ALEXANDER GROTHENDIECK

La théorie de Fredholm

Bulletin de la S. M. F., tome 84 (1956), p. 319-384
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1956__84__319_0>

Bull. Soc. math. France,
84, 1956, p. 319 à 384.

LA THÉORIE DE FREDHOLM;

PAR

A. GROTHENDIECK.

INTRODUCTION.

1. Contenu du travail. — Comme l'a vu pour la première fois A. RUSTON [7], le domaine naturel de la théorie de Fredholm se trouve dans les « opérateurs à trace » de Schatten, qui se définissent spontanément dans la théorie des produits tensoriels topologiques. Le présent travail se propose, comme [7], de donner la théorie dans ce cadre général. Comme il a été conçu indépendamment ([1]), et diffère de [7] autant qu'il est possible pour deux exposés d'un sujet aussi limité, il ne m'a pas semblé inutile de le publier. Bien entendu, on ne saurait, dans un sujet comme la théorie de Fredholm, avoir de prétentions à l'originalité. Aussi cet article ne prétend-il être autre chose qu'un exposé didactique. Il présuppose une bonne connaissance de l'Algèbre linéaire et multilinéaire, ainsi que les rudiments de la théorie des espaces de Banach. (Nous suivrons la terminologie des *Éléments de Mathématique* de N. BOURBAKI.)

Je me suis surtout attaché à développer le *mécanisme algébrique* de la théorie de Fredholm de la façon la plus naturelle possible. Cela est fait au chapitre I, qui est de nature purement algébrique. L'usage intensif de produits tensoriels et de produits extérieurs, qui rebutera certains, est cependant au fond de la question et indispensable au bon entendement de la théorie. La théorie de Fredholm proprement dite s'obtient alors au chapitre II par d'immédiats prolongements par continuité, une fois posées les définitions fondamentales relatives aux produits tensoriels (chapitre II, § 1). Enfin le chapitre III montre comment, à l'aide de résultats généraux sur les produits tensoriels topologiques, la théorie générale peut s'appliquer à des cas assez

([1]) La première rédaction de cet exposé date de 1952. Le manuscrit définitif avait été accepté en 1953 par *Summa Brasiliensis Mathematicæ*, mais, à la suite de longs délais de publication, j'ai retiré mon manuscrit afin de le publier dans le présent journal.

Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article divers. Le cas classique est traité avec quelque détail, et divers cas non classiques sont esquissés.

Pour finir, remarquons que l'exposé se simplifie considérablement si l'on ne tient pas à traiter le cas singulier (zéros multiples du déterminant de Fredholm). Si l'on veut même se borner à l'existence et aux propriétés fondamentales du déterminant de Fredholm (la partie la plus importante de la théorie), il suffit de quelques pages, une fois connue la définition du produit tensoriel topologique.

2. Applications multilinéaires et fonctions polynômes. Dérivation des fonctions polynômes. — Nous considérons des espaces vectoriels sur un corps k. Soient F, $E_i (i = 1, \ldots, n)$ des espaces vectoriels; l'ensemble des applications n fois linéaires de $\prod_i E_i$ dans F est un espace vectoriel, noté $B(E_1, \ldots, E_n; F)$. Si $u(x_1, \ldots, x_n)$ est une telle application, et si l'on fixe p variables x_i, par exemple $x_1, \ldots, x_p$, on obtient une fonction multilinéaire par rapport aux $n-p$ autres variables, à valeurs dans F, c'est-à-dire un élément de $B(E_{p+1}, \ldots, E_n; F)$; et cet élément dépend p fois linéairement de $x_1, \ldots, x_p$. *On obtient de cette façon un isomorphisme canonique de $B(E_1, \ldots, E_n; F)$ sur $B(E_1, \ldots, E_p; B(E_{p+1}, \ldots, E_n; F))$.* [En particulier, $B(E, F; G)$ s'identifie à $L(E; L(F; G))$, donc (faisant $G = k$) l'espace $B(E, F)$ des formes bilinéaires sur $E \times F$ s'identifie à l'espace $L(E; F')$ des applications linéaires de E dans le dual F' de F.] Quand tous les E_i sont identiques à un même espace E, l'identification précédente induit aussi une identification des applications n fois linéaires *symétriques* de E^n dans F, à *certaines* applications p fois linéaires *symétriques* de E^p dans l'espace des applications $n-p$ fois linéaires *symétriques* de E^{n-p} dans F. Si les espaces E_i, F envisagés sont des *espaces de Banach* (sur les réels ou sur les complexes), et si l'on désigne alors par $B(E_1, \ldots, E_n; F)$ l'espace des applications n fois linéaires *bornées* de $\prod_i E_i$ dans F, muni de sa norme naturelle

$$(1) \qquad \| u \| = \sup_{\| x_i \| \leq 1} \| u(x_1, \ldots, x_n) \|,$$

alors l'isomorphisme algébrique envisagé plus haut induit un isomorphisme entre les espaces *normés* $B(E_1, \ldots, E_n; F)$ et $B(E_1, \ldots, E_p; B(E_{p+1}, \ldots, E_n))$.

Supposons de nouveau le corps des scalaires quelconque, mais de caractéristique o pour simplifier. On appelle *application monôme de degré n* de E dans F, une application f qui est de la forme

$$(2) \qquad f(x) = u(\underbrace{x, \ldots, x}_{n}),$$

où u est une application n fois linéaire de E^n dans F. Les applications monômes de degré n de E dans F forment manifestement un espace vectoriel; si E est muni d'une base (e_i), les applications monômes de degré n de E dans F sont celles qui s'expriment par des polynômes homogènes de degré n (à coefficients dans F) par rapport aux composantes λ_i de x suivant la base (e_i) (polynômes éventuellement infinis, si la base est infinie). Si f est une application monôme donnée par (2), on a aussi

$$f(x) = v(x, \ldots, x),$$

où v est la fonction n fois linéaire *symétrique* de E^n dans F donnée par

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} u(x_{\sigma.1}, \ldots, x_{\sigma.n})$$

(où $\mathfrak{S}_n$ désigne le n-ième groupe symétrique). Ainsi, dans la représentation (2), on peut toujours supposer que u est une fonction n fois linéaire *symétrique*, ce que nous ferons par la suite. Pour abréger, si u est une application n fois linéaire symétrique de E^n dans F, on notera simplement $x \to u(x)$ la fonction monôme de degré n qui lui correspond :

$$u(x) = u(x, \ldots, x),$$

notation qui ne risque pas d'entraîner confusion. Nous verrons plus loin que réciproquement, la fonction n fois linéaire symétrique $u(x_1, \ldots, x_n)$ est bien définie quand on connaît la fonction monôme $u(x)$ correspondante.

On appelle *application polynôme de degré* $\leqq n$ de E dans F, toute somme d'applications monômes de degré $\leqq n$ de E dans F. Elle se met de façon unique sous la forme

$$f(x) = f_0(x) + \ldots + f_n(x), \tag{3}$$

où les f_i sont des applications monômes de degré i (noter que les espaces des applications monômes des divers degrés sont linéairement indépendants). Soit f une application polynôme de E dans F, soient $x \in E$, $h \in E$; alors $f(x + \lambda h)$ est une fonction polynôme de la variable scalaire λ, à valeurs dans F et même dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de F. Sa dérivée pour $\lambda = 0$ est donc bien définie, on l'appelle *dérivée* (*partielle*) *de* f *en* x *suivant* h, et on la note $f'_h(x)$. Pour x et h fixés, cette dérivée dépend linéairement de f, il suffit donc de la calculer pour f fonction monôme de degré n, donnée par (2) (u étant supposé fonction n fois linéaire symétrique). On constate aussitôt que

$$u'_h(x) = nu(\underbrace{x, \ldots, x}_{n-1}, h). \tag{4}$$

On voit sur cette formule que $f'_h(x)$ est, pour x fixé, une fonction *linéaire* de h, [c'est-à-dire un élément de $L(E, F)$]. On l'appelle *dérivée* (*totale*) *de* *f au point* x, et on la note $f'(x)$. Donc, par définition,

$$(5) \qquad f'_h(x) \doteq f'(x)h.$$

D'autre part, on voit sur (4) que l'application $x \to f'(x)$ de E dans $L(E, F)$ est une application polynôme de degré $\leqq n-1$ (si f est de degré $\leqq n$); cette application est notée f' et appelée *fonction dérivée* de f. On peut alors définir la dérivée seconde f'' de f comme la dérivée de f'; pour $x \in E$ fixé, $f''(x)$ est un élément de $L(E; L(E; F))$, ou encore un élément de $B(E, E; F)$ (*voir* les identifications ci-dessus), et $x \to f''(x)$ est une application polynôme de degré $\leqq n-2$ de E dans $B(E, E; F)$. De façon générale, on définira par récurrence la dérivée p-ième $f^{p)}$ de f comme la dérivée de $f^{(p-1)}$; c'est une application polynôme de degré $\leqq n-p$ de E dans $B(\underbrace{E, \ldots, E}_{p}; F)$. Définissons par la même méthode de récurrence les dérivées partielles successives $f^{(p)}_{h_p, \ldots, h_1}(x)$; on aura :

$$(6) \qquad f^{(p)}_{h_p, \ldots, h_1}(x) = f^{(p)}(x)(h_1, \ldots, h_p).$$

Si $f(x) = u(x) = u(x, \ldots, x)$ (u, application n fois linéaire symétrique de E^n dans F), alors on voit de proche en proche, à l'aide de (4), que

$$(7) \qquad u^{(p)}(x)(h_1, \ldots, h_p) = n(n-1)\ldots(n-p+1)\,u(\underbrace{x, \ldots, x}_{n-p}, h_1, \ldots, h_p)$$

pour $p \leqq n$, et $u^{(p)}(x) = 0$ pour $p > n$. On en conclut d'abord que $f^{p)}(x)$ est (pour x fixé) une application p fois linéaire *symétrique* de E^p dans F (permutabilité de l'ordre des dérivations partielles), ce qui reste évidemment vrai pour toute fonction polynôme. On en déduit aussi que la fonction n fois linéaire symétrique $u(x_1, \ldots, x_n)$ est bien déterminée quand on connaît la fonction monôme qui lui correspond, puisque $n!\,u(x_1, \ldots, x_n)$ est égal, en vertu de (7), à $u^{n)}(x)(x_1, \ldots, x_n)$ (quel que soit d'ailleurs $x \in E$). On a même une formule explicite « finie » [et non plus « infinitésimale » comme (7)] pour exprimer $u(x_1, \ldots, x_n)$ à l'aide de $u(x)$:

$$(8) \qquad n!\,u(x_1, \ldots, x_n) = \Delta_{x_n, \ldots, x_1} u(0)$$
$$= \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-p} \leqq n} u(x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_{n-p}}).$$

Le deuxième membre de (8) est une différence n-ième de $u(x)$ (pour $x = 0$), qui se définit par récurrence par

$$\Delta_{x_1} u(x) = u(x + x_1) - u(x)$$

(considérée comme une fonction de x),

$$\Delta_{x_n, \ldots, x_1} u(x) = \Delta_{x_n}(\Delta_{x_{n-1}, \ldots, x_1} u(x)).$$

On vérifie immédiatement l'égalité des deux derniers membres de (8) (récurrence sur n). L'égalité avec le premier membre est donnée par un raisonnement classique.

Notons enfin qu'on a encore la *formule de Taylor*

$$(9) \qquad f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{n)}(x)(h, \ldots, h),$$

où f est une fonction polynôme de degré $\leqq n$. En effet, il suffit de vérifier cette formule quand f est une fonction monôme de degré $\leqq n$, et alors ce n'est autre que la formule du binôme

$$u(\underbrace{x+h, \ldots, x+h}_{p}) = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} u(\underbrace{x, \ldots, x}_{q}, \underbrace{h, \ldots, h}_{p-q}).$$

3. Applications analytiques d'un espace de Banach dans un autre. — Si E et F sont des espaces de Banach, on se borne à considérer les applications monômes et les applications polynômes de E dans F qui sont *continues*. Il revient au même de dire que les fonctions multilinéaires symétriques qui servent à les définir sont continues, ce qui (en vertu du théorème du graphe fermé) sera en effet pratiquement toujours le cas. Si $u(x) = u(x, \ldots, x)$ est une fonction monôme de degré n, on appelle *norme* de u la norme de la fonction n fois linéaire symétrique $u(x_1, \ldots, x_n)$ associée

$$\| u \| = \sup_{\| x_i \| \leqq 1} \| u(x_1, \ldots, x_n) \|.$$

La quantité $\sup_{\| x \| \leqq 1} \| u(x) \|$ est aussi une norme sur l'espace des fonctions monômes de degré n de E dans F, mais moins commode ; elle est équivalente à la précédente, car en vertu de (8) on a

$$\sup_{\| x \| \leqq 1} \| u(x) \| \leqq \| u \| \leqq k(n) \sup_{\| x \| \leqq 1} \| u(x) \|,$$

où

$$(kn) = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!(n-p)!} (n-p)^n \leqq \frac{1}{n!} \sum_{p} \binom{n}{p} n^p n^{n-p} = \frac{1}{n!} (n+n)^n = \frac{(2n)^n}{n!},$$

d'où (formule de Stirling) $k(n) = o((2e)^n)$, et enfin

$$(10) \qquad \sup_{\| x \| \leqq 1} \| u(x) \| \leqq \| u \| \leqq k(2e)^n \sup_{\| x \| \leqq 1} \| u(x) \|,$$

où k est une constante universelle.

Une application f d'un ouvert U de E dans F est dite *analytique*, si pour tout $x \in U$, on a

$$(11) \qquad f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(h)$$

pour $\| h \|$ assez petit, où les u_h forment une suite de fonctions monômes (u_n de degré n), telle que la série $\sum \| u_n \| z^n$ ait un rayon de convergence non nul, c'est-à-dire telle que

$$(12) \qquad \frac{1}{R} = \overline{\lim} \| u_n \|^{\frac{1}{n}} < +\infty$$

[d'ailleurs, l'inégalité (10) montre que pour vérifier (12), on peut remplacer les $\| u_n \|$ par les quantités $\sup\limits_{\| x \| \leqq 1} \| u_n(x) \|$]. Alors (11) converge en effet absolument pour $\| h \| < R$, uniformément pour $\| h \| \leqq R' < R$ et f sera continue. On constate de plus facilement que les u_n dans (11) sont déterminées de façon unique. Interprétées comme des applications n fois linéaires symétriques de E^n dans F, on peut considérer les $n\,!\,u_n$ comme les dérivées n-ièmes de f au point x. On vérifie qu'avec cette définition, la dérivée p-ième de f est une application analytique de U dans l'espace de Banach des applications p fois linéaires symétriques continues de E^p dans F, dont le développement au point x s'obtient en « dérivant terme à terme » le développement (11).

Une application f de E dans F est dite *analytique entière*, si elle est donnée par une série

$$(13) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x),$$

où les u_n forment une suite de fonctions monômes (u_n de degré n) telle que la série $\sum \| u_n \| z^n$ soit entière, c'est-à-dire telle que

$$(14) \qquad \lim \| u_n \|^{\frac{1}{n}} = 0$$

[ici encore, on peut remplacer $\| u_n \|$ par $\sup\limits_{\| x \| \leqq 1} \| u_n(x) \|$]. Pour de telles données, le deuxième membre de (13) converge bien absolument, uniformément pour $\| x \| \leqq M$ (M quelconque), vers une $f(x)$ qui sera une fonction analytique dans E (au sens de la définition donnée plus haut); la dérivée p-ième de f est aussi une fonction analytique entière sur E (à valeurs dans l'espace de Banach des applications p fois linéaires symétriques continues de E^p dans F), donnée par

$$(15) \qquad f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+p}^{(p)}(x),$$

soit, de façon explicite, par

$$(16) \qquad f^{(p)}(x)(h_1, \ldots, h_p) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+p}^{(p)}(x)(h_1, \ldots, h_p)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)\,!}{n\,!} u_{n+p}(\underbrace{x, \ldots x}_{n}, h_1, \ldots, h_p).$$

CHAPITRE I.

Partie algébrique.

