit continue pour cette topologie.*

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X, $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ l'espace des q-cochaînes de $\mathcal{U}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$, muni de son opérateur cobord δ habituel. Soient $N^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$, $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$, $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) = N^q/B^q$ les espaces vectoriels des q-cocycles, des q-cobords, et de cohomologie de dimension q du recouvrement $\mathcal{U}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$, que définit l'opérateur δ.

Q désignant une partie finie de $q+1$ éléments de I, munissons $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ de la topologie-produit des $H^0(U_Q, \mathcal{A})$ [on convient naturellement de poser $H^0(U_Q, \mathcal{A}) = 0$ si $U_Q = \emptyset$].

X étant paracompact, on peut supposer I dénombrable : $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ est donc un espace de Fréchet; δ étant visiblement continue, N^q est fermé, donc, muni de la topologie induite est aussi un espace de Fréchet. Nous munirons B^q de la topologie induite, et H^q de la topologie-quotient : *si H^q est séparé* c'est donc un espace de Fréchet. A ce sujet on a le résultat suivant :

PROPOSITION 29.1. — *Soit $\mathcal{A}$ un faisceau de Fréchet sur l'espace X localement compact et paracompact. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert dénombrable de X tel que $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ soit de dimension finie. Alors $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ est séparé.*

Cela résultera évidemment du lemme (*cf.* SERRE, *Com. Math. Helv.*, t. **29**, 1955, fasc. 1, p. 21, lemme 2) :

LEMME 29.1. — *Soit u une application linéaire continue d'un espace de Fréchet L dans un espace de Fréchet M. Si $u(L)$ est un sous-espace de codimension finie de M, $u(L)$ est fermé dans M.*

En effet, le lemme de Serre prouve que u est un *homomorphisme* : il résulte alors du théorème de Banach que $u(L)$ est fermé.

C. Q. F. D.

Rappelons pourquoi u est un homomorphisme : soit P un supplémentaire algébrique de $u(L)$ dans M; muni de la topologie induite, P est séparé, et, étant par hypothèse de dimension finie, est un espace de Fréchet; l'application linéaire continue $(x, y) \to u(x) + y$ de l'espace de Fréchet $L \times P$ dans l'espace de Fréchet M étant surjective est un homomorphisme; il en est donc de même de u.

DÉFINITION 29.2. — *Nous dirons qu'une résolution*

$$\text{(I)} \qquad 0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \dots \to \mathcal{A}^p \xrightarrow{d} \dots$$

d'un faisceau $\mathcal{F}$ est une résolution de Fréchet (*resp.* une résolution fine de Fréchet) *si les faisceaux* $\mathcal{A}^i (i \geq 0)$ *sont des faisceaux* (resp. *des faisceaux* fins) *de Fréchet, et les applications* $d : H^0(U, \mathcal{A}^i) \to H^0(U, \mathcal{A}^{i+1})$ *continues.*

On rappelle que le terme « résolution » signifie que la suite (I) est exacte. Il en résulte que l'inclusion $d : \mathcal{F} \to \mathcal{A}^0$ définit sur $\mathcal{F}$ une structure de faisceau de Fréchet; plus généralement, soit $\mathcal{Z}^i$ le noyau de $d : \mathcal{A}^i \to \mathcal{A}^{i+1}$: muni de la topologie induite, $\mathcal{Z}^i$ est aussi un faisceau de Fréchet; $\mathcal{Z}^i = d(\mathcal{A}^{i-1})$ $(i \geq 1)$ et $\mathcal{Z}^0 = \mathcal{F}$.

Le théorème suivant est étroitement lié au théorème de de Rham et à un théorème de Leray [21] sur les recouvrements acycliques. Nous allons donc donner un énoncé englobant ces résultats classiques. La partie classique [conclusion (A) de l'énoncé ci-dessous] est purement algébrique, et reste valable sans hypothèse d'ordre topologique concernant les faisceaux envisagés.

THÉORÈME III.6. — *Soit* (I) *une résolution fine de Fréchet d'un faisceau $\mathcal{F}$. Supposons qu'il existe un recouvrement ouvert localement fini $\mathcal{U}$ de X tel que :*

(i) *Pour toute intersection V d'ensembles de $\mathcal{U}$, $H^q(V, \mathcal{F}) = 0$ si $q > 0$;*

(ii) *$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est séparé pour $q = p$.*

Dans ces conditions,

(A) *Il existe un diagramme commutatif où toutes les applications sont bijectives :*

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{Z}^p)/d(H^0(X, \mathcal{A}^{p-1})) & \to & H^p(X, \mathcal{F}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^0(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^p)/d(H^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^{p-1})) & \to & H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \end{array}$$

(B) *L'application linéaire continue $d : H^0(X, \mathcal{A}^{p-1}) \to H^0(X, \mathcal{A}^p)$ est un homomorphisme. Il en résulte que la topologie-quotient munit $H^p(X, \mathcal{F})$ d'une structure d'espace de Fréchet $\approx H^p(\mathcal{U}; \mathcal{F})$.*

DÉMONSTRATION DE (A). — C'est la partie classique : nous n'utiliserons ni le fait que (I) est une résolution de Fréchet, ni l'hypothèse (ii); le résultat est donc valable pour tout p.

Comme les $\mathcal{A}^i$ sont *fins*, on a pour tout sous-espace Y de X, pour tout recouvrement ouvert localement fini $\mathcal{W}$ de X, et pour tout $q > 0$:

$$H^q(Y, \mathcal{A}^i) = H^q(\mathcal{W}, \mathcal{A}^i) = 0. \tag{29.1}$$

Il résulte alors des suites exactes de cohomologie associées aux suites exactes de faisceaux

$$0 \to \mathcal{Z}^i \to \mathcal{A}^i \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^{i+1} \to 0 \qquad (i \geq 0) \tag{29.2}$$

que l'on a les suites exactes

(29.3) $\quad H^0(Y, \mathcal{A}^i) \to H^0(Y, \mathcal{Z}^{i+1}) \to H^1(Y, \mathcal{Z}^i) \to 0 \qquad (i \geq 0),$

(29.3′) $\quad 0 \to H^k(Y, \mathcal{Z}^{i+1}) \to H^{k+1}(Y, \mathcal{Z}^i) \to 0 \qquad (i \geq 0,\ k \geq 1)$

donc la suite exacte

$$(29.4)\quad H^0(Y, \mathcal{A}^{p-1}) \xrightarrow{d} H^0(Y, \mathcal{Z}^p) \to H^p(Y, \mathcal{F}) \to 0 \qquad (p \geqq 0).$$

Prenant en particulier $Y = X$, on voit que la première application horizontale de (A) est bijective : c'est le théorème de de Rham (démontré par une méthode due à A. Weil et J.-P. Serre) [29].

Prenant ensuite $Y = V$ et tenant compte de (i), on voit que

$$(29.5)\quad \begin{cases} \text{L'application } d : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}^{p-1}) \to C^q(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^p) \text{ est surjective} \\ \qquad (q \geqq 0, p > 0) \end{cases}$$

On a donc la suite exacte de groupes

$$(29.2')\quad \begin{cases} 0 \to C^q(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^{p-1}) \to C^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}^{p-1}) \xrightarrow{d} C^q(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^p) \to 0 \\ \qquad (q \geqq 0, p > 0) \end{cases}$$

d'où l'on déduit par passage à la cohomologie, de même que (29.4) se déduit de (29.2), en prenant dans (29.1), $\mathcal{W} = \mathcal{U}$, la suite exacte

$$(29.4')\qquad H^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^{p-1}) \xrightarrow{d} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^p) \to H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to 0$$

qui montre que la deuxième application horizontale de (A) est bijective. La première application verticale étant une bijection [puisque pour tout faisceau $\mathcal{A}$ sur X, $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}) \to H^0(X, \mathcal{A})$ est bijectif], le diagramme définit une bijection $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F})$; on vérifie sans peine que cette application n'est autre que l'application canonique $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F})$ définie par passage à la limite inductive; cette dernière application est donc, dans l'hypothèse (i), bijective : c'est le théorème de Leray.

Démonstration de (B). — Énonçons d'abord un lemme :

Lemme. — *Soient M et P deux groupes topologiques abéliens munis d'un opérateur de dérivation contine δ, p une représentation continue de M sur P, commutant avec δ, L le noyau, stable pour δ, de p. Munissons L et les groupes de cycles $N(P)$, $N(L)$ des topologies induites, les groupes d'homologie $H(P)$ et $H(L)$ des topologies quotient. Soit Δ l'application linéaire classique $H(P) \to H(L)$. Alors, si p est un homomorphisme, Δ est continue.*

La démonstration est triviale : l'image réciproque dans $N(P)$ d'un ouvert de $H(L)$ est la trace sur $N(P)$ d'un ouvert de P.

