BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES-LOUIS LIONS

Opérateurs de Delsarte et problèmes mixtes

Bulletin de la S. M. F., tome 84 (1956), p. 9-95

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1956__84__9_0>

Bull. Soc. math. France,
84, 1956, p. 9 à 95.

OPÉRATEURS DE DELSARTE ET PROBLÈMES MIXTES;

PAR M. J. L. LIONS,
(Nancy).

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

Si l'on désigne par Λ_x un opérateur différentiel *elliptique* défini dans un ouvert Ω de R^n ($x \in R^n$) et si t désigne le temps, on se propose d'étudier *les problèmes mixtes* (au sens de HADAMARD [1]) (les crochets renvoient à la bibliographie) relatifs aux opérateurs

$$(\star)\ \Lambda_x + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + r(t)\frac{\partial}{\partial t} + s(t),$$

r et s étant deux fonctions données de t. L'opérateur Λ_x est *d'ordre quelconque*, à coefficients variables (mais indépendants de t) ; on simplifie d'ailleurs l'exposé en prenant Λ égal à un opérateur autoadjoint semi-borné dans un espace de Hilbert.

CHAPITRE I.

On prend dans ce chapitre les fonctions r et s indéfiniment différentiables. Comme dans LIONS [1], on distingue deux sortes de problèmes mixtes : les problèmes mixtes généraux, posés pour des distributions à valeurs vectorielles et à support en t limité à gauche; puis les problèmes mixtes fins (ou usuels). La méthode de résolution est la suivante :

a. Sur la droite R on transmue l'opérateur

$$I = \frac{d^2}{dt^2} + r(t)\frac{d}{dt} + s(t)$$

en l'opérateur $\dfrac{d^2}{dt^2}$. Il existe des isomorphismes de transmutation de ces deux opérateurs dans des espaces fonctionnels convenables. C'est ce qui a été fait par DELSARTE [1], sur des espaces de fonctions, *cf.* aussi MARCENKO [1], [2]. On rappelle ce fait fondamental (avec une définition un peu différente de celle de M. DELSARTE) aux nos 1, 2, 3 (le raccord avec la définition initiale de M. DELSARTE étant fait au no 6). Ces isomorphismes de transmutation sont appelés opérateurs de Delsarte. On les prolonge, dans les nos 4 et 7 à des espaces de distributions scalaires, puis à valeurs vectorielles. (Pour les distributions, *cf.* SCHWARTZ [1], [2] et les distributions à valeurs vectorielles, SCHWARTZ [4], GROTHENDIECK [1]).

b. Avec les opérateurs de Delsarte, l'étude des problèmes mixtes relatifs à l'opérateur ($\star$) est ramenée à l'étude des problèmes mixtes (généraux ou fins) relatifs à l'opérateur

$$\Lambda_x + \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Or ces derniers problèmes mixtes sont résolus dans LIONS [1]. On en déduit la solution des problèmes mixtes proposés, et en outre *un procédé de calcul* des solutions (dans la mesure où l'on arrive à expliciter les opérateurs de Delsarte (*cf.* n° 13 et 14); on a de toutes façons des approximations faciles de ces opérateurs).

Les résultats des n^{os} 9 et 10 semblent nouveaux. Une méthode complètement différente, pour des problèmes aux limites moins généraux, mais pour des opérateurs différentiels plus généraux, est donnée dans LADYZENSKAYA [2], VISIK [1] (*cf.* aussi KATO [1], YOSIDA [1]). Dans les cas *hyperboliques*, voir aussi LADYZENSKAYA [1]. Pour le problème de Cauchy, dans le cas hyperbolique, on obtient ici un cas très particulier de Leray [1]. Toujours pour le problème de Cauchy, dans le cas hyperbolique, une méthode équivalente aux opérateurs de Delsarte est donnée dans OLEVSKIĬ 1].

CHAPITRE II.

On considère dans ce chapitre les opérateurs

$$(^{**}) \qquad \Delta_x + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2k+1}{t}\frac{\partial}{\partial t},$$

où k est un nombre complexe quelconque. Pour éviter toute difficulté à l'origine, les problèmes mixtes sont posés uniquement dans des espaces de fonctions. La méthode de résolution est, en principe, la même que celle du chapitre I pour les opérateurs (*). Mais une difficulté supplémentaire réside ici dans les opérateurs de Delsarte. En effet, ces opérateurs sont connus (*cf.* DELSARTE [2]) si et seulement si le nombre k se trouve dans des bandes complexes convenables. L'essentiel du chapitre II consiste à prolonger ces opérateurs pour *toutes les valeurs de* k (sauf peut-être quelques valeurs singulières, qui font l'objet d'une étude directe). La méthode utilisée, qui repose sur des formules simples d'intégration par parties, donne un prolongement analytique des opérateurs usuels (situation analogue à M. RIESZ [1]); ces opérateurs prolongés sont définis par des noyaux distributions, qui sont des parties finies (mais cette interprétation n'est pas indispensable).

Pour certains problèmes, les relations de Darboux-Weinstein (n° 8) sont suffisantes.

Le problème de Cauchy, relativement au cas hyperbolique, est étudié dans BUREAU [1], WEINSTEIN [1], DIAZ [1], BLUM [1], DIAZ et LUDFORD [1], DIAZ et WEINBERGER [1]. Le cas général des problèmes mixtes relatifs à l'opérateur (**) (n° 9) ne semblait pas avoir été étudié jusqu'ici.

Les opérateurs du chapitre II permettent de généraliser les résultats de DELSARTE [2] à des k quelconques ($k=p$ dans les notations de Delsarte); mais ceci n'est pas détaillé ici.

Pour d'autres applications des opérateurs de Delsarte, *cf.* LIONS [5].

Je remercie vivement M. J. DELSARTE pour les très nombreuses et fructueuses conversations qu'il a bien voulu entretenir avec moi sur ces sujets.

CHAPITRE I.

OPÉRATEURS DE DELSARTE ET PROBLÈMES MIXTES RÉGULIERS.

1. Position du problème. — On donne sur la droite R (ou sur un intervalle de R) une fonction q *continue* (et, souvent, assujettie à des conditions de *régularité* supplémentaires) à valeurs complexes. On considère sur R l'opérateur L, défini pour une fonction f deux fois continûment différentiable, par

$$Lf = \frac{d^2}{dx^2}f - qf. \tag{1.1}$$

On posera

$$D = \frac{d}{dx}, \tag{1.2}$$

de sorte que $L = D^2 - q$.

Soit a un nombre réel quelconque. Soit m un entier positif, également quelconque. On désigne par $\mathcal{E}^m(x \geqq a)$ l'espace des fonctions m fois continûment différentiables sur la demi-droite $x \geqq a$, à valeurs complexes, l'espace étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $x \geqq a$ des fonctions et de chacune de leurs dérivées d'ordre $\leqq m$. On posera

$$\mathcal{E}^\infty(x \geqq a) = \mathcal{E}(x \geqq a).$$

On aura également besoin de l'espace $\mathcal{E}^m(R)$ des fonctions m fois continûment différentiables sur R, muni de la topologie analogue à celle de $\mathcal{E}^m(x \geqq a)$.

Si l'on désigne provisoirement par E un sous-espace de $\mathcal{E}^m(x \geqq a)$ on va chercher des isomorphismes X de E dans E, tels que

$$D^2 X = X L, \qquad \text{soit} \quad D^2 = X L X^{-1}. \tag{1.3}$$

Soit $f \in \mathcal{E}^2(x \geqq a)$. On cherche Xf sous la forme

$$Xf(x) = f(x) + \int_a^x X(x, y) f(y)\, dy, \tag{1.4}$$

la fonction $X(x, y)$ étant définie dans $x \geqq a$, $a \leqq y \leqq x$, étant une fois continûment différentiable dans cette région, les dérivées partielles

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} X = X_{xx}, \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = X_{yy},$$

étant continues.

On a toujours

$$(1.5) \qquad Xf(a) = f(a).$$

Puis

$$D(Xf)(x) = f'(x) = X(x, x) f(x) + \int_a^x X_x(x, y) f(y)\, dy \qquad \left(X_x = \frac{\partial}{\partial x} X\right),$$

donc

$$(1.6) \qquad (Xf)'(a) = f'(a) + X(a, a) f(a).$$

On a ensuite

$$D^2 Xf(x) = f''(x) + \frac{d}{dx}(X(x, x) f(x)) + X_x(x, x) f(x) + \int_a^x X_{xx}(x, y) f(y)\, dy.$$

Par ailleurs, on voit, par intégrations par parties, que

$$\begin{aligned} XLf(x) = f''(x) - q(x) f(x) &+ X(x, x) f'(x) - X(x, a) f'(a) - X_y(x, x) f(x) \\ &+ X_y(x, a) f(a) + \int_a^x (X_{yy} - q(y) X) f(y)\, dy. \end{aligned}$$

Il en résulte que sur $\mathcal{E}^2(x \geqq a)$, (1.3) équivaut à

$$2\left(\frac{d}{dx} X(x, x)\right) f(x) + q(x) f(x) + X(x, a) f'(a) - X_y(x, a) f(a) + \int_a^x (X_{xx} - X_{yy} + q(y) X) f(y)\, dy = 0.$$

Posons

$$(1.7) \qquad 2 \frac{d}{dx} X(x, x) + q(x) = q_1(x),$$

$$(1.8) \qquad X_{xx}(x, y) - X_{yy}(x, y) + q(y) X(x, y) = Y(x, y).$$

On voit donc que la condition nécessaire et suffisante pour que (1.3) ait lieu, est que

$$(1.9) \qquad q_1(x) f(x) + X(x, a) f'(a) - X_y(x, a) f(a) + \int_a^x Y(x, y) f(y)\, dy = 0,$$

pour tout f dans $\mathcal{E}^2(x \geqq a)$.

Il est utile pour la suite d'introduire les notations suivantes :

Espace E_a^2 : c'est le sous-espace vectoriel (fermé) de $\mathcal{E}^2(x \geqq a)$ formé des fonctions f telles que $f(a) = 0$;

Espace F_a^2 : c'est le sous-espace vectoriel (fermé) de $\mathcal{E}^2(x \geqq a)$ formé des fonctions f telles que $f'(a) = 0$;

Espace C_a^2 : $C_a^2 = E_a^2 \cap F_a^2$ c'est-à-dire $f(a) = f'(a) = 0$.

Ceci posé, on a la

PROPOSITION 1.1. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'application $f \to Xf$ applique E_a^2 dans lui-même, avec*

$$D^2 Xf = XLf \quad \textit{pour tout } f \in E_a^2, \tag{1.10}$$

est que $X(x, y)$ soit solution dans $x \geqq a$, $a \leqq y \leqq x$ de

$$X_{xx} - X_{yy} + q(y) X = 0, \tag{1.11}$$

avec les conditions aux limites

$$X(x, x) = -\frac{1}{2}\int_a^x q(s)\, ds, \tag{1.12}$$

$$X(x, a) = 0. \tag{1.13}$$

DÉMONSTRATION. — On doit avoir en particulier (1.10) pour tout $f \in C_a^2$; alors (1.9) se réduit à

$$q_1(x) f(x) + \int_a^x Y(x, y) f(y)\, dy = 0 \quad \text{pour tout } f \in C_a^2.$$

Mais si $f \in \mathcal{E}^0(x \geqq a)$, avec $f(a) = 0$, il existe une suite f_n, $f_n \in C_a^2$, avec $f_n \to f$ dans $\mathcal{E}^0(x \geqq a)$ (on peut même prendre f_n indéfiniment différentiable, nulle dans un voisinage de a; il suffit de translater f dans le sens positif d'une longueur tendant ensuite vers zéro, et de régulariser la translatée).

On a donc

$$q_1(x) f_n(x) + \int_a^x Y(x, y) f_n(y)\, dy = 0 \quad \text{pour tout } n,$$

ce qui donne à la limite

$$q_1(x) f(x) + \int_a^x Y(x, y) f(y)\, dy = 0 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{E}^0 \qquad (x \geqq a)$$

[la condition $f(a) = 0$ étant automatiquement remplie pour une solution de cette équation]. Or, cette équation en f est une équation de Volterra de deuxième espèce, homogène (*cf.* VOLTERRA-PÉRÈS [1]) de seule solution la fonction o, sauf si $q_1 = 0$ et $Y(x, y) = 0$. On a donc déjà (**1**.11). La condition (**1**.9) se réduit maintenant à

$$X(x, a)f'(a) = 0,$$

d'où (**1**.13). On a donc $X(a, a) = 0$, de sorte que $q_1(x) = 0$ équivaut à (**1**.12), d'où la proposition.

Mais il est bien connu (*cf.* par exemple Picard [**1**]) que le problème (**1**.11), (**1**.12), (**1**.13) admet, lorsque q est une fois continûment différentiable, une solution unique. On pose la

Définition **1**.**1**. — On désigne par $A(x, y)$ la solution du problème (**1**.11), (**1**.12), (**1**.13), la fonction q étant une fois continûment différentiable. *On désigne par A l'opérateur X correspondant.*

On montre comme à la proposition **1**.**1** la

Proposition **1**.**2**. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'application $f \to Xf$ applique F_a^2 dans lui-même et vérifie* (**1**.10) *pour tout $f \in F_a^2$, est que $X(x, y)$ soit solution dans $x \geq a$, $a \leq y \leq x$, de* (**1**.11), *avec les conditions aux limites* (**1**.12) *et*

$$(\mathbf{1}.14) \qquad \frac{\partial}{\partial y} X(x, a) = 0.$$

Définition **1**.**2**. — On désigne par $B(x, y)$ *la* solution du problème (**1**.11), (**1**.12), (**1**.14), la fonction q étant dans $\mathcal{E}^1(R)$. *On désigne par B l'opérateur X correspondant.*

Remarque **1**.**1**. — On vérifie facilement que A applique (continûment) F_a^2 dans lui-même, mais on n'a pas $D^2Af = ALf$ pour tout $f \in F_a^2$. De même B applique continûment E_a^2 dans lui-même, mais ne vérifie $D^2Bf = BLf$ pour tout $f \in E_a^2$.

Si les opérateurs X sont des isomorphismes, d'inverse $\mathfrak{X}$, les opérateurs $\mathfrak{X}$ vèrifient

$$(\mathbf{1}.15) \qquad \mathfrak{X}D^2 = L\mathfrak{X}.$$

On peut chercher *a priori* (c'est-à-dire sans les considérer pour l'instant comme des inverses de X) les opérateurs $\mathfrak{X}$ sous la forme

$$(\mathbf{1}.16) \qquad \mathfrak{X}f(x) = f(x) + \int_a^x \mathfrak{X}(x, y)f(y)\,dy,$$

la fonction $\mathfrak{X}(x, y)$ ayant des propriétés analogues à celles de $X(x, y)$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait (**1**.15) sur l'espace $\mathcal{E}^2(x \geq a)$ est ici

$$(\mathbf{1}.17) \qquad q_2(x)f(x) + \mathfrak{X}(x, a)f'(a) - \mathfrak{X}_y(x, a)f(a) + \int_a^x \mathfrak{Y}(x, y)f(y)\,dy = 0$$

pour tout $f \in \mathcal{E}^2(x \geqq a)$, où

$$q_2(x) = 2\frac{d}{dx}\mathfrak{X}(x, x) - q(x), \tag{1.18}$$

$$\mathcal{Y}(x, y) = \mathfrak{X}_{xx}(x, y) - \mathfrak{X}_{yy}(x, y) - q(x)\,\mathfrak{X}(x, y). \tag{1.19}$$

On en déduit, comme précédemment :

Proposition 1.3. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'application $f \to \mathfrak{X} f$ applique E_a^2 (resp. F_a^2) dans lui-même et vérifie* (1.15) *sur E_a^2 (resp. F_a^2), est que $\mathfrak{X}(x, y)$ soit solution dans $x \geqq a$, $a \leqq y \leqq x$, de*

$$\mathfrak{X}_{xx} - \mathfrak{X}_{yy} - q(x)\mathfrak{X} = 0, \tag{1.20}$$

avec les conditions aux limites

$$\mathfrak{X}(x, x) = \frac{1}{2}\int_a^x q(s)\,ds \tag{1.21}$$

et

$$\mathfrak{X}(x, a) = 0 \tag{1.22}$$

[*resp.*

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{X}(x, a) = 0 \tag{1.23}$$].

Or, si $q \in \mathcal{E}^1(R)$, ces deux problèmes aux limites admettent une solution unique; on pose la

Définition 1.3. — On désigne par $\mathcal{A}(x, y)$ [resp. $\mathcal{B}(x, y)$] la solution du problème (1.20), (1.21), (1.22) [resp. (1.23)], la fonction q étant dans $\mathcal{E}^1(R)$. Les fonctions $\mathcal{A}(x, y)$ et $\mathcal{B}(x, y)$ sont deux fois continûment différentiables dans $x \geqq a$, $a \leqq y \leqq x$. *On désigne par $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) l'opérateur $\mathfrak{X}$ correspondant.*

Remarque 1.2. — Les fonctions $A(x, y)$, $B(x, y)$, ... *dépendent de a* (et évidemment de q), donc aussi les opérateurs A, B, ...

2. **Études des fonctions** $A(x, y)$, $B(x, y)$, $\mathcal{A}(x, y)$, $\mathcal{B}(x, y)$. — Pour simplifier le langage, désignons par $\mathcal{O}_a$ l'ouvert

$$x > a, \qquad a < y < x$$

et par $\mathcal{E}^m(\overline{\mathcal{O}_a})$ l'espace de fonctions m fois continûment différentiables dans $\overline{\mathcal{O}_a}$, muni de la topologie habituelle.

Les notations sont celles du n° 1. Le résultat suivant est classique (*cf.* par exemple, Picard [1]) :

Proposition 2.1. — *Si la fonction $q \in \mathcal{E}^m(R)$, la fonction A solution du problème* (1.11), (1.12), (1.13), *est dans $\mathcal{E}^{m+1}(\overline{\mathcal{O}_a})$. L'application $q \to A$ est continue de $\mathcal{E}^m(R)$ dans $\mathcal{E}^{m+1}(\overline{\mathcal{O}_a})$.*

Remarque 2.1. — Si $m = 0$, A vérifie (1.11) dans $\mathcal{O}_a$ au sens distributions. On a des résultats analogues à ceux de la proposition 2.1 pour les fonctions $B(x, y)$, $\mathfrak{A}(x, y)$, $\mathcal{B}(x, y)$.

Expression des fonctions $A(x, y)$..., à l'aide des fonctions de Riemann. — Soit $M = (x_0, y_0)$ un point quelconque du plan. Soit $K_1(x, y; x_0, y_0)$ la

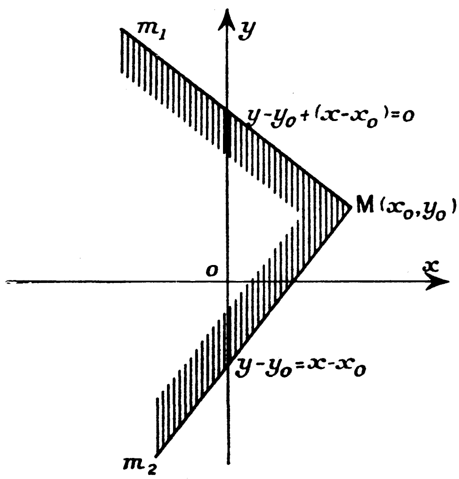

Fig. 1.

fonction définie dans le plan, à support dans la région hachurée de la figure 1, solution dans la région ouverte de

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} K_1 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_1 + q^*(y) K_1 = 0, \tag{2.1}$$

où

$$q^*(y) = \begin{cases} q(2a - y) & (y \leq a), \\ q(y) & (y \geq a), \end{cases} \tag{2.22}$$

avec les conditions aux limites

$$K_1|_{Mm_1} = K_1|_{Mm_2} = \frac{1}{2}; \tag{2.3}$$

K_1 est une fonction de Riemann. Cette fonction dépend de a, puisque q^* dépend de a.

Soit $K_2(x, y; x_0, y_0)$ la fonction définie dans le plan, à support dans la région hachurée de la figure 1, solution dans la région ouverte de

$$(2.4) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}K_2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}K_2 - q(x)K_2 = 0,$$

avec les conditions aux limites

$$(2.5) \qquad K_2\,|_{Mm_1} = K_2\,|_{Mm_2} = \frac{1}{2}.$$

Ceci posé, les fonctions $A(x, y)$, ... s'expriment à l'aide des fonctions de Riemann par les formules que voici. On pose

$$(2.6) \qquad Q(x) = \int_a^x q(s)\,ds;$$

alors

$$(2.7) \quad A(x_0, y_0) = -\frac{1}{2}Q\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) + \frac{1}{2}Q\left(a + \frac{x_0-y_0}{2}\right) + \int_a^{a+\frac{x_0-y_0}{2}} Q(x)\left(\frac{\partial}{\partial y}K_1 - \frac{\partial}{\partial x}K_1\right)(x, 2a-x)\,dx + \int_a^{\frac{x_0+y_0}{2}} Q(x)\left(\frac{\partial}{\partial y}K_1 + \frac{\partial}{\partial x}K_1\right)(x, x)\,dx;$$

$$(2.8) \quad B(x_0, y_0) = -\frac{1}{2}Q\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) - \frac{1}{2}Q\left(a + \frac{x_0-y_0}{2}\right) - \int_a^{a+\frac{x_0-y_0}{2}} Q(x)\left(\frac{\partial}{\partial y}K_1 - \frac{\partial}{\partial x}K_1\right)(x, 2a-x)\,dx + \int_a^{\frac{x_0-y_0}{2}} Q(x)\left(\frac{\partial}{\partial y}K_1 + \frac{\partial}{\partial x}K_1\right)(x, x)\,dx;$$

$$(2.9) \quad \mathcal{A}(x_0, y_0) = \frac{1}{2}Q\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) - \frac{1}{2}Q\left(a + \frac{x_0-y_0}{2}\right) - \int_a^{a+\frac{x_0-y_0}{2}} Q(x)\left(\frac{\partial}{\partial y}K_2 - \frac{\partial}{\partial x}K_2\right)(x, 2a-x)\,dx - \int_a^{\frac{x_0+y_0}{2}} Q(x)\left(\frac{\partial}{\partial y}K_2 + \frac{\partial}{\partial x}K_2\right)(x, x)\,dx;$$

$$(2.10) \quad \mathcal{B}(x_0, y_0) = \frac{1}{2}Q\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) + \frac{1}{2}Q\left(a + \frac{x_0-y_0}{2}\right) + \int_a^{a+\frac{x_0-y_0}{2}} Q(x)\left(\frac{\partial}{\partial y}K_2 - \frac{\partial}{\partial x}K_2\right)(x, 2a-x)\,dx - \int_a^{\frac{x_0+y_0}{2}} Q(x)\left(\frac{\partial}{\partial y}K_2 + \frac{\partial}{\partial x}K_2\right)(x, x)\,dx.$$

3. **Opérateurs de Delsarte.** — Pour toute fonction $q \in \mathcal{E}^m(R)$, on a défini au numéro précédent les fonctions $A(x, y)$, ..., auxquelles sont associés les opérateurs A, ...

De façon générale, si E et F sont deux espaces vectoriels topologiques localement convexes, on désigne par $\mathcal{L}(E; F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. On a :

si $q \in \mathcal{E}^m(R)$, les opérateurs A, B, ... sont dans l'espace

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}^{m+1}(x \geqq a); \mathcal{E}^{m+1}(x \geqq a));$$

si $q \in \mathcal{E}^1(R)$, ils sont également dans les espaces $\mathcal{L}(E_a^2; E_a^2)$ et $\mathcal{L}(F_a^2; F_a^2)$.

Des nos 1 et 2 résulte le

THÉORÈME 3. — 1. *On suppose que* $q \in \mathcal{E}^1(R)$. *Il existe* A (*resp.* $\mathfrak{A}$) *élément de* $\mathcal{L}(\mathcal{E}^0(x \geqq a); \mathcal{E}^0(x \geqq a))$, *avec*

$$A, \mathfrak{A} \in \mathcal{E}(E_a^2; E_a^2), \tag{3.1}$$

$$D^2 A f = A L f \tag{3.2}$$

(*resp.*

$$\mathfrak{A} D^2 f = L \mathfrak{A} f) \tag{3.3}$$

pour tout $f \in E_a^2$, $L = D^2 - q$. *Si l'on cherche* A (*resp.* $\mathfrak{A}$) *sous la forme* (1.4) [*resp.* (1.16)], *la solution est unique.*

DÉFINITION 3.1. — Le couple d'opérateurs $(A, \mathfrak{A})$ est appelé le premier couple d'opérateurs de Delsarte (attachés à $L = D^2 - q$ et pour la valeur a).

On a, de même, le

THÉORÈME 3.2. — *On suppose que* $q \in \mathcal{E}^1(R)$. *Il existe* B (*resp.* $\mathfrak{B}$) *élément de* $\mathcal{L}(\mathcal{E}^0(x \geqq a); \mathcal{E}^0(x \geqq a))$, *avec*

$$B, \mathfrak{B} \in \mathcal{L}(F_a^2; F_a^2), \tag{3.4}$$

$$D^2 B f = B L f \tag{3.5}$$

(*resp.*

$$\mathfrak{B} D^2 f = L \mathfrak{B} f) \tag{3.6}$$

pour tout $f \in F_a^2$. *Si l'on cherche* B (*resp.* $\mathfrak{B}$) *sous la forme* (1.4) [*resp.* (1.16)], *la solution est unique.*

DÉFINITION 3.2. — Le couple d'opérateurs $(B, \mathfrak{B})$ est appelé le deuxième couple d'opérateurs de Delsarte (attaché à L, et pour a).

On désigne par $\mathcal{L}_b(E; F)$ l'espace $\mathcal{L}(E; F)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E. D'après le n° 2, on a :

THÉORÈME 3.3. — *L'application* $q \to A$ *est continue de* $\mathcal{E}^1(R)$ *dans* $\mathcal{L}_b(E_a^2; E_a^2)$.

Résultats analogues pour B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$

4. Prolongement des opérateurs de Delsarte à certains espaces de distributions. — Soit $X(x, y)$ une fonction *indéfiniment différentiable* dans la région $x \geqq a$, $a \leqq y \leqq x$, et considérons l'opérateur X toujours défini pour une fonction f par

$$Xf(x) = f(x) + \int_a^x X(x, y) f(y)\, dy.$$

On va prolonger X à certains espaces de distributions sur R (*cf.* Schwartz [1], [2] pour la théorie des distributions). On désigne par $\mathcal{D}_-$ (resp. $\mathcal{D}_+$) l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur R, à valeurs complexes, à support limité à droite (resp. à gauche), muni de la topologie de Schwartz. On désigne par $\mathcal{D}'_+$ (resp. $\mathcal{D}'_-$) l'espace dual de $\mathcal{D}_-$ (resp. $\mathcal{D}_+$), espace des distributions sur R à support limité à gauche (resp. à droite).

On désigne par $\mathcal{D}'_a$ le sous-espace vectoriel (fermé) de $\mathcal{D}'_+$ des distributions à support dans $x \geqq a$ (espace à ne pas confondre avec l'espace des distributions définies dans l'ouvert $x > a$). On désigne par $\mathcal{D}_a$ le sous-espace de $\mathcal{D}_+$ formé des fonctions nulles pour $x \leqq a$. On a :

Lemme 4.1. — *L'espace $\mathcal{D}_a$ est dense dans $\mathcal{D}'_a$.*

Démonstration. — Soit $T \in \mathcal{D}'_a$. Soit $\tau_h T$ la translatée de T de longueur h, $h > 0$; $\tau_h T$ est nulle pour $x < a + h$. Soit ρ_h une fonction de $\mathcal{D}(R)$ (espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact), à support dans

$$|x| \leqq \frac{h}{2}, \qquad \rho_h(x) \geqq 0, \qquad \int \rho_h(x)\, dx = 1.$$

Alors la régularisée $\tau_h T \star \rho_h$ est dans $\mathcal{D}_a$, et lorsque $h \to 0$, $\tau_h T \star \rho_h \to T$ dans $\mathcal{D}'_a$, d'où le lemme.