1. Notations et rappels. — Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie ou infinie sur un corps k de caractéristique o; E' le dual de E (espace de toutes les formes linéaires sur E); $\langle x, x' \rangle$ la forme bilinéaire canonique sur $E \times E'$; $L(E, F)$ l'espace de toutes les applications linéaires de E dans F; $L_f(E, F)$ le sous-espace des applications de rang fini, qui peut s'identifier au produit tensoriel $E' \otimes F$ en faisant correspondre au tenseur $x' \otimes y$ l'application linéaire : $x \to \langle x, x' \rangle y$ [2]. Si $E = F$, nous écrirons $L(E)$ et $L_f(E)$. Le symbole $\overset{n}{\otimes} E$ $\big($resp. $\overset{n}{\wedge} E\big)$ désigne la puissance tensorielle (resp. extérieure ou antisymétrique) n-ième de E ([2], § 4 et 5); $\overset{n}{\otimes} E$ est en dualité séparée naturelle avec $\overset{n}{\otimes} E'$ $\big($qui s'identifie au dual de $\overset{n}{\otimes} E$ si E est de dimension finie$\big)$, car on a pour des tenseurs décomposables

$$(1) \qquad \langle x_1 \otimes \ldots \otimes x_n,\ x'_1 \otimes \ldots \otimes x'_n \rangle = \langle x_1, x'_1 \rangle \ldots \langle x_n, x'_n \rangle.$$

De même, $\overset{n}{\wedge} E$ est en dualité séparée avec $\overset{n}{\wedge} E'$ $\big($qui s'identifie au dual de $\overset{n}{\wedge} E$ si E est de dimension finie$\big)$ car on a, pour des multivecteurs décomposables,

$$(2) \qquad \langle x_1 \wedge \ldots \wedge x_n,\ x'_1 \wedge \ldots \wedge x'_n \rangle = \text{dét}(\langle x_i, x'_j \rangle).$$

Il existe un homomorphisme canonique φ_n de $\overset{n}{\otimes} E$ sur $\overset{n}{\wedge} E$ donné par

$$(3) \qquad \varphi_n(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$$

et un isomorphisme canonique a_n de $\overset{n}{\wedge} E$ dans $\overset{n}{\otimes} E$ tel que sa transposée définisse l'isomorphisme canonique de $\overset{n}{\otimes} E'$ sur $\overset{n}{\wedge} E'$; des formules précédentes, il résulte que a_n est *l'opérateur d'antisymétrisation* classique

$$(4) \qquad a_n(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma x_{\sigma.1} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma.n},$$

où $\mathfrak{S}_n$ est le n-ième groupe symétrique et ε_σ la *signature* de la permutation σ.

Soient $u_1, \ldots, u_n$, n applications linéaires de E dans un espace F; on appelle *produit tensoriel* $u_1 \otimes \ldots \otimes u_n$ de ces applications l'application linéaire de $\overset{n}{\otimes} E$ dans $\overset{n}{\otimes} F$ définie sur les tenseurs décomposables par

$$(5) \qquad (u_1 \otimes \ldots \otimes u_n)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = u_1 x_1 \otimes \ldots \otimes u_n x_n$$

et *produit extérieur* des applications linéaires u_i (noté $u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$ ou $\bigwedge_{1 \leqq i \leqq n} u_i$) l'application linéaire de $\overset{n}{\wedge} E$ dans $\overset{n}{\wedge} F$, telle que

$$(6) \qquad (u_1 \wedge \ldots \wedge u_n) = \frac{1}{n!} \varphi_n \circ (u_1 \otimes \ldots \otimes u_n) \circ a_n$$

où φ_n et a_n sont définis par les formules (3) et (4) (la première étant considérée comme relative à F). On vérifie immédiatement que $u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$ ne dépend pas de l'ordre des facteurs $u_1, \ldots, u_n$; ainsi l'application $(u_1, \ldots, u_n) \to u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$ est une application n fois linéaire symétrique de $(L(E, F))^n$ dans $L\left(\overset{n}{\wedge} E, \overset{n}{\wedge} F\right)$. De plus, pour $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u$, en désignant le produit extérieur de ces n applications par $\overset{n}{\wedge} u$, on obtient

$$(7) \qquad \left(\overset{n}{\wedge} u\right) x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = u x_1 \wedge \ldots \wedge u x_n,$$

ce qui redonne la notion classique de puissance extérieure d'une application linéaire ([2], § 5). Donc l'application

$$(u_1, \ldots, u_n) \to u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$$

peut aussi se définir comme l'application n fois linéaire symétrique de $(L(E, F))^n$ dans $\left(\overset{n}{\wedge} E, \overset{n}{\wedge} F\right)$, associée à la fonction monôme de degré n $u \to \overset{n}{\wedge} u$ (Introduction, § 2). Si les u_i sont décomposables

$$u_i = a'_i \otimes b_i \qquad (a'_i \in E', \ b_i \in F),$$

alors

$$\bigotimes_i u_i = A' \otimes B, \qquad \text{où} \quad A' = \bigotimes_i a'_i, \qquad B = \bigotimes_i b_i,$$

et (6) donne

$$\wedge u_i = \frac{1}{n!} ({}^t a_n A') \otimes (\varphi_n B) = \frac{1}{n!} \varphi_n A' \otimes \varphi_n B,$$

soit

$$(8) \quad (a'_1 \otimes b_1) \wedge \ldots \wedge (a'_n \otimes b_n) = \frac{1}{n!} (a'_1 \wedge \ldots \wedge a'_n) \otimes (b_1 \wedge \ldots \wedge b_n),$$

formule qui suffit pour calculer les produits extérieurs d'opérateurs de rang fini, les seuls qui nous intéresseront par la suite.

Plus généralement, soient (p_i, q_i) $(i = 1, \ldots, k)$ k couples d'entiers et, pour tout i, une application linéaire u_i de $\overset{p_i}{\wedge} E$ dans $\overset{q_i}{\wedge} F$; on appelle produit extérieur des u_i (noté $u_1 \wedge \ldots \wedge u_k$ ou $\bigwedge_i u_i$) l'application linéaire de $\overset{p}{\wedge} E$ dans $\overset{q}{\wedge} F$ $\left(\text{où } p = \sum p_i, \ q = \sum q_i\right)$ telle que

$$(9) \qquad U_1 \wedge \ldots \wedge U_k = \frac{1}{p!/p_1!\ldots p_k!} \varphi \circ (U_1 \otimes \ldots \otimes U_k) \circ a,$$

où φ est l'homomorphisme naturel de $\bigotimes_{1\leq i\leq k} \overset{q_i}{\wedge} F$ sur $\overset{q}{\wedge} F$ déduit de l'application k fois linéaire $(X_1, \ldots, X_k) \to X_1 \wedge \ldots \wedge X_k$ de $\prod_{1\leq i\leq k} \overset{q_i}{\wedge} F$ dans $\overset{q}{\wedge} F$, et α l'isomorphisme naturel de $\overset{p}{\wedge} E$ dans $\bigotimes_{1\leq i\leq k} \overset{p_i}{\wedge} E$, tel que sa transposée définisse l'homomorphisme naturel de $\bigotimes_{1\leq i\leq k} \overset{p_i}{\wedge} E'$ sur $\overset{p}{\wedge} E'$. Si les U_i sont décomposables, $U_i = X'_1 \otimes Y_i \left(X'_1 \in \overset{p_i}{\wedge} E',\ Y_i \in \overset{q_i}{\wedge} F\right)$, on obtient immédiatement la formule explicite

$$(10)\qquad \begin{aligned}&(X'_1 \otimes Y_1) \wedge \ldots \wedge (X'_k \otimes Y_k)\\ &= \frac{1}{p!/p_1!\ldots p_k!}(X'_1 \wedge \ldots \wedge X'_n) \otimes (Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n).\end{aligned}$$

Sur cette formule, on reconnaît que le produit extérieur des U_i est *commutatif* (c'est-à-dire ne dépend pas de l'ordre des facteurs), et *associatif* c'est-à-dire que si $1 \leq \alpha < \beta < \ldots < \gamma < k$, on a

$$(11)\qquad \begin{aligned}&U_1 \wedge U_2 \wedge \ldots \wedge U_k\\ &= (U_1 \wedge \ldots \wedge U_\alpha) \wedge (U_{\alpha+1} \wedge \ldots \wedge U_\beta) \wedge \ldots \wedge (U_{\gamma+1} \wedge \ldots \wedge U_k)\end{aligned}$$

(du moins quand les U_i sont de rang fini, en particulier si E est de dimension finie; mais on se ramène toujours à ce cas, comme on le constate aussitôt).

Proposition 1. — *Soit $u \in L_f(E, F)$; alors $\overset{n}{\wedge} u = 0$ pour $n >$ rang de u.*

En effet, la valeur de $\overset{n}{\wedge} u$ pour le multivecteur décomposable $\bigwedge_i x_i$ est égal au produit extérieur de n vecteurs ux_i situés dans un espace vectoriel de dimension $< n$, et est par suite nul.

Corollaire. — *Soient $u_i \in L_f(E, F)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Si k des u_i sont identiques à un même opérateur de rang $< k$, alors $\bigwedge_i u_i = 0$.*

En effet, en vertu de la commutativité et de l'associativité du produit extérieur, signalées plus haut, on aura

$$\wedge\, u_i = \left(\overset{k}{\wedge} u\right) \wedge V,$$

où V est une application linéaire de $\overset{n-k}{\wedge} E$ dans $\overset{n-k}{\wedge} F$. Comme $\overset{k}{\wedge} u = 0$, le corollaire s'ensuit.

2. Les formes fondamentales.

Définition 1. — *Soit E un espace vectoriel. Pour tout entier $n > 0$, on appelle forme n-linéaire fondamentale sur $(L_f(E))^n$ la forme linéaire* *symétrique* α_n *sur* $(L_f(E))^n$ *définie par*

$$(1) \qquad \alpha_n(u_1, \ldots, u_n) = \operatorname{Tr} u_1 \wedge \ldots \wedge u_n.$$

Comme $u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$ est de rang fini, sa trace est bien définie. Les formules (2) et (8) du paragraphe 1 donnent, pour des u_i décomposables,

$$(2) \qquad \alpha_n(x'_1 \otimes x_1, \ldots, x'_n \otimes x_n) = \frac{1}{n!} \operatorname{dét}(\langle x_i, x'_j \rangle)$$

ou, si chaque u_i est mis sous la forme $u_i = \sum_{\rho_i} x'^i_{\rho_i} \otimes x^i_{\rho_i}$:

$$(3) \qquad \alpha_n(u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \operatorname{dét}(\langle x^i_{\rho_i}, x'^j_{\rho_j} \rangle).$$

Les α_n étant des formes n fois linéaires symétriques, on écrit selon l'usage $\alpha_n(u)$ au lieu de $\alpha_n(u, \ldots, u)$; donc

$$(4) \qquad \alpha_n(u) = \operatorname{Tr} \overset{n}{\wedge} u \qquad \text{en particulier} \quad \alpha_1(u) = \operatorname{Tr} u.$$

Enfin, on convient de poser

$$(5) \qquad \alpha_0(u) = 1 \quad \text{(élément unité de } k\text{)}.$$

Signalons la formule

$$(6) \quad \alpha_n(Au_1, \ldots, Au_n) = \alpha_n(u_1A, \ldots, u_nA) \qquad [u_i \in L_f(E),\ A \in L(E)]$$

qui se vérifie immédiatement, au moyen de (2), en prenant des u_i décomposables et en notant que

$$A \circ (x' \otimes x) = x' \otimes Ax, \qquad (x' \otimes x) \circ A = ({}^tAx') \otimes x.$$

Dans le cas où A est inversible, la formule (6) peut s'écrire sous la forme

$$\alpha_n(Au_1A^{-1}, \ldots, Au_nA^{-1}) = \alpha_n(u_1, \ldots, u_n)$$

donc α_n est invariante par les automorphismes de E, ce qui est trivial. On prouve de la même façon la formule suivante [identique à (6) dans le cas où E est de dimension finie] :

$$(7) \quad \alpha_n(uA_1, \ldots, uA_n) = \alpha_n(A_1u, \ldots, A_nu) \qquad [u \in L_f(E),\ A_i \in L(E)].$$

Comme $L_f(E) = E' \otimes E$, la forme n fois linéaire α_n sur $L_f(E)$ peut aussi s'identifier à une forme linéaire sur $\overset{n}{\otimes}(E' \otimes E)$, donc à une forme $2n$ fois linéaire sur $E^n \times E'^n$, à savoir $\frac{1}{n!} \operatorname{dét}(\langle x_i, x'_j \rangle)$. Cette dernière est alternée par rapport à $x_1, \ldots, x_n$ et par rapport à $x'_1, \ldots, x'_n$; nous dirons d'une forme n fois linéaire sur $(L_f(E))^n$ qu'elle est *bialternée* si la forme $2n$ fois linéaire sur $E^n \times E'^n$ qu'elle définit est alternée à la fois par rapport aux x_i et par rapport aux x'_i. On voit qu'une telle forme n fois linéaire est aussi symétrique (considérer sa valeur pour des $u_i = x'_i \otimes x_i$). Il est alors immédiat, d'après la définition axiomatique des produits tensoriels et des produits extérieurs, que les formes n fois linéaires bialternées $f(u_1, \ldots, u_n)$ sur $(L_f(E))^n$ correspondent biunivoquement aux formes linéaires g sur $\overset{n}{\wedge} E' \otimes \overset{n}{\wedge} E$ par la formule

$$(8) \qquad f(u_1, \ldots, u_n) = g(u_1 \wedge \ldots \wedge u_n).$$

En particulier, si $A \in L\left(\overset{n}{\wedge} E\right)$, $\mathrm{Tr}(A \circ (u_1 \wedge \ldots \wedge u_n)$ est une forme n fois linéaire bialternée sur $(L_f(E))^n$, et l'on obtient ainsi toutes les formes n fois linéaires bialternées quand E est de dimension finie. Si $A = 1$ (opérateur identique dans $\overset{n}{\wedge} E$), on obtient de nouveau $\alpha_n(u_1, \ldots, u_n)$.

Proposition 2. — $\alpha_n(u_1, \ldots, u_n)$ *est, à un facteur constant près, la seule forme n fois linéaire bialternée sur* $(L_f(E))^n$ *qui satisfasse à l'égalité*

$$\alpha_n(Au_1, \ldots, Au_n) = \alpha_n(u_1 A, \ldots, u_n A) \qquad [A, u_i \in L_f(E)].$$

α_n est en effet bialternée, et vérifie (6) pour toute $A \in L(E)$) (pas nécessairement de rang fini). Réciproquement, soit f une forme n fois linéaire satisfaisant aux conditions de la proposition, elle est définie par une forme linéaire g sur $\overset{n}{\wedge} E' \otimes \overset{n}{\wedge} E$ au moyen de la formule (8). La condition sur g s'écrit

$$(9) \quad g(BU) = g(UB) \qquad \left[U = \bigwedge_i u_i,\ B = \overset{n}{\wedge} A, \qquad A, u_i \in L_f(E)\right]$$

(on vérifie en effet sur les tenseurs décomposés u_i la formule, valable aussi pour des opérateurs de rang infini,

$$Au_1 \wedge \ldots \wedge Au_n = \left(\overset{n}{\wedge} A\right)\left(\bigwedge_i u_i\right), \qquad u_1 A \wedge \ldots \wedge u_n A = \left(\bigwedge_i u_i\right)\left(\overset{n}{\wedge} A\right).$$

La formule (9) restera manifestement valable pour tout $U \in \overset{n}{\wedge} E' \otimes \overset{n}{\wedge} E$, et pour toute combinaison linéaire B d'opérateurs du type $\overset{n}{\wedge} A$ $[A \in L_f(E)]$; or, parmi ces combinaisons linéaires figurent tous les opérateurs du type

$$B = A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \qquad [A_i \in L_f(E)],$$

d'après une propriété bien connue des fonctions monômes associées à une fonction symétrique [Introduction, § 2, form. (8)]. La formule (9) reste encore vraie pour de tels B, et par suite pour tout $B \in \overset{n}{\wedge} E' \otimes \overset{n}{\wedge} E$. Quand E est de dimension finie, introduisons $F = \overset{n}{\wedge} E$; g est une forme linéaire sur $L(F)$ qui satisfait identiquement à (9), donc g est proportionnelle à la forme trace, et f à α_n. Cette conclusion reste valable si E est de dimension quelconque; en effet, le calcul de $f(u_1, \ldots, u_n)$, pour des u_i donnés, ne fait intervenir qu'un nombre fini d'opérateurs de rang fini u_i; on est ainsi ramené à démontrer cette chose pour des u_i s'annulant sur M et appliquant E dans l'*espace de dimension finie* N, où $E = M + N$ est une décomposition en somme directe fixée de E; de tels opérateurs correspondent biunivoquement aux opérateurs de l'espace N, de sorte que f définit une forme n fois linéaire sur $(L(N))^n$, ayant encore les propriétés de f, donc proportionnelle à α_n. Il est évident que la constante de proportionnalité ne varie pas quand on agrandit N et diminue M, et est par suite constante. Notons en passant qu'on démontre de la même façon que α_n est la seule forme n fois linéaire sur $(L_f(E))^n$ bialternée et invariante par les automorphismes de E. [Quand E est de dimension finie, cela signifie que la condition de la proposition 2 est satisfaite pour des $A \in L(E)$ qui sont *inversibles*].

Notons qu'en vertu de la définition 1 et du corollaire de la proposition 1, $\alpha_n(u_1, \ldots, u_n)$ est nul chaque fois que k des u_i sont identiques à un même opérateur u de rang $< k$.