[29] *Voir* [26] et [22].

Il reste à montrer comment ce lemme, vu les hypothèses « espaces de Fréchet » et (ii), entraîne (B) ([30]).

Les C^q étant des espaces de Fréchet, et d continue, le théorème de Banach montre d'après (29.5) que $d: C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}^{p-1}) \to C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{Z}^p)$ est un homomorphisme; on peut donc appliquer le lemme à (29.2') ($q \geqq 0, p > 0$); il en résulte que l'application composée

$$H^0(X, \mathfrak{Z}^p) \to H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{Z}^p) \to H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{Z}^{p-1}) \to \ldots \to H^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{Z}^1) \to H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

est continue, puisque $H^0(X, \mathfrak{Z}^p) \to H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{Z}^p)$ l'est par définition de la topologie-produit. C'est dire que l'application, biunivoque d'après (A), $H^0(X, \mathfrak{Z}^p)/d(H^0(X, \mathfrak{A}^{p-1})) \to H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ est continue : comme l'espace-image est *séparé* [hypothèse (ii)], elle est définie sur un espace séparé, de sorte que $d(H^0(X, \mathfrak{A}^{p-1}))$ est *fermé* dans $H^0(X, \mathfrak{Z}^p)$, et donc aussi dans $H^0(X, \mathfrak{A}^p)$: (B) résulte alors du théorème de Banach.

REMARQUE 29.1. — D'après la proposition 29.1, le théorème III.6 (B), s'applique en particulier à toute résolution fine de Fréchet d'un faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur une variété analytique complexe compacte X. En effet, on sait ([31]) que $H^q(X, \mathcal{F})$ est de dimension finie, et il suffit de prendre pour $\mathfrak{U}$ un recouvrement par des ouverts de Stein.

30. **Un lemme.** — Nous allons maintenant établir un lemme de nature purement combinatoire. Fixons d'abord quelques notations.

Soit I un complexe simplicial abstrait. Nous noterons $|\sigma|$ l'ensemble des sommets du simplexe ordonné σ de I : c'est un simplexe de I.

Soit F un préfaisceau abélien sur I. Par définition, F consiste en la donnée :

1° Pour tout simplexe s de I, d'un groupe abélien $F(s)$;

2° Pour tout couple (s, s') de simplexes de I tel que $s \subset s'$, d'un homomorphisme $r(s', s): F(s) \to F(s')$, ces homomorphismes satisfaisant à la condition de transitivité habituelle $r(s'', s) = r(s'', s') \circ r(s', s)$ lorsque $s \subset s' \subset s''$; on spécifie en outre que $r(s, s)$ est l'identité de $F(s)$.

Une cochaîne est une application f qui à tout simplexe ordonné σ de I associe un élément de $F(|\sigma|)$. On définit à la manière habituelle ([32]) un

---

([30]) On remarquera qu'en fait la locale-convexité est étrangère à la question : il suffit de supposer les espaces métrisables et complets. Dans les applications, ce seront cependant des espaces de Fréchet.

([31]) *Voir* [6]. On remarquera du reste que, dans leur démonstration, H. CARTAN et J.-P. SERRE dotent précisément $\mathcal{F}$ d'une topologie qui en fait un faisceau de Fréchet, et choisissent un recouvrement $\mathfrak{U}$ de X par des ouverts de Stein suffisamment fins; ils s'appuient alors sur la constatation directe de la séparation des espaces $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ pour en déduire que $H^q(X, \mathcal{F})$ est de dimension finie.

([32]) *Voir* par exemple [19], p. 28.

opérateur cobord dans les groupes de cochaînes, d'où des groupes de cohomologie $H^p(I, F)$, qu'on peut du reste calculer avec les seules cochaînes alternées.

LEMME 30.1. — *Soient I un complexe simplicial abstrait et F un préfaisceau sur I. Supposons qu'il existe un p-simplexe t de I tel que, pour tout q-simplexe s de I* (avec $q \leqq p$) *et pour tout sommet a de t, l'ensemble $\{a\} \cup s$ soit encore un simplexe de I; supposons en outre que à tout couple (a, s) où a est un sommet de t et s un q-simplexe de I ne contenant pas a $(q \leqq p)$ soit associé un homomorphisme $\varphi(a, s) : F(a \cup s) \to F(s)$ satisfaisant aux conditions :*

(i) $\varphi(a, s) \circ r(a \cup s, s) =$ *identité de* $F(s)$;

(ii) Si $s' \subset s : r(s, s') \circ \varphi(a, s') = \varphi(a, s) \circ r(a \cup s, a \cup s')$ $\qquad (a \notin s')$.

Désignons par G le sous-groupe de $F(t)$ formé des éléments $\alpha \in F(t)$ tels que pour tout sommet $b \notin t : r(b \cup t, t)\, \alpha = 0$ [33]. *Dans ces conditions :*

(1) $$H^q(I, F) = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq q \leqq p - 1;$$

(2) *$H^p(I, F)$ est isomorphe à un facteur direct du sous-groupe G; en outre si les $F(s)$ sont des groupes topologiques, les applications r et φ étant continues, cet isomorphisme est topologique lorsqu'on munit $H^p(I, F)$ de la topologie-quotient; en particulier $H^p(I, F)$ est alors séparé.*

COROLLAIRE 30.1. — *S'il existe un sommet $b \notin t$ tel que $r(b \cup t, t)$ soit un monomorphisme, alors $H^p(I, F) = 0$.*

DÉMONSTRATION. — Nous conviendrons d'écrire $r(\sigma', \sigma)$ au lieu de $r(|\sigma'|, |\sigma|)$; si σ est un q-simplexe ordonné $(q \leqq p)$; nous noterons $a\sigma$ le $(q + 1)$-simplexe ordonné dont le premier sommet est a et les suivants ceux de σ; si σ est un q-simplexe ordonné $(q \leqq p)$ et si $a \in t$, $a \notin |\sigma|$, on écrira $\varphi(\sigma, a\sigma)$ pour désigner $\varphi(a, |\sigma|)$, alors que si $a \in t \cap |\sigma|$, $\varphi(\sigma, a\sigma)$ désignera l'application identique de $F(|\sigma|)$. Nous noterons enfin σ_j le simplexe ordonné déduit de σ en supprimant le sommet situé à la $(j + 1)$-ième place $(j \geqq 0)$ (i. e., la j-ième face de σ).

Choisissons un sommet $a \in t$; à chaque q-cochaîne $f (1 \leqq q \leqq p + 1)$, associons la $(q - 1)$-cochaîne $k_a f$ définie par

(30.1) $$k_a f(\sigma) = \varphi(\sigma, a\sigma) f(a\sigma).$$

Si f est alternée, $k_a f$ est alternée. Soit alors f une q-cochaîne alternée, avec $1 \leqq q \leqq p$; le cobord δf est une $(q + 1)$ cochaîne alternée, de sorte que

---

[33] $b \cup t$ est bien d'après les hypothèses un $(p + 1)$-simplexe de I, quel que soit $b \in I$.

les cochaînes $k_a \delta f$ et $\delta k_a f$ sont définies et alternées. Si $a \notin |\sigma|$, on a

$$(\delta k_a f)(\sigma) = \Sigma(-1)^j r(\sigma, \sigma_j)(k_a f)(\sigma_j) = \Sigma(-1)^j r(\sigma, \sigma_j)\varphi(\sigma_j, a\sigma_j) f(a\sigma_j),$$
$$(k_a \delta f)(\sigma) = \varphi(\sigma, a\sigma)[r(a\sigma, \sigma) f(\sigma) - \Sigma(-1)^j r(a\sigma, a\sigma_j) f(a\sigma_j)].$$

Si au contraire $a \in |\sigma|$, on peut supposer que le premier sommet de σ est a (ce qui ne restreint pas la généralité, puisque les cochaînes sont alternées) et poser $\sigma = a\sigma'$. Pour toute cochaîne alternée g, $k_a g$ est nul sur les simplexes ordonnés contenant a; par suite

$$(\delta k_a f)(a\sigma') = r(a\sigma', \sigma')(k_a f)(\sigma') = r(a\sigma', \sigma')\varphi(\sigma', \sigma) f(\sigma),$$
$$(k_a \delta f)(a\sigma') = 0.$$

Par suite, d'après (i) et (ii),

$$(30.2) \qquad f(\sigma) - (\delta k_a f)(\sigma) - (k_a \delta f)(\sigma) = 0 \qquad \text{si} \quad a \notin |\sigma|,$$
$$(30.3) \quad f(\sigma) - (\delta k_a f)(\sigma) - (k_a \delta f)(\sigma) = [1 - r(\sigma, \sigma')\varphi(\sigma', \sigma)] f(\sigma) \qquad \text{si} \quad \sigma = a\sigma'.$$

Soit π_a l'application qui à chaque q-cochaîne alternée f associe la q-cochaîne alternée $f - \delta k_a f - k_a \delta f$: elle commute avec δ, et vu (30.2) et (30.3) c'est un projecteur [car il résulte de (i) que $r(\sigma, \sigma')\varphi(\sigma', \sigma)$ est idempotent]; si f est un cocycle, $\pi_a f$ est un cocycle homologue; enfin $\pi_a f$ *ne peut être différent de* 0 *que sur des simplexes ordonnés contenant a sur lesquels f ne s'annule pas.*

Soient alors $a_0, \ldots, a_p$ les sommets (distincts) du simplexe t. Considérons l'application composée $\pi = \pi_{a_0} \circ \ldots \circ \pi_{a_p}$. Elle commute avec δ, transforme tout cocycle alterné en un cocycle alterné homologue; pour toute q-cochaîne alternée $f (1 \leq q \leq p)$, πf est une cochaîne alternée *qui ne peut être différente de* 0 *que sur des simplexes ordonnés contenant tous les sommets de t, et sur lesquels f ne s'annule pas.*

En particulier, pour toute q-cochaîne alternée f, avec $q < p$, $\pi f = 0$, ce qui prouve l'assertion (1).