On fait maintenant l'abus de langage suivant : on désigne encore par Xf la fonction *définie sur* R, égale à Xf pour $x \geqq a$, et nulle pour $x < a$. Avec cet abus de langage C_a^2 par exemple, est dense dans $\mathcal{D}'_a$. Ceci posé, si f est dans C_a^2, Xf vérifie

$$(Xf)(a) = 0, \qquad (Xf)'(a) = 0$$

et, par conséquent, $D^2 Xf$, *dérivée au sens distribution sur* R, coïncide avec la dérivée seconde usuelle de Xf, $= 0$ si $x < a$, $= (Xf)''$ si $x > a$. De même, si $f \in C_a^2$, Lf, pris au sens distribution sur R (f prolongée par 0 pour $x < a$) coïncide avec Lf pris au sens usuel.

Notons maintenant le

Lemme 4.2. — *La condition nécessaire et suffisante pour que $D^2 Xf = XLf$ pour tout $f \in C_a^2$, est que $X(x, y)$ vérifie*

$$X_{xx} - X_{yy} + q(y) X = 0, \qquad \textit{avec} \quad \frac{d}{dx} X(x, x) = -q(x)/2,$$

sans autres conditions aux limites.

On peut donc prendre *en particulier* $X(x, y) = A(x, y)$ ou $B(x, y)$. Ensuite :

Lemme 4.3. — *Si $X(x, y)$ est indéfiniment différentiable, l'application $f \to Xf$ de C_a^2 dans lui-même, se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée $f \to Xf$, de $\mathcal{D}'_a$ dans lui-même.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que l'application $f \to Xf$ est continue de C_a^2 muni de la topologie induite par $\mathcal{D}'_a$ (ou, ce qui revient au même, $\mathcal{D}'_+$) dans $\mathcal{D}'_a$ (ou $\mathcal{D}'_+$). Soit donc $\varphi \in \mathcal{D}_-$. On a

$$\langle Xf, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \int_a^\infty \varphi(x)\,dx \int_a^x X(x, y) f(y)\,dy.$$

Comme $\varphi \in \mathcal{D}_-$, φ est nulle pour $x > \alpha$. Donc

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx \int_a^x X(x, y) f(y)\,dy = \int_a^\alpha f(y)\,dy \int_y^\alpha X(x, y)\,\varphi(x)\,dx$$

de sorte que

$$\langle Xf, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle f, \psi \rangle,$$

où

$$\psi(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_y^\alpha X(x, y)\,\varphi(x)\,dx & \text{si} \quad a \leqq y \leqq \alpha, \\ 0 & \text{si} \quad y \geqq \alpha, \end{cases}$$

ψ étant prolongée de façon indéfiniment différentiable quelconque pour $y \leqq a$.

Comme la fonction $X(x, y)$ est indéfiniment différentiable, et que φ est nulle ainsi que toutes ses dérivées pour $x = \alpha$, la fonction ψ est dans $\mathcal{D}_-$; si φ est dans un borné de $\mathcal{D}_-$, on peut choisir ψ de sorte que ψ demeure dans un borné de $\mathcal{D}_-$, d'où le lemme.

Comme on a vu au n° 2 que si $q \in \mathcal{E}(R)$, les fonctions $A(x, y)$, ..., sont indéfiniment différentiables, on a le

Théorème 4.1. — *On suppose que $q \in \mathcal{E}(R)$. Soit a fixé quelconque. Les opérateurs A, B, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$* (relatifs à q et a) *se prolongent par continuité en des opérateurs linéaires continus, encore notés A, B, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, de $\mathcal{D}'_a$ dans lui-même. Pour tout $T \in \mathcal{D}'_a$, on a*

$$D^2 A T = A L T, \tag{4.1}$$

$$D^2 B T = B L T, \tag{4.2}$$

$$\mathcal{A} D^2 T = L \mathcal{A} T, \tag{4.3}$$

$$\mathcal{B} D^2 T = L \mathcal{B} T. \tag{4.4}$$

Notons également le résultat suivant, de démonstration immédiate :

Théorème 4.2. — *Si $q \in \mathcal{E}(R)$, les opérateurs A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sont des éléments de l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{D}_a; \mathcal{D}_a)$.*

Remarque 4.1. — Soit $f \in E_a^2$; si l'on désigne encore par f la fonction prolongée de f par o pour $x < a$, f est dans $\mathcal{D}'_a$, donc donne lieu à (4.1), par exemple. Or, on a

$$Lf = \{Lf\} + f'(a)\,\delta_x(a),$$

où Lf est pris au sens distributions sur R, $\{Lf\}$ est pris au sens usuel, $\delta_x(a)$ = masse de Dirac au point a. De même,

$$D^2 Af = \{D^2 Af\} + (Af)'(a)\,\delta_x(a)$$

et

$$ALf = A\{Lf\} + f'(a)\,A\,\delta_x(a),$$

de sorte que l'on doit avoir

$$A(\delta_x(a)) = \delta_x(a).$$

Or

$$A(\delta_x(a)) = \delta_x(a) + \int_a^x A(x, y)\,\delta_y(a)\,dy = \delta_x(a) + A(x, a) = \delta_x(a),$$

puisque $A(x, a) = 0$ [condition (2.3)].

A titre de vérification, utilisons maintenant (4.2) avec $T = f \in E_a^2$. On doit avoir

$$B\{Lf\} + f'(a)\,B(\delta_x(a)) = \{D^2 Bf\} + f'(a)\,\delta_x(a).$$

Or

$$B(\delta_x(a)) = \delta_x(a)) + B(x, a),$$

de sorte que, en revenant aux notations du n° 1, on doit avoir

$$BLf(x) + f'(a)\,B(x, a) = D^2 Bf(x),$$

ce qu'il est facile de vérifier, à partir des calculs du n° 1. Vérification analogue pour $f \in F_a^2$.

Notons maintenant le résultat de stabilité suivant :

Théorème 4.3. — *On suppose que $q_n \to q$ dans $\mathcal{E}(R)$. Alors les opérateurs A_n, B_n, $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$ tendent respectivement vers A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dans $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}'_a; \mathcal{D}'_a)$.*

Démonstration. — Soit T demeurant dans un ensemble borné de $\mathcal{D}'_a$, et φ donné dans $\mathcal{D}_-$, comme dans la démonstration du lemme 4.3. On a

$$\langle (A_n - A)\,T, \varphi \rangle = \langle T, \psi_n - \psi \rangle,$$

où ψ est défini comme au lemme 4.3 et ψ_n est défini par

$$\psi_n(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_y^\alpha A_n(x, y)\,\varphi(x)\,dx & \text{si} \quad a \leqq y \leqq \alpha, \\ 0 & \text{si} \quad y \geqq \alpha, \end{cases}$$

ψ_n étant prolongée de façon indéfiniment différentiable quelconque pour $y \leqq a$.

Comme on vérifie facilement que $\psi_n - \psi \to 0$ dans $\mathcal{D}_-$, on a le résultat :

$$\langle (A_n - A)\,T, \varphi \rangle \to 0 \quad \text{uniformément en } T.$$

5. Propriété fondamentale des opérateurs de Delsarte. — De façon générale, si X est continue dans $x \geqq a$, $a \leqq y \leqq x$, l'équation de Volterra de deuxième espèce

$$(5.1) \qquad \begin{aligned} Xf(x) &= f(x) + \int_a^x X(x, y)\,f(y)\,dy \\ &= g(x) \qquad [f, g \in \mathcal{E}^0(x \geqq a)] \end{aligned}$$

admet une solution unique, donnée par une formule de la forme.

$$(5.2) \qquad f(x) = g(x) + \int_a^x S(x, y)\,g(y)\,dy$$

(*cf.* Volterra-Pérès [1]); X définit un isomorphisme de $\mathcal{E}^0(x \geqq a)$ sur lui-même.

Considérons alors $X = A$; c'est un élément de $\mathcal{L}(E_a^2;\, E_a^2)$; si $g \in E_a^2$, $Af = g$ admet une solution unique dans $E^0(x \geqq a)$; cette solution est dans E_a^2, donc A est un isomorphisme de E_a^2 sur lui-même, et l'opérateur inverse A^{-1} est donné par une formule du type (5.2). Par ailleurs, de la relation

$$D^2 A f = A L f \quad \text{pour tout } f \in E_a^2,$$

on déduit

$$A^{-1} D^2 g = L A^{-1} g \quad \text{pour tout } g \in E_a^2.$$

Il résulte alors de *l'unicité* dans le théorème 3.1, que

$$A^{-1} = \mathcal{A},$$

Même chose pour B^{-1} :

$$B^{-1} = \mathcal{B},$$

d'où le résultat fondamental :

Théorème 5.1. — *On suppose que $q \in \mathcal{E}^1(R)$. Les opérateurs A et $\mathcal{A}$ (resp. B et $\mathcal{B}$) sont des isomorphismes de $\mathcal{E}^0(x \geqq a)$ sur lui-même, de E_a^2 (resp. F_a^2) sur lui-même; ces isomorphismes sont inverses l'un de l'autre.*

Supposons maintenant que $q \in \mathcal{E}(R)$. Alors A, $\mathfrak{A}$, ... se prolongent par continuité à $\mathcal{B}'_a$; les relations

$$A\mathfrak{A}f = f, \qquad \mathfrak{A}Af = f \quad \text{pour tout } f \in E^2_a,$$

sont vraies, par prolongement, pour tout $f \in \mathcal{D}'_a$, d'où

THÉORÈME 5.2. — *Si $q \in \mathcal{E}(R)$, A et $\mathfrak{A}$ (resp. B et $\mathcal{B}$) sont des isomorphismes de $\mathcal{D}'_a$ sur lui-même, inverses l'un de l'autre.*

6. Autre définition des opérateurs A, $\mathfrak{A}$, B, $\mathcal{B}$. — Considérons le problème suivant :

PROBLÈME 6.1. — Trouver $\Phi(x, y)$, solution dans $x \geq a$, $y \geq a$, de

$$\Phi_{xx} - \Phi_{yy} - q(x)\Phi(x, y) = 0, \tag{6.1}$$

avec les conditions aux limites

$$\Phi(x, a) = 0, \tag{6.2}$$

$$\Phi_y(x, a) = f(x), \tag{6.3}$$

f étant donné dans E,

$$\Phi(a, y) = 0. \tag{6.4}$$

Ce problème est un problème mixte. Il se ramène aussitôt à un problème de Cauchv en introduisant

$$u(x, y) = \begin{cases} -\Phi(2a - x, y) & \text{si } x \leq a, \\ \Phi(x, y) & \text{si } x \geq a. \end{cases} \tag{6.5}$$

Le résultat suivant est classique (*cf.* Picard [1]) :

PROPOSITION 6.1. — *Si $q \in \mathcal{E}^0(R)$, $f \in \mathcal{E}^0(x \geq a)$, avec $f(a) = 0$, le problème* 6.1 *admet une solution unique, fonction une fois continûment différentiable dans $x \geq a$, $y \geq a$, vérifiant* (6.1) *au sens distribution.*

Posons alors

$$A_1 f(y) = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(a, y). \tag{6.6}$$

On définit ainsi un élément $A_1 f$ de $\mathcal{E}^0(x \geq a)$, avec

$$A_1 f(a) = 0, \tag{6.7}$$

et l'application $f \to A_1 f$ est continue de $\mathcal{E}^0(x \geq a)$ dans lui-même.

En complément à la proposition 6.1, on a :

1° Si $q \in \mathcal{E}^1(R)$, $f \in E_a^2$, la solution du problème **6.1** est deux fois continûment différentiable dans $x \geqq a$, $y \geqq a$. Dans la région $y \leqq x$ (ou $y \geqq x$), Φ est trois fois continûment différentiable;

2° Si $q \in \mathcal{E}^2(R)$, avec $q'(a) = 0$ et si $f \in \mathcal{E}^3(x \geqq a)$, avec $f(a) = f''(a) = 0$, alors $u(x, y)$ est quatre fois continûment différentiable dans $y \geqq a$.

Montrons maintenant le résultat suivant :

Proposition 6.2. — *On suppose que* $q \in \mathcal{E}^2(R)$ *et que* $f \in \mathcal{E}^3(x \geqq a)$, *avec* $f(a) = f''(a) = 0$. *Alors*

$$D^2 A_1 f = A_1 L f, \qquad L = D^2 - q. \tag{6.8}$$

Démonstration. — Soit Φ la solution du problème **6.1**. Posons

$$\Psi(x, y) = L_x \Phi(x, y);$$

Φ est quatre fois continûment différentiable en dehors de la première bissectrice, donc Ψ l'est deux fois. La fonction $g = Lf$ est dans E_a^2. Alors le problème **6.1**, où l'on remplace f par g, admet une solution unique. Montrons que cette solution est Ψ. En effet,

$$L_x \Psi - D_y^2 \Psi = L_x(L_x \Phi - D_y^2 \Phi) = 0,$$

puis

$$\Psi(x, a) = L_x \Phi(x, a) = L_x 0 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y) = L_x D_y \Phi(x, y),$$

donc

$$\Psi_y(x, a) = L_x f(x) = g(x).$$

Ensuite,

$$\Psi(x, y) = L_x \Phi(x, y) = D_y^2 \Phi(x, y),$$

donc

$$\Psi(a, y) = D_y^2 \Phi(a, y) = D^2 0 = 0,$$

d'où le résultat. Par conséquent,

$$\Psi_x(a, y) = A_1 L f(y).$$

Or

$$\Psi_x(x, y) = D_x D_y^2 \Phi(x, y) = D_y^2 \Phi_x(x, y),$$

donc

$$\Psi_x(a, y) = D_y^2 \Phi(a, y) = D^2 A_1 f(y),$$

d'où le résultat.

Expression de $\Phi(x, y)$ *à l'aide des fonctions de Riemann.* — Désignons par $K_3(x, y; x_0, y_0)$ la fonction définie dans le plan, à support dans la partie hachurée de la figure 2, vérifiant dans la région ouverte

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} K_3 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_3 - q^\star(x) K_3 = 0 \tag{6.9}$$

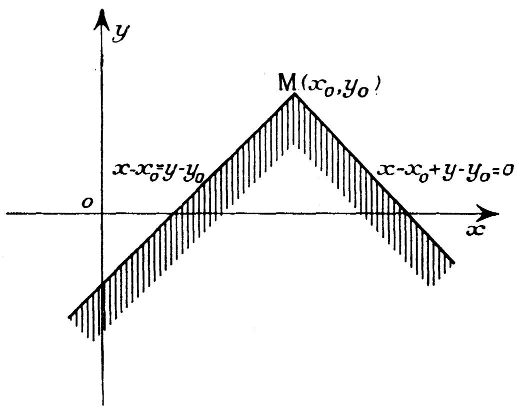

Fig. 2.

[on rappelle que $q^\star(x) = q(2a - x)$ si $x \leqq a$, $q(x)$ si $x \geqq a$], avec les conditions aux limites

$$K_3|_{Mm_1} = K_3|_{Mm_2} = -\frac{1}{2}. \tag{6.10}$$

Il résulte des définitions que l'on a

$$K_3(x, y;\, x_0, y_0) = K_3(2a - x, y;\, 2a - x_0, y_0). \tag{6.11}$$

La fonction u étant définie par (6.5), on a

$$u(x_0, y_0) = -\int_{a-y_0+x_0}^{x_0+y_0-a} f^{\star\star}(x) K_3(x, a;\, x_0, y_0)\, dx, \tag{6.12}$$

où $f^{\star\star}(x) = -f(2a - x)$ si $x \leqq a$, $f(x)$ si $x \geqq a$. On en déduit

$$A_1 f(y_0) = \frac{\partial}{\partial x} u(a, y_0) = f(y_0) - 2\int_a^{y_0} f(x) \frac{\partial}{\partial x_0} K_3(x, a; a, y)\, dx. \tag{6.13}$$

On voit donc que A_1 est de la forme (1.4), et vérifie (6.8) (sous les hypothèses de la proposition 6.2). Or, dans le théorème 3.1, on a encore l'unicité de A (et $\mathcal{A}$) en remplaçant dans (3.2) [et (3.3)] l'hypothèse « $f \in E_a^2$ » par l'hypothèse plus restrictive : « $f \in \mathcal{E}^3(x \geqq a)$, $f(a) = f''(a) = 0$ ». *On en déduit que $A_1 = A$, ce qui donne une nouvelle définition de A* (qui n'est autre que la définition initiale de M. Delsarte; *cf.* toutefois la remarque 6.1).

Comme conséquences :

1° On a la formule

$$A(y_0, x) = -2\frac{\partial}{\partial x}K_3(x, a; a, y_0); \tag{6.14}$$

2° La formule (6.8) est vraie sous les seules hypothèses que $q \in \mathcal{E}^1(R)$ et $f \in E_a^2$. On peut démontrer ceci directement à partir de la définition de A_1, par passage à la limite. Mais c'est moins immédiat que dans le n° 1; c'est pourquoi nous avons pris comme point de départ la définition *a priori* A, quoique moins naturelle.

On a, bien entendu, des résultats analogues pour les opérateurs $\mathfrak{A}$, B, $\mathfrak{B}$. Explicitons les résultats.

Considérons d'abord le

Problème 6.2. — Trouver $\Phi(x, y)$, solution dans $x \geqq a$, $y \geqq a$, de

$$\Phi_{xx} - \Phi_{yy} - q(x)\Phi(x, y) = 0, \tag{6.1}$$

avec les conditions aux limites

$$\Phi(a, y) = 0, \tag{6.15}$$

$$\Phi_x(a, y) = g(y), \tag{6.16}$$

g étant donné dans E_a^2,

$$\Phi(x, a) = 0 \tag{6.17}$$

On pose

$$\mathfrak{A}_1 g(x) = \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x, a) \tag{6.18}$$

et l'on aura un résultat analogue à celui de la proposition **6.2**. *On en déduira que* $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$, *ce qui donne une nouvelle définition de* $\mathfrak{A}$. Tout ceci résulte plus simplement encore de la

Proposition 6.3. — *Si $q \in \mathcal{E}^1(R)$, pour tout $f \in E_a^2$ on a*

$$\mathfrak{A}_1 A f = A\mathfrak{A}_1 f = f.$$

Démonstration. — Soit $f \in E_a^2$, Φ la solution du problème **6.1** et

$$g(y) = Af(y) = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(a, y).$$

Donc Φ vérifie (6.1), (6.15), (6.16) et (6.17), donc

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, a) = \mathfrak{A}_1 g(x),$$

ce qui vaut $f(x)$ par définition de Φ, donc $\mathcal{A}_1 A f = f$. Même chose pour $A\mathcal{A}_1 f$, d'où la proposition.

Si l'on introduit la fonction

$$v(x, y) = \begin{cases} -\Phi(x, 2a - y) & \text{si } y \leqq a, \\ \Phi(x, y) & \text{si } y \geqq a, \end{cases} \tag{6.19}$$

alors

$$v(x, y) = \int_{y_0 - x_0 + a}^{y_0 + x_0 - a} g^{**}(y) K_2(a, y; x_0, y_0)\, dy,$$

où

$$g^{**}(y) = \begin{cases} -g(2a - y) \text{ si } y \leqq a, \\ g(y) \text{ si } y \leqq a. \end{cases}$$

Mais $K_2(x, y; x_0, y_0) = H_2(x, x_0; y - y_0)$, $H_2(x, x_0; y)$ étant une fonction paire de y, donc

$$\frac{\partial}{\partial y} K_2(a, y; x_0, a) = -\frac{\partial}{\partial y} K_2(a, 2a - y; x_0, a). \tag{6.20}$$

On en déduit

$$\mathcal{A} g(x_0) = \frac{\partial}{\partial y_0} u(x_0, a) = g(x_0) + 2\int_a^{x_0} g(y) \frac{\partial}{\partial y_0} K_2(a, y; x_0, a)\, dy, \tag{6.21}$$

d'où

$$\mathcal{A}(x_0, y) = 2\frac{\partial}{\partial y_0} K_2(a, y; x_0, a). \tag{6.22}$$

Pour l'opérateur B on considère le

Problème 6.3. — Trouver Φ solution dans $x \geqq a$, $y \geqq a$ de

$$\Phi_{xx} - \Phi_{yy} - q(x)\Phi(x, y) = 0, \tag{6.1}$$

avec

$$\Phi(x, a) = f(x) \qquad (f \in F_a^2), \tag{6.23}$$

$$\Phi_y(x, a) = 0, \tag{6.24}$$

$$\Phi_x(a, y) = 0. \tag{6.25}$$

On pose

$$\Phi(a, y) = B_1 f(y). \tag{6.26}$$

Comme pour le problème 6.1, on voit ceci : si $q \in \mathcal{E}^2(R)$, avec $q'(a) = 0$, et si $g \in \mathcal{E}^4(x \geqq a)$, avec $g'(a) = g'''(a) = 0$, alors

$$D^2 B_1 g = B_1 L g.$$

On en déduit que $B_1 = B$ et l'on obtient la formule

$$B(y_0, x) = 2\frac{\partial}{\partial y} K_3(x, a; a, y_0). \tag{6.27}$$

Pour l'opérateur $\mathcal{B}$ on considère le

Problème 6.4. — Trouver Φ solution dans $x \geqq a$, $y \geqq a$, de (6.1), avec les conditions aux limites

$$\Phi(a, y) = g(y), \tag{6.28}$$

g étant donnée dans F_a^2, avec

$$\Phi_x(a, y) = 0, \tag{6.29}$$

$$\Phi_y(x, a) = 0. \tag{6.30}$$

On pose

$$\mathcal{B}_1 g(x) = \Phi(x, a). \tag{6.31}$$

On montre comme précédemment que $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$, d'où l'on déduit la formule

$$\mathcal{B}(x_0, y) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K_2(a, y; x_0, a). \tag{6.32}$$

Remarque 6.1. — L'opérateur B défini précédemment coïncide avec l'opérateur B défini dans Delsarte [1]. Par contre, l'opérateur A ne coïncide pas avec l'opérateur A de M. Delsarte ; M. Delsarte considère le

Problème 6.5. — Trouver $\Phi(x, y)$, solution dans $x \geqq a$, $y \geqq a$, de (6.1), avec les conditions aux limites

$$\Phi(x, a) = f(x) \qquad (f \text{ donné dans } E_a^2),$$
$$\Phi_y(x, a) = 0, \qquad \Phi(a, y) = 0.$$

Ce problème admet encore une solution unique. On pose

$$Af(y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(a, y).$$

Avec des hypothèses de régularité convenable, on a encore

$$D^2 Af = ALf.$$

On n'a pas [illegible] opérateur (mais une de ses variantes) parce qu'il n'applique pa[illegible]ıns lui-même. Mais l'opérateur précédent peut très bien être [illegible]nent à l'espace $\mathcal{D}'_a$.

7. Généralisation des opérateurs de Delsarte à des fonctions et des distributions à valeurs vectorielles. — Pour les applications que nous avons en vue, il suffit de définir les opérateurs A, ..., pour des fonctions et des distributions à valeurs dans un espace de Hilbert. Soit donc $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert* ; si h_1 et h_2 sont deux éléments de $\mathcal{H}$, on désigne par $(h_1, h_2)_{\mathcal{H}}$ (ou, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, par (h_1, h_2)) le produit scalaire de h_1 et h_2; la norme correspondante est notée $\|h\|_{\mathcal{H}}$ ou $\|h\|$. On désigne par $\mathcal{E}^m(x \geqq a;\ \mathcal{H})$, l'espace des fonctions m fois continûment différentiables dans $x \geqq a$, à valeurs dans $\mathcal{H}$, muni de la topologie analogue au cas scalaire. On désigne par $E_a^2(\mathcal{H})$ [resp. $F_a^2(\mathcal{H})$] le sous-espace vectoriel (fermé) de $\mathcal{E}^2(x \geqq a;\ \mathcal{H})$ formé des fonctions f telles que $f(a) = 0$ [resp. $f'(a) = 0$].

Si $X(x, y)$ est une fonction une fois continûment différentiable dans $x \geqq a$, $a \leqq y \leqq x$ (comme au nº 1), X_{xx} et X_{yy} étant continus, si $f \in \mathcal{E}^0(x \geqq a;\ \mathcal{H})$, on pose

$$(7.1) \qquad Xf(x) = f(x) + \int_a^x X(x, y) f(y)\, dy,$$

comme au nº 1, mais cette fois l'intégrale étant prise dans $\mathcal{H}$ (pour l'intégration des fonctions à valeurs vectorielles, *cf.* Bourbaki [1]). On définit ainsi une application linéaire continue : $f \to Xf$ de $\mathcal{E}^0(x \geqq a;\ \mathcal{H})$ dans lui-même; même chose en remplaçant $\mathcal{E}^0(x \geqq a;\ \mathcal{H})$ par $\mathcal{E}^2(x \geqq a;\ \mathcal{H})$. Si l'on prend $X(x, y) = A(x, y)$ ou $\mathcal{A}(x, y)$ [pour $q \in \mathcal{E}^1(R)$], on a

$$(7.2) \qquad A,\ \mathcal{A} \in \mathcal{L}(E_a^2(\mathcal{H});\ E_a^2(\mathcal{H})).$$

Notons le

Lemme 7.1. — *L'espace $E_a^2 \otimes \mathcal{H}$ (resp. $F_a^2 \otimes \mathcal{H}$) est dense dans $E_a^2(\mathcal{H})$ [resp. dans $F_a^2(\mathcal{H})$].*

Démonstration :

1º Désignons par G_a^2 l'espace des $f \in \mathcal{E}_a^2$, telles que

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = 0$$

et par $G_a^2(\mathcal{H})$ l'espace des $f \in \mathcal{E}_a^2(\mathcal{H})$ vérifiant la même condition. L'espace $G_a^2 \otimes \mathcal{H}$ *est dense dans* $G_a^2(\mathcal{H})$. En effet, soit $f \in G_a^2(\mathcal{H})$, et soit $\tau_\lambda f$ défini par $\tau_\lambda f(x) = 0$ si $a \leqq x \leqq a + \lambda$ $(\lambda > 0)$, $f(x - \lambda)$ si $x \geqq a + \lambda$. On a

$$\tau_\lambda f \in G_a^2(\mathcal{H}) \qquad \text{et} \qquad \tau_\lambda f \to f$$

dans $G_a^2(\mathcal{H})$ lorsque $\lambda \to 0$.

Il suffit donc de montrer qu'étant donné f dans $G_a^2(\mathcal{H})$, nulle au voisinage de a, on peut l'approcher par des éléments de $G_a^2 \otimes \mathcal{H}$. Or il existe $g_j \in \mathcal{E}_a^0 \otimes \mathcal{H}$, avec $g_j \to f$ dans $\mathcal{E}_a^0(\mathcal{H})$ et $g_j = 0$ au voisinage de a. Si $\rho \in \mathcal{D}(R)$, de support dans un voisinage assez petit de l'origine, $g_j \bigstar \rho$ est, en particulier, dans $G_a^2 \otimes \mathcal{H}$ et $g_j \bigstar \rho \to f \bigstar \rho$ dans $\mathcal{E}_a^2(\mathcal{H})$ [ou $G_a^2(\mathcal{H})$]. On fait ensuite tendre ρ vers δ dans $\mathcal{E}'^2$ faible; $f \bigstar \rho \to f$ dans $\mathcal{E}_a^2(\mathcal{H})$, d'où le résultat.

2º Soit maintenant $F \in E_a^2(\mathcal{H})$. Considérons f définie par

$$f = F - F_1, \qquad F_1(x) = (x - a) \otimes F'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!} \otimes F''(a);$$

f est dans $G_a^2(\mathcal{H})$; F_1 est dans $E_a^2 \otimes \mathcal{H}$, d'où le lemme, en utilisant le 1°.
Si $F \in F_a^2(\mathcal{H})$, on considère

$$f = F - F_2, \qquad F_2(x) = 1 \otimes F(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!} \otimes F''(a).$$

Le lemme est démontré.