3. Développement taylorien de $\det(\mathbf{1} + u)$. — Supposons E de dimension finie m, alors les α_n sont nuls pour $n > m$, puisque, dans ce cas, $\overset{n}{\wedge} E$ est nul, donc aussi $\overset{n}{\wedge} u$. Pour $n = m$, la définition de α_n et celle du déterminant ([2], § 6) donnent

$$\alpha_m(u) = \det u \qquad (m = \dim E). \tag{1}$$

On a aussi

$$\alpha_n(\mathbf{1}) = \dim \overset{n}{\wedge} E$$

(où $\mathbf{1}$ est l'opérateur identique dans E), d'où

$$\alpha_n(\mathbf{1}) = \binom{m}{n} \qquad (m = \dim E). \tag{2}$$

PROPOSITION 3. — *Soit E un espace vectoriel de dimension m; on a*

$$\alpha_n(u_1, \ldots, u_p, \underbrace{\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}}_{n-p}) = \left(\binom{m}{n} \Big/ \binom{m}{p}\right) \alpha_p(u_1, \ldots, u_p). \tag{3}$$

En effet, comme le premier membre est une forme p fois linéaire sur $(L(E))^p$ qui satisfait manifestement aux conditions de la proposition 2 (du moins pour A inversible, cas auquel on peut se borner en vertu du principe de prolongement des identités algébriques), il est proportionnel à $\alpha_p(u_1, \ldots, u_p)$; la valeur de la constante de proportionnalité s'obtient en faisant $u_1 = \ldots = u_p = \mathbf{1}$ et en appliquant la formule (2).

COROLLAIRE. — *Pour un opérateur u dans E, on a la formule fonda-*

mentale

$$(4)\qquad \text{dét}(\mathbf{1}+u)=\sum_{0}^{\infty}\alpha_n(u).$$

La somme du second membre est en fait finie, puisque $\alpha_n(u)$ est nul pour $n > m$. On a

$$\text{dét}(\mathbf{1}+u)=\alpha_m(\mathbf{1}+u)=\sum_{0\leq p\leq m}\binom{m}{p}\alpha_m(\underbrace{u,\ \ldots,\ u}_{p},\ \underbrace{\mathbf{1},\ \ldots,\ \mathbf{1}}_{m-p})$$

(formule du binôme), d'où la formule (4) en vertu de (3).

Notons maintenant que si E est un espace vectoriel de dimension finie ou infinie, u un opérateur de rang fini m dans E, $\alpha_n(u)$ est nul pour $n > m$, donc le deuxième membre de (4) est en fait une somme finie, que nous prendrons pour *définition* de $\text{dét}(\mathbf{1}+u)$ dans ce cas général. Il est immédiat que c'est aussi le déterminant de la restriction de $\mathbf{1}+u$ à tout sous-espace vectoriel F de E qui contient $u(E)$ [car sur la formule (2) du paragraphe 2, on voit que $\alpha_n(u_1,\ \ldots,\ u_n)$ ne change pas quand on prend la restriction des u_i à un sous-espace vectoriel F de E contenant les $u_i(E)$]. On en conclut que les propriétés usuelles du déterminant restent valables, en particulier on aura

$$(5)\qquad \text{dét}(\mathbf{1}+u)(\mathbf{1}+v)=\text{dét}(\mathbf{1}+u)\,\text{dét}(\mathbf{1}+v)\qquad [u,\ v\in L_f(E)]$$

[Noter que $(\mathbf{1}+u)(\mathbf{1}+v)$ a la forme $\mathbf{1}+w$, où $w=u+v+uv$ est de rang fini].

Supposons E de dimension finie pour simplifier, et désignons par $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$ les valeurs propres de u dans une extension algébriquement close du corps k; on sait que

$$\text{dét}(\mathbf{1}+zu)=(\mathbf{1}+\lambda_1 z)\ldots(\mathbf{1}+\lambda_n z)$$

(on met u sous forme d'une matrice nulle au-dessous de la diagonale). En comparant avec (4), on trouve, par identification des polynômes en z, $\text{dét}(\mathbf{1}+zu)$ et $\prod_i(\mathbf{1}+z\lambda_i)$

$$(6)\qquad \alpha_n(u)=\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_n}.$$

4. Les $D^p(u)$ et $R^p(u)$. — Il y a lieu d'introduire la dérivée p-ième de la fonction $u\to\alpha_n(u)$, dérivée qui est une application monôme de degré $n-p$ de $L_f(E)$ dans l'espace des formes p fois linéaires symétriques sur $(L_f(E))^p$, donnée par

$$(1)\qquad \alpha_n^p(u)(v_1,\ \ldots,\ v_p)=\frac{n\,!}{(n-p)\,!}\alpha_n(\underbrace{u,\ \ldots,\ u}_{n-p},\ v_1,\ \ldots,\ v_p)$$

(*voir* Introduction, § **3**). Il lui correspond l'application $n-p$ fois linéaire symétrique $(u_1, \ldots, u_{n-p}) \rightarrow \alpha_u^p(u_i, \ldots, u_{n-p})$ définie par la formule

$$(2) \quad \alpha_n^p(u_1, \ldots, u_{n-p})(v_1, \ldots, v_p) = \frac{n!}{(n-p)!}\alpha_n(u_1, \ldots, u_{n-p}, v_1, \ldots, v_p).$$

Si l'on pose pour abréger

$$(3) \qquad D(u) = \text{dét}(\mathbf{1}+u),$$

il est naturel de considérer comme « dérivée p-ième » de la fonction $u \rightarrow D(u)$ l'application $u \rightarrow D^p(u)$ de $L_f(E)$ dans l'espace des formes p fois linéaires symétriques sur $(L_f(E))^p$, telle que

$$(4) \qquad D^p(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^p(u),$$

c'est-à-dire de façon explicite

$$(5) \qquad D^p(u)(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^p(u)(v_1, \ldots, v_p)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!}\alpha_n(\underbrace{u, \ldots, u}_{n-p}, v_1, \ldots, v_p).$$

Les deuxièmes membres de ces formules ont bien un sens, car le terme de rang n est nul pour $n-p >$ rang de u (de sorte qu'en réalité on doit prendre une somme finie). Les $\alpha_n^p(u)(v_1, \ldots, v_p)$, donc aussi les $D^p(u)$, sont des formes p fois linéaires *bialternées* (*voir* plus haut § **2**) sur $L_f(E))^p$. On aura les développements tayloriens

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_n(u+v) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\alpha_n^p(u)(v, \ldots, v), \\ D(u+v) = \text{dét}(\mathbf{1}+u+v) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p(u)(\underbrace{v, \ldots, v}_{n-p}) \end{array}\right.$$

le premier n'est autre que la formule du binôme, et le second résulte du premier d'après les définitions. On aura plus généralement un développement taylorien de $D^p(u+v)$, que nous n'écrirons pas.

Nous allons aussi présenter ces résultats sous une forme légèrement différente. Si p et n sont deux entiers donnés, $p > 0$, $n \geqq 0$ et $u_1, \ldots, u_n$; $v_1, \ldots, v_{p-1}$ des éléments donnés de $L_f(E)$, considérons la forme linéaire

$$v \rightarrow \alpha_{n+p}^p(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1}, v) = \frac{(n+p)!}{n!}\alpha_{np}(u_{+1}, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v)$$

sur $L_f(E)$. Si E est de dimension finie, elle est de la forme $v \rightarrow \text{Tr}\, A v$, où A

est un élément bien déterminé de $L(E)$. Ceci reste vrai si E est de dimension quelconque, c'est-à-dire, en changeant de notations, que la fonction $v \to \alpha_{m+1}(w_1, \ldots, w_m, v)$ est de la forme $\operatorname{Tr} A v$ pour un $A \in L(E)$ bien choisi. Pour le voir, on peut supposer les w_i de la forme

$$w_i = x'_i \otimes x_i,$$

on aura alors pour $v = x' \otimes x$ [chap. II, form. (1)]

$$(7)\quad \alpha_{m+1}(w_1, \ldots, w_m, v) = \frac{1}{(m+1)!} \operatorname{dét} \begin{pmatrix} \langle x_1, x'_1 \rangle \ldots \langle x_1, x'_m \rangle \langle x_1, x' \rangle \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \langle x_m, x'_1 \rangle \ldots \langle x_m, x'_m \rangle \langle x_m, x' \rangle \\ \langle x, x'_1 \rangle \ldots \langle x, x'_m \rangle \langle x, x' \rangle \end{pmatrix} = \operatorname{Tr} A v,$$

où $A \in L(E)$ est donné symboliquement par le déterminant

$$(8)\quad A = \frac{1}{(m+1)!} \operatorname{dét} \begin{pmatrix} M & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix} \\ x'_1 \ldots x'_m & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad M = (\langle x_i, x'_j \rangle) \quad (*).$$

La formule

$$\alpha_{m+1}(w_1, \ldots, w_m, v) = \operatorname{Tr} A v$$

reste vraie pour toute $v \in L_f(E)$, d'où notre affirmation.

Revenant à $\alpha^p_{n+p}(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1}, v)$, nous pouvons déterminer sans ambiguïté un élément $R^p_n(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1})$ de $L(E)$ par la formule

$$(9)\quad \begin{aligned} &\operatorname{Tr} v R^p_n(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1}) \\ &= \alpha^p_{n+p}(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1}, v) \\ &= \frac{(n+p)!}{n!} \alpha_{n+p}(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_{p-1}, v), \end{aligned}$$

R^p_n sera considéré comme une application n fois linéaire symétrique de $(L_f(E))^n$ dans l'espace des applications $p-1$ fois linéaires symétriques de $(L_f(E))^{p-1}$ dans $L(E)$. On définira donc : $R^p_n(u) = R^p_n(\underbrace{u, \ldots, u}_{n})$ par

$$(10)\quad \begin{aligned} \operatorname{Tr} v R^p_n(u))v_1, \ldots, v_{p-1}) &= \alpha^p_{n+p}(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}, v) \\ &= \frac{(n+p)!}{n!} \alpha_{n+p}(\underbrace{u, \ldots, u}_{n}, v_1, \ldots, v_{p-1}, v); \end{aligned}$$

enfin, pour tout $u \in L_f(E)$, on posera

$$(11)\quad R^p(u) = \sum_{n=0}^{\infty} R^p_n(u);$$

(*) Le déterminant désigne le développement évident de la forme

$$\operatorname{dét} M \mathbf{1} + \sum_{i,j} \mu_{ij} x'_i \otimes x_j.$$

de façon plus explicite, $R^p(u)$ est une application $p-1$ fois linéaire de $L_f(E)^{p-1}$ dans $L(E)$, donnée par

$$(12)\qquad R^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}).$$

Les sommes dans (11) et (12) sont en fait finies, car on vérifie sur (10) que $R_n^p(u)$ est nul si $n >$ rang de u. Les formules (5) et (10) donnent aussitôt

$$(13)\qquad \mathrm{Tr}\, v R^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}) = D^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}, v) \qquad (p \geqq 1),$$

ce qui suffit à déterminer $R^p(u)$ à partir de $D^p(u)$. Il y a lieu d'écrire pour $p=0$

$$(14)\qquad R_n^0(u_1, \ldots, u_n) = \alpha_n(u_1, \ldots, u_n)\mathbf{1} \qquad \text{d'où} \qquad R_n^0(u) = \alpha_n(u)\mathbf{1},$$

$$(15)\qquad R^0(u) = D(u)\mathbf{1} \qquad [= \mathrm{dét}(\mathbf{1}+u)\mathbf{1}];$$

$R_n^1(u)$ et $R^1(u)$ sont, pour u donné, des éléments bien déterminés de $L(E)$. A cause de leur importance, on omettra en général l'exposant $\mathbf{1}$, et l'on aura

$$(16)\qquad \begin{cases} R(u) = R^1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(u), \\ \mathrm{Tr}\, v R_n(u_1, \ldots, u_n) = (n+1)\alpha_{n+1}(u_1, \ldots, u_n, v), \\ \qquad \mathrm{Tr}\, v R(u) = D^1(u)v. \end{cases}$$

5. **Relations récurrentes générales. Formules de Fredholm.** — Voici une formule permettant d'exprimer α_{m+1} à l'aide de α_m, et d'où résultera la théorie de Fredholm :

Proposition 4. — *Pour $n+1$ éléments $u_1, \ldots, u_n, v$ de $L_f(E)$, on a*

$$(1)\qquad (n+1)\alpha_{n+1}(u_1, \ldots, u_n, v)$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} \alpha_n(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i v, u_{i+1}, \ldots, u_n) + \alpha_n(u_1, \ldots, u_n)\mathrm{Tr}\, v$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} \alpha_n(u_1, \ldots, u_{i-1}, v u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n) + \alpha_n(u_1, \ldots, u_n)\mathrm{Tr}\, v.$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer la formule (1) pour

$$u_i = x'_i \otimes x_i, \qquad v = x' \otimes x,$$

mais on constate qu'elle se réduit alors, au facteur $\frac{1}{n!}$ et au changement de notation près, à la formule du développement du déterminant du deuxième membre du paragraphe 4, (7), par rapport aux éléments de la dernière ligne (resp. de la dernière colonne); on a en effet

$$u_i \circ v = \langle x, x'_i \rangle x' \otimes x_i, \qquad v \circ u_i = \langle x_i, x' \rangle x'_i \otimes x.$$

COROLLAIRE 1. — *On a, pour tout $u \in L_f(E)$,*

$$(2) \qquad R_n(u) = \alpha_n(u)\mathbf{1} - uR_{n-1}(u) = \alpha_n(u)\mathbf{1} - R_{n-1}(u)u$$

et plus généralement pour deux entiers $n > 0$, $p \geq 0$

$$(3) \quad R_n^{p+1}(u)(v_1, \ldots, v_p) = -uR_{n-1}^{p+1}(u)(v_1, \ldots, v_p) + \alpha_{n+p}^p(u)(v_1, \ldots, v_p)\mathbf{1} - \sum_{i=1}^{p} v_i R_u^p(u)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p)$$
$$= -(R_{n-1}^{p+1}(u)(v_1, \ldots, v_p))u + \alpha_{n+p}^p(u)(v_1, \ldots, v_p)\mathbf{1} - \sum_{i=1}^{p}(R_n^p(u)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p))v_i$$

(*l'accent* ^ *sur le v_i, signifie que ce terme doit être sauté*).

Démontrons, par exemple, l'égalité des deux premiers membres de (3). D'après la formule (1) et la définition des $R_n^q(u)$ [§ 4, form. (10)], la trace du produit à gauche des deux membres par une $v \in L_f(E)$ donne des quantités égales et l'on en déduit l'égalité cherchée. D'ailleurs, cette démonstration prouve que les formules (2) et (3) restent vraies pour $n = 0$, à condition de poser $R_{-1}^q(u) = 0$. En sommant chacun des trois membres de (2) [resp. (3)] pour $n = 0, 1, \ldots$, on obtient le corollaire suivant, qui contient l'essentiel de la théorie de Fredholm :

COROLLAIRE 2. — *On a, pour tout $u \in L_f(E)$,*

$$(4) \qquad (\mathbf{1} + u)R(u) = R(u)(\mathbf{1} + u) = \text{dét}(\mathbf{1} + u)\mathbf{1}$$

et plus généralement, pour $p \geq 0$

$$(5) \quad \begin{cases} (1 + u)R^{p+1}(u)(v_1, \ldots, v_p) \\ \quad = (D^p(u)(v_1, \ldots, v_p))\mathbf{1} - \sum_{i=1}^{p} v_i R^p(u)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p), \\ (R^{p+1}(u)(v_1, \ldots, v_p))(\mathbf{1} + u) \\ \quad = (D^p(u)(v_1, \ldots, v_p))\mathbf{1} - \sum_{i=1}^{p}(R^p(u)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p))v_i. \end{cases}$$

Des formules récurrentes (2), on déduit le calcul des $R_n(u)$ [$R_0(u) = 1$, d'après la deuxième formule (16) du paragraphe 4]

$$(6) \quad \begin{cases} R_0(u) = 1, \qquad R_1(u) = (\mathrm{tr}\, u)\mathbf{1} - u, \qquad \ldots \\ R_n(u) = \alpha_n(u)\mathbf{1} - \alpha_{n-1}(u)u + \alpha_{n-2}(u)u^2 - \ldots + (-1)^n u^n. \end{cases}$$

On pourrait, à partir de (6) ou directement de (1), trouver par récurrence une expression de $\alpha_n(u)$ en fonction des puissances de $\mathrm{Tr}\,u$, mais nous obtiendrons l'expression explicite, en passant, au chapitre II [§ 3, form. (5)].