Considérons maintenant le cas où $q = p$. Choisissons désormais l'un des p-simplexes ordonnés dont l'ensemble des sommets est t; soit σ ce p-simplexe ordonné. Une p-cochaîne alternée f qui s'annule sur tout simplexe ordonné qui ne contient pas tous les sommets de t est déterminée par sa valeur $f(\sigma)$, qui est un élément arbitraire du groupe $F(t)$. Pour qu'une telle f soit un cocycle, il faut et il suffit que $f(\sigma)$ appartienne à G. En effet, écrivons que pour tout $(p+1)$-simplexe ordonné τ on a

$$\Sigma(-1)^j r(\tau, \tau_j) f(\tau_j) = 0;$$

comme $f(\tau_j) = 0$, sauf peut-être si tous les sommets de τ sont distincts et égaux aux sommets de t sauf le $j^{\text{ième}}$ (qui peut être pris arbitrairement hors de t), auquel cas $f(\tau_j) = \pm f(\sigma)$, on a le résultat : il y a donc un *isomorphisme u* de G sur le groupe Z'_p des p-cocycles alternés nuls sur tout simplexe distinct de σ (à l'ordre près), et Z'_p (qui contient l'image de π) contient des cocycles de chaque classe de cohomologie.

Soit μ l'homomorphisme : $G \to H^p(I, F)$ qui fait correspondre à tout $\alpha \in G$ la classe de $u(\alpha)$, et soit N le noyau de μ : on vient de démontrer qu'il y a un isomorphisme *canonique* de G/N *sur* $H^p(I, F)$.

Il reste à voir que N est un *facteur direct* dans G. Or soit $\tilde{\pi}$ l'endomorphisme $u^{-1}\pi u$ de G : il est immédiat que $\mu\tilde{\pi} = \mu$, donc que l'image de G par $1 - \tilde{\pi}$ est contenue dans N; la démonstration sera donc terminée si l'on montre que $\tilde{\pi}$ est un *projecteur* s'annulant sur N : or ces deux propriétés résultent, puisque $\pi f - f$ [resp. $u(\alpha)$] est un cobord pour tout p-cocycle alterné f (resp. tout $\alpha \in N$), de ce que π s'annule sur tout p-cobord alterné [en effet, π commute avec δ et s'annule sur toute $(p-1)$-cochaîne alternée, comme nous l'avons vu]. Ainsi la restriction de μ à $\tilde{\pi}(G)$ est un isomorphisme.

Dans le cas topologique, cet isomorphisme est bicontinu parce que π est continu.

31. Sur certains domaines de C^n. — Nous allons appliquer le lemme **30.1** au calcul des groupes de cohomologie de certains domaines de l'espace numérique complexe, à coefficients dans le faisceau $^a\mathcal{C}$ des germes de fonctions holomorphes.

Nous désignerons par $z = (z_0, \ldots, z_n)$ un point de l'espace C^{n+1} et nous appellerons *polycylindre compact* le produit K d'ensembles compacts arbitraires K_i situés dans les plans des variables complexes.

PROPOSITION **31.1.** — *Soit D un domaine d'holomorphie de C^{n+1} contenant un polycylindre compact K. Supposons que soit vérifiée la condition :*

(A) *Pour tout $i \in [0, n]$ et pour tout $(z_0, \ldots, z_i, \ldots, z_n) \in D$, on a*

$$(z_0, \ldots, t_i, \ldots, z_n) \in D \textit{ quel que soit } t_i \in K_i.$$

Alors $H^p(D-K, {}^a\mathcal{C}) = 0$ pour p différent de 0 et de n, et $H^n(D-K, {}^a\mathcal{C})$ est canoniquement isomorphe à l'espace des fonctions holomorphes dans le produit des $C - K_i$ et nulles à l'infini, muni de la topologie de la convergence compacte.

DÉMONSTRATION. — Soit U_i le domaine $D \cap \{z_i \notin K_i\}$. Les U_i constituent un recouvrement ouvert de $X = D - K$, dont le nerf I est un n-simplexe, et sont des variétés de Stein; d'après le théorème III.6 (A), la cohomologie de X à valeurs dans le faisceau $^a\mathcal{C}$ s'identifie à la cohomologie du préfaisceau que définissent les fonctions holomorphes dans les intersections des U_i; la proposition résultera donc du lemme 30.1 si pour tout $j \in [0, n]$ et tout q-simplexe s ne contenant pas j on définit une application linéaire continue φ_j^s de l'espace $F(j \cup s)$ des fonctions holomorphes dans $U_{j\cup s}$ dans l'espace

$F(s)$ des fonctions holomorphes dans U_s, ces espaces étant munis de la topologie de la convergence compacte, et ces applications satisfaisant aux conditions (i), (ii) du lemme 30.1.

Soit donc f une fonction holomorphe dans $U_{j\cup s}$: on veut lui faire correspondre une fonction f_j holomorphe « même pour $z_j \in K_j$ ». Soit $z = (z_0, \ldots, z_n) \in D$ avec $z_k \notin K_k$ pour $k \in s \cup j$. Considérons l'ensemble $D_j(z_0, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n)$ des $t_j \in C$ tel que $(z_0, \ldots, z_{j-1}, t_j, z_{j+1}, \ldots, z_n) \in D$: il est ouvert, et contient K_j d'après (A). Soient Q_j et R_j deux ouverts relativement compacts de C tels que leurs frontières Q_j^0 et R_j^0 se composent d'un nombre fini d'arcs rectifiables, et que

$$K_j \subset Q_j, \qquad \overline{Q}_j \subset R_j, \qquad \overline{R}_j \subset D_j(z_0, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n).$$

Laissant $z_0, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n$ fixes, définissons

$$f_j(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{R_j^0} f(z_0, \ldots, t_j, \ldots, z_n) \frac{dt_j}{t_j - z_j} \qquad \text{si} \quad z_j \in R_j,$$

$$f_j(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{Q_j^0} f(z_0, \ldots, t_j, \ldots, z_n) \frac{dt_j}{t_j - z_j} + f(z) \quad \text{si} \quad z_j \notin \overline{Q}_j,$$

les frontières étant parcourues dans le sens tel qu'on ait R_j (resp. Q_j) « à sa gauche ». Si $z_j \in R_j - \overline{Q}_j$, ces deux définitions de $f_j(z)$ coïncident bien, d'après le théorème de Cauchy, parce que f est holomorphe en z_j pour $z_j \notin K_j$; ceci montre en outre que $f_j(z)$ ne dépend pas du choix de R_j et Q_j satisfaisant aux conditions ci-dessus. Alors il est clair que si $z_0, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n$ varient de façon que $z = (z_0, \ldots, z_n)$ soit dans D, les z_k restant hors de K_k pour $k \in s$, $f_j(z)$ est holomorphe, même pour $z_j \in K_j$: f_j est donc holomorphe dans U_s.