Si $F = \sum_i f_i \otimes h_i$, somme *finie*, est dans $E_a^2 \otimes \mathcal{H}$, on a

$$AF = \sum Af_i \otimes h_i, \qquad \mathcal{A}F = \sum \mathcal{A}f_i \otimes h_i,$$

et

(7.3) $$\mathcal{A}AF = A\mathcal{A}F = F.$$

On a également

(7.4) $$D^2AF = ALF.$$

Par prolongement par continuité ces relations sont vraies pour tout F dans $E_a^2(\mathcal{H})$. On a les résultats analogues pour les opérateurs B et $\mathcal{B}$, d'où le

THÉORÈME 7.1. — *On suppose que $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert; soit $q \in \mathcal{E}^1(R)$, a fixé réel quelconque. Les opérateurs A, $\mathcal{A}$ (resp. B, $\mathcal{B}$) sont des isomorphismes de $E_a^2(\mathcal{H})$ [resp. $F_a^2(\mathcal{H})$] sur lui-même, inverses l'un de l'autre. On a*

(7.5) $$D^2A = AL, \qquad D^2B = BL.$$

Les couples d'opérateurs A, $\mathcal{A}$ (resp. B, $\mathcal{B}$) sont encore appelés premier (resp. second) couple d'opérateurs de Delsarte.

On va maintenant définir A, ... pour des distributions à valeurs vectorielles. Par définition, on appelle espace des distributions en x, à valeurs dans $\mathcal{H}$, l'espace

$$\mathcal{D}'(x, \mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(R_x); \mathcal{H}).$$

L'espace des distributions en x à support limité à gauche est

(7.6) $$\mathcal{D}'_+(x, \mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{D}_-; \mathcal{H}).$$

Si $T \in \mathcal{D}'(x, \mathcal{H})$, $\varphi \in \mathcal{D}$, alors $T(\varphi)$ est dans $\mathcal{H}$; la dérivée de T est définie, comme dans le cas scalaire par

$$\frac{d}{dx} T(\varphi) = -T\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$$

(*cf.* pour ces notions SCHWARTZ [3], [4]). Si maintenant E et F sont deux espaces vectoriels topologiques, on désigne par $E \underset{\pi}{\otimes} F$ le produit tensoriel de E et F muni de la topologie de limite projective de Grothendieck (*cf.* GROTHENDIECK [1], [2]). Le complété de $E \underset{\pi}{\otimes} F$ est $E \hat{\otimes} F$. On démontre (cf. *loc. cit.*) que l'on a

$$(7.7) \qquad \mathcal{D}'(x, \mathcal{H}) = \mathcal{D}' \hat{\otimes} \mathcal{H}, \qquad \mathcal{D}'_+(x, \mathcal{H}) = \mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{H}.$$

Si $\mathcal{D}'_a(x, \mathcal{H})$ désigne le sous-espace vectoriel (fermé) de $\mathcal{D}'_a(x, \mathcal{H})$ formé des distributions à support dans $x \leq a$, on a

$$(7.8) \qquad \mathcal{D}'_a(x, \mathcal{H}) = \mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}.$$

Utilisons la notion de produit tensoriel d'applications linéaires. Si X est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_a$ sur lui-même, $X \otimes 1$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}$ sur lui-même, d'inverse $X^{-1} \otimes 1$. Donc si l'on écrit X au lieu de $X \otimes 1$, on obtient le

THÉORÈME 7.2. — *On suppose que $q \in \mathcal{E}(R)$. Les opérateurs A, $\mathcal{A}$ (resp. B, $\mathcal{B}$) sont des isomorphismes de $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}$ sur lui-même, inverses l'un de l'autre. On a les relations* (7.5) *sur $\mathcal{D}'_a(x, \mathcal{H})$.*

REMARQUE 7.1. — Dans tout ce qui précède, on s'est contenté de transmuer l'un dans l'autre les opérateurs D^2 et $L = D^2 - q$. Considérons plus généralement deux opérateurs

$$(7.9) \qquad L_i = D^2 + r_i(x) D + s_i(x) \qquad (i = 1, 2),$$

où pour simplifier, on suppose que les fonctions r_i, s_i sont indéfiniment différentiables. Le résultat suivant est maintenant immédiat :

THÉORÈME 7.3. — *On suppose que les fonctions r_i et s_i sont indéfiniment différentiables. Il existe un isomorphisme de $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}$ sur lui-même, soit $A_{L_1 L_2}$, tel que*

$$(7.10) \qquad A_{L_1 L_2} L_2 = L_1 A_{L_1 L_2}.$$

DÉMONSTRATION. — Il suffit évidemment de donner un isomorphisme qui transmue L_1 en $L_1^* = D^2 - q_1$, $q_1 \in \mathcal{E}(R)$. On obtient alors $A_{L_1 L_2}$ par composition convenable d'isomorphismes de transmutation. Or posons

$$(7.11) \qquad R_1(x) = \int_a^x r(\xi)\, d\xi.$$

On vérifie que, pour tout $S \in \mathcal{D}'_a(x, \mathcal{H})$, on a

$$(7.12) \qquad L_1 \left(\exp - \frac{1}{2} R_1(x) \right) S = \exp - \frac{1}{2} R_1(x) L_1^* S.$$

où

$$(7.13) \qquad L_1^* = D^2 - q_1,$$

avec

$$(7.14) \qquad q_1 = \frac{r_1^2}{4} + \frac{r_1'}{2} - s_1,$$

fonction indéfiniment différentiable, d'où le théorème.

8. Rappels sur les problèmes mixtes. — Soit encore $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. On donne un opérateur Λ, non continu, d'ensemble de définition $\mathcal{H}(\Lambda)$. On suppose que Λ est autoadjoint (*cf.* STONE [1], RIESZ NAGY (1]) et semi-borné inférieurement, autrement dit

(M) $\begin{cases} \Lambda \text{ est autoadjoint et il existe un nombre } \xi_0 \text{ tel que } (\Lambda x, x) + \xi_0 \|x\|^2 \geqq 0 \\ \text{pour tout } x \text{ dans l'ensemble de définition de } \Lambda. \end{cases}$

Si $x, y \in \mathcal{H}(\Lambda)$, on pose

$$(8.1) \qquad (x, y)_{\mathcal{H}(\Lambda)} = (x, y)_{\mathcal{H}} + (\Lambda x, \Lambda y)_{\mathcal{H}}.$$

Comme Λ est fermé, on a le

LEMME 8.1. — *Pour la structure définie par* (8.1), $\mathcal{H}(\Lambda)$ *est un espace de Hilbert.*

On va utiliser les espaces $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{H})$, $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{H}(\Lambda))$, où $t \in R$ est la variable de temps.

On peut plus généralement définir les espaces

$$\mathcal{D}'_+(t, E) = \mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} E$$

où E est un espace vectoriel topologique localement convexe quelconque (*cf.* BOURBAKI [1] et les Ouvrages cités de GROTHENDIECK et SCHWARTZ). On peut donc notamment définir les deux espaces $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H}(\Lambda)))$, $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{L}(\mathcal{H}(\Lambda); \mathcal{H}))$.

Si u est dans le premier de ces espaces [qui coïncide avec $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H}(\Lambda))$] et si v est dans le second (qui vaut $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{L}(\mathcal{H}(\Lambda); \mathcal{H})$), on peut définir *les produits de composition*

$$(8.2) \qquad u \underset{(t)}{\bigstar} v, \quad \text{élément de } \mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{L}(\mathcal{H}(\Lambda); \mathcal{H}(\Lambda)),$$

$$(8.3) \qquad v \underset{(t)}{\bigstar} u, \quad \text{élément de } \mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$$

(*cf.* SCHWARTZ [4] et pour des applications LIONS [1], chap. II); si u et v sont des *fonctions*, par exemple continues, on a

$$(8.4) \qquad u \underset{(t)}{\bigstar} v(t) = \int_R u(t-\tau)\, v(\tau)\, d\tau,$$

intégrale à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\Lambda)\,;\,\mathcal{H}(\Lambda))$, et

$$(8.5)\qquad v \underset{(t)}{\bigstar} u(t) = \int_R v(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau,$$

intégrale à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H};\,\mathcal{H})$.

Considérons ensuite l'opérateur

$$1 \otimes \Lambda + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \otimes 1$$

$\left(\text{on écrira souvent } 1 \otimes \Lambda + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$, opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ dans $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{H}$. Si $T \in \mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$, on a

$$(8.6)\qquad \left(1 \otimes \Lambda + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \otimes 1\right) T = (\delta \otimes \Lambda + \delta'' \otimes 1) \underset{(t)}{\bigstar} T,$$

où δ est la masse de Dirac à l'origine sur l'axe des t, et où δ'' est la dérivée seconde en t de δ. On a montré dans LIONS [1], chap. II, le

THÉORÈME 8.1. — *On suppose que (M) a lieu. L'opérateur* $1 \otimes \Lambda + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ *est alors un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ *sur* $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{H}$. *L'isomorphisme inverse est l'opérateur de composition par une distribution* $\mathcal{G}$, *élément de* $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{L}(\mathcal{H};\,\mathcal{H}(\Lambda))$; *la distribution* $\mathcal{G}$ *est nulle pour* $t < 0$ *et admet une transformée de Laplace en* t (¹).

(*Cf.* aussi LIONS [2] et GARNIR [1]).

La distribution $\mathcal{G}$ s'appelle *la distribution de Green.*

La transformation de Laplace fournit un procédé de calcul de $\mathcal{G}$ (*cf.* GARNIR [2], [3]). On a les relations

$$(8.7)\qquad (\delta \otimes \Lambda + \delta'' \otimes 1) \underset{(t)}{\bigstar} \mathcal{G} = \delta \otimes 1, \quad \in \mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{L}(\mathcal{H};\,\mathcal{H}),$$

et

$$(8.8)\qquad \mathcal{G} \underset{(t)}{\bigstar} (\delta \otimes \Lambda + \delta'' \otimes 1) = \delta \otimes 1, \quad \in \mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{L}(\mathcal{H}(\Lambda);\,\mathcal{H}(\Lambda)).$$

Comme $\mathcal{G}$ est nulle pour $t < 0$, si T est nulle pour $t < a$, alors $\mathcal{G} \underset{(t)}{\bigstar} T$ est nulle pour $t < a$, donc :

THÉORÈME 8.2. — *Si* (M) *a lieu,* $1 \otimes \Lambda + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ *sur* $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}$, *a étant fixé quelconque.*

PROBLÈMES MIXTES (au sens de HADAMARD [1]). — On désigne sous la rubrique

(¹) On a donné dans LIONS [1] des résultats plus généraux; mais le théorème 8.1 suffit pour les applications que nous avons en vue.

« problèmes mixtes » les problèmes du type suivant (il y a évidemment d'autres problèmes mixtes !). On suppose donné un espace vectoriel topologique localement convexe $\mathcal{K}$, contenant $\mathcal{H}(\Lambda)$, tel que $\mathcal{H}(\Lambda)$ soit dense dans $\mathcal{K}$, que Λ soit prolongeable à $\mathcal{K}$ par continuité (on désigne encore par Λ le prolongement), de sorte que Λ soit élément de $\mathcal{L}(\mathcal{K}; \mathcal{H})$ (on donnera brièvement des exemples pratiques de cette situation). On donne $T \in \mathcal{D}' \hat{\otimes} \mathcal{H}$. Trouver U dans $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{K}$, solution de

$$\left(1 \otimes \Lambda + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) U = T, \tag{8.9}$$

avec la condition aux limites

$$U - h \in \mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda), \tag{8.10}$$

où h est donné dans $\mathcal{K}$.

Si (M) a lieu, ce problème admet une solution unique

$$U = \mathcal{G} \underset{(t)}{\star} T + h - \mathcal{G} \underset{(t)}{\star} \left(1 \otimes \Lambda + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h. \tag{8.11}$$

Problèmes mixtes fins. — On désigne par $\mathcal{H}(\Lambda^k)$, k étant un entier ≥ 1 donné quelconque, l'espace des $x \in \mathcal{H}(\Lambda)$ tels que $\Lambda x \in \mathcal{H}(\Lambda)$, ..., $\Lambda^{k-1} x \in \mathcal{H}(\Lambda)$ (de sorte que $\Lambda^k x$ est défini, $\in \mathcal{H}$).

Une fonction $t \to u(t)$ de $t \geq a$ dans $\mathcal{H}$ [ou $\mathcal{H}(\Lambda)$] dite o fois continûment différentiable est en fait continue.

On a montré dans Lions [1] le

Théorème 8.3. — *On suppose que f et f_1 sont dans $\mathcal{H}(\Lambda)$.*

a. La solution u dans $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ de

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u + (1 \otimes \Lambda) u = \delta'(a) \otimes f, \tag{8.12}$$

où $\delta'(a)$ est la dérivée de $\delta(a)$ = masse de Dirac au point a, est continue de $t \geq a$ dans $\mathcal{H}$; $u(t) \to f$ dans $\mathcal{H}$ lorsque $t \to a$;

b. La solution u dans $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ de

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u + (1 \otimes \Lambda) u = \delta(a) \otimes f_1 \tag{8.13}$$

est une fonction une fois continûment différentiable de $t \geq a$ dans $\mathcal{H}$; lorsque $t \to a$, $u(t) \to 0$ et $u'(t) \to f_1$ dans $\mathcal{H}$.

Plus généralement, on démontre par un procédé analogue le

Théorème 8.4. — *On suppose que f et f_1 sont dans $\mathcal{H}(\Lambda^k)$, $k \geqq 2$.*

a. La solution u dans $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ de (8.12) *a les propriétés :*

(i) *u est $(2k-2)$ fois continûment différentiable de $t \geqq a$ dans $\mathcal{H}$;*

(ii) *u est $(2k-4)$ fois continûment différentiable de $t \geqq a$ dans $\mathcal{H}(\Lambda)$;*

(iii) *lorsque $t \to a$, $u^{(2p-1)}(t) \to 0$, $u^{(2p)}(t) \to (-1)^p \Lambda^p f$ pour $p \leqq k-1$, la convergence ayant lieu dans $\mathcal{H}(\Lambda)$ sauf pour $u^{(2k-2)}$ où la convergence a lieu dans $\mathcal{H}$.*

b. La solution u dans $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ de (8.13) *a les propriétés :*

(i) *u est $(2k-1)$ fois continûment différentiable de $t \geqq a$ dans $\mathcal{H}$;*

(ii) *u est $(2k-3)$ fois continûment différentiable de $t \geqq a$ dans $\mathcal{H}(\Lambda)$;*

(iii) *lorsque $t \to a$, $u^{(2p-2)}(t) \to 0$, $u^{(2p-1)}(t) \to (-1)^{p-1} \Lambda^{p-1} f_1$ dans $\mathcal{H}(\Lambda)$, $p \leqq k$, sauf pour $u^{(2k-1)}(t)$ où la convergence a lieu dans $\mathcal{H}$.*

On a donc

Corollaire 8.1. — *Si f et f_1 sont dans $\mathcal{H}(\Lambda^\infty)$, la solution de* (8.12) *et de* (8.13) *est une fonction indéfiniment différentiable de $t \geqq a$ dans $\mathcal{H}(\Lambda)$.*

Montrons maintenant le

Théorème 8.5. — *On donne une fonction $t \to g(t)$ indéfiniment différentiable de R dans $\mathcal{H}$, nulle pour $t \leqq a$; on donne f et f_1 dans $\mathcal{H}(\Lambda^\infty)$. La solution u de*

$$(8.14) \qquad \Delta u(t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) = g(t) \qquad (t \geqq a),$$

avec $u(t) \to f$, $u'(t) \to f_1$ dans $\mathcal{H}(\Lambda)$ lorsque $t \to a$, est une fonction indéfiniment différentiable de $t \geqq a$ dans $\mathcal{H}(\Lambda)$.

Démonstration. — Soit u_1 la solution dans $\mathcal{D}'_+(t, \mathcal{H}(\Lambda))$ de

$$(1 \otimes \Lambda) u_1 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1 = g.$$

Elle est donnée par

$$u_1 = \mathcal{G} \star g,$$

donc est indéfiniment différentiable de R dans $\mathcal{H}(\Lambda)$ (*cf.* Schwartz [3]). On en déduit le résultat, avec le corollaire **8.1**.

9. Application des opérateurs de Delsarte à de nouveaux problèmes mixtes.

— On donne deux fonctions $r(t)$ et $s(t)$ indéfiniment différentiables en t, et Λ comme au numéro précédent.

On peut maintenant démontrer le résultat suivant :

Théorème 9.1. — *On suppose que r et s sont indéfiniment différentiables et que Λ vérifie* (M) (*cf.* n° 8). *Soit a fixé quelconque. L'opérateur*

$$(9.1)\qquad 1\otimes\Lambda+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+r(t)\frac{\partial}{\partial t}+s(t)\right)\otimes 1$$

définit un isomorphisme de $\mathcal{D}'_a\hat{\otimes}\mathcal{H}(\Lambda)$ sur $\mathcal{D}'_a\hat{\otimes}\mathcal{H}$.

Démonstration. — *a.* Posons

$$(9.2)\qquad \nabla=\text{opérateur }(9.1)$$

et

$$(9.3)\qquad R(t)=\int_a^t r(\xi)\,d\xi.$$

On vérifie que

$$(9.4)\qquad \nabla=\exp\left(-\frac{R}{2}\right)\circ\nabla^{\star}\circ\exp\left(\frac{R}{2}\right),$$

où

$$(9.5)\qquad \nabla^{\star}=1\otimes\Lambda+L\otimes 1,$$

avec

$$(9.6)\qquad L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-q(t),\qquad q(t)=\frac{r^2(t)}{4}+\frac{r'(t)}{2}-s(t).$$

b. Grâce à (9.4), tout revient à montrer que $\nabla^{\star}$ définit un isomorphisme de $\mathcal{D}'_a\hat{\otimes}\mathcal{H}(\Lambda)$ sur $\mathcal{D}'_a\hat{\otimes}\mathcal{H}$. On utilise maintenant les opérateurs de Delsarte relativement à L et a. Soit, par exemple A, isomorphisme de $\mathcal{D}'_a\hat{\otimes}\mathcal{H}$ [resp. $\mathcal{D}'_a\hat{\otimes}\mathcal{H}(\Lambda)$] sur lui-même, tel que

$$L\otimes 1=A^{-1}\circ(D^2\otimes 1)\circ A\quad(cf.\ \text{théor. } 7.2).$$

On a alors

$$(9.7)\qquad \nabla^{\star}=A^{-1}\circ(1\otimes\Lambda+D_t^2\otimes 1)\circ A.$$

Comme $(1\otimes\Lambda+D_t^2\otimes 1)$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_a\hat{\otimes}\mathcal{H}(\Lambda)$ sur $\mathcal{D}'_a\hat{\otimes}\mathcal{H}$ (théor. 8.2), on en déduit le théorème.

On a en outre *un procédé de calcul* de l'opérateur inverse de ∇. En effet, on déduit de (9.6) et (9.7) la formule

$$(9.8)\qquad \nabla^{-1}=\exp\left(-\frac{R}{2}\right)\circ\mathcal{A}\circ\left(1\otimes\Lambda+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^{-1}\circ A\circ\exp\left(\frac{R}{2}\right).$$

On a une formule analogue en remplaçant A (resp. $\mathcal{A}$) par B (resp. $\mathcal{B}$). Le calcul explicite de ∇^{-1} se ramène donc au calcul de l'un des couples d'opérateurs de Delsarte, et de

$$\left(1\otimes\Lambda+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^{-1}=\mathcal{G}^{\star},$$

(ce dernier calcul pouvant être fait avec la transformation de Laplace; *cf.* GARNIR [1], [2], [3]).

∇ est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ sur $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{H}$ (*cf.* LIONS [5]).

PROBLÈMES MIXTES. — On donne $\mathcal{K}$ comme au n° 8. On considère la famille des problèmes mixtes suivants :

PROBLÈME 9.1. — Trouver U dans $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{K}$, solution de

$$(1 \otimes \Lambda) U + \frac{\partial^2}{\partial t^2} U + r(t) \frac{\partial}{\partial t} U + s(t) U = T, \tag{9.9}$$

où T est donné dans $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}$, avec la condition aux limites

$$U - h \in \mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda), \tag{9.10}$$

h étant donné dans $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{K}$.

Ces problèmes généralisent les problèmes mixtes du n° 8. On a aussitôt :

COROLLAIRE 9.1. — *On suppose que r et s sont indéfiniment différentiables et que Λ vérifie* (M). *Le problème mixte* 9.1 *admet alors une solution unique, dépendant continûment des données, fournie par*

$$U = \nabla^{-1} T + h - \nabla^{-1} \circ \left(1 \otimes \Lambda + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h. \tag{9.11}$$

STABILITÉ. — On donne une suite de fonctions indéfiniment différentiables r^α et s^α, avec

$$r^\alpha \to r, \qquad s^\alpha \to s \quad \text{dans } \mathcal{E}(R), \qquad \alpha \to +\infty. \tag{9.12}$$

On donne Λ fixé, vérifiant (M). On pose

$$\nabla^\alpha = 1 \otimes \Lambda + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + r^\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} + s^\alpha(t) \right) \otimes 1; \tag{9.13}$$

∇^α est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ sur $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}$ (théor. 9.1). On a

THÉORÈME 9.2. — *On suppose que Λ vérifie* (M) *et que* (9.12) *a lieu. Dans ces conditions, lorsque $\alpha \to \infty$, $(\nabla^\alpha)^{-1} \to (\nabla)^{-1}$ dans l'espace*

$$\mathcal{L}_b(\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}; \mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)).$$

DÉMONSTRATION. — On utilise, par exemple, les opérateurs A^α et $\mathfrak{A}^\alpha$, relatifs à

$$q^\alpha(t) = \frac{r^\alpha(t)}{4} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} r^\alpha(t) - s^\alpha(t)$$

et à a. On a $q^\alpha \to q$ dans $\mathcal{E}(R)$, donc (théor. 4.3), $A^\alpha \to A$, $\mathfrak{A}^\alpha \to \mathfrak{A}$, dans

$\mathcal{L}_b(\mathcal{D}'_a; \mathcal{D}'_a)$. Or, par (9.8),

$$(\nabla^\alpha)^{-1} = \exp\left(-\frac{R^\alpha}{2}\right) \circ \mathcal{A}^\alpha \circ \left(1 \otimes \Lambda + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^{-1} \circ A^\alpha \exp\left(\frac{R^\alpha}{2}\right),$$

où

$$R^\alpha(t) = \int_a^t r^\alpha(\xi)\, d\xi.$$

Le théorème en résulte.

10. Application aux problèmes mixtes fins. — Considérons le problème suivant :

Problème 10.1. — On donne f_1 et f_2 dans $\mathcal{H}(\Lambda^2)$. On donne r et s dans $\mathcal{E}^2(R)$ et $\mathcal{E}^1(R)$ respectivement. Trouver $t \to u(t)$ application deux fois continûment différentiable de $t \geq a$ dans $\mathcal{H}$, continue de $t \geq a$ dans $\mathcal{H}(\Lambda)$, solution de

$$(10.1)\quad \Lambda u(t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) + r(t) \frac{\partial}{\partial t} u(t) + s(t) u(t) = 0 \qquad (t > a),$$

avec les conditions initiales

$$(10.2)\qquad u(t) \to f_1 \quad \text{lorsque } t \to a, \quad \text{dans } \mathcal{H}(\Lambda),$$

$$(10.3)\qquad u'(t) \to f_2 \quad \text{lorsque } t \to a, \quad \text{dans } \mathcal{H}.$$

Montrons le

Théorème 10.1. — *On suppose que* $r \in \mathcal{E}^2(R)$, $s \in \mathcal{E}^1(R)$, *et que* Λ *vérifie* (M) *et que* $f_1 \in \mathcal{H}(\Lambda^2)$, $f_2 \in \mathcal{H}(\Lambda^2)$. *Dans ces conditions le problème* **10.1** *admet une solution unique.*

Démonstration. — *a.* Posons

$$(10.4)\qquad u(t) = \exp\left(-\frac{R(t)}{2}\right) v(t),$$

R défini par (9.3). Si u est solution du problème 10.1, v est fonction deux fois continûment différentiable de $t \geq a$ dans $\mathcal{H}$, continue de $t > a$ dans $\mathcal{H}(\Lambda)$, solution de

$$(10.5)\qquad \Lambda v(t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(t) - q(t) v(t) = 0,$$

où

$$q(t) = \frac{r^2(t)}{4} + \frac{r'(t)}{2} - s(t), \qquad \text{donc} \quad q \in \mathcal{E}^1(R),$$

et avec les conditions initiales

$$(10.6)\qquad v(a) = f_1,$$

$$(10.7)\qquad v'(a) = f_2 + \frac{1}{2} r(a) f_1.$$

Réciproquement, si $v(t)$ est deux fois continûment différentiable de $t \geqq a$ dans $\mathcal{H}$, continue de $t \geqq a$ dans $\mathcal{H}(\Lambda)$, avec (**10**.5), (**10**.7), (**10**.7), alors $u(t)$, donnée par (**10**.4), est solution du problème **10.1**.

b. Si l'on pose $v = v_1 + v_2$, la recherche de v équivaut à la recherche de v_1 et v_2, deux fois continûment différentiables de $t \geqq a$ dans $\mathcal{H}$, continues de $t \geqq a$ dans $\mathcal{H}(\Lambda)$, avec

(**10**.8) $\quad \Lambda v_1 + L_t v_1 = 0, \qquad v_1(a) = f_1, \qquad v'_1(a) = 0,$

(**10**.9) $\quad \Lambda v_2 + L_t v_2 = 0, \qquad v_2(a) = 0, \qquad v'_2(a) = f_2 + \frac{1}{2} r(a) f_1,$

où

$$L = \frac{d^2}{dt^2} - q(t).$$

Autrement dit, on cherche v_2 élément de $E^2_a(\mathcal{H})$, et v_1 élément de $F^2_a(\mathcal{H})$. Utilisons alors le théorème 7.1. On pose

(**10**.10) $$A v_2 = w_2,$$

(**10**.11) $$B v_1 = w_1,$$

Les équations (**10**.8), (**10**.9) équivalent respectivement aux suivantes :

(**10**.12) $\quad \Lambda w_1 + D^2_t w_1 = 0, \qquad w_1(a) = f_1, \qquad w'_1(a) = 0,$

(**10**.13) $\quad \Lambda w_2 + D^2_t w_1 = 0, \qquad w_1(a) = 0, \qquad w'_2(a) = f_2 + \frac{r(a)}{2} f_1.$

D'après le théorème **8**.4, *a*, comme $f_1 \in \mathcal{H}(\Lambda^2)$, w_1 solution de (**10**.12) existe et est unique : $w_1 \in F^2_a(\mathcal{H})$, donc

(**10**.14) $$v_1 = \mathcal{B} w_1,$$

solution de (**10**.8) existe et est unique.

D'après le théorème **8**.4, *b*, comme $f_2 + \frac{1}{2} r(a) f_1 \in \mathcal{H}(\Lambda^2)$, w_2 solution de (**10**.13) existe et est unique; $t \to w_2(t)$ est même trois fois continûment différentiable de $t \geqq a$ dans $\mathcal{H}$, une fois continûment différentiable de $t \geqq a$ dans $\mathcal{H}(\Lambda)$; donc

(**10**.15) $$v_2 = \mathcal{A} w_2,$$

solution de (**10**.9), existe et est unique, d'où le théorème.