Supposons E de dimension m; pour tout $z \in k$, on a

$$\text{dét}(z\mathbf{1} - u) = z^m \,\text{dét}\left(\mathbf{1} - \frac{1}{z} u\right) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \alpha_n(u) z^{m-n} = P(z)$$

[chap. II, form. (4)], où P est un polynôme de degré m d'une variable z, connu sous le nom de *polynôme caractéristique* de u. On voit alors sur (6) que

$$(-1)^m R_m(u) = P(u),$$

d'où il résulte que $P(u) = 0$ [car $R_m(u) = 0$, d'après la deuxième formule (16) du paragraphe 4]. Si E est de dimension infinie, $R_m(u)$ est encore nul si *m est assez grand.*

PROPOSITION 5. — *Soit u un opérateur de rang fini dans E. Pour que* $\mathbf{1} + u$ *soit inversible, il faut et il suffit que* $\text{dét}(\mathbf{1} + u) \neq 0$ *et, dans ce cas, on a la formule de Fredholm*

$$(7) \quad \begin{aligned}(\mathbf{1} + u)^{-1} &= \frac{1}{\text{dét}(1 + u)} R(u) \\ &= \mathbf{1} - \frac{u}{\text{dét}(1 + u)} R(u) \\ &= \mathbf{1} - u + u^2 - \ldots - (-1)^{n-1} u^{n-1} + \frac{(-1)^n u^n}{\text{dét}(1 + u)} R(u).\end{aligned}$$

Si $A(\mathbf{1} + u) = \mathbf{1}$, on a

$$A = \mathbf{1} - Au = \mathbf{1} + v, \qquad \text{où} \quad v = -Au \in L_f(E).$$

Mais de

$$(\mathbf{1} + u)(\mathbf{1} + v) = \mathbf{1}$$

on tire, en passant aux déterminants,

$$\text{dét}(\mathbf{1} + u)\ \text{dét}(\mathbf{1} + v) = 1,$$

ce qui implique : $\text{dét}(\mathbf{1} + u) \neq 0$. Réciproquement, si cette condition est vérifiée, la formule (4) signifie que le deuxième membre de (7), qui est alors défini, est un inverse de $(\mathbf{1} + u)$. En tenant compte de ce résultat, on voit que le produit du dernier membre de (7) par $(1 + u)$ est aussi identique à

$$\mathbf{1} + (-1)^{n-1} u^n + (-1)^n u^n = \mathbf{1},$$

ce qui achève de prouver (7).

On retrouve ainsi que les valeurs propres de u sont les zéros du polynôme en z dét$(\mathbf{1} - zu)$. On pourrait aussi facilement traiter le cas où dét$(\mathbf{1} + u) = 0$, en utilisant la formule (5) au lieu de (4). Pour éviter les redites, nons nous bornerons à le faire au chapitre II, paragraphe 4 dans le cadre des opérateurs de Fredholm.

6. Les tenseurs $d^p(u)$ et $r^p(u)$. — Les formules (6) et (7) du paragraphe 2 donnent aussitôt, en vertu des définitions, les deux groupes de formules de commutation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha^p_{n+p}(Au)(Av_1, \ldots, Av_p) &= \alpha^p_{n+p}(uA)(v_1A, \ldots, v_pA), \\ R^p_n(Au)(Av_1, \ldots, Av_{p-1}) &= R^p_n(uA)(v_1A, \ldots, v_{p-1}A), \\ D^p(Au)(Av_1, \ldots, Av_p) &= D^p(uA)(v_1A, \ldots, v_pA), \\ R^p(Au)(Av_1, \ldots, Av_{p-1}) &= R^p(uA)(v_1A, \ldots, v_{p-1}A); \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha^p_{n+p}(uA)(uA_1, \ldots, uA_p) &= \alpha^p_{n+p}(Au)(A_1u, \ldots, A_pu), \\ R^p_n(uA)(uA_1, \ldots, uA_{p-1}) &= R^p_n(Au)(A_1u, \ldots, A_{p-1}u), \\ D^p(uA)(uA_1, \ldots, uA_p) &= D^p(Au)(A_1u, \ldots, A_pu), \\ R^p(uA)(uA_1, \ldots, uA_{p-1}) &= R^p(Au)(A_1u, \ldots, A_pu) \end{aligned}\right.$$

$$[u, v_i \in L_f(E), A, A_i \in L)E)].$$

Si l'on fait $A = 1$ dans la première et la troisième des formules (2), on est amené, pour $u \in L_f(E)$, à définir des formes p fois linéaires $d^p_n(u)(A_1, \ldots, A_p)$ et $d^p(u)(A_1, \ldots, A_p)$ sur $(L(E))^p$, ou encore des formes linéaires notées $d^p_n(u)$, $d^p(u)$ sur $\overset{p}{\otimes} L(E)$, par les formules

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \langle d^p_n(u), A_1 \otimes \ldots \otimes A_p \rangle &= \alpha^p_{n+p}(u)(uA_1, \ldots, uA_p) \\ &= \alpha^p_{n+p}(u)(A_1u, \ldots, A_pu), \\ \langle d^p(u), A_1 \otimes \ldots \otimes A_p \rangle &= D^p(u)(uA_1, \ldots, uA_p) \\ &= D^p(u)(A_1u, \ldots, A_pu). \end{aligned}\right.$$

On a donc

$$(4)\qquad d^p(u) = \sum_{n=0}^{\infty} d^p_n(u),$$

la série du second membre étant en fait finie $[d^p_n(u) = 0$ si $n >$ rang de $u]$. En particulier

$$(5)\qquad d^0_n(u) = \alpha_n(u), \qquad d^0(u) = \text{dét}(\mathbf{1} + u).$$

Il est immédiat d'après (3), que l'application $2p$ fois linéaire

$$\langle d^p_n(u), x'_1 \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x'_p \otimes x_p \rangle$$

associée à $d^p_n(u)$ sur $E'^p \times E^p$ est alternée par rapport aux x'_i et par rapport aux x_i; en d'autres termes, considérée comme une forme p fois linéaire sur $(E'\otimes E)^p$, $d_n^p(u)$ est *bialternée* (§ 2). Il en est de même de $d^p(u)$.

Il y a lieu, pour les nécessités du calcul, d'introduire plus généralement une application $n+p$ fois linéaire

$$(u_1, \ldots, u_{n+p}) \to \delta_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$$

de $L_f(E)^{n+p}$ dans le dual de $\overset{p}{\otimes} L(E)$, telle que

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\langle \delta_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p}), A_1\otimes\ldots\otimes A_p\rangle \\ &= \alpha_{n+p}^p(u_1, \ldots, u_n)\,(u_{n+1}A_1, \ldots, u_{n+p}A_p) \end{aligned}$$

et l'application $n+p$ fois linéaire *symétrisée* de δ_n^p, notée $d_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$,

$$(7) \qquad d_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p}) = \frac{1}{(n+p)\,!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+p}} \delta_n^p(u_{\sigma.1}, \ldots, u_{\sigma(n+p)}).$$

La forme $d_n^p(u)$ définie par (3) n'est autre que

$$(8) \qquad d_n^p(u) = d_n^p(\underbrace{u, \ldots, u}_{n+p}) = \delta_n^p(\underbrace{u, \ldots, u}_{n+p}).$$

Pour $u_i = x_i' \otimes x_i$, on tire de (6)

$$(9) \quad \langle \delta_n^p(x_1'\otimes x_1, \ldots, x_{n+p}'\otimes x_{n+p}), A_1\otimes\ldots\otimes A_p\rangle$$
$$= \frac{1}{n\,!}\,\text{dét}\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1'\rangle \ldots \langle x_1, x_n'\rangle & \langle A_1x_1, x_{n+1}'\rangle \ldots \langle A_px_1, x_{n+p}'\rangle \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \langle x_{n+p}, x_1'\rangle\ldots\langle x_{n+p}, x_1'\rangle & \langle A_1x_{n+p}, x_{n+1}'\rangle\ldots\langle A_px_{n+p}, x_{n+p}'\rangle \end{pmatrix}.$$

Si nous mettons $\left(\overset{p}{\otimes} E\right)\otimes\left(\overset{p}{\otimes} E'\right)$ en dualité séparée avec $\overset{p}{\otimes} L(E)$, par l'accouplement naturel

$$(10) \quad \langle x_1\otimes\ldots\otimes x_p\otimes x_1'\otimes\ldots\otimes x_p', A_1\otimes\ldots\otimes A_p\rangle = \prod_{i=1}^{p}\langle A_ix_i, x_i'\rangle$$

la formule (9) montre que $\delta_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$ est un élément de $\left(\overset{p}{\otimes} E\right)\otimes\left(\overset{p}{\otimes} E'\right)$, donnée de façon abrégée par

$$(11) \quad \delta_p^n(x_1'\otimes x_1, \ldots, x_{n+p}'\otimes x_{n+p})$$
$$= \frac{1}{n\,!}\,\text{dét}\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1'\rangle \ldots \langle x_1, x_n'\rangle & \overbrace{x_1\ldots x_1}^{p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \langle x_{n+p}, x_1'\rangle\ldots\langle x_{n+p}, x_n'\rangle & x_{n+p}\ldots x_{n+p} \end{pmatrix}\otimes x_{n+1}'\otimes\ldots\otimes x_{n+p}'$$

où dét désigne le tenseur élément de $\overset{p}{\otimes} E$ obtenu en développant suivant la formule

$$\text{dét}((\alpha_{ij})_{i,j\leq m}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} \varepsilon_\sigma\,\alpha_{\sigma.1,1}\ldots\alpha_{\sigma.m,m}$$

dans laquelle l'ordre des facteurs est respécté et où les produits désignent des produits de *tenseurs* quand certains des α_{ij} sont des vecteurs.

La formule (11) permet de calculer $\delta_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$ pour des arguments $u_i \in E' \otimes E$ quelconques; donc par raison de linéarité $\delta_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$ est toujours un élément de $\left(\overset{p}{\otimes} E\right) \otimes \left(\overset{p}{\otimes} E'\right)$. D'après (7) et (8), il en est de même de $d_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$ et $d_n^p(u)$.

Pour des majorations ultérieures, il nous faut mettre (11) sous la forme obtenue en groupant dans son développement explicite tous les termes qui ne diffèrent que par leur coefficient numérique $\langle x_{\sigma.1}, x_1' \rangle \ldots \langle x_{\sigma.n}, x_n' \rangle$ et pour lesquels le facteur

$$x_{\sigma(n+1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n+p)}$$

est le même. Un calcul immédiat donne

$$(12)\quad \delta_n^p(x_1' \otimes x_1, \ldots, x_{n+p}' \otimes x_{n+p})$$
$$= \frac{1}{n!}\left(\sum_{(i_1, \ldots, i_p)} \varepsilon_{i_1, \ldots, i_p} \operatorname{dét}((\langle x_{j\alpha}, x_{j\beta}' \rangle)_{\alpha, \beta \leq n}) x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_p}\right) \otimes x_{n+1}' \otimes \cdots \otimes x_{n+p}'$$

où $(i_1, \ldots, i_p)$ désigne un système variable d'indices tous distincts, compris entre 1 et $n+p$; $j_1, \ldots, j_n$ la suite croissante des indices distincts des i, compris entre 1 et $n+p$; et $\varepsilon_{i_1 \ldots i_p}$ la signature de la permutation

$$(1, \ldots, n+p) \to (j_1, \ldots, j_n, i_1, \ldots, i_p).$$

Il est évident que les formes p lois linéaires sur $(L(E))^p$ définies par des éléments de $\left(\overset{p}{\otimes} E\right) \otimes \left(\overset{p}{\otimes} E'\right)$ s'identifient à certaines applications $p-1$ fois linéaires de $(L(E))^{p-1}$ dans $E' \otimes E = L_f(E)$ [considéré comme sous-espace du dual de $L(E)$]. Par suite, la donnée des

$$d_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p}) \in \left(\overset{p}{\otimes} E\right) \otimes \left(\overset{p}{\otimes} E'\right)$$

implique celle d'applications $p-1$ fois linéaires, notées $r_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$, de $(L(E))^{p-1}$ dans $L_f(E)$ telles que

$$(13)\quad \operatorname{Tr} A_p r_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})(A_1, \ldots, A_{p-1})$$
$$= \langle d_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p}), A_1 \otimes \cdots \otimes A_p \rangle \qquad [u_i \in L_f(E), A_i \in L(E)].$$

L'expression $r_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$ dépend des u_i de façon $(n+p)$ fois linéaire et symétrique et l'on a, en posant $r_n^p(u) = r_n^p(u, \ldots, u)$,

$$\operatorname{Tr} A_p r_n^p(u)(A_1, \ldots, A_{p-1}) = d_n^p(u)(A_1, \ldots, A_p);$$

or le second membre est, par définition

$$\alpha_{n+p}^p(u)(uA_1, \ldots, uA_p) = \operatorname{Tr}(R_n^p(u)(uA_1, \ldots, uA_{p-1}))uA_p$$

ou

$$\alpha_{n+p}^p(u)(A_1 u, \ldots, A_p u) = \operatorname{Tr}(R_n^p(u)(A_1 u, \ldots, A_{p-1} u))A_p u$$

[form. (3) et § 4, form. (9)]; on en déduit

$$(14)\qquad r_n^p(u)(A_1, \ldots, A_{p-1}) = R_n^p(u)(uA_1, \ldots, uA_{p-1})u = uR_n^p(u)(A_1u, \ldots, A_{p-1}u).$$

On pose enfin

$$(15)\qquad r^p(u) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n^p(u)$$

(la somme du second membre est en fait finie); on a ainsi une application $p-1$ fois linéaire de $(L(E))^{p-1}$ dans $L_f(E)$ satisfaisant à

$$(16)\qquad \mathrm{Tr} A_p r^p(u)(A_1, \ldots, A_{p-1}) = d^p(u)(A_1, \ldots, A_p)$$

et liée à R^p par

$$(17)\qquad r^p(u)(A_1, \ldots, A_{p-1}) = (R^p(u)(uA_1, \ldots, uA_{p-1}))u = uR^p(u)(A_1u, \ldots, A_{p-1}u)$$

(ces deux formules sont conséquences directes de (13) et (14), en sommant par rapport à n). En particulier, nous écrirons $r_n(u)$ et $r(u)$ au lieu de $r_n^1(u)$ et $r^1(u)$ pour désigner (u étant fixé) les éléments de $L_f(E)$ définis par

$$(18)\qquad r_n(u) = uR_n(u) = R_n(u)u, \qquad r(u) = uR(u) = R(u)u.$$

A priori, la considération des D^p et R^p est plus naturelle et plus simple que celle des d^p et r^p; mais ces derniers définissent de véritables tenseurs, aussi sont-ils plus faciles à manier dans la théorie des équations intégrales, car ils pourront s'exprimer par des « noyaux » simples. Signalons tout de suite une autre expression de la formule de résolution de Fredholm [§ 5, form. (7)]

$$(19)\qquad (\mathbf{1} + u)^{-1} = \mathbf{1} - \frac{1}{\det(1+u)} r(u)$$

résultant de ce qne $uR(u) = r(u)$ [form. (18)].

On pourrait aisément exprimer les D^p au moyen des d^p; nous nous dispensons d'écrire la formule.

CHAPITRE II.

Théorie de Fredholm dans les espaces de Banach.

La théorie qui va suivre est une application immédiate des généralités algébriques qui précédaient. Les paragraphes 1 à 4 vaudraient sans modification pour les espaces normés complets sur un corps valué complet de caractéristique zéro quelconque (le chapitre I correspondrait au cas de la valuation triviale). Pour ne pas gêner certains lecteurs, nous supposerons cependant qu'il s'agit d'espaces normés complets sur le corps R des réels ou le corps C des complexes, c'est-à-dire d'espaces de Banach.

Si E est un espace de Banach, E' désigne maintenant son dual topologique, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires bornées sur E, muni de sa norme naturelle. Si F est un deuxième espace de Banach, $L(E, F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F, $B(E, F)$ l'espace des formes bilinéaires continues sur $E \times F$; ces deux espaces sont munis de normes naturelles bien connues.

1. Produit tensoriel topologique d'espaces de Banach. — Soient $E_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ n espaces de Banach ($n \geqq 2$). Introduisons, avec R. Schatten [8], sur le produit tensoriel $\bigotimes E_i$ des E_i, la norme $u \to \| u \|_1$

$$\| u \|_1 = \inf \sum_i \| x_1^i \| . \| x_2^i \| \ldots \| x_n^i \|, \tag{1}$$

le inf étant pris pour toutes les suites finies $(x_1^j, x_2^j, \ldots, x_n^j)_{1 \leqq j \leqq N}$ dans $\prod_i E_i$, telles que l'on ait

$$u = \sum_j x_1^j \otimes x_2^j \otimes \ldots \otimes x_n^j.$$

Il est immédiat que $\| u \|_1$ est une semi-norme sur $\bigotimes E_i$; nous allons voir que c'est une norme. Si F est un espace de Banach quelconque, et A une application linéaire de $\bigotimes E_i$ dans F, continue au sens de la semi-norme $\| u \|_1$, l'application multilinéaire $\tilde{A}$ qu'elle définit,

$$\tilde{A}(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)$$

est continue et a une norme $\leqq \| A \|$, car on a évidemment

$$\| x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \|_1 \leqq \| x_1 \| \ldots \| x_n \|.$$

Réciproquement, si A est une application linéaire de $\bigotimes E_i$ dans F telle que $\tilde{A}$ soit continue, on voit d'après la définition (1) que A est continue et a une norme $\leqq \| \tilde{A} \|$. Il en résulte que si $u \in \bigotimes E_i$ est tel que $\| u_1 \| = 0$, toute application linéaire de $\bigotimes E_i$ dans un espace de Banach F, définie par une application multilinéaire *continue* de $\prod_i E_i$ dans F s'annule sur u. Il en sera en particulier ainsi des formes linéaires définies par les éléments de $\bigotimes E'_i$. Or, la dualité entre E_i et E'_i étant séparée en vertu du théorème de

Hahn-Banach (²), il en est de même de la dualité entre $\otimes E_i$ et $\otimes E'_i$, d'où il résulte que u est nul. Nous pouvons maintenant poser la

DÉFINITION 1. — *Soient E_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ n espaces de Banach. On appelle produit tensoriel complété des E_i, et l'on note $\hat{\bigotimes}_{1 \leq i \leq n} E_i$ l'espace de Banach complété de $\bigotimes_{1 \leq i \leq n} E_i$ pour la norme $\|u\|_1$ définie par la formule* (1). *Les éléments de cet espace sont nommés noyaux de Fredholm.*

Nous avons obtenu en passant le

THÉORÈME 1. — *Soient F et E_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ des espaces de Banach; il existe un isomorphisme canonique (pour les structures d'espaces vectoriels normés) entre l'espace des applications n fois linéaires continues de $\prod E_i$ dans F et l'espace des applications linéaires continues de $\hat{\otimes} E_i$ dans F.*

Ce théorème justifie le nom de produit tensoriel topologique donné à $\hat{\otimes} E_i$.