On vérifie aussitôt que les φ_j^s vérifient les conditions du lemme 30.1 et sont continues; il ne reste plus qu'à interpréter $H^n(X, {}^a\mathcal{C})$, et pour cela qu'à expliciter le projecteur $\tilde{\pi}$ défini sur $G = F(t)$ qui est ici l'espace des fonctions holomorphes dans l'intersection de D et du produit des complémentaires des K_i. Ce projecteur associe à toute telle fonction f la fonction

$$(\tilde{\pi} f)(z_0, \ldots, z_n) = (2\pi i)^{-(n+1)} \int_{\gamma_0} \cdots \int_{\gamma_n} \frac{f(t_0, \ldots, t_n)\, dt_0 \ldots dt_n}{(z_0 - t_0) \ldots (z_n - t_n)}$$

les contours d'intégration $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$ étant choisis en fonction du point $(z_0, \ldots, z_n)$ (tel que, pour tout j, $z_j \notin K_j$) de la façon suivante : γ_j est la frontière d'un Q_j choisi comme ci-dessus de manière que $z_j \notin \overline{Q}_j$. Par suite, $H^n(X, {}^a\mathcal{C})$, isomorphe à l'image de G par ce projecteur, est isomorphe à l'espace vectoriel des fonctions holomorphes dans $U_{0,\ldots,n}$ vérifiant en outre la relation intégrale

$$(31.1) \quad f(z_0, \ldots, z_n) = 2(\pi i)^{-(n+1)} \int_{\gamma_0} \cdots \int_{\gamma_n} \frac{f(t_0, \ldots, t_n)\, dt_0 \ldots dt_n}{(z_0 - t_0) \ldots (z_n - t_n)}.$$

Or il est clair qu'une telle fonction se prolonge dans tout le produit des complémentaires des K_i, et qu'elle est nulle à l'infini. Réciproquement, une fonction holomorphe dans le produit des $\complement K_j$ et nulle à l'infini est holomorphe dans $U_{0,\ldots,n}$ et satisfait à (31.1) : en faisant une récurrence sur le nombre des variables, on voit en effet qu'il suffit de montrer que si la fonction d'une variable $f(z)$ est holomorphe en dehors d'un compact K et nulle à l'infini, on a

$$(31.2)\quad f(z) = (2\pi i)^{-1}\int_\gamma f(t)\,\frac{dt}{z-t} \qquad \text{(l'intégrale est prise dans le sens direct),}$$

γ étant une courbe fermée rectifiable telle que K soit contenu dans son domaine intérieur, et z dans son domaine extérieur : or il suffit d'appliquer l'intégrale de Cauchy à une couronne contenant z et ayant γ pour frontière intérieure : la valeur de l'intégrale sur la frontière extérieure de la couronne ne dépend pas de cette frontière, et tend vers zéro lorsque cette frontière s'éloigne indéfiniment, puisque f tend vers zéro à l'infini.

La proposition 31.1 est entièrement démontrée.

Corollaire 31.1. — *$D-K$ vérifie le théorème* III.5′ *si $n \neq 1$ et le théorème* III.5″ *si $n \neq 2$.*

Remarque. — Il résulte aussi de la proposition 31.1 que pour $n = 1$ il existe une infinité d'espaces fibrés analytiques sur X de groupe structural C qui sont analytiquement distincts, alors que topologiquement ils sont évidemment tous triviaux.

32. Les complémentaires de polycylindres compacts de C^n. — Nous allons expliciter un corollaire de la proposition 31.1 :

Proposition 32.1.— *Soit X le complémentaire d'un polycylindre compact K de l'espace C^{n+1}. Alors, tout espace fibré analytique sur X de groupe structural résoluble est analytiquement trivial si $n \geqq 3$.*

D'après le numéro précédent, il suffit de vérifier que pour $n \geqq 3$ tout espace fibré topologique sur X de groupe structural résoluble est trivial. Or le groupe structural M étant résoluble, ses groupes d'homotopie sont nuls en dimensions supérieures à 1, et la théorie des espaces classifiants montre que les obstructions topologiques du problème sont des éléments de $H^1(X, \pi_0(M))$ ou de $H^2(X, \pi_1(M))$. La proposition 32.1 va donc résulter de la :

Proposition 32.2. — *Soit X le complémentaire d'un polycylindre compact K de l'espace C^{n+1}. Alors pour tout faisceau simple (abélien) de coefficients G, on a $H^p(X, G) = 0$ pour $0 < p < n$.*

Cette dernière proposition va résulter du

LEMME 32.1. — *Soit K un produit direct de $n+1$ compacts plongés chacuns dans un espace euclidien à deux dimensions réelles. Pour tout faisceau simple de coefficients G, $H^p(K, G) = 0$ pour $p \geqq n+2$.*

Montrons d'abord comment la proposition se déduit du lemme. La cohomologie dont il est question est la cohomologie de Čech, qui sur X s'identifie à la cohomologie singulière puisque X est une variété paracompacte; nous désignerons par H^p_* les groupes de cohomologie de dimension p à supports compacts. Cela étant, la suite exacte

$$H^{2n+1-p}_*(C^{n+1}, Z) \to H^{2n+1-p}(K, Z) \to H^{2n+2-p}_*(X, Z) \to H^{2n+2-p}_*(C^{n+1}, Z)$$

jointe à la dualité de Poincaré, qui exprime que si V est une variété orientable de dimension réelle $2n+2$, $H^{2n+2-r}_*(V, Z) = H_r(V, Z)$, montre que

$$H_p(X, Z) = H^{2n+2-p}_*(X, Z) = H^{2n+1-p}(K, Z) \qquad \text{pour} \quad p > 0$$

donc vu le lemme

$$H_p(X, Z) = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 < p < n.$$

Le théorème des coefficients universels (applicable puisqu'on peut identifier les cohomologie et homologie de Čech avec les cohomologie et homologie singulières sur X) donne

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{p-1}(X), G) \to H^p(X, G) \to \mathrm{Hom}(H_p(X), G) \to 0,$$

ce qui montre, puisque $H_0(X)$ est libre, la validité de notre assertion.

Il reste à établir le lemme, ce que nous ferons par récurrence sur n. Pour $n = 0$, il suffit de montrer, la dimension K étant au plus 2, que $H^2(K, G)$ est nul, ce qui résulte classiquement de la dualité d'Alexander-Pontrjagin : $H^2(K, G) = H_0(C \bmod X, G)$, qui est nul puisque tout point de C peut être joint par un arc à un point de X.

Supposons donc le lemme établi pour un polycylindre compact de C^n, et soit $K = K' \times k$ un polycylindre de C^{n+1} ($K' \subset C^n$, $k \subset C$). La suite spectrale [21] attachée à la cohomologie de ce produit a pour terme E_2 :

$$E_2^{p,q} = H^p(K', H^q(k, G)).$$

Or K étant un produit direct, les faisceaux $H^q(k, G)$ sont des faisceaux simples sur K', du reste nuls pour $q \geqq 2$ d'après ce qui vient d'être dit. D'après l'hypothèse de récurrence, $E_2^{p,0} = 0$ pour $p \geqq n+1$, et $E_2^{p-1,1} = 0$ pour $p \geqq n+2$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. — La démonstration ci-dessus montre que si K a au moins une composante plane k telle que $H_1(K, Z)$ soit *nul*, on a aussi $H^{n+1}(K, Z) = 0$, et par suite $H^n(X, Z) = 0$. Donc :

PROPOSITION 32.1'. — *Si le polycylindre compact K a au moins une composante dont le premier groupe d'homologie est nul, la conclusion de la proposition* 32.1 *subsiste même pour* $n=2$.

33. Les espaces projectifs complexes. — Nous allons déduire des considérations précédentes le calcul de certains des groupes $H^i(P_n(C), {}^a\mathcal{V})$, où $P_n(C)$ est l'espace projectif complexe de dimension n, et ${}^a\mathcal{V}$ le faisceau des germes de sections analytiques d'un espace fibré V analytique de base $P_n(C)$, de fibre vectorielle, et de groupe structural résoluble. Bien que ce calcul puisse se ramener à des résultats maintenant classiques de SERRE [22] ou de KODAIRA [20], nous préférons donner ici une méthode directe, qui a l'avantage d'être plus élémentaire.

Nous considérerons $P_n(C)$ comme la base de l'espace fibré principal $C^{n+1}-\{0\}$ (de groupe structural C^*), et désignerons par ψ la projection de l'espace sur sa base :

Appliquons à $C^{n+1}-\{0\}$ les considérations des nos 31 et 32 : U_i désignera le domaine $\{z_i\neq 0\}$ de C^{n+1}; $H^n(C^{n+1}-\{0\}, {}^a\mathcal{C})$ s'identifie à l'espace des séries de Laurent à $n+1$ variables à exposants tous strictement négatifs, convergentes lorsque aucune des variables n'est nulle. $U'_i=\psi(U_i)$ est homéomorphe à un C^n, et les U'_i constituent un recouvrement ouvert $\mathcal{U}'$ de $P_n(C)$. D'après le n° 28, V, qui est topologiquement trivial au-dessus des U'_i, l'est analytiquement. Si G est le groupe structural de V, ce recouvrement nous met dans la situation du n° 10.1 dont nous adopterons les notations, toutes les applications étant analytiques. Étant donnée une section de ${}^a\mathcal{V}$ au-dessus de $U'_{i_0,\ldots,i_p}$, nous désignerons par $f_{i_0,\ldots,i_p}$ son image par ϖ_{i_0}; $f_{i_0,\ldots,i_p}$ est donc une fonction holomorphe à valeurs vectorielles. Enfin, le faisceau ${}^a\mathcal{V}$ étant analytique cohérent, notre recouvrement est adapté au calcul de la cohomologie à coefficients dans ce faisceau (th. III.6).