On peut également considérer le problème mixte fin suivant :

Problème **10.2**. — On donne f_1 et f_2 dans $\mathcal{H}(\Lambda^\infty)$; r et s dans $\mathcal{E}(R)$ et soit $t \to g(t)$ une fonction indéfiniment différentiable de R dans $\mathcal{H}$, nulle pour $t < a$ (donc $g \in \mathcal{D}_a(t, \mathcal{H}) = \mathcal{D}_a \hat{\otimes} \mathcal{H}$). On cherche une fonction $t \to u(t)$, deux fois continûment différentiable de $t \geqq a$ dans $\mathcal{H}$, continue de $t \geqq a$

dans $\mathcal{H}(\Lambda)$, solution de

$$(10.16)\qquad \Lambda u(t)+\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t)+r(t)\frac{\partial}{\partial t}u(t)+s(t)u(t)=g(t)\qquad (t\geqq a),$$

avec (10.2) et (10.3).

On a le

Théorème 10.2. — *On suppose que Λ vérifie* (M). *Le problème* (10.2) *admet une solution unique; cette solution est une fonction indéfiniment différentiable de $t\geqq a$ dans $\mathcal{H}(\Lambda)$.*

Démonstration. — Comme au théorème 10.1 on se ramène à la recherche de v, solution de

$$(10.17)\qquad \Lambda v(t)+L_t v(t)=\left(\exp\frac{R(t)}{2}\right)g(t),$$

avec (10.6) et (10.7).

On cherche alors v sous la forme : $v=v_1+v_2+v_3$, v_1 et v_2 comme au théorème 10.1, et v_3 étant solution de (10.17) avec

$$(10.18)\qquad v_3(a)=v'_3(a)=0.$$

Comme f_1 et f_2 sont dans $\mathcal{H}(\Lambda^\infty)$, les fonctions w_1 et w_2 sont, d'après le corollaire 8.1, indéfiniment différentiables de $t\geqq a$ dans $\mathcal{H}(\Lambda)$. Mais lorsque $q\in\mathcal{E}(R)$, les opérateurs A et $\mathcal{A}$ appliquent le sous-espace de $\mathcal{E}(x\geqq a)$ formé des fonctions nulles en a, dans lui-même; soit $\mathcal{E}_a(x\geqq a)$ cet espace; A est un isomorphisme de $\mathcal{E}_a(x\geqq a)$ sur lui-même. Comme $\mathcal{E}_a(x\geqq a)$ est nucléaire, on passe de là au cas de l'espace $\mathcal{E}_a(t\geqq a;\,\mathcal{H})$ des fonctions de $\mathcal{E}(t\geqq a;\,\mathcal{H})$ nulles en a, comme pour $\mathcal{D}'_a$, en utilisant

$$\mathcal{E}_a(t\geqq a;\,\mathcal{H})=\mathcal{E}_a(t\geqq a)\,\hat{\otimes}\,\mathcal{H}.$$

On en déduit que v_1 et v_2 sont indéfiniment différentiables de $t\geqq a$ dans $\mathcal{H}(\Lambda)$.

On a vu (théor. 4.2) que $A\in\mathcal{L}(\mathcal{D}_a;\,\mathcal{D}_a)$, de sorte que $A\otimes 1=A$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}_a\hat{\otimes}\,\mathcal{H}$ sur lui-même, d'inverse $\mathcal{A}$. Montrons que (10.17) avec les conditions aux limites (10.18) admet une solution v_3 dans $\mathcal{D}_a\hat{\otimes}\,\mathcal{H}(\Lambda)$ [nécessairement unique, puisqu'il y a unicité dans $\mathcal{D}'_a\hat{\otimes}\,\mathcal{H}(\Lambda)$]. On pose $Av_3=w_3$; alors

$$\Delta w_3+\frac{\partial^2}{\partial t^2}w_3=Ag$$

qui admet une solution unique dans $\mathcal{D}_a\hat{\otimes}\,\mathcal{H}(\Lambda)$ (théor. 8.5), d'où le théorème.

Stabilité. — On donne une suite de fonctions r^α, s^α avec

$$(10.19)\qquad r^\alpha\to r\quad\text{dans } \mathcal{E}^2(R),\qquad s^\alpha\to s\quad\text{dans } \mathcal{E}^1(R).$$

On donne Λ, f_1 et f_2 *fixés*. Soit u^α *la* solution du problème **10.1** correspondant. On a le

Théorème 10.3. — *On suppose que* Λ *vérifie* (M), *que* f_1 *et* f_2 *sont dans* $\mathcal{H}(\Lambda^2)$ *et que l'on a* (**10**.19). *Dans ces conditions, lorsque* $\alpha \to \infty$, $u^\alpha \to u$ *dans* $\mathcal{E}^2(t \geqq a;\ \mathcal{H})$ *et dans* $\mathcal{E}^0(t \geqq a;\ \mathcal{H}(\Lambda))$.

Démonstration. — *a*. Posons, avec des notations analogues à celles de la démonstration du théorème **10.1**,

$$u^\alpha(t) = \left(\exp\left(-\frac{R^\alpha(t)}{2}\right)\right) v^\alpha(t), \qquad R^\alpha(t) = \int_a^t r^\alpha(\xi)\,d\xi;$$

on voit que v^α est solution de

$$\Lambda v^\alpha(t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} v^\alpha(t) - q^\alpha(t)\, v^\alpha(t) = 0, \tag{10.20}$$

où

$$q^\alpha(t) = \frac{(r^\alpha(t))^2}{4} + \frac{\dfrac{d}{dt} r^\alpha(t)}{2} - s^\alpha(t). \tag{10.21}$$

Grâce aux hypothèses faites, $q^\alpha \to q$ dans $\mathcal{E}^1(R)$. Il reste à montrer que $v^\alpha \to v$ dans $\mathcal{E}^2(t \geqq a;\ \mathcal{H})$ et dans $\mathcal{E}^0(t \geqq a;\ \mathcal{H}(\Lambda))$.

Posons alors

$$v^\alpha = v_1^\alpha + v_2^\alpha, \qquad v_1^\alpha(a) = f_1, \qquad v_1^{\alpha\prime}(a) = 0;$$
$$v_2^\alpha(a) = 0, \qquad v_2^{\alpha\prime}(a) = f_2 + \frac{1}{2} r^\alpha(a) f_1.$$

Montrons que $v_2^\alpha \to v_2$; la même méthode montre que $v_1^\alpha \to v_1$ (cas d'ailleurs un peu plus simple, puisque les conditions initiales ne dépendent pas de α). On pose

$$A^\alpha v_2^\alpha = w_2^\alpha, \tag{10.22}$$

A^α étant relatif à $L^\alpha = D^2 - q^\alpha$ et a. Alors w_2^α est solution de

$$\Lambda w_2^\alpha + \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_2^\alpha = 0, \qquad w_2^\alpha(a) = 0, \qquad w_2^{\alpha\prime}(a) = f_2 + \frac{1}{2} r^\alpha(a) f_1.$$

Il en résulte (*cf.* Lions [1]) que $w_2^\alpha \to w_2$ dans $\mathcal{E}^2(t \geqq a;\ \mathcal{H})$ et dans $\mathcal{E}^0(t \geqq a;\ \mathcal{H}(\Lambda))$. Comme $q^\alpha \to q$ dans $\mathcal{E}^1(R)$, on sait (théor. **3.3**) que $A^\alpha \to A$ dans $\mathcal{L}_b(F_a^2;\ F_a^2)$. On passe de là au cas des fonctions à valeurs vectorielles, d'où le théorème.

Remarque 10.1. — Aux résultats établis jusqu'ici relativement à des espaces de fonctions ou de distributions portées par le demi-axe $t \geqq a$ correspondent des résultats analogues relatifs aux espaces de fonctions ou de distributions portées par $t \leqq a$. Désignons notamment par $\mathcal{D}'_{-,a}$ le sous-espace vectoriel (fermé) de $\mathcal{D}'_-$ formé des distributions à support dans $t \leqq a$. Il existe un isomorphisme A_- de $\mathcal{D}'_{-,a}$ dans lui-même, d'inverse $\mathcal{A}_-$, tel que

$$D^2 A_- = A_- L. \tag{10.22}$$

Comme l'opérateur $\left(1 \otimes \Lambda + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \otimes 1\right)$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_-(t, \mathcal{H}(\Lambda))$ sur $\mathcal{D}'_-(t, \mathcal{H})$ (*cf.* Lions [1]), de $\mathcal{D}'_{-,a} \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ sur $\mathcal{D}'_- \hat{\otimes} \mathcal{H}$, on a

Théorème 10.4. — *Si* Λ *vérifie* (M), *l'opérateur* ∇ [défini par (9.1)] *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_{-,a} \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ *sur* $\mathcal{D}'_{-,a} \hat{\otimes} \mathcal{H}$.

Tous les résultats relatifs à la stabilité et aux problèmes mixtes fins se généralisent de façon analogue.

11. Sur une hypothèse de M. Hadamard. — Ce numéro généralise les considérations de Lions [1] (p. 114-115), qui, elles-mêmes, généralisaient et précisaient une hypothèse de M. Hadamard [1] (p. 484-485).

On fait l'hypothèse suivante :

$$(\mathrm{H}a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{l'opérateur } \Lambda \text{ est strictement positif :} \\ (\Lambda x, x) \geqq \alpha \| x \|^2, \quad \alpha > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}(\Lambda). \end{array} \right.$$

Il en résulte que l'opérateur Λ est un isomorphisme de $\mathcal{H}(\Lambda)$ sur $\mathcal{H}$; soit G son inverse.

Soit maintenant $\omega > 0$ quelconque, r et $s \in \mathcal{E}(R)$. On considère l'opérateur

$$M(\omega) = 1 \otimes \Lambda + \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + r(t)\frac{\partial}{\partial t} + s(t)\right) \otimes 1; \tag{11.1}$$

$\mathrm{M}(\omega)$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ sur $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}$, soit $\mathrm{M}^{-1}(\omega)$ l'isomorphisme inverse. On a le

Théorème 11.1. — *On suppose que* (Ha) *a lieu; soit* G *l'inverse de* Λ. *Lorsque* $\omega \to +\infty$, $M^{-1}(\omega) \to 1 \otimes G$ *dans l'espace*

$$\mathcal{L}_b\big(\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H};\ \mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)\big). \tag{11.2}$$

Démonstration. — On a, en effet, par (9.8)

$$\mathrm{M}^{-1}(\omega) = \exp\left(-\frac{R}{2}\right) \circ \mathcal{A} \circ L^{-1}(\omega) \circ A \circ \exp\left(\frac{R}{2}\right), \tag{11.3}$$

où $L^{-1}(\omega)$ est l'opérateur inverse de

$$L(\omega) = 1 \otimes \Lambda + \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \otimes 1. \tag{11.4}$$

Donc $L^{-1}(\omega)$ est un opérateur $T(\omega)^*$ de composition par

$$T(\omega) \in \mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H}(\Lambda)),$$

$T(\omega)$ étant nulle pour $t < 0$.

On a montré dans Lions [1] que

$$T(\omega) \to \delta \otimes G \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H}(\Lambda)),$$

donc

$$T(\omega)^* \to 1 \otimes G \quad \text{dans l'espace (11.2).}$$

La formule (11.3) donne alors le résultat.

12. Exemples d'opérateurs Λ. — On va donner quelques exemples utiles d'opérateurs Λ vérifiant (M).

Soit Ω un ouvert quelconque de R^n [2]; on désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω, à valeurs complexes, à support compact dans Ω, muni de la topologie de limite inductive de Schwartz; soit $\mathcal{D}'(\Omega)$ le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, espace des distributions sur Ω. On donne un espace de Hilbert V; si $u \in V$, la norme de u dans V est notée $\| u \|_V$. On suppose que l'on a

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset V \subset L^2(\Omega), \tag{12.1}$$

($E \subset F$ signifie que E est contenu dans F avec une topologie plus fine), où $L^2(\Omega)$ est l'espace des classes de fonctions de carré sommable sur Ω. On donne sur V une forme sesquilinéaire $((u, v))$ [donc $((u, \lambda v)) = \bar{\lambda}((u, v))$, pour tout $\lambda \in C$, $\bar{\lambda}$ = complexe conjugué de λ], *hermitienne* donc

$$((u, v)) = \overline{((v, u))} \quad \text{pour tout } u, v \in V, \tag{12.2}$$

et l'on suppose qu'il existe s et $\varepsilon > 0$ tels que

$$((u, u)) + s \| u \|^2_{L^2(\Omega)} \geq \varepsilon \| u \|^2_V \quad \text{pour tout } u \in V. \tag{12.3}$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la forme semi-linéaire $\varphi \to ((u, \varphi))$ est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, donc de la forme

$$((u, \varphi)) = \langle \Lambda u, \bar{\varphi} \rangle, \tag{12.4}$$

où $\Lambda u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, le crochet désignant la dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$. La formule (12.4) définit un opérateur Λ, avec

$$\Lambda \in \mathcal{L}(V; \mathcal{D}'(\Omega)). \tag{12.5}$$

Espace N. — On désigne par N l'espace des éléments $u \in V$, tels que

(i) $\Lambda u \in L^2(\Omega)$;

(ii) $(\Lambda u, v)_{L^2(\Omega)} = ((u, v))$ pour tout $v \in V$.

---

[2] Pour une situation plus générale, *cf.* Lions-Schwartz [1].

Pour u, $v \in N$, on pose

$$(u, v)_N = (u, v)_V + (\Lambda u, \Lambda v)_{L^2(\Omega)}. \tag{12.6}$$

L'espace N est alors un espace de Hilbert. On suppose que $\mathcal{D}(\Omega)$ est contenu dans N.

Puisque $N \subset V \subset L^2(\Omega)$, on peut également considérer Λ comme opérateur non continu dans $L^2(\Omega)$, d'ensemble de définition N; puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset N$, N est dense dans $L^2(\Omega)$. On a

Lemme 12.1. — *Si* (12.3) *a lieu, l'opérateur* Λ, *d'ensemble de définition* N, *vérifie* (M).

Démonstration. — Il suffit de montrer que Λ est autoadjoint. Pour cela, notons d'abord que pour $\xi \geqq s$, $\Lambda + \xi$ *est un isomorphisme de* N *sur* $L^2(\Omega)$. Désignons ensuite par $L^2_{\Lambda^*}$ l'ensemble de définition de Λ^*, adjoint de Λ; si $u \in L^2_{\Lambda^*}$, la forme semi-linéaire $v \to (u, \Lambda v)_{L^2(\Omega)}$ est continue sur N muni de la topologie induite par $L^2(\Omega)$, et

$$(u, \Lambda v)_{L^2(\Omega)} = (\Lambda^* u, v)_{L^2(\Omega)}, \qquad \Lambda^* u \in L^2(\Omega). \tag{12.7}$$

Soit u_0 la solution dans N de

$$\Lambda u_0 + \xi u_0 = \Lambda^* u + \xi u \qquad (\xi \geqq s). \tag{12.8}$$

On a

$$((u_0, v)) + \xi(u_0, v)_{L^2(\Omega)} = (\Lambda^* u, v)_{L^2(\Omega)} + \xi(u, v)_{L^2(\Omega)} \tag{12.9}$$

pour tout $v \in V$.

Si l'on prend v dans N, $((u_0, v)) = (u_0, \Lambda v)_{L^2(\Omega)}$, donc (12.9) s'écrit

$$(u_0 - u, \Lambda v + \xi v)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{pour tout } v \in N. \tag{12.10}$$

Comme $\Lambda + \xi$ applique en particulier N *sur* $L^2(\Omega)$, (12.10) équivaut à $u_0 = u$, donc $L^2_{\Lambda^*} = N$. Alors (12.7) donne

$$(\Lambda^* u, v)_{L^2(\Omega)} = ((u, v)) \quad \text{pour tout } v \in N.$$

Prenons en particulier $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$; alors $(\Lambda^* u - \Lambda u, \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0$ pour tout φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, donc $\Lambda^* u = \Lambda u$, d'où le résultat.

Donnons quelques applications de ce procédé général de construction d'opérateurs Λ vérifiant (M) (pour d'autres applications, *cf.* Lions [1], chap. I, § 2; Lions [3], [4]) (³).

Application I. — On utilise l'espace $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles

---

(³) En fait, tous les opérateurs Λ vérifiant (M) peuvent être construits suivant un schéma analogue.

que $\frac{\partial}{\partial x_i} u \in L^2(\Omega)$ pour tout i (les dérivées étant prises au sens des distributions sur Ω); on pose

$$(12.11) \qquad \| u \|_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et

$$(12.12) \qquad ||| u |||_1^2 = \| u \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| u \|_1^2.$$

On munit ainsi $\mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$ d'une structure hilbertienne (l'espace $\mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$ est étudié systématiquement dans SCHWARTZ [5]; *cf.* aussi SOBOLEFF [1], DENY-LIONS [1], GÅRDING [1]). L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$ si et seulement si la frontière de Ω est de capacité nulle. Supposons donc la frontière Ω^* de Ω de capacité strictement positive; on désigne par $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$. On choisit maintenant pour espace de Hilbert V *un sous-espace vectoriel fermé quelconque de* $\mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$, *contenant* $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$. Considérons une famille de fonctions g_{ij} sur Ω, $g_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, espace des fonctions mesurables et bornées sur Ω, avec

$$g_{ij}(x) = \bar{g}_{ji}(x) \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

et

$$(12.13) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) \xi_j \bar{\xi}_i \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \qquad (\alpha > 0),$$

pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout système de n nombres complexes $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Si $u, v \in V$, on prend

$$(12.14) \qquad ((u, v)) = \sum_{i,j=1}^{h} \left(g_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right)_{L^2(\Omega)}.$$

Grâce à (12.13), la relation (12.3) a lieu avec $\alpha > 0$ quelconque. L'opérateur Λ correspondant est

$$(12.15) \qquad \Lambda = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

On a donc résolu les problèmes mixtes relatifs aux opérateurs

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial t^2} + r(t) \frac{\partial}{\partial t} + s(t),$$

lorsque (12.13) a lieu; à chaque espace V correspond un type de conditions aux limites (*cf.* LIONS [1], chap. I, et pour le problème de Dirichlet, GÅRDING

[1], **Browder** [1]); signalons notamment que si $V = \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$, les conditions aux limites sont du type « Dirichlet », et si $V = \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, du type « Neumann » (4).

Application II. — On remplace $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ par $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, espace des fonctions u telles que

$$u \in L^2(\Omega), \qquad D^p u \in L^2(\Omega)$$

pour tout p, avec $|p| \leq m$; on pose

$$(12.16) \qquad \| u \|_k^2 = \sum_{|p|=k} \| D^p u \|^2_{L^2(\Omega)},$$

et

$$(12.17) \qquad ||| u |||_m^2 = \sum_{k=0}^{m} \| u \|_k^2 \qquad [\| u \|_0^2 = \| u \|^2_{L^2(\Omega)}];$$

on munit ainsi $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ d'une structure hilbertienne. Si la frontière Ω^* de Ω n'est pas de capacité nulle, $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ (voir la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{D}(\Omega)$ soit dense dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ dans **Schwartz** [5]); soit $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$. On prend pour espace V un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, contenant $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$. On donne une famille de fonctions $g_{pq} \in L^\infty(\Omega)$, $|p|$, $|q| \leq m$. Pour u, $v \in V$, on pose

$$(12.18) \qquad ((u, v)) = \sum_{|p|, |q| \leq m} (g_{pq} D^q u, D^p v)_{L^2(\Omega)}.$$

On suppose que les g_{pq} sont telles que (12.2) et (12.3) aient lieu. On a alors les mêmes conclusions que dans l'exemple précédent, l'opérateur (12.15) étant remplacé par *l'opérateur d'ordre* $2m$

$$(12.19) \qquad \Lambda = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D_p(g_{pq}(x) D^q).$$

A chaque espace V correspond un nouveau problème aux limites. On peut en particulier prendre

$$\Omega = R^n, \qquad \text{alors} \quad \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) = \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega);$$

on a un problème de Cauchy. *L'opérateur*

$$\Lambda + \frac{\partial}{\partial t^2} + r(t) \frac{\partial}{\partial t} + s(t)$$

n'est plus ici hyperbolique.

---

(4) Si les fonctions g_{ij} sont indéfiniment différentiables, toute fonction φ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est dans $\mathcal{K}(\Lambda^\infty)$.

Application III. — Soit χ un entier positif fixé. Si E est un espace vectoriel topologique quelconque, on désigne par E^χ l'espace produit $E \times E \times \ldots \times E$, χ facteurs. Soit alors V égal à un sous-espace vectoriel fermé quelconque de $\mathcal{E}^1_{L^2}(d)^\chi$, contenant $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)^\chi$. Tout élément $\vec{u}$ de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)^\chi$ est de la forme :

$$\vec{u} = (u_1, \ldots, u_\chi), \qquad u_i \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega);$$

on pose

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}u_1, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_j}u_\chi\right), \quad \text{élément de } L^2(\Omega)^\chi.$$

On donne

$$g_{ij} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega)^\chi; L^2(\Omega)^\chi), \qquad g_{ij} = \| g_{ij}^{kl} \|,$$

où

$$g_{ij}^{kl} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega); L^2(\Omega)).$$

Le cas le plus fréquent est celui où g_{ij}^{kl} est l'opérateur de multiplication sur $L^2(\Omega)$ par $g_{ij}^{kl}(x)$ fonction de $L^\infty(\Omega)$. Pour $\vec{u}, \vec{v} \in V$, on pose

$$((\vec{u}, \vec{v})) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(g_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{u}, \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{v}\right)_{L^2(\Omega)^\chi}. \tag{12.20}$$

On suppose que (12.2) et (12.3) ont lieu. L'opérateur Λ est le suivant :

$$\Delta\vec{u} = ((\Delta\vec{u})_1, (\Delta\vec{u})_2, \ldots, (\Delta\vec{u})_\chi), \tag{12.21}$$

où

$$(\Delta\vec{u})_k = \sum_{l=1}^{\chi} D_{kl}u_l, \tag{12.22}$$

où

$$D_{kl} = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g_{ij}^{kl}\frac{\partial}{\partial x_j}\right). \tag{12.23}$$

La théorie générale montre alors que

$$1 \otimes \Delta + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + r(t)\frac{\partial}{\partial t} + s(t)\right) \otimes 1$$

est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} N$ sur $\mathcal{D}'_a \otimes L^2(\Omega)^\chi$. Donc le *système d'équations*

$$D_{11}u_1 + \ldots + D_{1\chi}u_\chi + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_1 + r(t)\frac{\partial}{\partial t}u_1 + s(t)\,u_1\right) = T_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_{\chi 1}u_1 + \ldots + D_{\chi\chi}u_\chi + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_\chi + r(t)\frac{\partial}{\partial t}u_\chi + s(t)\,u_\chi\right) = T_\chi,$$

où $T_i \in \mathcal{D}'_a \hat{\otimes} L^2(\Omega)$ admet dans $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} N$ une solution unique.

Remarque 12.1. — On peut également résoudre certains problèmes aux limites relatifs aux opérateurs différentiels du type suivant :

$$1 \otimes \Delta^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + r(t)\frac{\partial}{\partial t} + s(t)\right) \otimes \Delta + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + r(t)\frac{\partial}{\partial t} + s(t)\right) \otimes 1,$$

($\Delta =$ laplacien) ; on se ramène, à l'aide des opérateurs de Delsarte, au cas traité dans Lions [1], p. 113-115.

13. Calcul des opérateurs A, $\mathcal{A}$, B, $\mathcal{B}$ (I). — Ce qui précède montre l'intérêt qu'il y a à connaître explicitement les opérateurs A, ... ; on va donc donner quelques précisions sur les méthodes de calcul possible.

Récapitulons les formules du n° **6** :

$$(13.1) \qquad A(x, y) = -2\frac{\partial}{\partial x_0} K_3(y, a; a, x),$$

$$(13.2) \qquad \mathcal{A}(x, y) = 2\frac{\partial}{\partial y_0} K_2(a, y; x, a),$$

$$(13.3) \qquad \mathrm{B}(x, y) = 2\frac{\partial}{\partial y} K_3(y, a; a, x),$$

$$(13.4) \qquad \mathcal{B}(x, y) = -2\frac{\partial}{\partial x} K_2(a, y; x, a).$$

Calcul de $K_2(x, y; x_0, y_0)$. — On a

$$K_2(x, y; x_0, y_0) = H_2(x, x_0; y - y_0)$$

et $H_2 = H_2\ (x, x_0; y)$ vérifie

$$(13.5) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}H_2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}H_2 - q(x)\,H_2 = \delta_x(x_0) \otimes \delta_y.$$

Le support de K_2, donc aussi de H_2, est dirigé vers les x négatifs. Effectuons une transformation de Fourier en y pour x fixé. De façon générale, si f est une fonction donnée sur R, à décroissance convenable à l'infini, on pose

$$\mathcal{F}f(y) = \int_R \exp(-2\pi ixy) f(x)\, dx$$

et

$$\overline{\mathcal{F}}f(y) = \int_R \exp(+2\pi ixy) f(x)\, dx$$

Posons

$$(13.6) \qquad \mathcal{F}_y\big(\hat{H}_2(x, x_0; y)\big) = \hat{H}_2(x, x_0; Y).$$

Cette transformée de Fourier existe puisque H_2 est à support compact (et continue par morceaux); on a

$$(13.7)\qquad \frac{d^2}{dx^2}\hat{H}_2+(4\pi^2 Y^2-q(x))\hat{H}_2(x, x_0;\, Y)=\delta_x(x_0),$$

la fonction $x \to \hat{H}_2(x, x_0;\, Y)$ étant à support dans $x \leqq x_0$.

Dans ces conditions, (**13**.7) admet *une solution unique :* si $u_1(x, Y)$ et $u_2(x, Y)$ désignent un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée à (**13**.7), on a

$$(13.8)\quad \hat{H}_2(x, x_0;\, Y)=\frac{1}{W(u_1, u_2)}(u_2(x_0, Y)\,u_1(x, Y)-u_1(x_0, Y)\,u_1(x, Y))$$

pour $x \leqq x_0$ (o pour $x > x_0$), où $W(u_1, u_2)=$ wronskien de u_1 et u_2. On a donc

$$(13.9)\quad H_2(x, x_0;\, y)=\int_R \exp(2\pi i y Y)\,\hat{H}_2(x, x_0;\, Y)\,dY \qquad (x \leqq x_0).$$

Remarques. — **1**. La fonction $y \to H_2(x, x_0;\, Y)$ est à support compact, dans $|y| \leqq x_0 - x$, donc la fonction $Y \to \hat{H}_2(x, x_0;\, Y)$ est prolongeable en une fonction entière de type exponentiel, le type étant $\leqq 2\pi(x_0 - x)$. Ce résultat est facile à vérifier directement; prenons par exemple u_1 et u_2 avec

$$u_1(x_0, Y)=1,\; u_1'(x_0, Y)=0; \qquad u_2(x_0, Y)=0, \qquad u_2'(x_0, Y)=1.$$

Alors

$$W(u_1, u_2)=1, \qquad \hat{H}_2(x, x_0;\, Y)=-u_2(x, Y);$$

des majorations de Titchmarsh [**1**], p. 10, résulte que, pour x demeurant dans un compact, il existe une constante K telle que

$$|u_2(x, Y)| \leqq K \exp(2\pi\,|Y|\,(x_0 - x)),$$

d'où le résultat.

2. De la relation de définition :

$$K_2(x, y_0 + x - x_0;\, x_0, y_0)=\frac{1}{2}$$

résulte, avec $y=0$

$$\int_R \exp(2\pi i(x - x_0)\,Y)\,\hat{H}_2(x, x_0;\, Y)\,dY=\frac{1}{2}.$$

3. La méthode précédente de transformation de Fourier est un cas particulier de la méthode générale de Schwartz pour les équations d'évolution (*cf.* Schwartz [**6**]).