COROLLAIRE. — *Le dual de $\hat{\otimes} E_i$ est isomorphe (en tant qu'espace normé) à l'espace des formes n fois linéaires continues sur $\prod E_i$.*

On voit, soit directement, soit à l'aide du théorème 1, que l'opération « produit tensoriel complété » est associative (à des isomorphismes canoniques près). De plus, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (n-ième groupe symétrique), il lui correspond canoniquement un isomorphisme de $\hat{\otimes} E_i$ sur $\hat{\otimes} E_{\sigma.i}$, noté encore σ, donné sur des tenseurs décomposables par

$$\sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_{\sigma.1} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma.n}.$$

Soient maintenant E et F deux espaces de Banach; il existe un isomorphisme naturel $u \to \tilde{u}$ de $E' \otimes F$ dans $L(E, F)$, dont l'image est l'ensemble des applications linéaires continues de rang fini de E dans F. L'application bilinéaire $(x', y) \to x' \otimes y$ de $E' \times F$ dans $L(E, F)$ qui lui correspond est de norme ≤ 1, donc l'application $u \to \tilde{u}$ se prolonge par continuité en une application linéaire de norme ≤ 1 de $E' \hat{\otimes} F$ dans $L(E, F)$ (th. 1), notée encore $u \to \tilde{u}$:

$$\|\tilde{u}\| \leq \|u\|_1, \tag{2}$$

(²) Exceptionnellement, le théorème de Hahn-Banach semble nécessaire pour prouver que l'on a une vraie norme : j'ignore s'il en est encore ainsi si l'on part d'espaces normés complets sur un corps valué complet arbitraire. Sinon, il convient de regarder le quotient de $\bigotimes_i E_i$ par le sous-espace des éléments de norme nulle, muni de la norme quotient, comme le vrai produit tensoriel topologique des E_i.

DÉFINITION 2. — *Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle application de Fredholm (ou application nucléaire, ou application à trace) de E dans F, une application se trouvant dans l'image de l'application canonique de $E'\hat{\otimes} F$ dans $L(E, F)$. L'espace des applications de Fredholm de E dans F s'identifie donc à un espace quotient de $E'\hat{\otimes} F$. La norme quotient est appelée norme-trace, et notée encore $u \rightarrow \|u\|_1$.*

Dans tous les cas connus, l'application $u \rightarrow \tilde{u}$ de $E'\hat{\otimes} F$ dans $L(E, F)$ est biunivoque; alors l'espace des applications de Fredholm de E dans F s'identifie à $E'\hat{\otimes} F$ (avec sa norme), et sur $E'\otimes F$ la norme-trace est identique à la norme induite par $E'\hat{\otimes} F$. Malheureusement, on ne sait pas s'il en est encore ainsi dans le cas général ([3]), ce qui nécessite parfois quelques précautions. En tous cas, si $u \in E'\hat{\otimes} F$, $x \in E$, nous écrirons le plus souvent ux ou $u.x$ au lieu de $\tilde{u}x$, ce qui est évidemment licite.

Soient E_i, $F_i (i = 1, 2)$ des espaces de Banach, u_i une application linéaire continue de E_i dans $F_i (i = 1, 2)$; $u_1 \otimes u_2$ est une application linéaire de $E_1 \otimes E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$, correspondant à l'application bilinéaire

$$(x_1, x_2) \rightarrow u_1 x_1 \otimes u_2 x_2$$

de $E_1 \times E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$, qui est de norme $\leqq \|u_1\|.\|u_2\|$. Donc (th. 1), on a

$$\|u_1 \otimes u_2\| \leqq \|u_1\|.\|u_2\| \tag{3}$$

et $u_1 \otimes u_2$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ dans $F_1 \hat{\otimes} F_2$, notée encore $u_1 \otimes u_2$, et qui satisfait à (3). Il est immédiat que $u_1 \otimes u_2$ dépend bilinéairement des arguments u_1 et u_2 et qu'on a la formule de transitivité

$$(v_1 \otimes v_2) \circ (u_1 \otimes u_2) = (v_1 \circ u_1) \otimes (v_2 \circ u_2) \tag{4}$$

qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter.

On remarquera que si u_1 et u_2 sont des isomorphismes vectoriels topologiques, il n'en est souvent pas de même de $u_1 \otimes u_2$. En effet, dire que $u_1 \otimes u_2$ est un isomorphisme vectoriel topologique signifie (en transposant) que toute forme bilinéaire continue sur $E_1 \times E_2$ peut se prolonger en une forme bilinéaire continue sur $F_1 \times F_2$, ce qui, en général, est faux. De plus, si u est une application de Fredholm de E dans F, qui applique E dans un sous-espace vectoriel fermé F_0 et qui s'annule sur un sous-espace vectoriel fermé N_0 de E, les applications $E/N_0 \rightarrow F$ et $E \rightarrow F_0$ déduites de u ne sont, le plus souvent, pas des applications de Fredholm. Cependant, si u_1

([3]) *Voir* [5], chap. I, § 5, où ce problème est étudié en détail et où je donne des cas étendus où il se résoud par l'affirmative.

et u_2 sont des isomorphismes (resp. des isomorphismes métriques) et si pour $i = 1, 2$ il existe une projection continue p_i de F_i sur E_i identifié à un sous-espace de F_i (resp. une projection p_i de norme 1) $u_1 \otimes u_2$ est un isomorphisme (resp. un isomomorphisme métrique) car, dans ce cas, $p_1 \otimes p_2$ est une application linéaire continue (resp. de norme 1) de $F_1 \hat{\otimes} F_2$ dans $E_1 \hat{\otimes} E_2$, inverse à gauche de $u_1 \otimes u_2$.

Soient maintenant E, F, G, H des espaces de Banach,

$$u \in E' \hat{\otimes} F, \qquad A \in L(G, E), \qquad B \in L(F, H);$$

on pose

$$(5) \qquad u.A = ({}^tA \otimes \mathbf{1})u \in G' \hat{\otimes} E, \qquad B.u = (\mathbf{1} \otimes B)u \in E' \hat{\otimes} H.$$

Si $u \in E' \otimes F$, $u.A \in G' \otimes E$ et $B.u \in E' \otimes H$ ne sont autres que les *composés* ordinaires, quand on interprète u, $u.A$ et $B.u$ comme des opérateurs de rang fini. On en conclut, en prolongeant par continuité,

$$(6) \qquad \widetilde{u.A} = \tilde{u}.A, \qquad \widetilde{B.u} = B.\tilde{u}.$$

En opérant de même à partir de $u \in E' \otimes H$, on trouve les formules d'associativité

$$(7) \qquad B(u.A) = (B.u)A$$

et

$$(8) \qquad A_1(A_2.u) = (A_1.A_2)u, \qquad (u.B_1)B_2 = u(B_1.B_2)$$

que nous n'expliciterons pas.

Enfin, si E, F, G sont trois espaces de Banach, et si

$$u \in E' \hat{\otimes} F, \qquad v \in F' \hat{\otimes} G,$$

on a évidemment

$$\tilde{v}.u = v.\tilde{u} \in E' \hat{\otimes} G$$

(car il suffit de le vérifier pour $u \in E' \otimes F$, $v \in F' \otimes G$); on appelle cet élément de $E' \hat{\otimes} G$ le composé des noyaux de Fredholm v et u, et on le note $v.u$ ou simplement vu. On a $\widetilde{v.u} = \tilde{v}.\tilde{u}$; si, de plus, $w \in G' \hat{\otimes} H$, on a la formule d'associativité

$$w(vu) = (wv)u.$$

En particulier, si $E = F = G$, *on voit que* $E' \hat{\otimes} E$ *est une algèbre normée complète.* Si E est de dimension infinie, cette algèbre n'a pas d'élément unité car il devrait lui correspondre l'opérateur unité dans E; or, un opérateur de Fredholm est toujours un opérateur *compact* (limite, pour la norme uniforme des opérateurs, d'opérateurs de rang fini), donc la boule unité de E serait relativement compacte et E serait de dimension finie. Aussi y a-t-il lieu de considérer, pour E de dimension infinie, une algèbre normée complète obtenue par adjonction d'une unité à $E' \hat{\otimes} E$.

Bien qu'il ne nous soit pas nécessaire dans la théorie développée ici, signalons le résultat suivant, qui concrétise les éléments d'un produit tensoriel complété $E \hat{\otimes} F$: *Les éléments de $E \hat{\otimes} F$ sont des sommes de séries absolument convergentes*

$$u = \sum \lambda_i x_i \otimes y_i,$$

où (λ_i) est une suite sommable de scalaires positifs, et où (x_i) [resp. (y_i)] est une suite d'éléments de la boule unité de E (resp. F). Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut supposer que

$$\sum \lambda_i \leq \| u \|_1 + \varepsilon.$$

[On notera d'ailleurs que pour des données (λ_i), (x_i), (y_i) comme ci-dessus, la série $\sum \lambda_i x_i \otimes y_i$ converge toujours absolument dans $E \hat{\otimes} F$ vers un élément de norme $\leq \sum \lambda_i$.]

Démonstration. — Soient A (resp. B) l'ensemble des éléments de E (resp. F) de norme égale à 1, $I = A \times B$, $i \to x_i$ et $i \to y_i$ les projections de I sur les facteurs A, B; soit $l^1(I)$ l'espace de toutes les familles sommables de scalaires (λ_i) dont l'ensemble d'indices est I. Il est immédiat que l'application $(\lambda_i) \to \sum \lambda_i x_i \otimes y_i$ de $l^1(I)$ dans $E \hat{\otimes} F$ applique la boule unité du premier espace sur une partie dense de la boule unité du second. Il en résulte qu'on a en fait un homomorphisme métrique du premier espace *sur* le second, d'où le résultat annoncé.

Dans la représentation $u = \sum \lambda_i x_i \otimes y_i$ précédente, on peut d'ailleurs supposer que $x_i \to 0$ et $y_i \to 0$, en remplaçant (λ_i) par une série moins rapidement convergente, ce qui permet de multiplier la suite (x_i) et la suite (y_i) par une suite de scalaires tendant vers 0. Il en résulte que la forme linéaire sur $B(E, F)$ définie par un $u \in E \hat{\otimes} F$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur les produits de deux compacts. [Il est facile de voir que toute forme linéaire sur $B(E, F)$ continue pour la topologie précédente appartient à $E \hat{\otimes} F$, mais peu importe ici.] Notons maintenant que pour $u \in E \hat{\otimes} F$, dire que la forme bilinéaire $\tilde{u}$ sur $E' \times F'$ définie par u est nulle, signifie que u est orthogonal à $E' \otimes F'$; donc, dire que $\tilde{u} = 0$ implique $u = 0$, signifie que $E' \otimes F'$ est dense dans $B(E, F)$ pour la topologie faible définie par $E \hat{\otimes} F$. D'après ce qui précède, il suffit pour ceci que $E' \otimes F'$ soit dense dans $B(E, F)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les produits de deux compacts. Mais pour avoir ce résultat il suffit que dans E ou F, l'identité puisse s'approcher, uniformément sur tout compact, par des endomorphismes de rang fini (ce qui permettra en effet, par composition avec une forme bilinéaire continue A quelconque, d'approcher celle-ci par des formes bilinéaires de rang fini, uniformément sur les produits de compacts). Cette condition semble toujours remplie dans les cas que l'on rencontre pratiquement.

2. Prolongement des fonctions fondamentales à $E' \hat{\otimes} E$.

PROPOSITION 1. — *Soit E un espace de Banach; pour $n > 0$, $p \geq 0$, les applications n fois linéaires $\alpha_n(u_1, \ldots, u_n)$ [resp. $\alpha^p_{n+p}(u_1, \ldots, u_n)$, resp. $R^p_n(u_1, \ldots, u_n)$] de $(E' \otimes E)^n$ dans le corps des scalaires [resp. dans l'espace des formes p fois linéaires continues sur $(E' \hat{\otimes} E)^p$, resp. dans l'espace des applications $p-1$ fois linéaires continues de $(E' \hat{\otimes} E)^{p-1}$ dans $L(E)$] sont continues et se prolongent par suite en des applications n fois linéaires de $(E' \hat{\otimes} E)^n$ dans le même espace. De même, les applications $n+p$ fois linéaires $d^p_n(u_1, \ldots, u_{n+p})$ [resp. $r^p_n(u_1, \ldots, u_{n+p})$] de $(E' \otimes E)^{n+p}$ dans $\left(\hat{\bigotimes}^p E\right) \hat{\otimes} \left(\hat{\bigotimes}^p E'\right)$ [resp. dans l'espace des applications $p-1$ fois linéaires continues de $(L(E))^{p-1}$ dans $E' \hat{\otimes} E$] sont continues et se prolongent par continuité en des applications $n+p$ fois linéaires de $(E' \hat{\otimes} E)^{n+p}$ dans le même espace.*

On a les majorations :

$$
(1) \quad \left\{
\begin{array}{ll}
\| \alpha_n(u_1, \ldots, u_n) \| \leq \dfrac{k_n}{n\,!} \| u_1 \|_1 \ldots \| u_n \|_1, & \text{i. e.} \quad \| \alpha_n \| \leq \dfrac{k_n}{n\,!}, \\
\| \alpha^p_{n+p}(u_1, \ldots, u_n) \| \leq \dfrac{k_{n+p}}{n\,!} \| u_1 \|_1 \ldots \| u_n \|_1, & \text{i. e.} \quad \| \alpha^p_{n+p} \| \leq \dfrac{k_{n+p}}{n\,!}, \\
\| R^p_{n+p}(u_1, \ldots, u_n) \| \leq \dfrac{k_{n+p}}{n\,!} \| u_1 \|_1 \ldots \| u_n \|_1, & \text{i. e.} \quad \| R^p_n \| \leq \dfrac{k_{n+p}}{n\,!}, \\
\| d^p_n(u_1, \ldots, u_{n+p})_1 \| \leq (n+p) \ldots (n+1) \dfrac{k_n}{n\,!} \| u_1 \|_1 \ldots \| u_{n+p} \|_1, & \\
\| r^p_n(u_1, \ldots, u_{n+p}) \| \leq (n+p) \ldots (n+1) \dfrac{k_n}{n\,!} \| u_1 \|_1 \ldots \| u_{n+p} \|_1, &
\end{array}
\right.
$$

où l'on pose

$$
(1\ bis) \qquad k_n = \sup_{\substack{x_i \in E^n \\ x'_j \in E'^n \\ \| x_i \|, \| x' \| \leq 1}} \text{dét}\left((\langle x_i, x'_j \rangle)_{i,j \leq n} \right).
$$

De plus, quel que soit $u \in E' \hat{\otimes} E$, les séries

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} D(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(u),\\ D^p(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^p_{n+p}(u),\\ R^p(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} R^p_n(u),\\ d^p(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} d^p_n(u),\\ r^p(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^p_n(u),\end{aligned}\right.$$

sont absolument convergentes dans le corps des scalaires $\Big[$*resp. dans l'espace des formes p fois linéaires continues sur* $(E' \hat{\otimes} E)^p$*; resp. dans l'espace des applications p — 1 fois linéaires de* $(E' \hat{\otimes} E)^{p-1}$ *dans* $L(E)$*; resp. dans* $\left(\hat{\otimes}^p E\right) \hat{\otimes} \left(\hat{\otimes}^p E'\right)$*; resp. dans l'espace des applications p — 1 fois linéaires de* $(L(E))^{p-1}$ *dans* $E' \hat{\otimes} E\Big]$ *et l'on obtient ainsi des fonctions entières de la variable* $u \in E' \hat{\otimes} E$*. Par suite,* $D^p(u)$ *n'est autre que la dérivée p-ième de* $D(u)$ *(voir Introduction, § 3). De plus, les quantités définies dans le précédent énoncé satisfont à toutes les identités données au chapitre* I.