PROPOSITION 33.1. — $H^p(P_n(C), {}^a\mathcal{V})=0$ *pour p différent de* 0 *et* n.

Le nerf du recouvrement $\mathcal{U}'$ étant de dimension n, la proposition est évidente pour $p>n$. On peut donc se borner à supposer n différent de 0 et de 1 et $p\leqq n-1$. Soit W l'image réciproque de V par l'application ψ : d'après la proposition 32.1', W est trivial : cela signifie qu'il existe des fonctions g_i, holomorphes dans U_i, et à valeurs dans G telles que

$$g_i^{-1}g_j=g_{ij}\circ\psi \quad \text{dans } U_{ij}.$$

Or un p-cocycle est défini par une collection de fonctions holomorphes $f_{i_0,\ldots,i_p}$ vérifiant dans $U'_{i_0,\ldots,i_{p+1}}$,

$$\Sigma_{j=1}^{j=p+1}(-1)^j f_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{p+1}}+g_{i_0 i_1}\cdot f_{i_1,\ldots,i_{p+1}}=0.$$

Posons

$$h_{i_0,\ldots,i_p}=g_{i_0}\cdot(f_{i_0,\ldots,i_p}\circ\psi) \quad \text{dans } U_{i_0,\ldots,i_p}.$$

Les fonctions (vectorielles) h constituent un p-cocycle du recouvrement de Stein $\mathcal{U}$ de $C^{n+1}-\{0\}$; comme $p\neq 0$ et n, ce cocycle est un cobord, et il existe des fonctions vectorielles $h'_{i_0,\ldots,i_{p+1}}$ holomorphes dans $U_{i_0,\ldots,i_{p+1}}$ telles que

$$h_{i_0,\ldots,i_p}=\Sigma_{j=0}^{j=p}(-1)^j h'_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_p}.$$

Posons

$$h''_{i_0,\ldots,i_{p+1}}=g_{i_0}^{-1}.h'_{i_0,\ldots,i_{p-1}}.$$

Il vient

$$f_{i_0,\ldots,i_p}\circ\psi=(g_{i_0i_1}\circ\psi).h''_{i_1,\ldots,i_p}+\Sigma_1^p(-1)^j h''_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_p}.$$

Or une fonction holomorphe dans $U_{i_0,\ldots,i_p}$ y étant développable en série de Laurent s'écrit d'une manière et d'une seule comme somme de ses composantes homogènes de degré entier rationnel donné; pour qu'elle soit de la forme $f\circ\psi$ il faut et il suffit qu'elle soit homogène de degré o. Soit donc $f'_{i_0,\ldots,i_{p-1}}\circ\psi$ la composante homogène de degré o de $h''_{i_0,\ldots,i_{p-1}}$. On a donc

$$0=(f_{i_0,\ldots,i_p}-g_{i_0i_1}.f'_{i_1,\ldots,i_p}-\Sigma_1^p(-1)^j f'_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_p})\circ\psi.$$

Ce qui, puisque ψ applique $U_{i_0,\ldots,i_p}$ *sur* $U'_{i_0,\ldots,i_p}$ montre bien que notre p-cocycle est un cobord. C. Q. F. D.

H^n et naturellement H^0 ne sont pas nuls en général (*cf.* Serre ou Kodaira, *loc. cit.*). Nous allons montrer comment la même méthode permet de calculer leurs dimensions dans le cas où la fibre est de dimension (complexe) 1, le groupe structural étant par suite C^* : d'après le théorème de Lie, ce cas particulier suffit à éclaircir le cas général, du moins lorsque le groupe structural est connexe.

Remarquons d'abord que $H^n(P_n(C), {}^a\mathcal{C})=0$: cela résulte, soit du théorème de Dolbeault [**11**], soit du fait que la composante homogène de degré o du n-cocycle représentant canoniquement un élément de $H^n(C^{n+1}-\{0\}, {}^a\mathcal{C})$ est *nulle* comme il résulte de ce qui a été rappelé au début de ce numéro.

Par suite, les espaces fibrés analytiques de groupe structural C^* et de base $P_n(C)$ se classent du point de vue analytique comme du point de vue topologique, même pour $n=1$ ou 2 (th. III.5′ et III.5″) : ils sont donc caractérisés par leur classe de Chern, élément de $H^2(P_n(C), \pi_1(C^*))=Z$.

$H^1(P_n(C), {}^a\mathcal{C}^*)=H^2(P_n(C), Z)$ étant un groupe, il suffit, pour déterminer ces espaces fibrés d'en connaître un qui corresponde à un générateur de $H^2(P_n(C), Z)$. Or, $P_n(C)$ étant connexe et simplement connexe, $H^2(P_n(C), Z)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}(\pi_2(P_n(C), \pi_1(C^*))$, et cette identification fait précisément correspondre à la classe de Chern d'un espace fibré l'homomorphisme de bord de la suite exacte d'homotopie des espaces fibrés : un générateur du groupe $\mathrm{Hom}(Z, Z)$ étant un isomorphisme, il suffit donc d'avoir un espace fibré tel que l'homomorphisme bord $\pi_2(P_n(C))\to\pi_1(C^*)$ soit un isomorphisme; il suffit donc que l'espace fibré ait ses deux premiers groupes d'homotopie nuls : or c'est le cas pour $C^{n+1}-\{0\}$ fibré sur $P_n(C)$ $(n \neq 0)$. Avec le recouvrement $\mathcal{U}'$ de $P_n(C)$, $C^{n+1}-\{0\}$ est défini par les fonctions de changement de coordonnées

$$g_{ij} = z_i z_j^{-1} \quad \text{dans } U'_{ij}.$$

Pour nous conformer à l'usage ([19], [22]), nous conviendrons que cet espace a la classe caractéristique -1 [34]. En résumé, un cocycle g_{ij} de $\mathcal{U}'$ à valeurs dans ${}^a\mathcal{C}^*$ correspond à l'espace fibré analytique de classe caractéristique s si

$$g_{ij} = (z_j z_i^{-1})^s \quad \text{dans } U'_{ij}.$$

Proposition 33.2. — *Soit ${}^a\mathcal{C}_s$ le faisceau des germes de sections analytiques de l'espace fibré de base $P_n(C)$ et de groupe structural C^* dont la classe caractéristique est s. Alors la dimension d_0 de l'espace vectoriel complexe $H^0(P_n(C), {}^a\mathcal{C}_s)$ est $\binom{s+n}{n}$, et la dimension d_n de $H^n(P_n(C), {}^a\mathcal{C}_s)$ est $\binom{-s-1}{n}$.*

1° *Calcul de d_n.* — Un n-cocycle est une fonction f holomorphe dans $U'_{0,\dots,n}$, et les raisonnements ci-dessus montrent que la classe de $f\circ\psi$ dans $H^n(C^{n+1}-\{0\}, {}^a\mathcal{C}_s)$ contient une fonction et une seule de la forme $z_0^{-s}k$, où k est une série entière par rapport aux z_i^{-1}, divisible par $(z_0\dots z_n)^{-1}$ La composante homogène de degré 0 de $z_0^{-s}k$ est de la forme

$$\Sigma A z_0^{\alpha_0-s} z_1^{\alpha_1}\dots z_n^{\alpha_n}, \qquad \text{avec} \quad \alpha_i < 0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma\alpha_i = s \quad (0 \leq i \leq n).$$

En posant $\alpha'_i = -(\alpha_i+1)$, on a $\alpha'_i \geq 0$ et $\Sigma\alpha'_i = -s-n-1$. Comme deux cocycles cohomologues de $H^i(P_n(C), {}^a\mathcal{C}_s)$ donnent évidemment deux cocycles cohomologues de $H^i(C^{n+1}-\{0\}, {}^a\mathcal{C})$, on voit ainsi que d_n s'identifie à la dimension de l'espace vectoriel des polynomes homogènes de degré $-(s+n+1)$ à $(n+1)$ variables, soit $\binom{-s-1}{-s-n-1} = \binom{-s-1}{n}$.