Exemple 13.1. — Prenons $q(x) = -b$, $b \in R$ ou $\in C$. L'équation (13.7) devient

$$\frac{d^2}{dx^2}\hat{H}_2 + (4\pi^2 Y^2 + b)\,\hat{H}_2 = \delta_x(x_0).$$

On a

$$\hat{H}_2(x, x_0;\, Y) = -(4\pi^2 Y^2 + b)^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\sqrt{4\pi^2 Y^2 + b}\,(x - x_0)\right) \qquad (x < x_0),$$

(et o pour $x > x_0$); la formule (13.9) donne alors

(13.10) $$H_2(x, x_0;\, y) = \frac{1}{2} J_0\left(\sqrt{b((x_0 - x)^2 - y^2)}\right).$$

En effet, on a la formule (*cf.* Erdélyi [1], (47), p. 57)

(13.10) $$\int_0^{x_0 - x} J_0\left(\beta\sqrt{(x_0 - x)^2 - y^2}\right) \sin(\lambda y)\, dy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \lambda^2}} \sin(x_0 - x)\sqrt{\beta^2 + \lambda^2},$$

d'où l'on déduit (13.10).

En fait, comme il est immédiat de *vérifier* directement que (13.10) a lieu, on a plutôt là un procédé de démonstration de la formule (13.11)!.

Calcul de $K_3(x, y;\, x_0, y_0)$. — On a

$$K_3(x, y;\, x_0, y_0) = H_3(x, x_0;\, y - y_0);$$

le support de K_3 est dirigé dans le sens des y négatifs. Alors $H_3 = H_3(x, x_0;\, y)$ vérifie

(13.12) $$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_3 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_3 - q^*(x)\, H_3 = \delta_x(x) \otimes \delta y.$$

On ne peut plus cette fois utiliser une transformation de Fourier en y. On utilise la généralisation de la transformation de Fourier donnée par Weyl [1], Stone [1], Titchmarch [1], Kodaira [1], Levitan [1], [2], Coddington [1], Neumark [1] et d'autres. Rappelons ceci : *on suppose que $q(x)$ est réel*; posons :

(13.13) $$M = \frac{d^2}{dx^2} - q^*(x).$$

Soit $\varphi_1(x, \lambda)$ [resp. $\varphi_2(x, \lambda)$] la solution de

(13.14) $$M\varphi + \lambda\varphi = 0,$$

avec

$$\varphi(b, \lambda) = 1, \qquad \varphi'(b, \lambda) = 0 \qquad [\text{resp. } \varphi(b, \lambda) = 0,\ \varphi'(b, \lambda) = 1],$$

b fixé quelconque.

Si f est une fonction continue à support compact, les intégrales

$$(13.15)\qquad T_j f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi_j(x,\lambda)\,dx \quad (j=1,2),$$

ont un sens [et les fonctions $\lambda \to T_j f(\lambda)$ sont des fonctions entières].

Il existe alors (et *en général d'une infinité de façons possibles*) *des mesures* $d\sigma_{j,k}(\lambda)$ $(j, k = 1, 2)$, *telles que l'application* $f \to Tf = (T_1 f, T_2 f)$ *se prolonge par continuité en un isomorphisme de* $L^2(R)$ *sur* $L^2_\sigma(R)$ $\left[L^2_\sigma(R) = \text{espace de Hilbert des vecteurs de carré sommable pour } \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix}\right.$.

On a la formule d'inversion [où la convergence a lieu dans $L^2(R)$]

$$(13.16)\qquad f(x) = \sum_{j,k} \int_{-\infty}^{+\infty} T_j f(\lambda)\,\varphi_k(x,\lambda)\,d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Si f est deux fois continûment différentiable à support compact, on a

$$(13.17)\qquad TMf = -\lambda\,Tf.$$

L'application $f \to Tf$ se prolonge également par continuité aux mesures à support compact. En particulier,

$$T(\delta_x(x_0))(\lambda) = (\varphi_1(x_0,\lambda),\ \varphi_2(x_0,\lambda)).$$

Si donc l'on pose

$$(13.18)\qquad T_x(H_3(x, x_0; y)) = (\Phi_3^1(\lambda, x_0; y),\ \Phi_3^2(\lambda, x_0; y)),$$

on obtient

$$\frac{d^2}{dy^2}\Phi_3^j + \Phi(\lambda, x; y) = -\varphi_j(x_0,\lambda)\,\delta_j \qquad (j=1,2),$$

Φ_3^j étant à support dans $y < 0$, donc

$$\Phi_3^j(\lambda, x_0; y) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_j(x_0,\lambda)\sin(y\sqrt{\lambda}) \qquad \text{pour} \quad y<0$$

(et $=0$ pour $y>0$). Donc

$$(13.19)\qquad H_3(x, x_0; y) = \sum_{j,k}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin(y\sqrt{\lambda})\,\varphi_j(x_0,\lambda)\,\varphi_k(x,\lambda)\,d\sigma_{jk}(\lambda) \quad \text{pour} \quad y<0.$$

On en déduit, par application de (13.2),

$$A(x,y) = 2\sum_{j,k}\int \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin((x-a)\sqrt{\lambda})\,\varphi_j'(a,\lambda)\,\varphi_k(y,\lambda)\,d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Dans de nombreux cas (*cf.*, par exemple, KODAIRA, *loc. cit.*), la mesure $\|\sigma_{jk}\|$ peut se réduire à une seule mesure. Le cas le plus simple correspond au cas complètement continu. Donnons un exemple :

EXEMPLE 13.2. — On prend $q(x) = 4\pi^2 x^2$, $a = 0$, donc $q^\star = q$. Soit $\mathcal{H}_m$, $m \geqq 0$, les fonctions de Hermite (notations de SCHWARTZ [2], p. 117). On a cette fois

$$Tf = \{ (f, \mathcal{H}_m)_{L_2} \mid m \geqq 0 \},$$

suite de carré sommable. La formule (13.16) est

$$f = \sum_{m \geqq 0} (f, \mathcal{H}_m)\, \mathcal{H}_m.$$

On obtient

$$(13.20)\quad H_2(x, x_0; y) = \sum_{m \geqq 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi m}} \mathcal{H}_m(x)\, \mathcal{H}_m(x_0) \sin\left(\sqrt{4\pi m}\, y\right).$$

Nous ignorons si cette série peut s'exprimer en termes finis à l'aide de fonctions spéciales usuelles. La fonction $x \to H_2(x, x_0; y)$ est à support compact $[x_0 + y, x_0 - y]$ $(y < 0)$.

14. Calcul des opérateurs A, $\mathcal{A}$, B, $\mathcal{B}$ (II). — On va maintenant donner une méthode différente de calcul de $A(x, y)$, ..., sans passer par l'intermédiaire des fonctions de Riemann, mais en s'appuyant seulement sur la définition donnée au n° 1 des opérateurs A, ...

CALCUL DE $\mathcal{A}$ ET $\mathcal{B}$. — Considérons les fonctions

$$(14.1)\qquad f_s(x) = \frac{1}{s} \sin(s(x - a)) \qquad (s \in C).$$

On a $f_s \in E_a^2$, donc par définition de $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} D^2 f_s = L \mathcal{A} f_s, \qquad L = D^2 - q,$$

q étant à valeurs réelles ou complexes. Mais $D^2 f_s = -s^2 f_s$, donc si $\mathcal{A} f_s = u$, on a

$$(14.2)\qquad \begin{cases} Lu + s^2 u = 0, \\ u(a) = 0. \qquad u'(a) = f_s'(a) = 1. \end{cases}$$

Désignons par $v_1(x, s^2)$ la solution de (14.2).

On a donc

$$(14.3)\qquad \mathcal{A} f_s(x) = v_1(x, s^2),$$

ou encore

$$(14.3\,bis)\quad \frac{1}{s} \sin(s(x - a)) + \frac{1}{s} \int_0^x \mathcal{A}(x, y) \sin(s(y - a))\, dy = v_1(x, s^2);$$

posons $y - a = \eta$. Par les formules d'inversion de Fourier, on obtient

$$\mathcal{A}(x, a+\eta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(s\eta)\,[s v_1(x, s^2) - \sin(s(x-a)]\,ds,$$

d'où l'on déduit

$$(14.4)\quad \mathcal{A}(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(s(y-a))\,[s v_1(x, s^2) - \sin(s(x-a))]\,ds.$$

Exemple 14.1. — $q(x) = -\exp(2x)$. — On a alors (*cf.* Titchmarsh [1], p. 82).

$$v_1(x, s^2) = \frac{\pi}{2\,\mathrm{sh}(s\pi)}(J_{is}(1)\,J_{-is}(e^x) - J_{-is}(1)\,J_{is}(e^x)).$$

Nous ignorons si l'intégrale correspondante (14.4) est connue.

Considérons maintenant les fonctions

$$(14.5)\qquad g_s(x) = \cos(s(x-a)).$$

La fonction g_s est dans F_a^2, quel que soit s. Donc $\mathcal{B}D^2 g_s = L\mathcal{B}g_s$ et si l'on pose $\mathcal{B}g_s = v$, on en déduit

$$(14.6)\qquad \begin{cases} Lv + s^2 v = 0 \\ v(a) = 0, \qquad v'(a) = 0. \end{cases}$$

Désignons par $v_2(x, s^2)$ la solution de (14.6). On a

$$(14.7)\qquad \mathcal{B}g_s = v_2(x, s^2),$$

c'est-à-dire

$$(14.7\,bis)\quad \cos(s(x-a)) + \int_a^x \mathcal{B}(x, y)\cos(s(y-a))\,dy = v_2(x, s^2).$$

On en déduit par la formule d'inversion de Fourier

$$(14.8)\quad \mathcal{B}(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(s(y-a))\,[s v_2(x, s^2) - \cos(s(x-a))]\,ds.$$

Exemple 14.2. — Prenons $a = 0$, et

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}\left(-\frac{\alpha\cos^2(x\sqrt{\lambda_0})}{1+\alpha\displaystyle\int_0^x \cos^2(t\sqrt{\lambda_0})\,dt}\right)\qquad (\alpha > 0,\ \lambda_0 \text{ réel}).$$

On a alors la formule (*cf.* Gelfand-Levitan [1], p. 343-344)

$$v_2(x, \lambda) = \cos(x\sqrt{\lambda}) - \frac{\alpha\cos(x\sqrt{\lambda_0})}{1+\alpha\displaystyle\int_0^x \cos^2(t\sqrt{\lambda_0})\,dt}\int_0^x \cos(y\sqrt{\lambda_0})\cos(y\sqrt{\lambda})\,dy,$$

d'où

$$\mathcal{B}(x, y) = -\frac{\alpha \cos(x\sqrt{\lambda_0})\cos(\lambda\sqrt{\lambda_0})}{1 + \alpha \int_0^x \cos^2(t\sqrt{\lambda_0})\,dt}.$$

Il n'est pas difficile de faire une vérification directe de ce résultat.

Calcul de A et B. — Soit encore v_1 (resp. v_2) la solution de (14.2) [resp. (14.6)].

On suppose maintenant que $q(x)$ est réel. Puisque $v_1 \in E_a^2$, on a

$$D^2 A v_1 = A L v_1 = -\lambda A v_1,$$

donc

$$A(v_1) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(x - a)\sqrt{\lambda},$$

soit

$$(14.9) \qquad \int_a^x A(x, y)\, v_1(y, \lambda)\, dy = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(x - a)\sqrt{\lambda} - v_1(x, \lambda).$$

Mais si f est continue à support compact dans $x \geqq a$, posons

$$(14.10) \qquad V_1 f(\lambda) = \int_a^\infty f(x)\, v_1(x, \lambda)\, dx;$$

il existe une mesure positive $d\sigma_1(\lambda)$, telle que $f \to V_1 f$ soit un isomorphisme isométrique de $L^2(R)$ sur $L^2_{\sigma_1}(R)$; on a la formule d'inversion

$$(14.11) \qquad f(x) = \int_R v_1(x, \lambda)\, V f_1(\lambda)\, d\sigma_1(\lambda).$$

On déduit donc de (14.7)

$$(14.12) \quad A(x, y) = \int_R \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(x - a)\sqrt{\lambda} - v_1(x, \lambda)]\, v_1(y, \lambda)\, d\sigma_1(\lambda).$$

De la même façon, $B(v_2) = \cos(x - a)\sqrt{\lambda}$; si $V_2 f$ est défini comme $V_1 f$ en remplaçant v_1 par v_2, on a encore une formule analogue à (14.9), avec une deuxième mesure positive $d\sigma_2(\lambda)$, d'où

$$(14.13) \qquad B(x, y) = \int_R [\cos(x - a)\sqrt{\lambda} - v_1(x, \lambda)]\, v_2(y, \lambda)\, d\sigma_2(\lambda).$$

Exemple 14.3. — $q(x) = \dfrac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}$, dans $x \geqq a$, $a > 0$ [on prolonge $q(x)$ de façon quelconque sur R]. On a alors (*cf.* Titchmarsh [1], p. 74)

$$v_1(x, \lambda) = -\frac{\pi}{2}\sqrt{ax}\,[Y_\nu(as)\, J_\nu(xs) - J_\nu(as)\, Y_\nu(xs)] \qquad (s = \sqrt{\lambda}),$$

$$v_2(x, \lambda) = \frac{\pi}{2}\sqrt{ax}\,[Y'_\nu(as)\, J_\nu(xs) - J'_\nu(as)\, Y_\nu(xs)].$$

Pour v_2 on utilise la formule de Weber qui donne

$$(14.15)\quad B(x,y) = -\frac{2}{\pi a}\int_0^\infty \left[\cos(x-a)\sqrt{\lambda} - v^2(x,\lambda)\right] v_2(y,\lambda)\frac{s\,ds}{J_\nu^2(as)+Y_\nu^2(as)}.$$

On peut faire un calcul analogue avec v_1.

15. Variantes diverses : nouveaux problèmes mixtes et problèmes mixtes explosifs.

Théorème 15.1 — *Supposons que Λ soit un opérateur autoadjoint strictement positif*

$$(15.1)\qquad (\Lambda x, x) \geq \alpha \| x \|^2 \qquad (\alpha > 0)$$

pour tout $x \in \mathcal{H}(\Lambda)$. On donne r et $s \in \mathcal{E}$. L'opérateur

$$(15.2)\qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + r\frac{\partial}{\partial t} + s\right)\otimes \Lambda + 1$$

est dans ces conditions un isomorphisme de $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ sur $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}$ quel que soit $a \in R$.

Démonstration. — Par la méthode déjà employée au théorème **9.1**, on transmue l'opérateur (15.2) dans l'opérateur

$$(15.3)\qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\otimes \Lambda + 1.$$

Or cet opérateur est un isomorphisme de $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ sur $\mathcal{D}'_a \hat{\otimes} \mathcal{H}$ ce qui se démontre par la méthode générale donnée dans Lions [1], (chap. II), d'où le théorème.

Comme toujours, cette démonstration fournit en outre un procédé de calcul.

Problèmes mixtes explosifs. — Désignons par $\mathcal{D}'^b_+$ l'espace des distributions définies dans *l'ouvert* $t < b$, à support limité à gauche; soit $\mathcal{D}'^b_a$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'^b_+$ formé des distributions à support dans $t \geq a$.

On désigne par $\mathcal{E}^b$ l'espace des fonctions définies dans l'ouvert $t < b$ et qui y sont indéfiniment différentiables. On donne q dans $\mathcal{E}^b$, et l'on pose

$$(15.4)\qquad L = \frac{d^2}{dx^2} - q(x).$$

Théorème 15.2. — *Pour tout a fixé $< b$, il existe des isomorphismes X de $\mathcal{D}'^b_a$ sur lui-même, tels que*

$$(15.5)\qquad D^2 XT = XLT \quad \textit{pour tout } T \in \mathcal{D}'^b_a.$$

Démonstration. — La démonstration est en tous points analogue à celle du théorème **5.2**. On cherche d'abord une fonction $X(x, y)$, définie pour $a \leq y \leq x$, $a \leq x \leq b$, et deux fois continûment différentiable, telle que si

$$Xf(x) = f(x) + \int_a^x X(x, y) f(y)\, dy,$$

on ait $D^2 Xf = XLf$ pour tout f deux fois continûment différentiable dans $a \leq x < b$, avec $f(a) = 0$ [ou $f'(a) = 0$]. On obtient pour $X(x, y)$ les mêmes conditions que précédemment, mais les problèmes aux limites étant cette fois posés dans $a \leq y \leq x$, $a \leq x < b$. Dans cette région, il y a encore existence et unicité avec les mêmes propriétés. Le théorème en résulte, comme pour le théorème **5.2**.

Appliquons ce résultat aux problèmes appelés dans Lions [1], « problèmes mixtes explosifs ».

L'espace $\mathcal{D}'^b_a$ étant nucléaire, les opérateurs X du théorème **15.2** se définissent pour les distributions vectorielles comme déjà vu. Par ailleurs, on voit comme dans Lions [1], que si Λ vérifie (M) (resp. les hypothèses du théorème **15.1**), l'opérateur

$$1 \otimes \Lambda + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \otimes 1 \qquad \left(\text{resp. } \frac{\partial^2}{\partial t^2} \otimes \Lambda + 1\right)$$

est un isomorphisme de $\mathcal{D}'^b_a \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ sur $\mathcal{D}'^b_a \hat{\otimes} \mathcal{H}$.

Théorème 15.3. — *On suppose que Λ vérifie (M) (resp. les hypothèses du théorème* 15.1.) *On suppose que r et $s \in \mathcal{E}^b$. Dans ces conditions, l'opérateur*

$$1 \otimes \Lambda + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + r\frac{\partial}{\partial t} + s\right) \otimes 1 \tag{15.6}$$

[*resp.*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + r\frac{\partial}{\partial t} + s\right) \otimes \Lambda + 1 \tag{15.7}$$]

est, pour tout $a < b$, un isomorphisme de $\mathcal{D}'^b_a \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ sur $\mathcal{D}'^b_a \hat{\otimes} \mathcal{H}$.

Démonstration. — Supposons que Λ vérifie (M) et considérons l'opérateur (**15.6**). Utilisons les notations de la démonstration du théorème **9.1** et les formules (**9.3**), ..., (**9.6**). Comme l'application $T \to \exp\left(\pm \frac{R}{2}\right) T$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}'^b_a \hat{\otimes} \mathcal{H}$ sur lui-même, tout revient à démontrer le théorème pour l'opérateur

$$1 \otimes \Lambda + L \otimes 1, \tag{15.8}$$

où L est de la forme

$$L = \frac{d^2}{dt^2} - q(t) \qquad (q \in \mathcal{E}^b).$$

On utilise alors le théorème 15.2 pour transmuer l'opérateur (15.8) en

$$1 \otimes \Lambda + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \otimes 1$$

et l'on sait que ce dernier opérateur définit un isomorphisme de $\mathcal{D}_a'^b \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ sur $\mathcal{D}_a'^b \hat{\otimes} \mathcal{H}$, ce qui démontre le théorème.

CHAPITRE II.

Quelques problèmes mixtes singuliers.

1. Position du problème — Considérons un opérateur Λ (comme au chapitre I, n° 8); on va chercher à résoudre des problèmes *mixtes* relatifs aux opérateurs

$$(1.1) \qquad \Lambda + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (2k+1)\, t^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \qquad (k \text{ réel ou complexe}).$$

Si $\Lambda = -\Delta$, Δ étant le laplacien, le problème de Cauchy relativement à cet opérateur a été étudié par de nombreux auteurs (Weinstein, Diaz, Bureau, etc.; *cf.* la bibliographie).

La méthode utilisée dans ce chapitre est, en principe, analogue à celle du chapitre I : on va essayer, par des transmutations convenables, de ramener l'opérateur (1.1) à l'opérateur

$$(1.2) \qquad \Lambda + \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Considérons donc sur R l'opérateur différentiel

$$(1.3) \qquad L_k = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2k+1}{x} \frac{d}{dx}$$

et essayons de transmuer L_k en D^2. Une difficulté supplémentaire, par rapport au chapitre I, est la présence du facteur $\frac{1}{x}$, *lorsque l'on prend* $a = 0$. Si $a > 0$, la méthode du chapitre I est valable sans changement; mais le cas important est $a = 0$. Les notations seront les suivantes : on cherche B_k (resp. $\mathcal{B}_k$) isomorphisme dans des espaces à préciser, tels que

$$(1.4) \qquad D^2 B_k = B_k L_k \qquad (\text{resp. } \mathcal{B}_k D^2 = L_k \mathcal{B}_k).$$

Pour $-1 < \operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}\left(\text{resp. } \operatorname{Re} k > -\frac{1}{2}\right)$, l'opérateur B_k (resp. $\mathcal{B}_k$) est classique : B_k est dérivée du premier ordre de l'opérateur de Sonine, et $\mathcal{B}_k$ est l'opérateur de Poisson (*cf.* DELSARTE [2]). La définition de ces opérateurs sera rappelée dans un moment. Voici comment l'on peut *trouver* ces opérateurs.

D'après ce qu'on a vu au chapitre I, n° 6, il est à prévoir $\left(\text{mais non évident, à cause du facteur } \frac{1}{x}\right)$ que l'opérateur $\mathcal{B}_k$ est obtenu de la façon suivante : on résout dans $y > 0$,

$$\Phi_{xx} - \Phi_{yy} + \frac{2k+1}{x}\Phi_x = 0,$$

avec

$$\Phi(0, y) = g^\star(y), \qquad g^\star(y) = \{g(-y) \quad \text{si} \quad y < 0, g(y) \text{ si } \quad y > 0]$$

et

$$\Phi_x(0, y) = 0.$$

Si ce problème admet une solution, alors

$$\Phi(x, 0) = \mathcal{B}_k g(x).$$

Pour résoudre ce problème, on pose

$$s\sqrt{2} = y + x, \qquad t\sqrt{2} = y - x.$$

Alors posons

$$\Phi\left(\frac{s-t}{\sqrt{2}}, \frac{s+t}{\sqrt{2}}\right) = u(s, t).$$

La fonction $u(s, t)$ est solution de

$$u_{st} - \frac{k+\frac{1}{2}}{s-t}u_s + \frac{k+\frac{1}{2}}{s-t}u_t = 0$$

$$u(s, s) = g^\star(s\sqrt{2}),$$

$$u_s - u_t|_{s=t} = 0.$$

Pour $\operatorname{Re} k > -\frac{1}{2}$, ce problème admet *la* solution

$$u(s, t) = \frac{\Gamma(2\beta)}{(\Gamma(\beta))^2}\int_0^1 g^\star((s + (t-s)\rho)\sqrt{2})(1-\rho)^{\beta-1}\rho^{\beta-1}\,d\rho\left(\beta = k + \frac{1}{2}\right)$$

(*cf.* DARBOUX [1]; LEVITAN [1], form. (5.11), p. 119).

On a alors

$$\Phi(x, 0) = \mathcal{B}_k f(x) = u\left(\frac{x}{\sqrt{2}}, -\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(2\beta)}{(\Gamma(\beta))^2}\int_0^1 g^\star(x - 2x\rho)(1-\rho)^{\beta-1}\rho^{\beta-1}\,d\rho.$$

Posons $1 - 2\rho = r$. Alors

$$\Phi(x, 0) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)^2}\frac{1}{2^{2\beta-2}}\int_0^1 (1-r^2)^{\beta-1} g(rx)\,dr.$$

Comme $\Phi(0, 0) = g(0)$, on peut écrire

$$\mathcal{B}_k f(x) = \frac{2\Gamma(k+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 (1-t^2)^{k-\frac{1}{2}} f(tx)\,dt.$$

On trouve ainsi l'opérateur de Poisson (*cf.* Delsarte [2], form. (11), p. 267).

On peut rechercher B_k de la même façon. Mais pour introduire tout de suite un autre aspect de la question, on va calculer (formellement) B_k comme inverse de $\mathcal{B}_k$. Pour cela, posons $tx = y$ dans l'expression de $\mathcal{B}_k f$. On a

$$\mathcal{B}_k f(x) = \frac{2\Gamma(k+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{x^{2k}}\int_0^x (x^2-y^2)^{k-\frac{1}{2}} f(y)\,dy = g(x).$$

Posons maintenant $x^2 = \xi$, $y^2 = \eta$. Il vient

$$g(\sqrt{\xi}) = \frac{\Gamma(k+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{\xi^k}\int_0^\xi (\xi-\eta)^{k-\frac{1}{2}}\frac{f(\sqrt{\eta})}{\sqrt{\eta}}\,d\eta,$$

donc, avec les notations de Schwartz [1], p. 43 et [2], p. 30),

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+1)}\xi^k g(\sqrt{\xi}) = Y_{k+\frac{1}{2}} \star \frac{f(\sqrt{\eta})}{\sqrt{\eta}}$$

$\left(\text{où la fonction } \dfrac{f(\sqrt{\eta})}{\sqrt{\eta}} \text{ est considérée sur } R, \text{ prolongée par } 0 \text{ pour } \eta < 0\right).$

Mais, Schwartz (*loc. cit.*) a démontré que

$$Y_{k+\frac{1}{2}} \star Y_{-k+\frac{1}{2}} = \delta,$$

d'où

$$\frac{f(\sqrt{\eta})}{\sqrt{\eta}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(-k-\frac{1}{2}\right)}\int_0^\eta (\eta-\xi)^{-k-\frac{3}{2}}\xi^k g(\sqrt{\xi})\,d\xi,$$

d'où encore

$$f(y)=\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(-k-\frac{1}{2}\right)}y\int_0^y (y^2-x^2)^{-k-\frac{3}{2}}x^{2k+1}g(x)\,dx.$$

Ce calcul est formel. L'intégrale ci-dessus converge si

$$-1<\operatorname{Re}k<-\frac{1}{2}.$$

On peut donc penser que, dans ces conditions, l'opérateur B_k est donné par

$$B_kf(x)=\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(-k-\frac{1}{2}\right)}x\int_0^x (x^2-y^2)^{-k-\frac{3}{2}}y^{2k+1}f(y)\,dy.$$

Cet opérateur est l'opérateur dérivée première de l'opérateur de Sonine.

Le fait que l'on puisse donner un sens à Y_k quel que soit k par prolongement analytique, laisse prévoir que l'on pourra également prolonger analytiquement en k les opérateurs B_k et $\mathcal{B}_k$. Ce problème sera étudié en détail dans la suite. On va pour cela commencer par étudier brièvement les opérateurs B_k et $\mathcal{B}_k$ pour $-1<\operatorname{Re}k<-\frac{1}{2}$ et $\operatorname{Re}k>-\frac{1}{2}$ respectivement.

Remarque 1.1. — On peut essayer d'introduire des opérateurs du type $\mathcal{A}_k$ (avec les notations du chapitre I). Pour cela, il faut résoudre

$$\Phi_{xx}-\Phi_{yy}+\frac{2k+1}{x}\Phi_x=0,$$

avec les conditions aux limites

$$\Phi(0,y)=0,\qquad \Phi_x(0,y)=g(y)\quad (y>0),\qquad \Phi(x,0)=0.$$

Mais ce problème n'a pas de solution.

2. Opérateur B_k, $-1<\operatorname{Re}k<-\frac{1}{2}$. — On suppose dans ce numéro que l'on a

$$(2.1)\qquad -1<\operatorname{Re}k<-\frac{1}{2}.$$

On désigne par $\mathcal{E}^m(x\geqq 0)$ l'espace des fonctions m fois continûment différentiables sur $x\geqq 0$, muni de la topologie habituelle. Pour $f\in\mathcal{E}^0(x\geqq 0)$, on pose

$$(2.2)\qquad B_kf(x)=b_kx\int_0^x (x^2-y^2)^{-k-\frac{3}{2}}y^{2k+1}f(y)\,dy=\int_0^x B_k(x,y)f(y)\,dy,$$

où b_k est une constante (dépendant de k) à déterminer, et

$$B_k(x, y) = b_k x y^{2k+1}(x^2 - y^2)^{-k-\frac{3}{2}}.$$

Si l'on pose $y = tx$, il vient

$$(2.3) \qquad B_k f(x) = b_k \int_0^1 t^{2k+1}(1 - t^2)^{-k-\frac{3}{2}} f(tx)\, dt.$$

On détermine b_k par la condition

$$(2.4) \qquad B_k f(0) = f(0),$$

d'où

$$(2.5) \qquad b_k = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma\left(-k - \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}}$$

On désignera par F^2 l'espace (F_0^2 avec les notations du chapitre I) des fonctions de $\mathcal{E}^2(x \geqq 0)$, telles que $f'(0) = 0$.