Démonstration. — Nous commencerons par prouver les inégalités (1) pour des $u_i \in E' \otimes E$; alors les applications multilinéaires considérées pourront se prolonger et les formules (1) resteront vraies pour tout système de u_i dans $E' \hat{\otimes} E$. En vertu des définitions de $\alpha^p_{n+p}(u_1, \ldots, u_n)$ et $R^p_n(u_1, \ldots, u_n)$, les deuxième et troisième formules (1) résultent de la première; la cinquième formule (1) se déduit de la quatrième car on vérifie immédiatement que l'application $p - 1$ fois linéaire de $(L(E))^{p-1}$ dans $E' \hat{\otimes} E$ définie par un élément W de $\left(\hat{\otimes}^p E\right) \hat{\otimes} \left(\hat{\otimes}^p E'\right)$ a une norme au plus égale à celle de W (d'après le théorème 1, il suffit de le vérifier pour W décomposable). Démontrons les première et quatrième inégalités, lorsque les $\tilde{u}_i$ sont décomposables : $u_i = x'_i \otimes x_i$ (le théorème 1 permettra de passer au cas général); dans ces conditions

$$\alpha_n(u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{n!} \operatorname{dét}(\langle x_i, x'_j \rangle)$$

et le deuxième membre est majoré en module par $\frac{k_n}{n!}$ si les x_i, x'_i sont de norme ≤ 1, d'où la première inégalité. En vertu de la formule (7) du chapitre I, (§ 6), on est ramené à démontrer la quatrième inégalité pour $\delta_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$ et la formule (12) du même paragraphe nous donne le résultat. Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que les séries intervenant dans (2) sont des séries entières; les formules établies au chapitre I se prolongeront trivialement par continuité. Or, de la majoration classique de HADAMARD et de (1 *bis*) on déduit que $k_n \leq n^{\frac{n}{2}}$, d'où, en vertu de la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$:

$$(3) \qquad \frac{k_n}{n!} \leq \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!} \leq k\left(\frac{e^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}},$$

où k est une constante universelle facile à déterminer; il s'ensuit que les séries (2) sont des séries entières.

En étudiant l'ordre du déterminant de Fredholm

$$D(-zu) = \text{dét}(\mathbf{1} - zu),$$

on peut voir que, dans le cas général, les majorations (1) et (3) ne peuvent être améliorées de façon substantielle. Cependant, si E est un espace de Hilbert, $k_n = 1$ pour tout n.

Nous écrirons souvent dét$(\mathbf{1} + u)$ au lieu de $D(u)$ ou $D^0(u)$; la fonction « dét » sera considérée, quand E est de dimension infinie, comme une fonction définie sur l'hyperplan $\mathbf{1} + E' \hat{\otimes} E$ de l'algèbre T (obtenue par adjonction d'une unité à $E' \otimes E$), hyperplan stable par multiplication, et l'on a :

$$(4) \qquad \text{dét}(\mathbf{1} + u)(\mathbf{1} + v) = \text{dét}(\mathbf{1} + u)\,\text{dét}(\mathbf{1} + v),$$

formule qui pourrait s'écrire

$$D(u + v + uv) = D(u)\,D(v).$$

Formules de transposition. — Il existe une application linéaire canonique, notée $u \to {}^t u$, de $E' \hat{\otimes} E$ dans $E'' \hat{\otimes} E'$, définie sur les tenseurs décomposables $x' \otimes x$ par ${}^t(x' \otimes x) = x \otimes x'$ (où, dans le second membre, x est considéré comme un élément de E''); c'est une application de norme ≤ 1 de $E' \hat{\otimes} E$ dans $E'' \hat{\otimes} E'$ (§ 1, th. 1)

$$(5) \qquad \|{}^t u\|_1 \leq \|u\|_1$$

et $\overline{{}^t u} = {}^t \bar{u}$ (il suffit en effet de le vérifier pour $u = x' \otimes x$), ce qui justifie la notation utilisée. Soit, de même, une application linéaire naturelle, de norme ≤ 1, de $\left(\overset{p}{\hat{\otimes}} E\right) \hat{\otimes} \left(\overset{p}{\hat{\otimes}} E'\right)$ dans $\left(\overset{p}{\hat{\otimes}} E'\right) \hat{\otimes} \left(\overset{p}{\hat{\otimes}} E''\right)$, notée encore $X \to {}^tX$. Ceci posé, on a les formules de transposition

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_n({}^tu_1, \ldots, {}^tu_n) = \alpha_n(u_1, \ldots, u_n), \qquad \text{d'où} \qquad \alpha_n({}^tu) = \alpha_n(u), \\ R_n^p({}^tu_1, \ldots, {}^tu_n)({}^tv_1, \ldots, {}^tv_{p-1}) = {}^tR_n^p(u_1, \ldots, u_n)(v_n, \ldots, v_{p-1}), \\ \qquad \text{d'où} \quad R_n^p({}^tu)({}^tv_1, \ldots, {}^tv_{p-1}) = {}^tR_n^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}), \\ \qquad\qquad d_n^p({}^tu) = {}^td_n^p(u), \end{array}\right.$$

en particulier

$$(7)\qquad \operatorname{Tr}{}^tu = \operatorname{Tr} u, \qquad R_n({}^tu) = {}^tR_n(u),$$

d'où les formules « globales »

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} D^p({}^tu)({}^tv_1, \ldots, {}^tv_p) = D^p(u)(v_1, \ldots, v_p), \\ R^p({}^tu)({}^tv_1, \ldots, {}^tv_{p-1}) = {}^tR^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}), \end{array}\right.$$

en particulier

$$(9)\qquad \text{dét}(\mathbf{1} + {}^tu) = \text{dét}(\mathbf{1} + u), \qquad R({}^tu) = {}^tR(u).$$

Toutes ces formules résultent aussitôt, en vertu des définitions, de la première formule (6) qui est évidente quand les u_i sont de la forme $u_i = x'_i \otimes x_i$ [appliquer la formule (2) du chapitre I, § 2], et qui reste vraie quels que soient les u_i.

Remarque. — Les fonctions fondamentales $\alpha_n(u)$, $R_n(u)$, ... n'ont été définies que pour un argument $u \in E' \hat{\otimes} E$, et *non pas* quand u est un opérateur de Fredholm, c'est-à-dire un élément d'un quotient de $E' \hat{\otimes} E$. On n'a le droit de parler de la trace d'un opérateur de Fredholm, que si l'on s'est assuré que l'application canonique de $E' \hat{\otimes} E$ dans $L(E)$ est biunivoque, ce qui est d'ailleurs facile à vérifier dans tous les cas concrets connus ([3]).

3. Compléments sur le déterminant et la trace. — Considérons l'algèbre normée complète T obtenue par adjonction d'une unité à $E' \hat{\otimes} E$. On peut définir dans T la fonction exponentielle

$$(1)\qquad \exp u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n.$$

([3]) En toute rigueur, la première formule (1) n'a pas de sens, car $(\mathbf{1} + u)^{-1}$ et $\dfrac{\mathbf{1}}{\text{dét}(\mathbf{1} + u)} R(u)$ n'appartiennent pas au même espace [le premier est un élément de T, le second un élément de $L(E)$]. Mais il est facile de définir $R(u)$ comme un élément de T et non de $L(E)$ [auquel correspond alors canoniquement un élément de $L(E)$], de façon à rendre correcte la formule envisagée.

Si $u \in E' \hat{\otimes} E$, on aura évidemment

$$\exp u \in \mathbf{1} + E' \hat{\otimes} E,$$

donc dét$(\exp u)$ sera défini. Dans ces conditions, on a encore la formule classique

$$(2) \qquad \text{dét}(\exp u) = \exp(\operatorname{Tr} u) \qquad (u \in E' \hat{\otimes} E)$$

d'où, en appliquant cette formule à $\log(\mathbf{1} + u)$,

$$(3) \qquad \text{dét}(\mathbf{1} + u) = \exp(\operatorname{Tr} \log(1 + u)) \qquad (u \in E' \hat{\otimes} E,\ \| u \|_1 < 1),$$

où $\log(1 + u)$ est donné par la série

$$(4) \qquad \log(\mathbf{1} + u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} u^n \qquad (\| u \|_1 < 1).$$

Pour prouver (2), on peut se borner à $u \in E' \otimes E$ par raison de continuité, ce qui nous ramène au cas où E est de dimension finie. Mais (2) est immédiate pour les opérateurs u qui peuvent être mis sous forme diagonale, et comme ces derniers sont denses dans $L(E)$ (quand le corps des scalaires est C, ce qu'on peut évidemment supposer), (2) reste vraie pour tout $u \in L(E)$. En remplaçant dans (2) u par zu (z paramètre scalaire), et en identifiant les deux membres comme fonctions entières de z, on obtient en passant les formules (d'ailleurs sans intérêt pratique)

$$(5) \qquad \alpha_n(u) = (-1)^n \sum \frac{1}{i_1! \ldots i_n!} \left(\operatorname{Tr} \frac{u}{1}\right)^{i_1} \cdots \left(\operatorname{Tr} \frac{u^n}{n}\right)^{i_n},$$

la somme étant étendue à tous les systèmes d'entiers ≥ 0, $(i_1, \ldots, i_n)$, tels que

$$1 i_1 + \ldots + n i_n = n.$$

Nous sommes obligés, pour la suite, de donner quelques renseignements sur les éléments du noyau J de l'application canonique $u \to \tilde{u}$ de $E' \hat{\otimes} E$ dans $L(E)$, bien qu'il se pourrait que ce noyau fut toujours nul. Les notions nécessaires sont résumées dans le

Lemme. — *Le noyau J de l'application canonique $u \to \tilde{u}$ de $E' \hat{\otimes} E$ dans $L(E)$ est identique à l'annulateur à gauche et à l'annulateur à droite de l'algèbre $E' \hat{\otimes} E$, c'est-à-dire*

$$u \in J \Leftrightarrow u(E' \hat{\otimes} E) = \{0\} \Leftrightarrow (E' \hat{\otimes} E)u = \{0\}.$$

De plus, si $u \in J$, plus généralement si $u^2 = 0$, on a

$$(6) \qquad \text{dét}(\mathbf{1} + u) = \exp(\operatorname{Tr} u).$$

Démonstration. — Comme

$$u(x'\otimes x) = x'\otimes ux, \qquad (x'\otimes x)u = {}^t ux'\otimes x,$$

on voit que $\tilde{u} = 0$ équivaut au fait que $uv = 0$ ou encore $vu = 0$ pour tout $v = x'\otimes x$. Mais ceci implique $uv = 0$ et $vu = 0$ pour tout $v \in E'\otimes E$, donc par continuité pour tout $v \in E'\hat{\otimes} E$, d'où la caractérisation algébrique interne de J. On appellera J le *radical* de $E'\hat{\otimes} E$. Si $u \in J$, plus généralement si $u^2 = 0$, on aura pour z assez petit [form. (3)]

$$\text{dét}(\mathbf{1} + zu) = \exp(\text{Tr}\log(\mathbf{1} + zu));$$

or, d'après (4)

$$\text{Tr}\log(\mathbf{1} + zu) = \text{Tr}\, zu = z\,\text{Tr}\, u,$$

et

$$\text{dét}(\mathbf{1} + zu) = \exp(z\,\text{Tr}\, u)$$

pour z assez petit, donc, pour tout z, et en particulier pour $z = 1$, puisque les deux membres sont des fonctions entières de z.

Supposons que E soit somme directe topologique de deux sous-espaces E_1 et E_2 ; soient p_1 et p_2 les projecteurs correspondants (qui sont continus)

$$(7)\qquad \begin{cases} p_1^2 = p_1, \quad p_2^2 = p_2, \quad p_1 + p_2 = \mathbf{1}, \\ p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0, \quad p_1(E) = E_1, \quad p_2(E) = E_2. \end{cases}$$

Posons, pour $u \in E'\hat{\otimes} E$, et $i, j = 1, 2$,

$$(8)\qquad P_{ij}\, u = p_i u p_j$$

(*voir* § 1 la signification du second membre) ; il résulte des formules (7) que les P_{ij} sont des *projecteurs* dans $E'\hat{\otimes} E\,(P_{ij}^2 = P_{ij})$, *orthogonaux* deux à deux $(P_{ij}P_{i'j'} = 0$ si $i \neq i'$ ou $j \neq j')$ et ayant pour somme l'identité $\left(\sum_{ij} P_{ij} = \mathbf{1}\right)$; en particulier, pour tout $u \in E'\hat{\otimes} E$,

$$(9)\qquad u = p_1 u p_1 + p_2 u p_2 + p_1 u p_2 + p_2 u p_1.$$

Or $\text{Tr}\, p_1 u p_2 = \text{Tr}\, p_2 p_1 u$ (propriété fondamentale de la trace) $= \text{Tr}\, 0 = 0$ et, de même, $\text{Tr}\, p_2 u p_1 = 0$; il s'ensuit

$$(10)\qquad \text{Tr}\, u = \text{Tr}\, u_1 + \text{Tr}\, u_2 \qquad (u_i = p_i u p_i).$$

Nous allons montrer que si u est tel que $\tilde{u}$ laisse *invariant* E_1 *ou* E_2, *on a*

$$(11)\qquad \text{dét}(\mathbf{1} + u) = \text{dét}(\mathbf{1} + u_1)\,\text{dét}(\mathbf{1} + u_2) \qquad (u_i = p_i u p_i).$$

En effet, supposons par exemple E_1 invariant ; l'hypothèse signifie que $p_2 \tilde{u} p_1 = 0$ ou encore que $p_2 u p_1$ appartient au *radical* J de $E'\hat{\otimes} E$

$\left(\text{car } p_2\tilde{u}p_1 = \widetilde{p_2 u p_1}\right)$. Posons

$$v = p_1 u p_1 + p_2 u p_2 + p_1 u p_2, \qquad w = p_2 u p_1;$$
$$\mathbf{1} + u = \mathbf{1} + v + w = (\mathbf{1} + v)(\mathbf{1} + w)$$

($v.w = 0$, d'après la caractérisation du radical), d'où

$$\text{dét}(\mathbf{1} + u) = \text{dét}(\mathbf{1} + v)\,\text{dét}(\mathbf{1} + w).$$

D'après le lemme ci-dessus,

$$\text{dét}(\mathbf{1} + w) = \exp(\operatorname{Tr} w) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Tr} w = \operatorname{Tr} p_2 u p_1 = 0;$$

par suite,

$$\text{dét}(\mathbf{1} + w) = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{dét}(\mathbf{1} + u) = \text{dét}(1 + v),$$

ce qui nous amène à démontrer, pour $u \in E' \hat{\otimes} E$,

$$\text{dét}(\mathbf{1} + p_1 u p_1 + p_2 u p_2 + p_1 u p_2) = \text{dét}(\mathbf{1} + p_1 u p_1)\,\text{dét}(\mathbf{1} + p_2 u p_2).$$

Pour ceci, on peut se borner, par raison de continuité, à supposer

$$u \in E' \otimes E, \qquad \text{donc} \quad v = p_1 u p_1 + p_2 u p_2 + p_1 u p_2 \in E' \otimes E,$$

et la formule signifie que le déterminant de $\mathbf{1} + v$ est égal au produit du déterminant de l'opérateur défini par $\mathbf{1} + v$ dans E_1 (restriction), et de l'opérateur défini par $\mathbf{1} + v$ dans E/E_1 (passage au quotient), ce qui est bien connu quand E est de dimension finie, et se vérifie immédiatement à partir de là, quand E est de dimension quelconque et v un opérateur de rang fini qui laisse E_1 invariant.

Pour utiliser les formules (10) et (11), il faut donner une autre interprétation de $\operatorname{Tr} p_i u p_i$ et $\text{dét}(\mathbf{1} + p_i u p_i)$. Soit

$$H_i = P_{ii}(E' \hat{\otimes} E) = p_i(E' \hat{\otimes} E)p_i.$$

H_i peut s'identifier à $E'_i \hat{\otimes} E_i$: en effet, identifions E'_1 au sous-espace vectoriel de E' orthogonal à E_2; je dis que l'application naturelle φ_1 de $E'_1 \hat{\otimes} E_1$ dans $E' \hat{\otimes} E$, produit tensoriel des applications identiques, est un *isomorphisme* du premier espace *sur* H_1. Pour celà, on considère l'application linéaire continue $\psi_1 = {}^t p_1 \otimes p_1$ de $E' \hat{\otimes} E$ dans $E'_1 \hat{\otimes} E_1$, en appliquant le paragraphe 1, formule (4), on a

$$\psi_1 \varphi_1 = 1, \qquad \varphi_1 \psi_1 = P_{11},$$

ce qui prouve que φ_1 est un isomorphisme de $E'_1 \hat{\otimes} E_1$ sur l'image H_1 du projecteur P_{11}. On aura le même résultat pour $E'_2 \hat{\otimes} E_2$, immergé dans $E' \hat{\otimes} E$ par un isomorphisme φ_2. Si $u_1 \in E'_1 \hat{\otimes} E_1$, $\widetilde{\varphi_1 u_1}$ sera l'opérateur dans E

qui coïncide avec $\tilde{u}_1$ sur E_1 et qui est nul sur E_2, ce qui donne une caractérisation symétrique des $\varphi_2 u_2$. Ainsi φ_1 et φ_2 sont des *représentations d'algèbre* de $E'_1 \hat{\otimes} E_1$ et $E'_2 \hat{\otimes} E_2$, car elles le sont sur $E'_1 \hat{\otimes} E_1$ (resp. $E'_2 \hat{\otimes} E_2$); donc H_1 et H_2 sont des *sous-algèbres* de $E' \hat{\otimes} E$, canoniquement isomorphes à $E'_1 \hat{\otimes} E_1$ et $E'_2 \hat{\otimes} E_2$, dont chacune est située dans l'annulateur de l'autre

$$H_1 . H_2 = H_2 . H_1 = \{ 0 \}; \tag{12}$$

il suffit d'écrire, par exemple,

$$(p_1 u p_1)(p_2 v p_2) = (p_1 u)(p_1 p_2)(v p_2) \qquad \text{et} \qquad p_1 p_2 = 0.$$

Signalons encore que si $u \in H_i$, $\mathrm{Tr}\, u$ [resp. $\mathrm{dét}(\mathbf{1} + u)$] est égal à $\mathrm{Tr}\, u_i$ [resp. $\mathrm{dét}(\mathbf{1} + u_i)$], où u_i est l'élément de $E'_i \hat{\otimes} E_i$ correspondant à u (on se ramène au cas de la dimension finie); d'où une nouvelle interprétation des formules (10) et (11).