2° *Calcul de d_0.* — Pour qu'une fonction f_0 holomorphe dans U'_0 puisse correspondre par ϖ_0 à une section complète de ${}^a\mathcal{C}_s$, il faut et il suffit que, pour tout i, $h_i = (z_0 z_i^{-1})^s f_0\circ\psi$ soit holomorphe dans U_i. Développons $f_0\circ\psi$ en série de Laurent dans U_0 :

$$f_0\circ\psi = \Sigma A_{0,\dots,n}^{\alpha_0,\dots,\alpha_n} z_0^{\alpha_0}\dots z_n^{\alpha_n}$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières de signe quelconque des α_i, mais les constantes A étant nulles si la somme des α_i n'est pas nulle, ou si l'un des α_i est < 0 avec $i > 0$.

---

[34] Nous avions pris la convention opposée dans [15].

Il en résulte que h_i sera holomorphe dans U_i pour tout i à la condition nécessaire et suffisante que les constantes A soient de plus nulles chaque fois que α_0 est inférieur à $-s$.

Posons

$$\alpha'_i = \alpha_i \quad (i \neq 0) \qquad \text{et} \qquad \alpha'_0 = \alpha_0 + s.$$

Il y a donc autant de coefficients non nuls que de systèmes d'entiers $\alpha'_i \geqq 0$ dont la somme soit égale à s; autrement dit d_0 est égal à la dimension de l'espace vectoriel des polynomes homogènes de degré s à $(n+1)$ variables, soit $\binom{n+s}{s}$. La proposition est démontrée

Remarques. — 1° La proposition 33.1 donne naturellement les valeurs des autres groupes de cohomologie de $P_n(C)$ à coefficients dans ${}^a\mathcal{C}_s$.

2° Le résultat trouvé contient le fait que $H^n(P_n(C), {}^a\mathcal{C})$ est nul, fait qui nous a servi non à établir la proposition 33.2, mais seulement à décrire tous les faisceaux de germes de sections analytiques attachés aux espaces fibrés analytiques sur $P_n(C)$ à fibre vectorielle de dimension 1.

3° Traduisons les théorèmes généraux du paragraphe B, en remarquant que la proposition 33.1 montre que la condition (a) du lemme 24.2 est remplie, sans qu'il soit besoin d'utiliser le lemme 24.3 pour l'établir :

Proposition 33.3. — *Soit M un espace fibré analytique de base $P_n(C)$, dont les fibres et le groupe structural sont résolubles. Alors si $n \neq 1$ l'application canonique $\tilde{H}^0(X, {}^a\mathcal{M}) \to \tilde{H}^0(X, {}^c\mathcal{M})$ est surjective, et elle est injective si le groupe structural est de plus supposé connexe; l'application canonique $H^1(X, {}^a\mathcal{M}) \to H^1(X, {}^c\mathcal{M})$ est injective. Si $n \neq 2$, l'application canonique $H^1(X, {}^a\mathcal{M}) \to H^1(X, {}^c\mathcal{M})$ est surjective. En particulier deux espaces fibrés analytiques M-principaux topologiquement M-isomorphes le sont analytiquement lorsque $n \neq 1$, et tout espace fibré topologique M-principal peut être muni d'une structure analytique compatible avec sa structure d'espace M-principal lorsque $n \neq 2$.*

La proposition 33.2 permet, dans des cas particuliers, de lever les restrictions faites sur n.

Proposition 33.4. — *Tout espace fibré analytique de base $P_n(C)$ et de groupe structural résoluble qui est topologiquement trivial est analytiquement trivial. Les classes d'espaces fibrés analytiques analytiquement $P_n(C)$-isomorphes correspondent biunivoquement lorsque leur groupe structural est nilpotent aux classes d'espaces fibrés topologiques topologiquement $P_n(C)$-isomorphes ayant même groupe structural.*

34. Une classe de variétés satisfaisant à la condition du lemme 24.3. — Nous allons construire de nouvelles variétés satisfaisant à la condition du lemme 24.3 en formant *le produit* de variétés déjà obtenues. Cela mettra en évidence que ce lemme est vérifié par des variétés qui ne sont ni compactes, ni de Stein.

Pour cela, nous aurons besoin, outre le théorème III.6, d'un résultat de A. GROTHENDIECK [17].

THÉORÈME DE GROTHENDIECK. — *Soient E et F deux espaces vectoriels de Fréchet, dont l'un est nucléaire, munis respectivement des opérateurs de dérivation d_1 et d_2. Munissons leur produit tensoriel complété $E \hat{\otimes} F$ de la dérivation totale $d = d_1 \hat{\otimes} 1 + (-1)^p 1 \hat{\otimes} d_2$. Alors, si d_1 et d_2 sont des homomorphismes topologiques, $H(E \hat{\otimes} F) = H(E) \hat{\otimes} H(F)$.*

Nous renvoyons pour les définitions et la démonstration à [17].

PROPOSITION 34.1. — *Désignons par U une variété de Stein (éventuellement réduite à un point); par D_i un domaine d'holomorphie de l'espace numérique $C^{d(i)+1}$ et par K^i un polycylindre compact contenu dans D_i tel que le couple (D_i, K^i) satisfasse à la condition (A) de la proposition 31.1; par X_i le complémentaire $D_i - K^i$ de K^i dans D_i; désignons enfin par Y_λ un espace projectif complexe de dimension (complexe) $d(\lambda)$. Soit I (resp. Λ) un ensemble d'indices fini, éventuellement vide. Posons*

$$X = U \times \Pi_{i \in I} X_i \times \Pi_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda.$$

Alors si p est nul ou de la forme $p = \Sigma_{i \in J \subset I} d(i)$, $H^p(X, {}^a\mathcal{C})$ est un espace de Fréchet de dimension infinie; dans tous les autres cas $H^p(X, {}^a\mathcal{C}) = 0$.

REMARQUE. — On peut supposer sans diminuer la généralité $d(i)$ et $d(\lambda) \neq 0$.

Lorsque nous aurons besoin de préciser qu'un faisceau $\mathcal{F}$ est un faisceau *sur l'espace X*, nous le noterons plus spécialement $\mathcal{F}_X$; nous noterons ici F_X l'ensemble des sections de $\mathcal{F}_X$ au-dessus de X. Soit $\mathcal{A}_X^p$ le faisceau de germes de formes différentielles à coefficients indéfiniment différentiables et de type $(0, p)$ sur la variété analytique complexe X. Munissons les $\mathcal{A}_X^p$ de la topologie de la convergence uniforme de chaque dérivée sur tout compact ([35]), et soit d'' le classique homomorphisme $d'' : \mathcal{A}_X^p \to \mathcal{A}_X^{p+1}$. Soit $\mathcal{A}_X$ la somme directe des $\mathcal{A}_X^p$, qui forment une résolution fine de Fréchet de ${}^a\mathcal{C}_X$ ([36]). Pour toute variété analytique complexe, $H^q(X, {}^a\mathcal{C})$ est donc [11] isomorphe au $q^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie de l'espace vectoriel A_X des sections de $\mathcal{A}_X$.

Or il est facile de voir que A_X est le produit tensoriel complété des espaces A_U, A_{X_i}, A_{Y_λ}, lesquels sont de plus nucléaires. Il reste donc à voir, pour démontrer la proposition par récurrence sur le nombre des composants

---

([35]) *Voir* [24], n° 8, p. 16-17.

([36]) *Voir* [11] et [17 *a*].

de X, que les opérateurs d'' relatifs à chacun de ces espaces sont des homomorphismes (il est clair, en effet, que la dérivation totale déduite de deux homomorphismes est un homomorphisme, et l'on sait que le produit tensoriel complété de deux espaces nucléaires est un espace nucléaire). Or ce fait résulte du thèorème III.6 (puisque $\mathcal{A}^0$ induit sur ${}^a\mathcal{C}$ la topologie de la convergence compacte) compte tenu des propositions 31.1 et 33.2. Le théorème de Grothendieck est donc applicable, et la conclusion immédiate.

Il reste à étudier le cas du faisceau $\mathcal{V}_X$ des germes de sections holomorphes d'un espace fibré V de base X et de fibre C. Nous ferons alors des hypothèses plus restrictives.

Tout d'abord, si tous les $d(i)$ sont $\neq 1$, il résulte du théorème III.5′ que deux espaces fibrés analytiques différents de base X et de groupe structural C^* ont des classes de Chern différentes; mais il n'est pas sûr qu'à toute classe de Chern corresponde un espace fibré analytique. Nous supposerons de plus que pour tout $i \in I$, D_i est connexe et que $H_1(D_i) = 0$ (il s'agit d'homologie à coefficients entiers et à supports compacts). Il en résulte par des raisonnements calqués sur ceux du n° 32 que, puisque tous les $d(i)$ sont supposés $\geqq 2$, X_i est connexe et $H_1(X_i) = 0$. Or :

Lemme 34.1. — *Soient X et Y deux espaces connexes. Supposons que $H_1(X, Z) = 0$ ou $H_1(Y, Z) = 0$. Alors $H^2(X \times Y, Z)$ est somme directe de $H^2(X, Z)$ et de $H^2(Y, Z)$.*

En effet, si $H_1(X, Z) = 0$, il suffit d'appliquer la formule des coefficients universels [6] :

$$0 \to \Sigma_{p+q=n-1} \operatorname{Ext}(H_p(X), H^q(Y)) \to H^n(X \times Y) \to \Sigma_{p+q=n} \operatorname{Hom}(H_p(X), H^q(Y)) \to 0$$

en remarquant que

$$\operatorname{Hom}[H_2(X), H^0(Y)] = \operatorname{Hom}[H_2(X), Z] \approx H^2(X, Z)$$

puisque $H_1(X) = 0$ par hypothèse.