Vérifions la

Proposition 2.1. — *On suppose que* (**2.1**) *a lieu. Pour tout* $f \in F^2$, *on a* $B_k f \in F^2$; *l'application* $f \to B_k$ *est continue de* f^2 *dans lui-même. Pour tout* $f \in F^2$, *on a la relation*

$$(2.6) \qquad D^2 B_k f = B_k L_k f.$$

Démonstration :

a. On déduit de (2.3)

$$DB_k f(x) = b_k \int_0^1 t^{2k+2}(1 - t^2)^{-k-\frac{3}{2}} f'(tx)\, dt,$$

ce qui montre que ($B_k f'$) est continue, et que

$$(B_k f)'(0) = cf'(0) = 0, \qquad \text{car} \quad f \in F^2.$$

On a ensuite

$$(2.7) \qquad D^2 B_k f(x) = b_k \int_0^1 t^{2k+3}(1 - t^2)^{-k-\frac{3}{2}} f''(tx)\, dt,$$

dans $B_k f$ est dans F^2.

L'application $f \to B_k f$ est continue de $\mathcal{E}^0(x \geqq 0)$ dans lui-même; de la même façon elle est continue de F^2 dans lui-même.

b. On a par ailleurs

$$(2.8) \qquad B_k L_k f(x) = b_k \int_0^1 t^{2k+1}(1 - t^2)^{-k-\frac{3}{2}} \left(f''(tx) + \frac{2k+1}{tx} f'(tx)\right) dt$$

[ce qui a un sens pour $f \in F^2$ car alors $L_k f$ est dans $\mathcal{E}^0(x \geq 0)$]. On déduit de (2.7) et (2.8) que

$$X_k = \frac{1}{b_k}(B_k L_k f(x) - D^2 B_k f(x))$$

$$= \int_0^1 t^{2k+1}(1-t^2)^{-k-\frac{3}{2}}\left((1-t^2)f''(tx) + \frac{2k+1}{tx}f'(tx)\right)dt$$

$$= \int_0^1 t^{2k+1}(1-t^2)^{-k-\frac{1}{2}}f''(tx)\,dt$$

$$+ (2k+1)\int_0^1 t^{2k+1}(1-t^2)^{-k-\frac{3}{2}}\frac{f'(tx)}{tx}\,dt.$$

On peut calculer la première intégrale par parties; grâce au fait que $f'(0) = 0$, on obtient

$$-\int_0^1 \frac{f'(tx)}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{t^{2k+1}}{(1-t^2)^{k+\frac{3}{2}}}\right)dt,$$

d'où aussitôt $X_k = 0$, ce qui démontre la proposition.

REMARQUE 2.1. — Si l'on pose avec DELSARTE et LEVITAN

$$j_k(t) = 2^k\Gamma(k+1)t^{-k}J_k(t), \tag{2.9}$$

on a une fonction de F^2, qui vérifie

$$L_k j_k(sx) + s^2 j_k(sx) = 0. \tag{2.10}$$

Si l'on applique alors (2.6) avec $f = j_k(sx)$, on obtient

$$D^2 B_k j_k = -s^2 B_k j_k \qquad \text{et} \qquad B_k j_k \in F^2,$$

donc

$$B_k j_k(sx) = \int_0^x B_k(x, y) j_k(sy)\,dy = \cos(sx). \tag{2.11}$$

Cette égalité équivaut à dire que la transformée de Hankel d'ordre k de la fonction nulle pour $y < x$ et égale à

$$\frac{2^{k+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-k-\frac{1}{2}\right)}xy^{k+\frac{1}{2}}(x^2-y^2)^{-k-\frac{3}{2}}$$

est égale à $s^{k+\frac{1}{2}}\cos(sx)$ de sorte que la formule d'inversion de Hankel (*cf.*, par exemple, SNEDDON [1]) donne

$$(2.12)\qquad \int_0^\infty \sqrt{sy}\, J_k(sy)\, s^{k+\frac{1}{2}} \cos(sx)\, ds$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < y, \\ \dfrac{2^{k+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-k\dfrac{1}{2}\right)} \dfrac{xy^{k+\frac{1}{2}}}{(x^2-y^2)^{k+\frac{3}{2}}} & \text{si } x > y. \end{cases}$$

On retrouve la formule (**28**), p. 36 de ERDELYI [2].

REMARQUE 2.2. — L'opérateur B_k n'est pas un isomorphisme de F^2 sur lui-même. On verra en effet plus loin que $\mathcal{B}_k B_k \varphi = \varphi$ pour tout $\varphi \in \mathcal{E}(x \geqq 0)$ telle que $\varphi^{(2n+1)}(0) = 0$ pour tout n, et ceci pour tout k (B_k et $\mathcal{B}_k$ étant alors définis par prolongement analytique); or, pour k tel que $-1 < \operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}$, $\mathcal{B}_k f$ est défini sur F^2, mais n'applique pas F^2 dans lui-même. Si l'on veut que les opérateurs B_k soient des isomorphismes, il semble indispensable de les considérer sur des espaces de fonctions indéfiniment différentiables (au voisinage de l'origine).

REMARQUE 2.3. — OPÉRATEUR $\overline{B}_k$. — On aura besoin de l'opérateur de Sonine (noté A dans DELSARTE) défini comme suit : si $f \in \mathcal{E}^0(x \geqq 0)$, on pose

$$(2.13)\qquad \overline{B}_k f(x) = \overline{b}_k \int_0^x y^{2k+1}(x^2-y^2)^{-k-\frac{1}{2}} f(y)\, dy,$$

où

$$(2.14)\qquad \overline{b}_k = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(-k+\dfrac{1}{2}\right)}.$$

L'intégrale (2.13) converge lorsque

$$(2.15)\qquad -1 < \operatorname{Re} k < \frac{1}{2}$$

Posant $y = tx$, il vient

$$(2.16)\qquad \overline{B}_k f(x) = x\overline{b}_k \int_0^1 t^{2k+1}(1-t^2)^{-k-\frac{1}{2}} f(tx)\, dt.$$

On a donc $\overline{B}_k f(0) = 0$. Si l'on suppose que $-1 < \operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}$, on peut dériver (2.13) en x; on obtient

$$\frac{d}{dx}\overline{B}_k f(x) = -2\left(k+\frac{1}{2}\right)\overline{b}_k x \int_0^x y^{2k+1}(x^2-y^2)^{-k-\frac{3}{2}} f(y)\, dy,$$

donc si $-1 < \operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}$, on a

$$(2.17)\qquad \frac{d}{dx}\overline{B}_k f = B_k f \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{E}^0(x \geqq 0).$$

3. **Opérateur** $\mathcal{B}_k$, $\operatorname{Re} k > -\frac{1}{2}$. — On suppose dans ce numéro que k est un nombre complexe qui vérifie

$$(3.1)\qquad \operatorname{Re} k > -\frac{1}{2}.$$

Pour tout $f \in \mathcal{E}^0(x \geqq 0)$, on pose

$$(3.2)\qquad \mathcal{B}_k f(x) = \beta_k x^{-2k} \int_0^x f(y)(x^2 - y^2)^{k-\frac{1}{2}}\, dy = \int_0^x \mathcal{B}_k(x, y) f(y)\, dy,$$

avec

$$\mathcal{B}_k(x, y) = \beta_k x^{-2k}(x^2 - y^2)^{k-\frac{1}{2}},$$

$$\beta_k = \frac{2\Gamma(k+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}.$$

Si l'on pose $y = tx$, on obtient

$$(3.3)\qquad \mathcal{B}_k f(x) = \beta_k \int_0^1 f(tx)(1 - t^2)^{k-\frac{1}{2}}\, dt,$$

de sorte que

$$(3.4)\qquad \mathcal{B}_k f(0) = f(0).$$

Vérifions la

PROPOSITION 3.1. — *On suppose que* (3.1) *a lieu. Si* $f \in F^2$, *alors* $\mathcal{B}_k f \in F^2$. *L'application* $f \to \mathcal{B}_k f$ *est continue de* F^2 *dans lui-même. Pour tout* $f \in F^2$, *on a*

$$(3.5)\qquad \mathcal{B}_k D^2 f = L_k \mathcal{B}_k f$$

[cette formule est donnée dans DELSARTE [2], p. 269, en supposant f dans $\mathcal{E}^3(x \geqq 0)$].

DÉMONSTRATION. — On déduit de (3.3) que

$$(\mathcal{B}_k f)''(x) = \beta_k \int_0^1 t^2(1 - t^2)^{k-\frac{1}{2}} f''(tx)\, dt,$$

donc $\mathcal{B}_k f$ est dans F^2 et il est immédiat que l'application $f \to \mathcal{B}_k f$ est continue. Posons

$$\mathcal{X}_k = \frac{1}{\beta_k}(L_k \mathcal{B}_k f - \mathcal{B}_k D^2 f).$$

Il vient

$$\mathcal{X}_k = -\int_0^1 (1-t^2)^{k+\frac{1}{2}} f''(tx)\,dt + (2k+1)\int_0^1 tx^{-1}(1-t^2)^{k-\frac{1}{2}} f'(tx)\,dt.$$

On peut intégrer par parties la première intégrale; comme $f'(0) = 0$ et que $\operatorname{Re} k > -\frac{1}{2}$, on obtient

$$\int_0^1 f'(tx)\frac{1}{x}\frac{d}{dt}(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}}\,dt,$$

d'où $\mathcal{X}_k = 0$ ce qui démontre la proposition.

Remarque 3.1. — On voit, de façon analogue à la remarque 2.1, que

$$\mathcal{B}_k(\cos(sx)) = j_k(sx).$$

On en déduit la formule (30), p. 37 de Erdelyi [2].

Remarque 3.2. — L'opérateur $\mathcal{B}_k$ n'est pas un isomorphisme de F^2 sur lui-même (*cf.* Remarque 2.2).

4. Relations entre $\mathcal{B}_k$ et $\overline{B}_k$. — On suppose dans ce numéro que l'on a $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} k < \frac{1}{2}$, de sorte que $\mathcal{B}_k$ et $\overline{B}_k$ sont tous deux définis.

On vérifie facilement la

Proposition 4.1. — *Si* $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} k < \frac{1}{2}$, *on a, pour tout* $f \in \mathcal{E}^0(x \geqq 0)$

$$\overline{B}_k \mathcal{B}_k f(x) = \int_0^x f(y)\,dy. \tag{4.1}$$

On en déduit

Corollaire 4.1. — *Sous les hypothèses de la proposition* 4.1, *on a, pour tout* $f \in \mathcal{E}^0(x \geqq 0)$

$$(D\overline{B}_k)\mathcal{B}_k f = f. \tag{4.2}$$

On vérifie également le résultat suivant :

Proposition 4.2. — *On suppose que* $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} k < \frac{1}{2}$. *Pour tout* f *dans* $\mathcal{E}^1(x \geqq 0)$, *on a*

$$\mathcal{B}_k(D\overline{B}_k f) = f. \tag{4.3}$$

On va, dans les numéros suivants, prolonger analytiquement en k les opérateurs B_k et $\mathcal{B}_k$; les relations entre ces opérateurs prolongés résulteront alors immédiatement des résultats de ce numéro.

5. Prolongement de l'opérateur B_k. — Tout va reposer sur la formule suivante, de vérification immédiate :

$$(5.1)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{t^{2k-\lambda}}{(1-t^2)^{k-\frac{\lambda}{2}}}\right)=(2k-\lambda)\frac{t^{2k-\lambda-1}}{(1-t^2)^{k-\frac{\lambda}{2}+1}}.$$

Pour tout $f\in\mathcal{E}(x\geqq 0)=\mathcal{E}^\infty(x\geqq 0)$, on pose

$$(5.2)\qquad \begin{cases} T_1f(t,x)=D_t(tf(tx)),\\ T_2f(t,x)=D_t(t^3\mathrm{T}_1f(t,x)),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ T_nf(t,x)=D_t(t^3\mathrm{T}_{n-1}f(tx)).\end{cases}$$

LEMME 5.1. — *On a*

$$(5.3)\qquad T_nf(t,x)=3t^2T_{n-1}f(t,x)+t^3D_tT_{n-1}f(t,x)$$

et

$$(5.4)\qquad T_nf(t,x)=t^{2n-2}g_n(t,x),$$

où $g_n(t,x)$ est indéfiniment différentiable de t et x, $t\in[0,1]$ et $x\in[0,+\infty[$.

DÉMONSTRATION. — La relation (5.3) est évidente. Démontrons la relation (5.4) par récurrence. Si $n=1$, le résultat est vrai. Admettons donc que

$$T_{n-1}f(t,x)=t^{2n-4}g_{n-1}(t,x),$$

$g_{n-1}(t,x)$ étant indéfiniment différentiable. La formule (5.3) donne alors (5.4), avec

$$g_n(t,x)=(2n-1)g_{n-1}(t,x)+tD_tg_{n-1}(t,x),$$

ce qui démontre le lemme.

COROLLAIRE 5.1. — *L'intégrale*

$$(5.5)\qquad \int_0^1 t^{2k-(2n-3)}(1-t^2)^{-k+\frac{2n-3}{2}}T_nf(t,x)\,dt$$

converge pour

$$(5.6)\qquad -1<\operatorname{Re}k<n-\frac{1}{2}.$$

Démontrons maintenant la

Proposition 5.1. — *On suppose que* $-1 < \operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}$. *Pour tout* f *dans* $\mathcal{E}(x \geqq 0)$ *on a la relation*

$$(5.7)\quad B_k f(x) = (-1)^n \frac{b_k}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\ldots(2k-(2n-3))} \times \int_0^1 \frac{t^{2k-(2n-3)}}{(1-t^2)^{k-\frac{2n-3}{2}}} T_n f(t, x)\, dt.$$

Démonstration. — Rappelons que

$$B_k f(x) = b_k \int_0^1 t^{2k+1}(1-t^2)^{-k-\frac{3}{2}} f(tx)\, dt$$

On va démontrer (5.7) par récurrence sur n.

Si $n=1$, on utilise (5.1), avec $k+\frac{3}{2} = k - \frac{\lambda}{2} + 1$, donc $\lambda = -1$. Alors

$$\frac{t^{2k}}{(1-t^2)^{k+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(2k+1)} \frac{d}{dt}\left(\frac{t^{2k+1}}{(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}}}\right),$$

de sorte que

$$B_k f(x) = \frac{b_k}{(2k+1)} \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{t^{2k+1}}{(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}}}\right) t f(tx)\, dt.$$

On intègre par parties : puisque $\operatorname{Re} k + \frac{1}{2} < 0$, et $2\operatorname{Re} k + 2 > 0$, la partie intégrée est nulle; il reste

$$B_k f(x) = \frac{b_k}{(2k+1)} \int_0^1 \frac{t^{2k+1}}{(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}}} T_1 f(t, x)\, dt,$$

ce qui montre (5.7) lorsque $n=1$.

Admettons la formule jusqu'à $(n-1)$, donc

$$(5.8)\quad B_k f(x) = (-1)^{n-1} \frac{b_k}{(2k+1)(2k-1)\ldots(2k-(2n-5))} \times \int_0^1 \frac{t^{2k-(2n-5)}}{(1-t^2)^{k-\frac{2n-5}{2}}} T_{n-1} f(t, x)\, dt$$

et utilisons (5.1) avec

$$k - \frac{2n-5}{2} = k - \frac{\lambda}{2} + 1, \qquad \text{donc}\quad \lambda = 2n-3.$$

On peut écrire l'intégrale qui entre dans (5.8) sous la forme

$$\frac{1}{(2k-(2n-3))}\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{t^{2k-(2n-3)}}{(1-t^2)^{k-\frac{2n-3}{2}}}\right) t^3\, T_{n-1}f(t,x)\,dt,$$

d'où la proposition en intégrant par parties.

On pose, pour tout entier positif n,

$$(5.9)\quad \begin{cases} B_k^n f(x) = b_k^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2k-(2n-3)}}{(1-t^2)^{k-\frac{2n-3}{2}}}\, T_n f(t,x)\,dt, \\ b_k^n = (-1)^n \dfrac{b_k}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\ldots(2k-(2n-3))}. \end{cases}$$

L'intégrale (5.9) converge lorsque l'on a (5.6).

Proposition 5.2. — *On suppose que* (5.6) *a lieu. Alors* $B_k^n f \in \mathcal{E}(x \geqq 0)$ *pour tout* $f \in \mathcal{E}(x \geqq 0)$. *L'application* $f \to B_k^n$ *est continue de* $\mathcal{E}(x \geqq 0)$ *dans lui-même. L'application* $k \to B_k^n$ *est holomorphe de la bande définie par* (5.6) *dans* $\mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{E})$.

Démonstration. — On rappelle que $b_k = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(-k-\frac{1}{2}\right)}$, donc b_k est une fonction entière de k, nulle pour

$$k = 1,\quad -2,\quad -3,\quad \ldots \qquad \text{et pour} \qquad k = -\frac{1}{2},\quad 1-\frac{1}{2},\quad 2-\frac{1}{2},\quad \ldots.$$

Il en résulte que b_k^n est une fonction entière de k. Lorsque (5.6) a lieu, l'intégrale (5.9) converge. Comme $(t, x) \to T_n f(t, x)$ est une fonction indéfiniment différentiable dans $[0,1] \times [0, +\infty[$, $B_k^n f$ est dans $\mathcal{E}$, et $f \to \mathcal{B}_k^n f$ est continue de $\mathcal{E}$ dans lui-même. Il reste à démontrer que l'application $k \to B_k^n$ est holomorphe de la bande définie par (5.6) dans $\mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{E})$. Pour cela, il suffit de vérifier (*cf.* **Grothendieck** [3], Remarque 2, p. 40) :

(i) $k \to B_k^n$ est continue de la bande (5.6) dans $\mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{E})$;

(ii) Quel que soit $x \geqq 0$ et quel que soit p entier $\geqq 0$, la fonction $k \to D_x^p B_k^n f(x)$ est holomorphe.

La vérification de ces deux points est immédiate, ce qui démontre complètement la proposition.

Corollaire 5.1. — *Si l'on donne deux entiers positifs* n *et* n' *les deux fonctions* B_k^n *et* $B_k^{n'}$ *coïncident dans l'intersection des bandes de définition.*

Démonstration. — En effet, on a là deux fonctions holomorphes, qui coïncident (entre elles et avec B_k) dans la partie $-1 < \operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}$ (prop. 5.1) commune à toutes les bandes du type (5.6).

CONSÉQUENCE. — Les diverses fonctions $B_k^n (n > 0)$, définissent une fonction holomorphe unique dans $\operatorname{Re} k > -1$, fonction qui prolonge analytiquement B_k; on désigne par B_k la fonction ainsi prolongée [holomorphe de $\operatorname{Re} k > -1$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E})$].

REMARQUE 5.1. — *L'opérateur $B_{-\frac{1}{2}}$ est égal à l'identité.*

En effet, la formule (5.7), pour $n = 1$, donne

$$B_k f(x) = -\frac{b_k}{(2k+1)} \int_0^1 \frac{t^{2k+1}}{(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}}} \frac{d}{dt}(tf(tx))\, dt.$$

Si $k = -\frac{1}{2}$, $-\dfrac{b_k}{(2k+1)}$ vaut 1, et

$$B_{-\frac{1}{2}} f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tf(tx))\, dt = f(x),$$

REMARQUE 5.2. — En réalité, la proposition 5.1 est valable sous la seule hypothèse que $T_n f(t, x)$ existe et est une fonction continue, donc que f est dans $\mathcal{E}^n (x \geq 0)$. Mais si l'on veut pouvoir donner un sens à $B_k f$ pour tout k avec $\operatorname{Re} k > -1$, il faut supposer que f est indéfiniment différentiable.

On va maintenant donner une autre formule, variante de (5.7), et permettant d'effectuer le prolongement analytique de B_k pour $\operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}$.

On pose

$$(5.10)\qquad \begin{cases} U_1 f(t, x) = D_t((1-t^2)^{\frac{1}{2}} f(tx)), \\ U_2 f(t, x) = D_t((1-t^2)^{\frac{3}{2}} U_1 f(t, x)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U_n f(t, x) = D_t((1-t^2)^{\frac{3}{2}} U_{n-1} f(t, x)), \end{cases}$$

LEMME 5.2. — *On a, pour tout $f \in \mathcal{E}(x \geq 0) = \mathcal{E}$,*

$$(5.11)\qquad U_n f(t, x) = (1-t^2)^{\frac{3}{2}} D_t U_{n-1} f(t, x) - 3t(1-t^2)^{\frac{1}{2}} U_{n-1} f(t, x)$$

et

$$(5.12)\qquad U_n f(t, x) = (1-t^2)^{\frac{n-2}{2}} h_n(t, x),$$

où $h_n(t, x)$ est indéfiniment différentiable dans $[0, 1] \times [0, +\infty[$.

Démonstration. — La relation (5.11) est évidente. Démontrons (5.12) par récurrence. C'est vrai si $n=1$. Admettons (5.12) pour $n-1$. La relation (5.11) donne alors (5.12), avec

$$h_n(t,x) = -nt\,h_{n-1}(t,x) + (1-t^2)\,D_t h_{n-1}(t,x),$$

d'où le lemme.

Corollaire 5.3. — *L'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{t^{2k+n+1}}{(1-t^2)^{k+\frac{n+1}{2}}}\,U_n f(t,x)\,dt \tag{5.13}$$

est convergente lorsque

$$-1-\frac{n}{2} < \operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}. \tag{5.14}$$

Démontrons maintenant la

Proposition 5.3. — *On suppose que* $-1 < \operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}$. *Pour tout* f *dans* $\mathcal{E}$, *on a la relation*

$$\begin{aligned} B_k f(x) = (-1)^n &\frac{b_k}{(2k+2)(2k+3)\ldots(2k+n+1)} \\ &\times \int_0^1 \frac{t^{2k+n+1}}{(1-t^2)^{k+\frac{n+1}{2}}}\,U_n f(t,x)\,dt. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Démonstration. — On récurre sur n. Si $n=1$, on utilise (5.1) avec

$$2k+1 = 2k-\lambda-1, \qquad \text{donc} \quad \lambda = -2.$$

Alors

$$\frac{t^{2k+1}}{(1-t^2)^{k+2}} = \frac{1}{(2k+2)}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{t^{2k+2}}{(1-t^2)^{k+1}}\right)$$

de sorte que

$$B_k f(x) = \frac{b_k}{(2k+2)}\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{t^{2k+2}}{(1-t^2)^{k+1}}\right)(1-t^2)^{\frac{1}{2}} f(tx)\,dt.$$

Comme l'on a $-1 < \operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}$, on obtient

$$B_k f(x) = -\frac{b_k}{(2k+2)}\int_0^1 \frac{t^{2k+2}}{(1-t^2)^{k+1}}\,U_1 f(t,x)\,dt,$$

ce qui démontre la formule dans le cas $n=1$.

Admettons la formule jusqu'à $n-1$; donc

$$(5.16)\qquad B_k f(x) = \frac{(-1)^{n-1} b_k}{(2k+2)(2k+3)\dots(2k+n)} \times \int_0^1 \frac{t^{2k+n}}{(1-t^2)^{k+\frac{n}{2}}} U_{n-1} f(t, x)\, dt.$$

On utilise (5.1), avec

$$2k+n = 2k-\lambda-1, \qquad \text{donc} \quad \lambda = -(n+1).$$

On peut alors écrire l'intégrale intervenant dans (5.16) sous la forme

$$-\frac{1}{(2k+n+1)} \int_0^1 \frac{t^{2k+n+1}}{(1-t^2)^{k+\frac{n+1}{2}}} D_t\Big((1-t^2)^{\frac{3}{2}} U_{n-2} f(t, x)\Big)\, dt,$$

d'où la proposition.

On pose

$$(5.17)\qquad \begin{cases} {}^n B_k f(x) = {}^n b_k \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2k+n+1}}{(1-t^2)^{k+\frac{n+1}{2}}} U_n f(t, x)\, dt, \\ {}^n b_k = (-1)^n \dfrac{b_k}{(2k+2)(2k+3)\dots(2k+n+1)}. \end{cases}$$

L'intégrale (5.17) converge lorsque l'on a (5.14).

La fonction ${}^n b_k$ est une fonction méromorphe de k, avec des pôles aux points :

$$(5.18)\qquad k = -\frac{3}{2}, \quad -\frac{5}{2}, \quad \dots, \quad \text{dans la bande (5.14).}$$

Montrons maintenant la

PROPOSITION 5.4. — *Pour k tel que* (5.14) *ait lieu, et différent des valeurs définies en* (5.18), ${}^n B_k f \in \mathcal{E}$ *pour tout* $f \in \mathcal{E}$; *l'application* $f \to {}^n B_k f$ *est continue de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}$; *l'application* $k \to {}^n B_k$ *est méromorphe de la bande définie par* (5.14) *dans* $\mathcal{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E})$, *les pôles étant situés aux points définis par* (5.18).

DÉMONSTRATION. — Lorsque (5.14) a lieu, et que ${}^n b_k$ est fini, il est immédiat que ${}^n B_k f$ est dans $\mathcal{E}$ et que l'application $f \to {}^n B_k f$ est continue de $\mathcal{E}$ dans lui-même. Il reste à démontrer que la fonction $k \to \dfrac{{}^n B_k}{{}^n b_k}$ est holomorphe dans la bande définie par (5.14) à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E})$; ceci se démontre comme le résultat analogue dans la proposition 5.2.

Corollaire 5.4. — *Si n et n' sont deux entiers positifs, les deux fonctions ${}^nB_k$ et ${}^{n'}B_k$ coïncident dans la partie commune des bandes de définition.*

Par conséquent, les diverses fonctions ${}^nB_k$ définissent une même fonction méromorphe dans $\operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}$, prolongeant B_k; on la note encore B_k. On a finalement obtenu le

Théorème 5.1. — *La fonction $k \to B_k$ définie dans $-1 < \operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}$ par* (2.2), *est prolongeable analytiquement en une fonction méromorphe, notée $k \to B_k$, dans le plan entier, à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ $[\mathcal{E} = \mathcal{E}(x \geqq 0)]$; les pôles de cette fonction sont situés aux points $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{2}, \ldots$. Le prolongement de B_k est donné explicitement par les formules* (5.7) *et* (5.15).

Les propriétés de B_k pour tout k découlent maintenant facilement des propriétés de B_k dans la bande $-1 < \operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}$.

Espaces $\mathcal{E}_*$ et $\mathcal{D}_0$. — On désigne par $\mathcal{E}_*$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}(x \geqq 0) = \mathcal{E}$, formé des fonctions f telles que

$$f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad \text{pour tout } n \geqq 0;$$

on désigne par $\mathcal{D}_0$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ formé des fonctions f nulles ainsi que toutes leurs dérivées à l'origine.

Ceci posé, lorsque k vérifie $-1 < \operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}$, on a

$$D^p B_k f(x) = b_k \int_0^1 t^{2k+1+p}(1-t^2)^{-k-\frac{3}{2}} f^{(p)}(tx)\, dt,$$

d'où

$$D^p B_k f(0) = b_{k,p} f^{(p)}(0), \tag{5.19}$$

avec

$$b_{k,p} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(k + \frac{p}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma(k+1)}. \tag{5.20}$$

Il en résulte que :

a. si p est pair, $k \to b_{k,p}$ est une fonction entière;

b. si p est impair, $k \to b_{k,p}$ est une fonction méromorphe, dont les pôles appartiennent à l'ensemble $\left\{-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots\right\}$.