Résumons l'essentiel de ce qui précède :

Proposition 2. — *Soient E un espace de Banach, E_1 et E_2 deux supplémentaires topologiques dans E, p_1 et p_2 les projecteurs correspondants. Alors $E'_1 \hat{\otimes} E_1$ et $E'_2 \hat{\otimes} E_2$ s'identifient respectivement aux sous-algèbres*

$$H_1 = p_1 (E' \hat{\otimes} E) p_1 \qquad \text{et} \qquad H_2 = p_2 (E' \hat{\otimes} E) p_2$$

de $E' \hat{\otimes} E$, qui s'annulent mutuellement

$$(H_1 . H_2 = H_2 . H_1 = \{ 0 \}).$$

Cette identification est compatible avec les fonctions $\mathrm{Tr}\, u$ *et* $\mathrm{dét}(\mathbf{1} + u)$. *De plus, pour tout $u \in E' \hat{\otimes} E$,*

$$\mathrm{Tr}\, u = \mathrm{Tr}\, u_1 + \mathrm{Tr}\, u_2 \qquad (u_i = p_i u p_i)$$

et si $\tilde{u}$ laisse invariant E_1 ou E_2,

$$\mathrm{dét}(\mathbf{1} + u) = \mathrm{dét}(\mathbf{1} + u_1)\, \mathrm{dét}(\mathbf{1} + u_2).$$

4. La théorie de Fredholm.

Proposition 3. — *Soit E un espace de Banach, $u \in E' \hat{\otimes} E$. Pour que $\mathbf{1} + u$ soit inversible (dans l'algèbre T obtenue par adjonction d'une unité à $E' \hat{\otimes} E$), il faut et il suffit que $\mathbf{1} + \tilde{u}$ soit inversible dans l'algèbre $L(E)$. L'inverse de $\mathbf{1} + u$ dans T est de la forme $\mathbf{1} + v$, où $v \in E' \hat{\otimes} E$.*

Supposons que $\mathbf{1} + u$ admette un inverse dans T qu'on pourra écrire sous la forme $\mathbf{1} + v$ ($v \in T$). On aura

$$(\mathbf{1} + u)(\mathbf{1} + v) = \mathbf{1} \qquad \text{ou} \qquad (u + v + uv = 0)$$

soit

$$v = -u - uv, \qquad \text{d'où} \qquad v \in \hat{E}' \otimes E$$

car $(E'\hat{\otimes} E$ est un *idéal* dans $T)$ et $\mathbf{1}+\tilde{v}$ est aussi un inverse de $(\mathbf{1}+\tilde{u})$ dans $L(E)$. Réciproquement, supposons que $\mathbf{1}+\tilde{u}$ ait un inverse dans $L(E)$, le raisonnement précédent prouve que cet inverse sera de la forme $\mathbf{1}+\tilde{v}$, où $\tilde{v}$ est un opérateur de Fredholm dans E, image canonique d'un certain $v \in E'\hat{\otimes} E$. La formule

$$(\mathbf{1}+\tilde{u})(\mathbf{1}+\tilde{v}) = \mathbf{1}$$

s'écrit $\tilde{u}+\tilde{v}+\tilde{u}\tilde{v}=0$, et signifie que $w = u+v+uv$ a une image nulle dans $L(E)$, c'est-à-dire appartient à l'annulateur de $E'\hat{\otimes} E$ (*voir* lemme du paragraphe 3). De même $w' = u+v+vu$ appartiendra à l'annulateur de $E'\hat{\otimes} E$. On a donc

$$u+(v-w)+u(v-w) = u+v-w+uv = 0,$$

c'est-à-dire $(\mathbf{1}+(v-w))$ est inverse à droite de $\mathbf{1}+u$. Pour la même raison, $(\mathbf{1}+(v-w'))$ est inverse à gauche de $\mathbf{1}+u$ donc $\mathbf{1}+u$ est inversible, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. — *Le spectre de u dans T est identique au spectre de $\tilde{u}$ dans $L(E)$.*

(Rappelons que le *spectre* d'un élément A d'une algèbre avec unité est l'ensemble des scalaires μ tels que $\mu\mathbf{1}-A$ ou, quand $\mu \neq 0$, $\mathbf{1}-\frac{1}{\mu}A$, ne soit pas inversible). Il revient donc au même d'étudier l'inversibilité de $\mathbf{1}+u$ dans T ou celle de $\mathbf{1}+\tilde{u}$ dans $L(E)$. Ce problème est résolu par le

THÉORÈME 2. — *Soit E un espace de Banach, $u \in E'\hat{\otimes} E$. Pour que $\mathbf{1}+u$ soit inversible (dans l'algèbre T obtenue par adjonction d'une unité à $E'\hat{\otimes} E$), il faut et il suffit que l'on ait* $\text{dét}(\mathbf{1}+u) \neq 0$ *et, alors, on a la formule de Fredholm* ([5])

$$(1)\qquad (\mathbf{1}+u)^{-1} = \frac{1}{\text{dét}(\mathbf{1}+u)}R(u) = \mathbf{1} - \frac{u}{\text{dét}(\mathbf{1}+u)}R(u)$$
$$= \mathbf{1} - u + u^2 - \ldots + (-1)^{n-1}u^{n-1} + \frac{(-1)^n u^n}{\text{dét}(\mathbf{1}+u)}R(u).$$

([5]) Nous supposons ici les scalaires complexes. Dans le cas contraire, on pourrait encore dire que $(\mathbf{1}-zu)^{-1}$ est une fonction méromorphe de la variable *réelle* z, mais on obtient un résultat plus précis en « étendant le corps des scalaires » de E aux complexes (c'est-à-dire en considérant E comme un sous-espace vectoriel réel d'un espace de Banach complexe $F = E + iE$), et en considérant l'espace $L(E)$ comme un sous-espace vectoriel réel de l'espace de Banach complexe $L(F) = L(E) + iL(E)$. Alors $(\mathbf{1}-zu)^{-1}$ apparaît comme une fonction méromorphe dans le *plan complexe*, à valeurs dans $L(F)$.

La démonstration est identique à celle du chapitre I, (§ 5, prop. 5). Appliquons ce théorème à $-zu$ au lieu de u; on trouve le

COROLLAIRE. — *Soit $u \in E' \hat{\otimes} E$; les scalaires non nuls appartenant au spectre de u $\left(\text{c'est-à-dire tels que } \mathbf{1} - \frac{1}{\mu} u \text{ ne soit pas inversible}\right)$ sont les inverses des zéros de la fonction entière en z* dét$(\mathbf{1} - zu)$ (déterminant de Fredholm de u). *La fonction $(\mathbf{1} - zu)^{-1}$, définie et analytique dans le complémentaire de l'ensemble des zéros de la fonction $(\mathbf{1} - zu)$, est une fonction méromorphe de z dans tout le plan complexe* [5].

Passons à l'étude de l'équation $(\mathbf{1} - zu)x = y$ pour les valeurs exceptionnelles du paramètre z qui annulent le déterminant de Fredholm. Nous poserons

$$(2) \qquad \begin{cases} D^p(z) = D^p(-zu), & d^p(z) = (-1)^p d^p(-zu), \\ R^p(z) = R^p(-zu), & r^p(z) = (-1)^p r^p(-zu) \end{cases}$$

et nous écrirons $D(z)$ au lieu de $D^0(z)$ ou dét$(\mathbf{1} - zu)$. Soit λ un zéro de $D(z)$. Comme $D^q(\lambda)(u, \ldots, u)$ est, au signe près, la dérivée $q^{\text{ième}}$ au point λ de la fonction entière non identiquement nulle $D(z)$ $(D(0) = 1)$, il existe un plus petit q tel que $D^q(\lambda) \neq 0$, soit p

$$(3) \qquad D^p(\lambda) \neq 0, \qquad D^{p-1}(\lambda) = 0,$$

ainsi p est le plus petit entier tel que $R^p(\lambda) \neq 0$. Écrivons les formules (5) du chapitre I, (§ 5), en remplaçant u par $-\lambda u$, pour les deux valeurs consécutives $p-1$ et p de l'exposant. Il vient, en tenant compte dans la première que $R^{p-1}(\lambda) = 0$,

$$(4) \quad (\mathbf{1} - \lambda u) R^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_{p-1}) = (R^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_{p-1}))(\mathbf{1} - \lambda u) = 0,$$

$$(5) \quad \begin{cases} (\mathbf{1} - \lambda u) R^{p+1}(\lambda)(v_1, \ldots, v_p) \\ \quad = (D^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_p))\mathbf{1} - \sum_{i=1}^{p} v_i R^p(\lambda)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p), \\ (R^{p+1}(\lambda)(v_1, \ldots, v_p))(\mathbf{1} - \lambda u) \\ \quad = (D^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_p))\mathbf{1} - \sum_{i=1}^{p} (R^p(\lambda)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p)) v_i. \end{cases}$$

D'après (4), l'image de chacun des opérateurs $\mathbf{1} - \lambda u$ et $R^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_{p-1})$ est contenu dans le noyau de l'autre. On va voir que le noyau de $\mathbf{1} - \lambda u$ est *engendré* par les images des opérateurs $R^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_{p-1})$, pour des systèmes (v_i) variables $(v_i \in E' \hat{\otimes} E)$ et que l'image de $\mathbf{1} - \lambda u$ est *l'intersection* des noyaux des $R^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_{p-1})$. Pour celà, soient $v_1, \ldots, v_p \in E' \hat{\otimes} E$

tels que $D^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_p) \neq 0$ [ils existent, puisque $D^p(\lambda) \neq 0$], A l'opérateur

(6) $$A = \frac{1}{D^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_p)} \sum_{i=1}^{p} (R^p(\lambda)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p))\, v_i.$$

Si $(\mathbf{1} - \lambda u).x = 0$, c'est-à-dire si x appartient à l'espace $E^1_{\frac{1}{\lambda}}$ des vecteurs propres de u correspondants à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$ on a $x = Ax$ [deuxième formule (5)]; d'autre part [première formule (4)], pour tout $y \in E$,

$$(\mathbf{1} - \lambda u)Ay = 0 \qquad \text{ou} \qquad Ay \in E^1_{\frac{1}{\lambda}}.$$

Donc A est une projection de E sur l'espace $E^1_{\frac{1}{\lambda}}$. Prenons $y \in E$ tel que l'équation

(7) $$(\mathbf{1} - \lambda u).\,x = y$$

ait une solution; en vertu de la dernière formule (4), il faut (et il suffit) que

(8) $$(R^p(\lambda)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p))y = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

il est même suffisant que

(9) $$(v_i R^p(\lambda)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p))y = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

car, en vertu de la première formule (5), on aura la solution

(10) $$x = \frac{1}{D^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_p)} (R^{p+1}(\lambda)(v_1, \ldots, v_p)).\,y,$$

ce qui [moyennant (9)] s'écrit aussi

(11) $$x = y + \frac{1}{D^p(\lambda)v_1, \ldots, v_p)} (\lambda u\, R^{p+1}(\lambda)(v_1, \ldots, v_p)).y$$

Dans ce qui précède, on peut choisir pour les v_i des éléments $v_i = a'_i \otimes a$ [car si $D^p(\lambda)$ s'annulait sur tous les systèmes de ce type, il serait identiquement nul].

Ainsi les vecteurs

(12) $$x_i = \Big(R^p(\lambda)\big(a'_1 \otimes a_1, \ldots, \widehat{a'_i \otimes a_i}, \ldots, a'_p \otimes a_p\big)\Big).a_i$$

appartiennent à $E^1_{\frac{1}{\lambda}}$; je dis qu'ils forment *une base* de cet espace (qui sera de dimension $p > 0$). En effet, $E^1_{\frac{1}{\lambda}} = A(E)$, où A est donné par (6), et les x_i engendrent $E^1_{\frac{1}{\lambda}}$; ils sont linéairement indépendants, car en vertu de (12),

$$\begin{aligned} \langle x_i, a'_j \rangle &= \mathrm{Tr}\Big(R^p(\lambda)\big(a'_1 \otimes a_1, \ldots, \widehat{a'_i \otimes a_i}, \ldots, a'_p \otimes a_p\big)\Big)\, a'_j \otimes a_i \\ &= D^p(\lambda)\big(a'_1 \otimes a_1, \ldots, \widehat{a'_i \otimes a_i}, \ldots, a'_p \otimes a_p, a'_j \otimes a_i\big) \end{aligned}$$

et, comme $D^p(\lambda)(z'_1 \otimes z_1, \ldots, z'_p \otimes z_p)$ *est bialternée* (c'est-à-dire nulle si deux des z_i ou deux des z'_i, correspondant à des indices différents, sont identiques),

$$(13) \qquad \langle x_i, a'_j \rangle = k\,\delta_{ij}, \qquad k = D^p(\lambda)(a'_1 \otimes a_1, \ldots, a'_p \otimes a_p) \neq 0$$
$$(\delta_{ij}, \text{ indice de Kronecker}).$$

Utilisons maintenant les formules de transposition (8) et (9) de la fin du paragraphe **2**; λ est aussi un zéro de

$$\text{dét}(\mathbf{1} - z\,{}^t u) = \text{dét}(\mathbf{1} - zu);$$

si l'on applique ce qui précède à ${}^t u$ au lieu de u, on trouve le même entier p et l'on peut choisir les ${}^t v_i = a_i \otimes a'_i$ de manière à obtenir une base

$$x'_i = \left(R^p(-\lambda\,{}^t u)\left({}^t v_1, \ldots, \widehat{{}^t v_i}, \ldots, {}^t v_p\right)\right).\, a'_i$$

de l'espace $E'^{1}_{\frac{1}{\lambda}}$ des vecteurs propres de ${}^t u$ correspondants à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$ (en effet, $D^p(-\lambda\,{}^t u)({}^t v_1, \ldots, {}^t v_p) = D^p(-\lambda u)(v_1, \ldots, v_p) \neq 0$), donc

$$(14) \qquad x'_i = \left({}^t R^p(\lambda)\left(a'_1 \otimes a_1, \ldots, \widehat{a'_i \otimes a_i}, \ldots, a'_p \otimes a_p\right)\right).\, a'_i.$$

Enfin pour que $y \in E$ soit tel que l'équation (7) ait une solution [c'est-à-dire $y \in (\mathbf{1} - \lambda u)(E)$], il faut et il suffit que y soit orthogonal à $E'^{1}_{\frac{1}{\lambda}}$, soit

$$(15) \qquad \langle y, x'_i \rangle = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p).$$

La condition est nécessaire, puisque

$$\langle y, x'_i \rangle = \langle (\mathbf{1} - \lambda u).\, x, x'_i \rangle = \langle x, (\mathbf{1} - \lambda\,{}^t u).\, x'_i \rangle = 0;$$

elle est suffisante, car les conditions (9) s'écrivent ici (avec $v_i = a'_i \otimes a_i$)

$$\left\langle \left(R^p(\lambda)\left(a'_1 \otimes a_1, \ldots, \widehat{a'_i \otimes a_i}, \ldots, a'_p \otimes a_p\right)\right).\, y, a'_i \right\rangle a_i = 0$$

et le facteur scalaire du premier membre est $\langle y, x'_i \rangle$, d'après (14).