Supposons alors la variété de Stein U connexe : il résulte de nos hypothèses sur les D_i que V est topologiquement X-isomorphe à un produit tensoriel d'espaces fibrés (topologiques) de fibres C ayant chacun pour base l'une des composantes du produit direct X; ceux ayant pour base U ou les Y_λ sont, d'après le théorème III.5″, susceptibles d'être munis d'une structure analytique complexe; admettons qu'il en soit de même pour ceux ayant pour base les X_i [dans la suite nous serons amené à supposer encore $H^2(X_i, Z) = 0$ pour tout i, de sorte que notre hypothèse sera automatiquement vérifiée, ces espaces étant des produits directs] : V sera donc topologiquement équivalent à un produit tensoriel d'espaces fibrés analytiques ayant pour base chacune des composantes de X; il sera donc d'après ce qui vient d'être dit analytiquement équivalent à ce produit tensoriel. Nous avons démontré :

LEMME 34.2. — *X étant défini comme dans la proposition* 34.1, *supposons la variété de Stein U connexe, et, pour tout i, $d(i) \neq 1$, X_i connexe, $H_1(X_i) = H^2(X_i) = 0$* (37). *Alors tout espace fibré analytique sur X, de fibre C, est un produit tensoriel d'espaces fibrés analytiques de fibres C ayant respectivement pour base U, les X_i et les Y_λ. Ils sont caractérisés analytiquement par leur classe de Chern qui est un élément arbitraire du produit $H^2(U, Z) \times \Pi_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$ où Z_λ est un groupe isomorphe à Z.*

REMARQUE. — On notera que toutes les conditions concernant les X_i sont remplies lorsque D_i est connexe, $H_1(D_i) = H_2(D_i) = 0$, le polycylindre K^i ayant en outre, lorsque $d(i) = 2$, au moins une composante dont le premier groupe d'homologie est nul.

Nous sommes en mesure d'énoncer le

THÉORÈME III.7. — *Supposons que X satisfasse aux hypothèses du lemme* 34.2, *et soit ${}^a\mathcal{C}_s$ le faisceau des germes de sections analytiques de l'espace fibré sur X de fibre C et de classe de Chern $s = (u, (c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$. A tout sous-ensemble $J \times \Gamma$ de $I \times \Lambda$ associons l'entier* (38)

$$r(J, \Gamma) = \Sigma_{i \in J}\, d(i) + \Sigma_{\lambda \in \Gamma}\, d(\lambda).$$

Dans ces conditions :

1° *$H^0(X, {}^a\mathcal{C}_s)$ est de dimension $n = \Pi_{\lambda \in \Lambda} \binom{c_\lambda + d(\lambda)}{d(\lambda)}$, sauf si n étant > 0, on n'a pas simultanément I vide et U réduit à un point, auquel cas $H^0(X, {}^a\mathcal{C}_s)$ est de dimension infinie;*

2° *$H^p(X, {}^a\mathcal{C}_s) = 0$ si $p > 0$ n'est pas égal à l'un des $r(J, \Gamma)$;*

3° *Supposons qu'il existe $J_1, \ldots, J_k$ et $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ tels que*

$$p = r(J_1, \Gamma_1) = \ldots = r(J_k, \Gamma_k).$$

Alors $H^p(X, {}^a\mathcal{C}_s)$ est somme directe de k espaces vectoriels $H_1, \ldots, H_k$. Soit

$$n_i = \Pi_{\lambda \notin \Gamma_i} \binom{c_\lambda + d(\lambda)}{d(\lambda)} \Pi_{\lambda \in \Gamma_i} \binom{-c_\lambda - 1}{d(\lambda)}.$$

H_i est de dimension n_i, sauf dans le cas où :

(i) *n_i est > 0;*

(ii) *on n'a pas I vide et U réduit à un point, auquel cas H_i est de dimension infinie.*

---

(37) Compte tenu de l'hypothèse $H_1(X_i) = 0$, l'hypothèse $H^2(X_i, Z) = 0$ équivaut, d'après le théorème des coefficients universels, à $H_2(X_i)$ sans torsion.

(38) On n'exclut pas $J = \emptyset$, ou $\Gamma = \emptyset$.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 34.1. Au lieu des faisceaux de germes de formes différentielles $\mathcal{A}^p$, nous considérerons leurs produits tensoriels $\mathcal{A}^p(s)$ par le faisceau ${}^a\mathcal{C}_s$ [faisceau des germes de formes différentielles de type $(0, p)$ à coefficients dans l'espace fibré considéré ([39])] le produit tensoriel étant pris sur le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur la variété. Or le fait que l'espace fibré V est produit tensoriel d'espaces fibrés sur chacun des facteurs de la base entraîne que l'espace $A_X(s)$ est produit tensoriel complété des espaces $A_U(u)$, A_{X_i}, $A_Y(c_\lambda)$ (tenir compte de ce que tout espace fibré de fibre C sur X_i est trivial !). D'autre part, pour toute variété analytique complexe, $H^q(X, {}^a\mathcal{C}_s)$ est le $q^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie de l'espace vectoriel des sections de $A_X(s)$; enfin le théorème de Grothendieck est encore applicable, d'où le résultat.

Résumons les principales conséquences des résultats obtenus dans ce numéro :

Théorème III.8. — *Dans les hypothèses de la proposition* 34.1, *si tous les $d(i)$ sont différents de* 1, *X vérifie les conclusions du théorème* III.5′ ; *si tous les $d(i)$ sont différents de* 2, *l'un au plus étant égal à* 1, *X vérifie les conclusions du théorème* III.5″.

Dans les hypothèses du lemme 34.2, *si tous les $d(i)$ et tous les $d(\lambda)$ sont différents de* 1, *X vérifie les conclusions des théorèmes* III.1, III.2, III.3 *et* III.3′ ; *si tous les $d(i)$ sont* > 2 *et tous les $d(\lambda)$ différents de* 2, *l'un au plus étant égal à* 1, *X vérifie les conclusions des théorèmes* III.4 *et* III.4′ ([40]).

Remarque. — Si X est connexe et simplement connexe, la restriction concernant la connexion du groupe structural figurant dans les conclusions des théorèmes III.3′ et III.4′ est superflue, d'après le complément à ces théorèmes.

35. Un contre-exemple. — Il est facile de voir que l'hypothèse du théorème III.3′ est la moins restrictive qu'on puisse faire, si l'on veut que la conclusion subsiste, quelle que soit la nature topologique de l'espace fibré envisagé (en ce qui concerne le théorème III.5′, la condition donnée est visiblement nécessaire et suffisante). Mais X étant choisie de façon à *ne pas* satisfaire à l'hypothèse du théorème III.3′, et le groupe structural M résoluble connexe étant fixé, il se peut qu'il existe sur X à la fois :

1° Des espaces fibrés analytiques caractérisés (du point de vue de leur fibration *analytique*) par leur seul invariant topologique : ces espaces seront donc analytiquement isomorphes dès qu'ils le seront topologiquement.

([39]) *Voir* [24], § 2.

([40]) *Voir* [15].

2° Des espaces fibrés analytiques, analytiquement distincts et topologiquement $\mathcal{X}$-isomorphes.

Prenons comme groupe structural le groupe S des similitudes planes. Le sous-groupe des translations est un sous-groupe distingué isomorphe à C, et le quotient S/C est isomorphe au sous-groupe des similitudes laissant fixe un point donné, qui est un sous-groupe-section isomorphe à C^*. On a donc $S = P(C, C^*)$, les opérations d'un élément y de C^* sur C étant naturellement la multiplication par y.

Prenons pour base $\mathcal{X}$ une variété satisfaisant aux hypothèses du lemme 34.2, et supposons tous les $d(i) \neq 1$. Il résulte du théorème II.1 (n° 15) que :

1° Au point de vue topologique, un tel espace fibré est entièrement déterminé par la classe $s \in H^1(\mathcal{X}, {}^c\mathcal{C}^*)$ de l'espace fibré de groupe C^* qu'il détermine au moyen de la projection canonique $S \to C^*$. Soit $s = (u, (c_{\lambda \in \Lambda}))$ la classe de Chern de cet espace.