Il en résulte, par prolongement analytique, que la relation (5.19) a lieu pour tout k non situé dans l'ensemble exceptionnel $\left\{-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots\right\}$. Donc, pour tout k non exceptionnel, B_k est dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_*; \mathcal{E}_*)$ et dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_0; \mathcal{D}_0)$. On voit donc déjà, en appliquant le théorème 5.1, que la fonction $k \to B_k$ est méromorphe à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_*; \mathcal{E}_*)$ et $\mathcal{L}(\mathcal{D}_0; \mathcal{D}_0)$. Mais il y a plus :

THÉORÈME 5.2. — *La fonction $k \to B_k$ est une fonction entière à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_*; \mathcal{E}_*)$* [donc aussi dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_0; \mathcal{D}_0)$].

DÉMONSTRATION. — Posons $k_0 = -\frac{2m+1}{2}$, m entier ≥ 1. Il faut montrer que k_0 est une fausse singularité pour $B_k f$, *f étant donné dans $\mathcal{E}_*$*. Pour cela, il est peut-être plus commode d'utiliser une formule différente de (5.15). On part de la formule

$$f(tx) = \sum_0^N \frac{x^n t^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{N+1}}{N!} \int_0^t (t\xi)^N f^{(N+1)}(\xi x)\, d\xi,$$

N entier quelconque. Supposons d'abord $-1 < \operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}$. On obtient :

$$\begin{aligned} B_k f(x) = {} & \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+1)} \sum_0^N \frac{\Gamma\left(k + \frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) n!} x^n f^{(n)}(0) \\ & + b_k \frac{x^{N+1}}{N!} \int_0^1 t^{2k+1} (1-t^2)^{-k-\frac{3}{2}} dt \int_0^t (t-\xi)^N f^{(N+1)}(\xi x)\, d\xi. \end{aligned}$$

Le membre de droite a un sens pour $-\frac{(N+3)}{2} < \operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}$, et dépend analytiquement de k, donc coïncide avec le premier prolongement de B_k. Prenons N de sorte que $-\frac{(N+3)}{2} < k_0$. Alors l'intégrale, dans l'expression ci-dessus, est holomorphe au point k_0 ; il reste seulement à voir que la somme finie est holomorphe au voisinage de k_0. La fonction $\Gamma\left(k + \frac{n}{2} + 1\right)$ admet des pôles aux points k tels que $k + \frac{n}{2} + 1 = -\mu$ (μ entier positif). Il y a donc un pôle au point k_0 si

$$\frac{n}{2} = -\mu - 1 - k_0 = m - \mu - \frac{1}{2}, \qquad \text{donc} \quad n = 2(m-\mu) - 1,$$

Mais pour un tel n, *impair*, on a $f^{(n)}(0) = 0$, puisque f est dans $\mathcal{E}_*$; la somme finie est donc holomorphe au voisinage de k_0, ce qui démontre le théorème.

Théorème 5.3. — *Pour tout f dans $\mathcal{E}_*$ et pour tout k, on a :*

(5.21)
$$D^2 B_k f = B_k L_k f.$$

$\left(\text{On rappelle que } L_k f = \dfrac{d^2}{dx^2} f + \dfrac{(2k+1)}{x} \dfrac{d}{dx} f\right).$

Démonstration. — Pour tout f dans $\mathcal{E}_*$, $L_k f$ est dans $\mathcal{E}_*$; L_k est dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{E}_*; \mathcal{E}_*)$ et la fonction $k \to L_k$ est entière à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_*; \mathcal{E}_*)$. Les deux fonctions $k \to D^2 B_k$ et $k \to B_k L_k$ sont donc, grâce au théorème 5.2, deux fonctions entières à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_*; \mathcal{E}_*)$. Or, par la proposition 2.1 ces deux fonctions coïncident dans la bande $-1 < \operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}$; elles coïncident donc partout, ce qui démontre le théorème.

Remarque 5.3. — Il est indispensable de supposer que f est dans $\mathcal{E}_*$; si l'on prend f dans $\mathcal{E}$, $L_k f$ n'est pas dans $\mathcal{E}$; on pourrait raffiner en supposant que k demeure dans une bande fixée et en supposant alors f suffisamment différentiable, avec un certain nombre de dérivées d'ordre impair nulles à l'origine.

Pour terminer ce numéro, montrons la

Proposition 5.5. — *Pour* $-1 < \operatorname{Re} k < \frac{1}{2}$, *on a*

(5.22)
$$D\overline{B}_k = B_k.$$

Démonstration. — On constate facilement que la fonction $k \to \overline{B}_k$ est holomorphe dans la bande $-1 < \operatorname{Re} k < \frac{1}{2}$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E})$; la relation (5.22) résulte alors de (2.17) $\left(\text{valable pour } -1 < \operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}\right)$ par prolongement analytique, en utilisant le théorème 5.1.

Autrement : la formule (5.7) pour $n = 1$ donne

$$B_k f(x) = -\frac{b_k}{2k+1} \int_0^1 \frac{t^{2k+1}}{(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}}} D_t(tf(tx))\, dt$$

Mais $-\dfrac{b_k}{2k+1} = \overline{b}_k$, de sorte que

$$B_k f(x) = D\overline{B}_k f(x).$$

6. Prolongement de l'opérateur $\mathcal{B}_k$. — Rappelons que

$$\mathcal{B}_k f(x) = \beta_k \int_0^1 f(tx)(1-t^2)^{k-\frac{1}{2}}\, dt.$$

Si l'on pose $t = \sin\theta$, on a

$$(6.1)\qquad \mathcal{B}_k f(x) = \beta_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\sin\theta)\cos^{2k}\theta\, d\theta.$$

Posons

$$(6.2)\qquad \begin{cases} M_k^1 f(x,\theta) = f(x\sin\theta) + \dfrac{1}{(2k+1)(2k+2)}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d}{d\theta}(\sin\theta f(x\sin\theta))\right), \\ N_k^1 f(x, \theta = \dfrac{1}{(2k+1)}\dfrac{d}{d\theta}(\sin\theta f(x\sin\theta)), \end{cases}$$

puis, déterminons par récurrence les fonctions

$$(6.3)\qquad \begin{cases} M_k^n f(x,\theta) = M_k^{n-1} f(x,\theta) + \dfrac{1}{2k+2n}\dfrac{d}{d\theta}(\sin\theta N_k^{n-1} f(x,\theta)) \\ \qquad + \dfrac{1}{(2k+2n-1)(2k+2n)} \\ \qquad \times \dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d}{d\theta}(\sin\theta M_k^{n-1} f(x,\theta))\right) \end{cases}$$

et

$$(6.4)\qquad N_k^n f(x,\theta) = N_k^{n-1} f(x,\theta) + \frac{1}{2k+2n-1}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta M_k^{n-1} f(x,\theta)).$$

On a alors la

Proposition 6.1. — *On suppose que* $\mathrm{Re}\, k > \frac{1}{2}$. *Pour tout f dans* $\mathcal{E}(x \geqq 0)$ *et pour tout n, on a*

$$(6.5)\qquad \begin{cases} \mathcal{B}_k f(x) = \beta_k \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2n}\theta\, M_k^n f(x,\theta)\, d\theta \\ \qquad + \beta_k \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2n+1}\theta\, N_k^n f(x,\theta)\, d\theta. \end{cases}$$

Démonstration. — On démontre la formule par récurrence sur n. Vérifions la formule pour $n = 1$. On a

$$\mathcal{B}_k f(x) = \beta_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\sin\theta)\cos^{2k+2}\theta\,(1+\mathrm{tg}^2\theta)\, d\theta$$
$$= \beta_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\sin\theta)\cos^{2k+2}\theta\, d\theta + \beta_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\sin\theta)\sin^2\theta\cos^{2k}\theta\, d\theta.$$

Mais

$$\sin\theta\cos^{2k}\theta = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\cos^{2k+1}\theta}{-(2k+1)}\right);$$

on intègre alors la deuxième intégrale par parties; comme $2\operatorname{Re} k + 1 > 0$, on obtient

$$\mathcal{B}_k f(x) = \beta_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \sin\theta) \cos^{2k+2}\theta \, d\theta$$
$$+ \beta_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{d\theta}(\sin\theta f(x\sin\theta)) \cos^{2k+1}\theta \frac{1}{(2k+1)} d\theta.$$

Dans la deuxième intégrale de l'expression précédente, on remplace $\cos^{2k+1}\theta$ par $\cos^{2k+3}\theta(1 + \operatorname{tg}^2\theta)$, et l'on intègre encore une fois par parties comme précédemment. On obtient finalement la formule (6.5) pour $n = 1$.

Admettons la formule pour $n - 1$. On a

$$\mathcal{B}_k f(x) = \beta_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2k+2n-2}\theta \, M_k^{n-1} + \cos^{2k+2n-1}\theta \, N_k^{n-1}) \, d\theta,$$

où l'on écrit M_k^{n-1} au lieu de $M_k^{n-1} f(x, \theta)$; même chose pour N_k^{n-1}. On peut alors écrire

$$\mathcal{B}_k f(x) = \beta_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2k+2n}\theta \, M_k^{n-1} + \cos^{2k+2n+1}\theta \, N_k^{n-1}) \, d\theta$$
$$+ \beta_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta \cos^{2k+2n-2}\theta \, M_k^{n-1} + \sin^2\theta \cos^{2k+2n-1}\theta \, N_k^{n-1}) \, d\theta$$

ce qui, en intégrant par parties, donne pour la deuxième ligne

$$\beta_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos^{2k+2n}\theta \frac{1}{(2k+2n)} \frac{d}{d\theta}(\sin\theta \, N_k^{n-1})$$
$$+ \cos^{2k+2n-1}\theta \frac{1}{(2k+2n-1)} \frac{d}{d\theta}(\sin\theta \, M_k^{n-1}) \Big) \, d\theta.$$

La deuxième intégrale de l'expression précédente vaut

$$\frac{\beta_k}{(2k+2n-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2n+1}\theta \frac{d}{d\theta}(\sin\theta \, M_k^{n-1}) \, d\theta$$
$$+ \beta_k \frac{1}{(2k+2n-1)(2k+2n)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2n}\theta \frac{d}{d\theta}\Big(\sin\theta \frac{d}{d\theta}(\sin\theta \, M_k^{n-1})\Big) \, d\theta,$$

ce qui donne finalement la formule (6.5).

Posons, pour tout $n > 0$,

$$(6.6)\quad \begin{cases} \mathcal{B}_k^n f(x) = \beta_k \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2n}\theta\, M_k^n f(x,\theta)\, d\theta \\ \qquad + \beta_k \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2n+1}\theta\, N_k^n f(x,\theta)\, d\theta. \end{cases}$$

Ces deux intégrales sont convergentes lorsque l'on a

$$(6.7)\qquad \mathrm{Re}\, k > -\frac{1}{2} - n.$$

Montrons la

Proposition 6.2. — *On suppose que* (6.7) *a lieu et que k est différent de* $-1, -2, \ldots$. *Pour tout* $f \in \mathcal{E}(x \geqq 0) = \mathcal{E}$, $\mathcal{B}_k^n f$ *est dans* $\mathcal{E}$; *l'application* $f \to \mathcal{B}_k^n$ *est continue de* $\mathcal{E}$ *dans lui-même et l'application* $k \to \mathcal{B}_k^n$ *est méromorphe dans le demi-plan défini par* (6.7), *à valeurs dans* $\mathcal{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E})$, *les pôles étant situés aux points* $-1, -2, \ldots$.

Démonstration. — La fonction $\beta_k = \dfrac{2\Gamma(k+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}$ est une fonction entière de k, nulle aux points $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$. Pour x et θ fixés les fonctions (de k) $M_k^n f(x,\theta)$ et $N_k^n f(x,\theta)$ ont des pôles simples aux points $-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, \ldots$ de sorte que les fonctions $\beta_k M_k^n f(x,\theta)$ et $\beta_k N_k^n f(x,\theta)$ sont méromorphes, avec des pôles aux points $-1, -2, \ldots$. Soit k fixé différent de ces valeurs avec (6.7). Les fonctions

$$x, \theta \to \beta_k M_k^n f(x,\theta) \qquad \text{et} \qquad x, \theta \to \beta_k N_k^n f(x,\theta)$$

sont indéfiniment différentiables dans $\left[0, \infty\right[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (immédiat par récurrence sur n). Il en résulte que $\mathcal{B}_k^n f \in \mathcal{E}$ pour tout $f \in \mathcal{E}$ et que l'application $f \to \mathcal{B}_k^n f$ est continue de $\mathcal{E}$ dans lui-même. Reste à montrer que l'application $k \to \mathcal{B}_k^n$ est méromorphe. Or, pour k distinct des pôles, $k \to \mathcal{B}_k^n$ est continue à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E})$, et, pour tout x et pour tout p, la fonction $k \to D_x^p \mathcal{B}_k^n f(x)$ est méromorphe dans le demi-plan (6.7), ce qui démontre la proposition.

Corollaire 6.1. — *Si n et n' sont deux entiers positifs, les fonctions* $\mathcal{B}_k^n$ *et* $\mathcal{B}_k^{n'}$ *coïncident dans la partie commune aux deux demi-plans de définition.*

DÉMONSTRATION. — En effet, ces deux fonctions méromorphes coïncident (et avec $\mathcal{B}_k$) dans le demi-plan $\mathrm{Re}\,k > -\frac{1}{2}$.

On en déduit :

THÉORÈME 6.1. — *La fonction* $k \to \mathcal{B}_k$ *définie dans* $\mathrm{Re}\,k > -\frac{1}{2}$ *par* (3.2) *est prolongeable analytiquement en une fonction méromorphe dans le plan entier, à valeurs dans* $\mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{E})$, *notée* $k \to \mathcal{B}_k$; *les pôles de cette fonction sont situés aux points* $-1, -2, \ldots$. *Le prolongement de* $\mathcal{B}_k$ *est donné explicitement par les formules* (6.5).

REMARQUE 6.1. — On vérifie facilement que l'opérateur $\mathcal{B}_{-\frac{1}{2}}$ coïncide avec l'identité.

Supposons maintenant que $\mathrm{Re}\,k > -\frac{1}{2}$. On déduit de (3.3)

$$(6.8) \qquad D^p \mathcal{B}_k f(x) = \beta_k \int_0^1 t^p (1-t^2)^{k-\frac{1}{2}} f^{(p)}(tx)\, dt,$$

d'où l'on tire

$$(6.9) \qquad D^p \mathcal{B}_k f(0) = \beta_{k,p} f^{(p)}(0),$$

avec

$$(6.10) \qquad \beta_{k,p} = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}+k+1\right)}.$$

La fonction $k \to \beta_{k,p}$ est donc méromorphe, avec des pôles appartenant à l'ensemble $\{-1, -2, \ldots\}$. Il en résulte par prolongement analytique, que pour tout k non situé dans l'ensemble exceptionnel $\{-1, -2, \ldots\}$, la relation (6.9) est vraie. On en déduit que $\mathcal{B}_k f \in \mathcal{E}_*$ (resp. $\mathcal{D}_0$) pour tout f dans $\mathcal{E}_*$ (resp. $\mathcal{D}_0$), k non exceptionnel.

On n'a pas ici l'analogue du théorème 5.2. Cherchons par exemple le résidu de $\mathcal{B}_k f(x)$ au point $k = -1$, f étant donné dans $\mathcal{E}_*$. On a

$$\mathcal{B}_k f(x) = \beta_k \int_0^1 f(tx)(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}} dt + \beta_k \frac{1}{(2k+1)} \int_0^1 (1-t^2)^{k+\frac{1}{2}} \frac{d}{dt}(tf(tx))\, dt,$$

ce qui donne comme résidu au point -1

$$\tilde{\mathcal{B}}_{-1} f(x) = -x \tilde{\beta}_{-1} \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} t f'(tx)\, dt,$$

$\tilde{\beta}_{-1}$ étant le résidu au point -1 de β_k. Or $\tilde{\mathcal{B}}_{-1} f$ n'est pas nul pour tout $f \in \mathcal{E}_*$.

On a donc seulement le

THÉORÈME 6.2. — *La fonction $k \to \mathcal{B}_k$ est méromorphe à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_*; \mathcal{E}_*)$ [resp. $\mathcal{L}(\mathcal{D}_0; \mathcal{D}_0)$].*

Montrons maintenant le

THÉORÈME 6.3. — *Pour tout k complexe, non situé dans l'ensemble $\{-1, -2, \ldots\}$, et pour tout f dans $\mathcal{E}_*$, on a*

$$\mathcal{B}_k D^2 f = L_k \mathcal{B}_k f. \tag{6.11}$$

DÉMONSTRATION. — Les deux fonctions méromorphes $\mathcal{B}_k D^2$ et $L_k \mathcal{B}_k$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_*; \mathcal{E}_*)$, coïncident, d'après la proposition 3.1, pour $\mathrm{Re}\, k > \frac{1}{2}$, donc partout, d'où le théorème.

7. **Relation entre B_k et $\mathcal{B}_k$.** — Démontrons maintenant le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 7.1. — *Pour tout k complexe, différent des valeurs $-1, -2, \ldots$, les opérateurs B_k et $\mathcal{B}_k$ sont des isomorphismes de $\mathcal{E}_*$ (resp. $\mathcal{D}_0$) sur lui-même, inverses l'un de l'autre.*

DÉMONSTRATION. — Pour $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\, k < \frac{1}{2}$, on a démontré (corollaire 4.1) que

$$(D\overline{B}_k)\mathcal{B}_k = I,$$

I, application identique de $\mathcal{E}_*$ dans $\mathcal{E}_*$. Mais, par la proposition 5.5, on a, pour k dans la même bande, $D\overline{B}_k = B_k$, de sorte que

$$B_k \mathcal{B}_k = I \quad \text{si} \quad -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\, k < \frac{1}{2}. \tag{7.1}$$

Comme la fonction $k \to B_k \mathcal{B}_k$ est méromorphe à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_*; \mathcal{E}_*)$, de pôles situés aux points $-1, -2, \ldots$, la relation (7.1) est vraie pour tout k différent de ces valeurs exceptionnelles.

De même, la proposition 4.2 et la proposition 5.5 donnent

$$\mathcal{B}_k B_k = I, \quad \text{si} \quad -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\, k < \frac{1}{2}, \tag{7.2}$$

et l'on voit comme précédemment que (7.2) a lieu pour tout k non exceptionnel. Le théorème en résulte.

REMARQUE 7.1. — Le prolongement des opérateurs B_k et $\mathcal{B}_k$ aux espaces $\mathcal{E} \hat{\otimes} E$, $\mathcal{E}_* \hat{\otimes} E$, $\mathcal{O}_0 \hat{\otimes} E$, E étant un espace vectoriel topologique localement convexe quelconque, se fait comme au chapitre I, en considérant les opérateurs $B_k \otimes 1$, $\mathcal{B}_k \otimes 1$.

REMARQUE 7.2. — On a des résultats analogues au théorème 7.1 pour les opérateurs $D^m + \dfrac{m\left(k+\frac{1}{2}\right)}{x} D^{m-1}$, m entier quelconque. *Cf.* les formules dans Lions [5].

8. Relations de Darboux-Weinstein. — Introduisons les deux opérateurs suivants : pour tout $f \in \mathcal{E}(x \geq 0) = \mathcal{E}$, posons

$$S_k f(x) = x^{2k} f(x), \tag{8.1}$$

$$\mathfrak{S} f(x) = x^{-1} f'(x). \tag{8.2}$$

On a le

LEMME 8.1. — *a. L'opérateur $\mathfrak{S}$ est dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{E}_*;\, \mathcal{E}_*)$, et n'est pas un isomorphisme;*

b. Les opérateurs S_k et $\mathfrak{S}$ sont des isomorphismes de $\mathcal{O}_0$ sur lui-même.

DÉMONSTRATION. — *a.* Il est évident que si f est dans $\mathcal{E}_*$, alors $\mathfrak{S}f$ est également dans $\mathcal{E}_*$, et que l'application $f \to \mathfrak{S}f$ est continue; cette application n'est pas un isomorphisme, puisque les constantes (qui sont dans $\mathcal{E}_*$) ont pour image o.

b. On a $\mathfrak{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{O}_0;\, \mathcal{O}_0)$; si $x^{-1}f'(x) = g(x)$, on a

$$f(x) = \int_0^x y\, g(y)\, dy,$$

ce qui donne f dans $\mathcal{O}_0$, de sorte que $\mathfrak{S}$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_0$ sur lui-même, d'inverse donné par

$$\mathfrak{S}^{-1} f(x) = \int_0^x y\, f(y)\, dy \qquad (f \in \mathcal{O}_0). \tag{8.3}$$

De même, S_k est un isomorphisme de $\mathcal{O}_0$ sur lui-même, d'inverse

$$S_k^{-1} = S_{-k}. \tag{8.4}$$

On vérifie facilement les relations suivantes :

PROPOSITION 8.1. — *Pour tout f dans $\mathcal{E}$, on a*

$$L_{-k} S_k f = S_k L_k f, \tag{8.5}$$

$$L_{k+1} \mathfrak{S} f = \mathfrak{S} L_k f. \tag{8.6}$$

Ces relations sont dues à **Darboux** et **Weinstein**; **Weinstein** les a systématiquement utilisées pour la résolution du problème de Cauchy relativement à l'opérateur $-\Delta + L_k$. *Cf.* aussi : **Diaz**, **Weinberger**, **E. K. Blum**, dans la bibliographie.

Les relations (**8**.5) et (**8**.6) sont surtout intéressantes sur $\mathcal{D}_0$, car alors S_k et $\mathfrak{S}$ sont des isomorphismes. On en déduit donc

$$(8.7)\qquad L_{-k} = S_k L_k S_{-k}, \qquad L_{k+1} = \mathfrak{S} L_k \mathfrak{S}^{-1} \quad (\text{sur } \mathcal{D}_0).$$

On sait (théor. **7**.1) que si $\operatorname{Re} k \geqq 0$ (par exemple), il existe un isomorphisme B_k de $\mathcal{D}_0$ sur lui-même tel que

$$\mathcal{B}_k D^2 B_k = L_k.$$

Supposons maintenant que l'on ait $\operatorname{Re} k \leqq 0$. Alors $-k$ a une partie réelle positive, de sorte que

$$L_{-k} = \mathcal{B}_{-k} D^2 B_{-k},$$

ce qui en comparant avec la première relation (**8**.7) donne

$$(8.8)\qquad D^2 B_k S_k = B_{-k} S_k L_k,$$

donc

Théorème 8.1. — *Quel que soit k complexe, il existe un isomorphisme X_k de $\mathcal{D}_0$ sur lui-même, qui transmue L_k en D^2. Si* $\operatorname{Re} k \geqq 0$ (plus généralement, si k est quelconque, différent de $-1, -2, \ldots$) *on peut prendre $X_k = B_k$. Si* $\operatorname{Re} k \leqq 0$, *on peut prendre*

$$(8.9)\qquad X_k = B_{-k} S_k.$$

Utilisons maintenant la deuxième relation (**8**.7), d'où l'on déduit

$$L_{k+n} = \mathfrak{S}^n L_k \mathfrak{S}^{-n}.$$

Quel que soit k, on peut choisir n de telle sorte que $\operatorname{Re} k + n \geqq 0$ (par exemple); alors

$$L_{k+n} = \mathcal{B}_{k+n} D^2 B_{k+n},$$

d'où

$$D^2 B_{k+n} \mathfrak{S}^n = B_{k+n} \mathfrak{S}^n L_k,$$

donc

Théorème 8.2. — *Avec les notations du théorème* **8**.1, *on peut également prendre*

$$(8.10)\qquad X_k = B_{k+n} \mathfrak{S}^n,$$

n étant choisi de façon que $\operatorname{Re} k + n \geqq 0$.

9. Applications aux problèmes mixtes. — Les notations sont les mêmes qu'au chapitre I, n° 8. On pose le

PROBLÈME 9.1. — On donne f dans $\mathcal{H}(\Lambda^*)$. On cherche u dans l'espace $\mathcal{E}_* \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$, solution de l'équation

$$(9.1) \qquad \Lambda u(t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) + \frac{2k+1}{t} \frac{\partial}{\partial t} u(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad t \geqq 0,$$

avec les conditions initiales

$$(9.2) \qquad \begin{cases} u(t) \to f \quad \text{dans } \mathcal{H}(\Lambda) \text{ lorsque } t \to 0, \\ \quad \text{et naturellement :} \\ u'(t) \to 0 \quad \text{dans } \mathcal{H}(\Lambda) \text{ lorsque } t \to 0. \end{cases}$$

Le problème 9.1 est résolu par le

THÉORÈME 9.1. — *On suppose que* (M) *a lieu* (*cf.* Chap. I, n° 8). *On suppose que k est un nombre complexe quelconque, mais différent de* $-1, -2, -3, \ldots$. *Dans ces conditions, le problème* 9.1 *admet une solution unique.*

DÉMONSTRATION. — Soit u, solution de (9.1), c'est-à-dire

$$(\Lambda + L_k)\, u = 0 \qquad [\text{de façon plus précise : } (1 \otimes \Lambda + L_k \otimes 1)\, u = 0],$$

avec (9.2). Pour k non situé dans l'ensemble exceptionnel $-1, -2, \ldots$ on sait (théor. 5.3, 6.3, 7.1) que

$$L_k = \mathcal{B}_k D^2 B_k, \qquad \text{donc} \quad \mathcal{B}_k (\Lambda + D^2)\, B_k u = 0$$

(on écrit B_k au lieu de $B_k \otimes 1$) donc,

$$(\Lambda + D^2)\, B_k u = 0.$$

Donc si l'on pose

$$(9.3) \qquad B_k u = v,$$

on a

$$(9.4) \qquad v \in \mathcal{E}_* \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda),$$

$$(9.5) \qquad (\Lambda + D^2)\, v = 0,$$

$$(9.6) \qquad v(0) = f, \qquad v'(0) = 0.$$

Réciproquement, si v vérifie (9.4), (9.5), (9.6), alors

$$(9.7) \qquad u = \mathcal{B}_k v$$

est dans $\mathcal{E}_* \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$, solution de (9.1) et (9.2).

Or on a vu (théor. 8.4, chap. I) que le problème (9.4), (9.5) et (9.6) admet une solution unique, d'où le théorème.

Remarque 9.1. — Comme pour les problèmes mixtes du chapitre I, la démonstration précédente fournit *un procédé de calcul explicite de la solution.*

Remarque 9.2. — Soit u, élément de $\mathcal{E}\hat{\otimes}\mathcal{H}(\Lambda)$ [et non de $\mathcal{E}_*\hat{\otimes}\mathcal{H}(\Lambda)$], solution de (9.1) et de (9.2). On a alors les relations

$$(9.8)\qquad (n+1)\Lambda u^{(n)}(0)+(2k+n+2)u^{(n+2)}(0)=0,$$

d'où l'on déduit, *si k n'est pas dans l'ensemble exceptionnel :* $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots$

$$(9.9)\qquad u^{(2p+1)}(0)=0 \quad \text{pour tout } p\geq 0,$$

$$(9.10)\qquad u^{(2p)}(0)=(-1)^p\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{(2k+2)\ldots(2k+2p)}\Lambda^p f.$$

Par contre, si $k=k_0=-\frac{2m+1}{2}$ $(m\geq 1)$, alors, pour $n=2m-1$, (9.8) est vérifié *quel que soit $u^{(2m+1)}(0)$.*

On peut donc préciser le problème 9.1 et le théorème 9.1 comme suit :

a. Si k n'est pas égal à $-1, -\frac{3}{2}, -2, \ldots$, toute solution dans $\mathcal{E}\hat{\otimes}\mathcal{H}(\Lambda)$ de (9.1) et (9.2) est ***nécessairement dans*** $\mathcal{E}_*\hat{\otimes}\mathcal{H}(\Lambda)$, de sorte que le problème correspondant admet encore une solution *unique.*

b. Si k est de la forme $k=-\frac{2m+1}{2}$ (m entier positif), alors il est indispensable, si l'on veut l'unicité, de chercher *a priori* les solutions dans l'espace $\mathcal{E}_*\hat{\otimes}\mathcal{H}(\Lambda)$. Si l'on cherche les solutions dans $\mathcal{E}\hat{\otimes}\mathcal{H}(\Lambda)$, *il n'y aura pas unicité.* Voici un contre-exemple assez général. On prend Λ défini par une forme sesquilinéaire $((u, v))$ (comme au chapitre I, nº 12) sur un ouvert Ω *borné* de R^n. On suppose que Λ est un opérateur différentiel *nul sur les constantes.* On suppose également que *les constantes sont dans* $\mathcal{H}(\Lambda)$ (exemple : Λ, opérateur différentiel à coefficients constants, sans termes de degré 0, et l'on prend un problème aux limites du type Neumann). Considérons alors la fonction

$$u(x, t)=t^{2m+1};$$

cette fonction est dans

$$\mathcal{E}\hat{\otimes}\mathcal{H}(\Lambda);\qquad \Lambda u=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}u-\frac{2m}{t}\frac{\partial}{\partial t}u=0,$$

donc u est solution non nulle de (9.1), avec

$$k=-\frac{2m+1}{2} \qquad \text{et} \qquad f=0.$$

Notons également que la fonction

$$u(x, t) = t^{2m}$$

est dans $\mathcal{E} \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$, solution non nulle de

$$\Lambda u + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \frac{2m-1}{t} \frac{\partial}{\partial t} u = 0, \qquad \text{avec} \quad u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0;$$

ceci correspond à $k = -m$, ce qui est exclu dans le théorème 9.1.