2° Au point de vue analytique, du fait que $H^1(\mathcal{X}, {}^a\mathcal{C}^*) = H^1(\mathcal{X}, {}^c\mathcal{C}^*)$, à toute classe de Chern s correspond au moins un espace fibré analytique ayant cette classe de Chern, et tous ceux qui l'admettent correspondent biunivoquement aux classes d'intransitivité de $H^0(\mathcal{X}, {}^a\mathcal{C}^*)$ opérant (avec les notations du théorème III.7) sur $H^1(\mathcal{X}, {}^a\mathcal{C}^s)$. Pour que ce dernier espace vectoriel ait une dimension $\neq 0$ il faut et il suffit qu'il existe $\lambda = \lambda_0 \in \Lambda$ tel que $d(\lambda_0) = 1$, $c_{\lambda_0} \leqq -2$ et que pour tout $\lambda \neq \lambda_0 \in \Lambda$ on ait $c_\lambda \geqq 0$. Détaillons complètement le résultat en se bornant pour plus de simplicité au cas où U est réduit à un point et I est vide.

Proposition 35.1 ([41]). — 1° *Soit $\mathcal{X} = P_d(C)$ un espace projectif complexe de dimension d. Si $d \geqq 2$, les espaces fibrés analytiques sur $\mathcal{X}$ de groupe structural S sont entièrement déterminés par leur invariant topologique, qui est un entier arbitraire. Si $d = 1$, soit $c \in Z$: si $c \geqq -1$, il n'y a qu'un espace fibré analytique sur $\mathcal{X}$, de groupe S, et de classe de Chern c; si $c = -2$, il en existe deux; si $c < -2$ il en existe une infinité, et leur invariant analytique est un point de l'ensemble P, réunion d'un point et d'un espace projectif complexe de dimension complexe $-c-2$.*

2° *Soit $\mathcal{X} = P_{d(1)}(C) \times \ldots \times P_{d(n)}(C)$ un produit d'espaces projectifs complexes, dont les dimensions sont indiquées par les $d(i)$. L'invariant topologique d'un espace fibré sur $\mathcal{X}$ de groupe S est une suite $(c_1, \ldots, c_n)$ de n entiers, c_i étant attaché à $P_{d(i)}$. A cet invariant topologique corres-*

([41]) Pour le 1° *voir* [1]. Pour l'ensemble, *voir* [15], § 4. Nous profitons de cette occasion pour signaler que l'énoncé de ce paragraphe (phrase en italique) est erroné : comme on l'a vu ci-dessus, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe plusieurs espaces fibrés analytiques distincts topologiquement $\mathcal{X}$-isomorphes à E, est (avec les conventions de signe de [15]) la suivante : il existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $d(\lambda_0) = 1$, $c(\lambda_0) \geqq 2$, $c(\lambda) \leqq 0$ pour $\lambda \neq \lambda_0$.

pond toujours au moins un espace fibré analytique admettant cet invariant. Cet espace est unique, sauf s'il existe un entier $q\,(1 \leqq q \leqq n)$ *tel que :*

(i) $$d(q) = 1;$$

(ii) $$c_q \leqq -2;$$

(iii) $$c_i \geqq 0 \quad \text{pour} \quad i \neq q.$$

Dans ce dernier cas, l'invariant analytique permettant de caractériser tous les espaces topologiquement isomorphes à l'espace fibré topologique de classe de Chern $(c_1, \ldots, c_n)$ *est un point de l'ensemble* P, *réunion d'un point et d'un espace projectif de dimension complexe*

$$\xi = \left[-(c_q+1)\,\Pi_{i\neq q}\binom{c_i + d(i)}{d(i)}\right] - 1 \qquad (i = 1, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n).$$

Ils sont donc en nombre infini, sauf si

$$c_q = -2, \qquad c_1 = \ldots = c_{q-1} = c_{q+1} = \ldots = c_n = 0,$$

auquel cas il en existe deux.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M. F. ATIYAH, *Complex fibre bundles and ruled surfaces* (*Proc. London Math. Soc.*, 3e série, t. 5, 1955, p. 407-434).

[2] H. CARTAN, *Séminaire de Topologie algébrique*, 1, E. N. S., Paris, 1949-1950.

[2a] H. CARTAN, *Séminaire de Topologie algébrique*, 2, E. N. S., Paris, 1950-1951.

[2b] H. CARTAN, *Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes* (*Proc. Int. Cong. of Math.*, 1950, p. 152-164).

[3] H. CARTAN, *Séminaire de Topologie algébrique*, 3, E. N. S., Paris, 1951-1952.

[3a] H. CARTAN, *Séminaire de Topologie algébrique*, 5, E. N. S., Paris, 1953-1954.

[4] H. CARTAN, *Variétés analytiques complexes et cohomologie* (*Centre Belge Rech. math.*, *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables*, 1953, p. 41-55).

[5] H. CARTAN, *Espaces fibrés analytiques*, à paraître dans le volume consacré au *Symposium international de Mexico de* 1956.

[6] H. CARTAN et S. EILENBERG, *Homological Algebra* (*Princeton math. Ser.*, n° 19).

[7] H. CARTAN et J.-P. SERRE, *Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 128-130).

[8] P. DEDECKER, *Extension du groupe structural d'un espace fibré* (*Coll. Top. Strasbourg*, 1955).

[9] P. DEDECKER, *Cohomologie à coefficients non abéliens et espaces fibrés* (*Bull. Acad. Roy. Belg.*, Cl. Sc., 5e série, t. 41, 1955, p. 1132-1146).

[10] P. DEDECKER, *La structure algébrique de l'ensemble des classes d'espaces fibrés* (*Bull. Acad. Roy. Belg.*, Cl. Sc., 5e série, t. 42, 1956, p. 270-290).

[11] P. DOLBEAULT, *Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe* (*Thèse*, Paris, 1955, et *Ann. Math.*, t. 64, 1956, p. 83-130).

[12] C. EHRESMANN, *Sur la théorie des espaces fibrés* (*Coll. Int. C. N. R. S., Top. Alg.*, Paris, 1947, p. 3-35).

[12a] C. EHRESMANN, *Les connexions dans un espace fibré différentiable* (*Coll. Top. Bruxelles*, 1950, p. 29-55).

[13] J. FRENKEL, *Sur une classe d'espaces fibrés analytiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 40-41).

[14] J. FRENKEL, *Cohomologie à valeurs dans un faisceau non abélien* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 2368-2370).

[15] J. FRENKEL, *Sur les espaces fibrés analytiques complexes de fibre résoluble* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 241, 1955, p. 16-18).

[16] H. GRAUERT, *Généralisation d'un théorème de Runge et application à la théorie des espaces fibrés analytiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 242, 1956, p. 603-605); *Approximations Sätze und analytische Faser Raüme* (à paraître aux *Math. Annalen*).

[17] A. GROTHENDIECK, *in* Séminaire SCHWARTZ, 1, Paris, 1953-1954, *voir* particulièrement exposé 24 : *Opérations algébriques sur les distributions à valeurs vectorielles, théorème de Künneth.*

[17a] A. GROTHENDIECK, *Thèse*, Paris, 1953 ou *Memoirs of the Am. math. Soc.*, n° 16, 1955.

[18] A. Grothendieck, *A general theory of fibre spaces with structure sheaf*, Lawrence, University of Kansas, 1955.

[19] F. Hirzebruch, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie* [*Ergebnisse der Mathematik* (*neue Folge*), Heft 9, 1956].

[20] K. Kodaira, *On Kähler varieties of restricted type* (*Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 39, 1953, p. 868-877).

[21] J. Leray, *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue* (*J. Math. pures et appl.*, t. 29, 1950, p. 1-139).

[21 *a*] K. Oka, *Deuxième problème de Cousin* (*J. Sc. of the Hiroshima University*, 1939).

[22] J.-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents* (*Ann. Math.*, t. 61, 1955, p. 197-278).

[23] J.-P. Serre, *in* Séminaire H. Cartan, 3, E. N. S., Paris, 1951-1952, exposé 20.

[24] J.-P. Serre, *Un théorème de dualité* (*Comm. Math. Helv.*, t. 29, 1955, p. 9-26).

[25] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles* (*Princeton math. Ser.*, n° 14).

[26] A. Weil, *Sur les théorèmes de de Rham* (*Comm. Math. Helv.*, t. 26, 1952, p. 119-145).

Manuscrit reçu le 10 décembre 1956.

TABLE DES MATIÈRES.

B. — *Les espaces fibrés dont la fibre est un groupe résoluble.*

C. — *Une classe de variétés satisfaisant à la condition du lemme* 24.3.