Par ailleurs, toujours avec le même Λ, $u(x, t) = t^\lambda$ ($\lambda \geqq 2$) est solution *deux fois* continûment différentiable de

$$\Lambda u + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \frac{\lambda - 1}{t} \frac{\partial}{\partial t} u = 0, \qquad \text{avec} \quad u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0.$$

De façon générale si $\operatorname{Re} k < -\frac{1}{2}$, il n'y a pas unicité dans le problème 9.1 *si l'on cherche des solutions qui ne sont pas assujetties à être indéfiniment différentiables* (*cf.* Weinstein [1], pour le problème de Cauchy relatif à $-\Delta + L_k$). Pour $\operatorname{Re} k \geqq -\frac{1}{2}$, on a le résultat suivant; considérons le

Problème 9.2. — On cherche u, fonction deux fois continûment différentiable dans $t \geqq 0$, à valeurs dans $\mathcal{H}$, une fois continûment différentiable dans $t \geqq 0$ à valeurs dans $\mathcal{H}(\Lambda)$, solution de (9.1), avec les conditions (9.2).

On a le

Théorème 9.2. — *On suppose que* Λ *vérifie* (M) *et que* k *est un nombre complexe, avec* $\operatorname{Re} k \geqq -\frac{1}{2}$. *Alors le problème* 9.2 *admet au plus une solution.*

Démonstration. — Il faut montrer que si u, avec les hypothèses de différentiabilité de l'énoncé du problème 9.2, vérifie (9.1) et (9.2) avec $f = 0$, alors $u = 0$. Pour cela, multiplions scalairement les deux membres de (9.1) par

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t) = \frac{d}{dt} u(t) \qquad (t \geqq 0 \text{ fixé quelconque}).$$

Il vient :

$$(9.11) \qquad \left(\Lambda u(t), \frac{d}{dt} u(t)\right) + \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t), \frac{d}{dt} u(t)\right) + (2k+1) \frac{1}{t} \left\| \frac{d}{dt} u(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = 0.$$

Prenant l'égalité complexe conjuguée et additionnant, il vient

$$(9.12) \qquad \frac{d}{dt}\left[(\Lambda u(t), u(t)) + \left\| \frac{d}{dt} u(t) \right\|^2\right] + 2 \operatorname{Re}(2k+1) \frac{1}{t} \left\| \frac{d}{dt} u(t) \right\|^2 = 0,$$

d'où l'on tire, comme $\operatorname{Re} k \geqq -\frac{1}{2}$,

$$\frac{d}{dt}\left[(\Lambda u(t), u(t)) + \left\| \frac{d}{dt} u(t) \right\|^2\right] \leqq 0,$$

et comme la fonction

$$t \to (\Lambda u(t), u(t)) + \left\| \frac{d}{dt} u(t) \right\|^2$$

est nulle à l'origine, on a

$$(9.13) \qquad (\Lambda u(t), u(t)) + \left\| \frac{d}{dt} u(t) \right\|^2 \leqq 0 \quad \text{pour tout } t \geqq 0.$$

Mais (M) a lieu, donc il existe $\xi_0 > 0$ tel que

$$(\Lambda u(t), u(t)) + \xi_0 \| u(t) \|^2 \geqq 0,$$

de sorte que (9.13) entraîne

$$(9.14) \qquad \left\| \frac{d}{dt} u(t) \right\| \leqq \sqrt{\xi_0} \| u(t) \|.$$

Posons

$$(9.15) \qquad \| u(t) \|^2 = \theta(t).$$

On a

$$\frac{d}{dt} \theta(t) = 2 \operatorname{Re}\left(u(t), \frac{d}{dt} u(t) \right),$$

donc

$$\frac{d\theta}{dt}(t) \leqq \left| \frac{d\theta}{dt}(t) \right| \leqq 2 \sqrt{\xi_0}\, \theta(t).$$

Si l'on pose

$$F(t) = \theta(t) \exp\left(-2\sqrt{\xi_0}\, t\right),$$

on a donc

$$\frac{d}{dt} F(t) \leqq 0,$$

et comme $F(t) \geqq 0$, $F(0) = 0$, on a $F(t) = 0$ pour tout $t \geqq 0$, donc $\theta(t) = 0$, et donc $u = 0$. C. Q. F. D.

Considérons maintenant des problèmes mixtes avec deuxième membre :

Problème 9.3. — Trouver u dans $\mathcal{D}_0 \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$, solution de

$$(9.16) \qquad \Lambda u + L_k u = f,$$

où f est donné dans $\mathcal{D}_0 \hat{\otimes} \mathcal{H}$.

On a le

Théorème 9.3. — *On suppose que Λ vérifie* (M). *Quel que soit le nombre complexe k, l'opérateur $\Lambda + L_k$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_0 \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ sur $\mathcal{O}_0 \hat{\otimes} \mathcal{H}$. Le problème* 9.3 *admet donc une solution unique.*

Démonstration. — *a.* Supposons k différent des valeurs $-1, -2, -3, \ldots$. On peut alors utiliser le théorème 7.1 et écrire

$$\Lambda + L_k = B_k^{-1}(\Lambda + D^2)^{-1} B_k,$$

d'où l'on déduit

$$(\Lambda + L_k)^{-1} = B_k^{-1}(\Lambda + D^2)^{-1} B_k,$$

puisque $\Lambda + D^2$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_0 \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ sur $\mathcal{O}_0 \hat{\otimes} \mathcal{H}$. On a donc le théorème dans ce cas.

b. $k = -(2m+1)$ $(m \geqq 0)$.

On ne peut plus alors utiliser le théorème 7.1, mais on peut remplacer dans le raisonnement précédent B_k par l'un des deux opérateurs $\mathcal{X}_k$ construit au n° 8, théorèmes 8.1, 8.2.

10. Problèmes mixtes pour les valeurs singulières de k. — On suppose dans ce numéro que

$$(10.1) \qquad k = -(n+1), \qquad \text{donc} \quad 2k+1 = -(2n+1) \qquad (n \text{ entier} \geqq 0).$$

On considère le problème particulier suivant :

Problème 10.1. — Trouver u dans $\mathcal{E} \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$, solution de

$$(10.2) \qquad \Lambda u + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \frac{2n+1}{t} \frac{\partial}{\partial t} u = 0,$$

avec les conditions initiales

$$(10.3) \qquad \begin{cases} u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(2n+1)}(0) = 0, \\ u^{(2n+2)}(0) = f \in \mathcal{H}(\Lambda^\infty), \; u^{(2n+3)}(0) = 0. \end{cases}$$

Montrons le

Théorème 10.1. — *On suppose que* (M) *a lieu. Le problème* 10.1 *admet une solution unique.*

Démonstration. — Posons

$$(10.4) \qquad S_k u = t^{-(2n+2)} u = v.$$

Si u existe dans $\mathcal{E} \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$, avec (10.2) et (10.3), alors v est dans $\mathcal{E} \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$, et vérifie

$$(10.5) \qquad \Lambda v + \frac{\partial^2}{\partial t^2} v + \frac{2n+3}{t} \frac{\partial}{\partial t} v = 0,$$

avec les conditions initiales

$$(10.6) \qquad v(0) = \frac{f}{(2n+2)!}, \qquad v'(0) = 0.$$

Or, d'après la Remarque **9.2**, conclusion a, toute solution dans $\mathcal{E} \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ de (**10.5**), (**10.6**), est nécessairement dans $\mathcal{E}_* \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$, existe et est unique. Alors u existe et est unique

$$(10.7) \qquad u = t^{(2n+2)} v.$$

Le théorème est démontré.

11. Exemples. — On considère $\Lambda = -\Delta$, $\Delta =$ laplacien, et l'on se place sur $\Omega = R^n$; on va donc considérer seulement le problème de Cauchy. On a rappelé au chapitre I, n° **12**, la définition de l'espace $\mathcal{D}^2_{L^2}(R^n) = \mathcal{E}^2_{L^2}(R^n)$; cet espace coïncide avec l'espace des $u \in L^2(R^n)$ tels que $\Delta u \in L^2(R^n)$; on a $\mathcal{D}^2_{L^2}(R^n) = \mathcal{H}(\Lambda)$. On considère alors le

Problème **11.1** — Trouver u dans $\mathcal{E}_* \hat{\otimes} \mathcal{D}^2_{L^2}(R^n)$, solution de

$$(11.1) \qquad -\Delta u + L_k u = 0,$$

avec les conditions initiales

$$(11.2) \qquad u(0) = f \qquad [f \text{ donné dans } \mathcal{D}(R^n),\ u'(0) = 0].$$

Remarque **11.1.** — On a évidemment $\mathcal{D}(R^n) \subset \mathcal{H}(\Lambda^\infty)$; en réalité, $\mathcal{H}(\Lambda^\infty)$ est exactement l'espace des fonctions $\in L^2(R^n)$ ainsi que *toutes* leurs dérivées (espace $\mathcal{D}_{L^2}$ de Schwartz [2]).

Posons

$$(11.3) \qquad k_0 = \frac{n-2}{2}.$$

Pour $k = k_0$, la solution du problème **11.1** est donné par la formule de Asgeirsson (*cf.* Asgeirsson [1])

$$(11.4) \qquad u(x, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\alpha|=1} f(x + \alpha t)\, d\omega_n(\alpha),$$

où $\omega_n = \dfrac{2(\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$ est l'aire de la sphère unité dans R^n, $d\omega_n(\alpha)$ l'élément d'aire de cette sphère.

Faisons maintenant les remarques évidentes suivantes : soient k et k' deux nombres complexes, non situés dans l'ensemble exceptionnel $\{-1, -2, -3, \ldots\}$. On a alors

$$D^2 = B_k L_k B_k^{-1} = B_{k'} L_{k'} B_{k'}^{-1},$$

donc

$$L_{k'} = B_{k,k'} L_k B_{k,k'}^{-1}, \tag{11.5}$$

où

$$B_{k,k'} = B_{k'}^{-1} B_k. \tag{11.6}$$

Appliquons ceci au problème 11.1, avec $k' = k_0$, et k non situé dans l'ensemble exceptionnel. On a

$$(-\Delta + L_k) = B_{k_0,k}(-\Delta + L_{k_0}) B_{k,k_0}.$$

Si donc l'on pose

$$B_{k,k_0} u = v, \tag{11.7}$$

v est dans $\mathcal{E}_* \hat{\otimes} \mathcal{D}_{L^2}^{2}(R^n)$, solution de

$$\Delta v + L_{k_0} v = 0, \tag{11.8}$$

avec

$$v(0) = f \qquad v'(0) = 0, \tag{11.9}$$

et réciproquement.

Comme on a donné [en (11.4)] la solution du problème (11.8), (11.9) on obtient

$$u(x, t) = B_{k_0,k}\left(\frac{1}{\omega_n}\int_{|\alpha|=1} f(x + \alpha t)\, d\omega_n(\alpha)\right). \tag{11.10}$$

Or calculons $B_{k',k} = \mathcal{B}_k \circ B_{k'}$. On a

$$\mathcal{B}_k B_{k'} f(x) = \beta_k b_{k'} \frac{1}{x^{2k}} \int_0^x (x^2 - y^2)^{k-\frac{1}{2}} y\, dy \int_0^y \frac{t^{2k'+1}}{(y^2 - t^2)^{k'+\frac{3}{2}}} f(t)\, dt, \tag{11.11}$$

en supposant

$$-1 < \operatorname{Re} k' < -\frac{1}{2}, \qquad \operatorname{Re} k > -\frac{1}{2}.$$

On peut dans (11.11) inverser l'ordre des intégrations dans l'intégrable double ; on obtient pour cette intégrale

$$\int_0^x t^{2k'+1} f(t)\, dt \int_t^x \frac{y(x^2 - y^2)^{k-\frac{1}{2}}}{(y^2 - t^2)^{k'+\frac{3}{2}}}\, dy. \tag{11.12}$$

Posons : $s = \dfrac{(y^2 - t^2)}{(x^2 - t^2)}$. On obtient alors pour l'intégrale en y dans (11.12)

$$\frac{1}{2}(x^2 - t^2)^{k-k'-1} \int_0^1 (1 - s)^{k-\frac{1}{2}} s^{-\left(k'+\frac{3}{2}\right)}\, ds,$$

ce qui donne, en portant dans (11.11), et en tenant compte des expressions de β_k et $b_{k'}$

$$(11.13)\quad \mathcal{B}_k B_{k'} f(x) = \frac{2\Gamma(k+1)}{\Gamma(k'+1)\Gamma(k-k')}\frac{1}{x^{2k}}\int_0^x (x^2-t^2)^{k-k'-1}t^{2k'+1}f(t)\,dt.$$

Ceci est établi avec $-1 < \operatorname{Re} k' < -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re} k > -\frac{1}{2}$. Mais dans (11.13), l'intégrale de droite converge pour

$$(11.14)\qquad \operatorname{Re} k' > -1, \qquad \operatorname{Re} k > \operatorname{Re} k';$$

par ailleurs dans la région (11.14), pour $x \geqq 0$ fixé quelconque, la fonction égale au deuxième membre de (11.13) dépend analytiquement de k et k' ; il en résulte

Proposition 11.1. — *On suppose que k et k' donnent lieu à* (11.14). *Pour tout* $f \in \mathcal{E}_*$, (11.13) *est vrai.*

Prenant $k' = k_0$, on en déduit

$$(11.15)\quad u(x,t) = \frac{2\Gamma(k+1)}{\Gamma(k_0+1)\Gamma(k-k_0)\omega_n}\frac{1}{t^{2k}} \times \int_0^t (t^2-s^2)^{k-k_0-1}s^{2k_0+1}\,ds\int_{|\alpha|=1} f(x+\alpha s)\,d\omega_n(\alpha).$$

Posons $s = \rho t$ dans (11.15). On obtient

Proposition 11.2. — *Si l'on suppose que* $\operatorname{Re} k > \frac{n-2}{2}$, *la solution du problème* 11.1 *est donnée par*

$$(11.16)\quad u(x,t) = \frac{2\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(k-k_0)\omega_n} \times \int_0^1 (1-\rho^2)^{k-k_0-1}\rho^{2k_0+1}\,d\rho\int_{|\alpha|=1} f(x+\alpha\rho t)\,d\omega_n(\alpha).$$

On retrouve ainsi la formule (7.1), p. 112 de Weinstein [1] (pour avoir les notations de Weinstein, remplacer $2k+1$ par k).

Pour $\operatorname{Re} k > \frac{n-2}{2}$, on sait par la théorie générale, que la formule précédente peut se prolonger analytiquement. C'est ce qui a été fait directement sur cet exemple par Diaz et Weinberger (*cf.* aussi Bureau [1], qui n'utilise pas de prolongement analytique).

Donnons pour terminer ce numéro un exemple (trivial) de problème mixte. On cherche u dans $x \geqq 0$, $t \geqq 0$, solution de

$$(11.17)\qquad -\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial t^2}u + \frac{2k+1}{t}\frac{\partial}{\partial t}u = 0,$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = 0, \tag{11.18}$$

et la condition aux limites (de Dirichlet)

$$u(0, t) = 0. \tag{11.19}$$

On a, pour k non situé dans l'ensemble exceptionnel [*cf.* (9.7)]

$$u = \mathcal{B}_k v, \tag{11.20}$$

où v est la solution du problème mixte correspondant pour l'équation des ondes, donc

$$v(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) & \text{si} \quad x \geqq t, \\ \frac{1}{2}(f(x+t) - f(t-x)) & \text{si} \quad x \leqq t. \end{cases}$$

On obtient donc, *pour* $x \leqq t$,

$$u(x, t) = \frac{\beta_k}{2} \frac{1}{t^{2k}} \int_0^t (t^2 - \tau^2)^{k-\frac{1}{2}} (f(x+\tau) - f(\tau - x))\, d\tau, \tag{11.21}$$

lorsque $\operatorname{Re} k > -\frac{1}{2}$.

Pour les autres valeurs de k, non singulières, on prolonge analytiquement la formule (11.21).

De façon générale, à toute formule de résolution explicite de problème mixte relativement à l'équation des ondes, correspond une formule de résolution pour l'opérateur $-\Delta + L_k$.

12. Problème non résolu. — Cherchons u dans $\mathcal{D}_0 \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$, solution de

$$\Lambda u + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \frac{k^2 - \frac{1}{4}}{t^2} u = f, \tag{12.1}$$

f étant donnée dans $\mathcal{D}_0 \hat{\otimes} \mathcal{H}$.

Si l'on pose

$$u = t^{k+\frac{1}{2}} v, \tag{12.2}$$

alors v est dans $\mathcal{D}_0 \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$, solution de

$$\Lambda v + \frac{\partial^2}{\partial t^2} v + \frac{2k+1}{t} \frac{\partial t}{t} v = t^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)} f, \tag{12.3}$$

problème qui admet toujours une solution unique (théorème 9.3). Donc

$\Lambda + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{k^2 - \frac{1}{4}}{t^2}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}_0 \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ *sur* $\mathcal{D}_0 \hat{\otimes} \mathcal{H}$, *quel que soit* k.

On est ainsi conduit au problème suivant :

Problème 12.1. — On donne deux fonctions r et s sur $t > 0$, indéfiniment différentiables dans $t > 0$, devenant infinies à l'origine ainsi que leurs dérivées, comme des puissances négatives de t. L'opérateur

$$\Lambda + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + r(t)\frac{\partial}{\partial t} + s(t) \tag{12.4}$$

définit-il un isomorphisme de $\mathcal{D}_0 \hat{\otimes} \mathcal{H}(\Lambda)$ sur $\mathcal{D}_0 \hat{\otimes} \mathcal{H}$? [L'opérateur Λ vérifiant (M)].

Ce problème n'est pas résolu.

Signalons seulement que si q est une fonction indéfiniment différentiable dans $t \geqq 0$, on peut, suivant un résultat de Volk [1] transmuer $D^2 - \left(q + \dfrac{k^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)$ en $D^2 - \dfrac{k^2 - \frac{1}{4}}{x^2}$.

BIBLIOGRAPHIE.

E. K. Blum :

[1] *The Euler-Poisson-Darboux equation in the exceptional cases* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 5, 1954, p. 511-520).

L. Asgeirsson :

[1] *Ueber eine Mittelwertseigenschaft von Lösungen homogener linearer partieller Differentialgleichungen* (*Math. Ann.*, t. 113, 1937, p. 321-346).

N. Bourbaki :

[1] *Intégration*, Paris, Hermann, 1952 (n° 1.175).

[2] *Espaces vectoriels topologiques*, Paris, Hermann, 1953 (n° 1.189).

F. E. Browder :

[1] *Strongly elliptic systems of differential equations. Contribution to the theory of partial differential equations* (*Ann. Math. Studies*, n° 33, p. 15-51).

F. Bureau :

[1] *Divergent integrals and partial differential equations* (*Comm. pure appl. Math.*, t. 8, 1955, p. 143-202).

E. A. Coddington :

[1] *The spectral representation of ordinary self-adjoint differential operators* (*Ann. Math.*, t. 60, 1954, p. 192-211).

G. DARBOUX :

[1] *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, Paris, 1914-1915.

J. DELSARTE :

[1] *Sur certaines transformations fonctionnelles relatives aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 206, 1938, p. 1780).

[2] *Une extension nouvelle de la théorie des fonctions presque-périodiques de Bohr* (*Acta Math.*, t. 69, 1938, p. 259-317).

DENY-LIONS :

[1] *Les espaces du type de Beppo Levi* (*Ann. Inst. Fourrier*, t. 5, 1955, p. 305-370).

J. B. DIAZ :

[1] *On Cauchy's problem and fundamental solutions Contributions...* (*Ann. Math. Studies*, n° 33, p. 235-247).

J. B. DIAZ et G. S. S. LUDFORD :

[1] *On the singular Cauchy problem...* (*Ann. Mat. pura appl.*, t. 38, 1955, p. 33-50).

J. B. DIAZ et H. F. WEINBERGER :

[1] *A solution of the singular initial value problem for the Euler-Poisson-Darboux equation* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 4, 1953, p. 703-708).

A. ERDÉLYI :

[1] *Tables of integral transforms*, t. I, New-York, 1954.

[2] *Idem*, t. II.

L. GÅRDING :

[1] *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations* (*Math. Scand.*, t. 1, 1953, p. 55-72).

H. G. GARNIR :

[1] « *Fonctions* » *de Green pour les problèmes aux limites de l'équation des ondes* (Second Colloque sur les équations aux dérivées partielles, Bruxelles, 1954; *C. B. R. M.*, 1955).

[2] *Sur la propagation de l'onde...* (*Bull. Soc. Roy. Sc., Liége*, t. 21, n°s 8-9-10, 1952, p. 328-344).

[3] *Propagation de l'onde...* (*Id.*, t. 22, n°s 3-4, 1953, p. 85-100 et 148-162).

GELFAND-LEVITAN :

[1] *Sur la détermination des opérateurs différentiels par leur fonction spectrale* (*Isvestzia Acad. Nauk S. S. S. R.*, t. 15, 1951, p. 309-360).

A. GROTHENDIECK :

[1] *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* (*Mem. Amer. Math. Soc.* 1955, n° 16).

[2] *Résumé...* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 4, 1954, p. 73-112).

[3] *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*. I., (*J. Reine Ang. Math.*, t. 192, 1953, p. 35-64).

J. HADAMARD :

[1] *Le problème de Cauchy*, Paris, Hermann, 1932.

T. KATO :

[1] *Integration of the equation of evolution in a Banach space* (*J. Math. Soc. Japan*, t. 5, 1953, p. 208-234).

K. KODAIRA :

[1] *On ordinary differential equations...* (*Amer. J. Math.*, t. 72, 1950, p. 502-544).

O. A. LADYŽENSKAYA :

[1] *Problèmes mixtes pour les équations hyperboliques*, Moscou, 1953.

[2] *Sur les solutions non stationnaires d'équations opérationnelles de types variés* (*Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 102, 1955, p. 207-210).

P. D. LAX et A. N. MILGRAM :

[1] *Parabolic equations, Contribution to the theory of partial differential equations* (*Ann. Math. Studies*, n° 33, 1954, p. 167-190).

J. LERAY :

[1] *Hyperbolic differential equations*, Princeton, 1952-1954.

LEVITAN :

[1] *Développements de fonctions en séries et intégrales de Fourier-Bessel* (*Uspechi Mat. Nauk*, t. 6, nos 1-2, 1951, p. 102-143).

J. L. LIONS :

[1] *Problèmes aux limites en théorie des distributions* (*Thèse*, Paris, 1954; *Acta Math.*, t. 94, 1955, p. 1-142).

[2] *Sur quelques problèmes aux limites relatifs à des opérateurs différentiels elliptiques* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 83, 1955, p. 225-250).

[3] *Contribution à un problème de M. M. Picone* (*Ann. Mat. pura appl.*, à paraître).

[4] *Ouverts m-réguliers*, à paraître dans l'Ouvrage en hommage à M. Beppo LEVI.

[5] *Quelques applications d'opérateurs de transmutation* (Colloque sur les équations aux dérivées partielles, Nancy, avril 1956).

LIONS-SCHWARTZ :

[1] *Problèmes aux limites sur des espaces fibrés* (*Acta Math.*, t. 94, 1955, p. 154-159).

M. N. OLEVSKIĬ :

[1] *The equation*

$$A_P\, u(P,\, t)\, \frac{\partial^2}{\partial t^2} + p(t)\frac{\partial}{\partial t} + q(t)\, u(P,\, t)$$

(*Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 93, 1953, n° 6, p. 975-978).

B. A. MARCENKO :

[1] *Sur la théorie des opérateurs différentiels du deuxième ordre* (*Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 72, 1950, p. 457-460).

[2] *Sur la théorie des opérateurs différentiels linéaires d'ordre 2 à une variable* (*Troudi Mosc. Mat.*, t. 1, 1952, p. 328-420; t. 2, 1953, p. 4-82).

M. A. NEUMARK :

[1] *Opérateurs différentiels linéaires*, Moscou, 1954.

É. PICARD :

[1] *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles*, Paris, Gauthier-Villars, 1927.

POVZNER :

[1] *On differential equations of Sturn-Liouville type on a half axis* [*Amer. Math Soc. Translation*, n° 5; *Math. Sbornik*, t. 23 (65), 1948].

M. Riesz :

[1] *Intégrale de Riemann-Liouville et problème de Cauchy* (*Acta Math.*, t. 81, 1949, p. 1-223).

L. Schwartz :

[1] *Théorie des distributions*, t. I, Paris, Hermann, 1950.

[2] *Idem*, t. II, Paris, 1951.

[3] *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles elliptiques* (Second Colloque sur les équations aux dérivées partielles, Bruxelles, 1954; *C. B. R. M.*, 1955, p. 13-24).

[4] Séminaire, t. 1, Paris, 1953-1954.

[5] Séminaire, t. 2, Paris, 1954-1955.

[6] *Les équations d'évolution liées au produit de composition* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 2, 1950, p. 19-49).

S. L. Sobolev :

[1] *Applications de l'analyse fonctionnelle à la Physique mathématique*, Léningrad, 1950.

I. N. Sneddon :

[1] *Fourier Transform* (*International Series in pure and applied Math.*, 1951).

M. H. Stone :

[1] *Linear transformations in Hilbert space* (*Amer. Math. Soc.*, Coll. Publications, t. 15, 1932).

E. C. Titchmarsh :

[1] *Eigenfunctions expansions...*, Oxford, 1946.

M. I. Višik :

[1] *Problèmes mixtes pour des systèmes d'équations...* (*Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 100, 1955, n° 3, p. 409-412).

V. Volk :

[1] *Sur les formules de transformation pour les équations différentielles avec une singularité en $x = 0$* (*Uspechi Mat. Nauk*, t. 8, 1953, (56), p. 141-151).

Volterra-Pérès :

[1] *Théorie générale des fonctionnelles*, Paris, Gauthier-Villars, 1936.

A. Weinstein :

[1] *The singular solutions and the Cauchy problem for generalized Tricomi equations* (*Comm. pure appl.*, *Math.* t. 7, 1954, p. 105-116).

H. Weyl :

[1] *Ueber gewohnliche Differentialgleichungen* (*Math. Ann.*, t. 68, 1910, p. 220-269).

K. Yosida :

[1] *On the integration of the temporally...* (*Proc. Japan Acad.*, t. 30, 1954, n° 1, p. 19-23).

[2] *Idem*, II (*Proc. Japan Acad.*, t. 30, 1954, n° 4, p. 273-275).

(Manuscrit reçu le 15 octobre 1955.)