L'essentiel des résultats précédents est résumé dans la première partie du

THÉORÈME 3. — *Soit E un espace de Banach, $u \in E' \hat{\otimes} E$, λ un zéro de $D(z) = \text{dét}(\mathbf{1} - zu)$.*

1° *Soit p le plus petit entier tel que $D^p(\lambda) \neq 0$ [notations utilisées dans les formules (2)]; il existe des $a_i \in E$ et des $a'_i \in E'$ $(i = 1, \ldots, p)$ tels que*

$$D^p(\lambda)(a'_1 \otimes a_1, \ldots, a'_p \otimes a_p) \neq 0.$$

Les vecteurs x_i (resp. x'_i) donnés par (12) [resp. par (14)] forment une base de l'espace $E^{1}_{\frac{1}{\lambda}}$ $\left(\text{resp. } E'^{1}_{\frac{1}{\lambda}}\right)$ des solutions de l'équation $(\mathbf{1} - \lambda u).\, x = 0$

[*resp.* $(\mathbf{1}-\lambda' u).x'=0$]; *ces deux espaces ont pour dimension p. Pour que l'équation en* x

$$(\mathbf{1}-\lambda u).x=y$$

ait une solution, il faut et il suffit que y soit orthogonal à $E^1_{\frac{1}{\lambda}}$, *c'est-à-dire que y satisfasse aux conditions* $\langle y.x'_i\rangle=0$ $(i=1,\ldots,p)$; *une solution particulière est donnée par* (10) *ou* (11), où $v_i=a'_i\otimes a_i$.

2° *On a*

$$D^p(\lambda)=d^p(\lambda),\qquad R^p(\lambda)=r^p(\lambda) \tag{16}$$

et, par suite, dans l'énoncé et les formules qui précèdent, on peut remplacer partout $D^p(\lambda)$ *par* $d^p(\lambda)$, $R^p(\lambda)$ *par* $r^p(\lambda)$; *p est aussi le plus petit entier tel que* $d^p(\lambda)\neq 0$. *Enfin, la formule de résolution* (11) *devient*

$$x=y+\frac{1}{d^p(\lambda)(v_1,\ldots,v_p)}(r^{p+1}(v_1,\ldots,v_p)).y \tag{17}$$

Démontrons la deuxième partie du théorème. La deuxième formule (16) est contenue dans la première [définitions, chap. I, § 6, form. (18)]qui, elle, résulte du fait suivant : $D^p(\lambda)(v_1,\ldots,v_p)$ *ne change pas quand on multiplie l'un quelconque des* v_i, *à gauche ou à droite, par* λu; ainsi on pourra multiplier un nombre quelconque de v_i par λu. Prenons la multiplication à gauche, et supposons qu'il s'agisse de v_p; d'après la première formule (4) (ou la deuxième si l'on multiplie à droite),

$$\mathrm{Tr}(R^p(\lambda)(v_1,\ldots,v_{p-1}))(\lambda v_p u)=\mathrm{Tr}(R^p(\lambda)(v_1,\ldots,v_{p-1}))v_p.$$

Comme $D^q(\lambda)=0$ implique $d^q(\lambda)=0$, p est le plus petit des q tels que $d^q(\lambda)\neq 0$. Enfin [en vertu de (16)] $D^p(\lambda)(v_1,\ldots,v_p)=D^p(\lambda)(\lambda v_1 u,\ldots,\lambda v_p u)$ et l'on peut remplacer dans (11) les v_i par $\lambda v_i u$ [on aura encore

$$D^p(\lambda)(\lambda v_1 u,\ldots,\lambda v_p u)\neq 0];$$

on obtient la solution

$$x=y+\frac{(-1)^{p+1}}{D^p(\lambda)(\lambda v_1 u,\ldots,\lambda v_p u)}((-\lambda u)R^{p+1}(\lambda)(-\lambda v_1 u,\ldots,-\lambda v_p u)).y,$$

formule identique à (17), car le dénominateur est égal à $d^p(\lambda)(v_1,\ldots,v_p)$ et le numérateur à $r^{p+1}(\lambda)(v_1,\ldots,v_p)$ [chap. I, § 6, form. (17) appliquée à $-\lambda u$ au lieu de u]. Le théorème **3** est ainsi entièrement démontré.

Corollaire 1. — *Soit* $u\in E'\hat{\otimes}E$, λ *un scalaire;* $\mathbf{1}-\lambda\tilde{u}$ *est un homomorphisme topologique de E dans E. La dimension du noyau est finie, et égale à la codimension de l'image.*

En effet, la formule d'inversion (10) montre que l'application $v=\mathbf{1}-\lambda\tilde{u}$ de E sur $v(E)$ a une application inverse à droite continue, donc v est un homomorphisme topologique. De plus, avec les notations du théorème, $v(E)$ est l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension p de E', donc de codimension p, ce qui est aussi la dimension du noyau de v. En particulier :

Corollaire 2. — *Soit $u \in E' \hat{\otimes} E$, λ un scalaire. Pour que l'opérateur $\mathbf{1} - \lambda\tilde{u}$ dans E soit inversible, il faut et il suffit que son noyau soit nul.*

Le théorème 3 donne tous les renseignements désirables relatifs à la résolution de l'équation $(\mathbf{1} - \lambda u)x = y$, mais ne constitue pas une étude spectrale complète de l'opérateur u, pour la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$. Pour aller plus loin, il faut considérer les noyaux $E^p_{\frac{1}{\lambda}}$ des itérés $(\mathbf{1} - \lambda u)^p$ de $(\mathbf{1} - \lambda u)$. Ces espaces forment une suite croissante de sous-espaces de E, qui est, soit strictement croissante, soit strictement croissante jusqu'à un rang k, à partir duquel elle devient constante ([6]). Nous appellerons *sous-espace spectral* correspondant à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$ de u, l'espace $E_{\frac{1}{\lambda}}$ réunion des espaces $E^p_{\frac{1}{\lambda}}$, et *ordre de la valeur propre* $\frac{1}{\lambda}$, la dimension de $E_{\frac{1}{\lambda}}$. *A priori*, si l'ordre n de la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$ est fini, on est dans le deuxième des deux cas envisagés ci-dessus, on a $k \leqq n$, et $E_{\frac{1}{\lambda}}$ est identique au noyau de $(\mathbf{1} - \lambda u)^p$ pour tout entier $p \geqq k$, en particulier pour $p = n$. Nous allons voir [sans utiliser la théorie de Riesz des opérateurs compacts dans un espace de Banach ([7])] que n est ici fini, et de façon précise :

Théorème 4. — *Soit E un espace de Banach, $u \in E' \hat{\otimes} E$, λ un zéro d'ordre n de la fonction entière* dét$(\mathbf{1} - zu)$. *Alors $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre d'ordre n exactement de l'opérateur défini par u. Le noyau $E_{\frac{1}{\lambda}}$ et l'image $F_{\frac{1}{\lambda}}$ de l'opérateur $(\mathbf{1} - \lambda u)^n$ sont supplémentaires topologiques dans E, et $(\mathbf{1} - \lambda u)$ induit un isomorphisme de $F_{\frac{1}{\lambda}}$ sur lui-même.*

Démonstration. — Soit n' l'ordre de la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$, c'est-à-dire la dimension de $E_{\frac{1}{\lambda}} = \bigcup_p E^p_{\frac{1}{\lambda}}$; montrons que $n' \leqq n$, c'est-à-dire que

---

([6]) Ce fait, purement algébrique, se vérifie trivialement pour la suite des itérés d'un opérateur linéaire U quelconque (ici $U = \mathbf{1} - \lambda u$).

([7]) Donc la théorie exposée ici vaut en fait pour les opérateurs de Fredholm dans un espace normé complet construit sur un corps valué complet quelconque de caractéristique o (alors que la théorie de Riesz devient inopérante, les opérateurs de Fredholm pouvant n'être plus des opérateurs compacts).

$\dim E^p_{\frac{1}{\lambda}} \leq n$ pour tout p. L'espace $E^p_{\frac{1}{\lambda}}$ est, par définition, le noyau de $(\mathbf{1} - \lambda u)^p$, or

$$(\mathbf{1} - \lambda u)^p = \mathbf{1} + v_p, \qquad \text{avec} \quad v_p \in E' \hat{\otimes} E$$

et le noyau d'un tel opérateur est de dimension finie (th. 3, cor. 1); ainsi $E^p_{\frac{1}{\lambda}}$ est de dimension finie et admet un supplémentaire topologique F ([8]). Soient p_1 et p_2 les projecteurs correspondants à cette décomposition en somme directe. $E^p_{\frac{1}{\lambda}}$ est évidemment stable pour u; il s'ensuit (prop. 2 du paragraphe 3 appliquée à $-zu$)

$$(18) \qquad \det(\mathbf{1} - zu) = \det(\mathbf{1} - zu_1)\det(\mathbf{1} - zu_2) \qquad (u_i = p_i u p_i);$$

comme u_1 est un opérateur dans l'espace de dimension finie $E^p_{\frac{1}{\lambda}}$, ayant une seule valeur propre $\frac{1}{\lambda}$, on a

$$\det(\mathbf{1} - zu_1) = \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)^d = (-1)^d (z - \lambda)^d, \qquad \text{où} \quad d = \dim E^p_{\frac{1}{\lambda}}.$$

Compte tenu de (18), on trouve que λ est un zéro d'ordre d au moins de $\det(\mathbf{1} - zu)$, d'où $d \leq n$ et $n' \leq n$. On ne peut avoir $n' < n$; en effet, faisons dans ce qui précède $p = n$ $\left(\text{donc } E^p_{\frac{1}{\lambda}} = E^p_{\frac{1}{\lambda}}\right)$; il résulterait de (18) que λ est un zéro de $\det(\mathbf{1} - zu_2)$, donc (th. 3, cor. 2) il existerait un $x \in F$ non nul tel que

$$(\mathbf{1} - \lambda u_2).x = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad (\mathbf{1} - \lambda u).x \in E^1_{\frac{1}{\lambda}};$$

on en concluerait que $(\mathbf{1} - \lambda u)^{n+1} x = 0$ et $x \in E_{\frac{1}{\lambda}}$, ce qui est absurde. Posons maintenant

$$(\mathbf{1} - \lambda u)^n = \mathbf{1} + v, \qquad \text{où} \quad v \in E' \hat{\otimes} E;$$

il reste à montrer que le noyau N et l'image M de $\mathbf{1} + v$ sont supplémentaires topologiques et que $\mathbf{1} - \lambda u$ induit un isomorphisme de M sur lui-même. On sait que M est orthogonal au noyau N' de $\mathbf{1} + {}^t v$ et que N et N' ont la même dimension (th. 3), je dis que la dualité entre N et N' est séparante; en effet,

---

([8]) En général, cela exige le théorème de Hahn-Banach, mais ici F admet un supplémentaire *a priori* (même si l'on n'est pas sur le corps des réels ou des complexes). En effet, on a vu que si v est un opérateur de Fredholm dans E, on peut trouver une base $x_1, \ldots, x_p$ du noyau de $\mathbf{1} + v$ et des éléments $a'_1, \ldots, a'_p$ de E' tels que $\langle x_i, a'_j \rangle = \delta_{ij}$ [*voir* form. (13)]; alors $\sum_i a'_i \otimes x_i$ est un projecteur continu de E sur le noyau de $\mathbf{1} + v$.

si $y \in N$ est orthogonal à N' on a

$$y = (\mathbf{1} + v)x$$

et, comme $(1 + v)y = 0$

$$(\mathbf{1} + v)^2 . x = (\mathbf{1} - \lambda u)^{2n} . x = 0,$$

d'où $x \in E_{\frac{1}{\lambda}}$ et $(\mathbf{1} - \lambda u)^n . x = 0$ (c'est-à-dire $y = 0$). Prenons dans N et N' deux bases duales (e_i) et (e'_i); l'opérateur $\sum e'_i \otimes e_i$ sera un projecteur continu de E sur N, de noyau M, et N et l'orthogonal M de N' sont supplémentaires topologiques. Enfin, M est stable pour u donc pour $\mathbf{1} - \lambda u$ (puisque c'est l'image de E par $\mathbf{1} + v = (\mathbf{1} - \lambda u)^n$, qui permute avec u) et tout élément de M appartenant au noyau de $\mathbf{1} - \lambda u$ est nul car il appartient à N; il s'ensuit (th. 3, cor. 2) que $\mathbf{1} - \lambda u$ induit un *isomorphisme* de M sur lui-même.

Donnons, pour terminer, quelques indications sur l'allure de la fonction méromorphe

$$(\mathbf{1} - z\tilde{u})^{-1} = \frac{1}{\text{dét}(\mathbf{1} - zu)} R(-zu)$$

au voisinage d'un zéro λ du dénominateur. Avec les notations précédentes,

$$N = E_{\frac{1}{\lambda}} = \text{noyau de } (\mathbf{1} - \lambda u)^n, \qquad M = \text{image de } (\mathbf{1} - \lambda u)^n$$

(où n est l'ordre du zéro λ); comme N et M sont stables pour u, on aura

(19) $$\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2$$

($u_i = p_i u h_i$, p_i étant les projecteurs de E sur N et M correspondant à la décomposition $E = N + M$). On en conclut

(20) $$(\mathbf{1} - z\tilde{u})^{-1} = (\mathbf{1} - z\tilde{u}_1)^{-1} + (\mathbf{1} - z\tilde{u}_2)^{-1},$$

le deuxième membre étant considéré comme l'opérateur somme directe des deux opérateurs définis respectivement dans N et dans M. [Si l'on veut des formules d'inversion dans T lui-même et non dans $L(E)$, il faut écrire (19) sous la forme $u = u_1 + u_2 + w$, où u appartient au radical de $E' \hat{\otimes} E$, et ajouter au deuxième membre de (20), où les $\sim$ sont supprimés, le terme correctif w]. Le deuxième terme du second membre de (20) reste holomorphe pour $z = \lambda$ (th. 4); pour évaluer le premier, posons

(21) $$\mathbf{1} - \lambda u_1 = N_0, \qquad \text{d'où} \qquad u_1 = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{1} - N_0);$$

$N_0^n = 0$, donc N_0 est un opérateur nilpotent dans N et

$$(\mathbf{1} - zu_1) = -\frac{z - \lambda}{\lambda}\left(\mathbf{1} - \frac{z}{z - \lambda} N_0\right),$$

d'où, en vertu de $(\mathbf{1}-w)^{-1}=\mathbf{1}+w+\ldots+w^{n-1}$ si $w^n=0$,

$$(22)\quad (\mathbf{1}-zu_1)^{-1}=-\frac{\lambda}{z-\lambda}\left(\mathbf{1}+\frac{z}{z-\lambda}N_0+\ldots+\left(\frac{z}{z-\lambda}\right)^{n-1}N_0^{n-1}\right).$$

Remplaçons $\frac{z}{z-\lambda}$ par $1+\frac{\lambda}{z-\lambda}$; nous obtenons le développement

$$(23)\quad (\mathbf{1}-zu_1)^{-1}=A_1(z-\lambda)^{-1}+N_2(z-\lambda)^{-2}+\ldots+N_n(z-\lambda)^{-n},$$

où $A_1=-\lambda\mathbf{1}+N_1$ et où les N_i sont des opérateurs nilpotents. Identifiant les opérateurs dans N à des éléments de $L(E)$, il vient

$$(24)\qquad A_1=-\lambda P_{\frac{1}{\lambda}}+N_1,$$

où $P_{\frac{1}{\lambda}}=p_1$ est le *projecteur spectral* correspondant à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$ de u; les N_i sont maintenant des opérateurs nilpotents dans E, qui appliquent E dans l'espace spectral $N=E_{\frac{1}{\lambda}}$, s'annulent sur le noyau M de $P_{\frac{1}{\lambda}}$ et permutent avec u (et entre eux); on a donc obtenu dans (23) la partie polaire du développement de la fonction méromorphe (20) au voisinage de $z=\lambda$ (qui est effectivement un pôle). Ainsi

$$(25)\quad (\mathbf{1}-z\tilde{u})^{-1}=\rho(z)+A_1(z-\lambda)^{-1}+N_2(z-\lambda)^{-2}+\ldots+N_n(z-\lambda)^{-n},$$

où $\rho(z)$ est holomorphe pour $z=\lambda$ (c'est l'opérateur nul sur l'espace spectral $E_{\frac{1}{\lambda}}$, qui coïncide avec $(\mathbf{1}-zu)^{-1}$ sur le sous-espace supplémentaire M) et où les autres notations sont les mêmes que précédemment.

Écrivons

$$R(z)=D(z)(\mathbf{1}-zu);$$

de (25) on déduit l'allure des premiers termes de la fonction holomorphe entière $R(z)$, au voisinage de $z=\lambda$ [compte tenu de ce que λ est un zéro d'ordre n exactement de $D(z)$]

$$(26)\qquad \begin{aligned}R(z)=M_0+M_1(z-\lambda)+\ldots+M_{n-2}(z-\lambda)^{n-2}\\ +B_{n-1}(z-\lambda)^{n-1}+(z-\lambda)^n\sigma(z),\end{aligned}$$

avec

$$(27)\qquad B_{n-1}=kP_{\frac{1}{\lambda}}+\mathrm{M}_{n-1}\qquad\left[k=-\frac{\lambda}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\mathrm{D}(\lambda)\right],$$

où les M_i sont des opérateurs nilpotents qui appliquent E dans $E_{\frac{1}{\lambda}}$ et qui sont nuls sur M, permutant avec u et entre eux, et où $\sigma(z)$ est une fonction holomorphe entière de z.

Des formules (24), (25), (26), (27), $\lambda\neq 0$, $k\neq 0$, il ressort que $E_{\frac{1}{\lambda}}$ est l'image de A_1 et de B_{n-1} et que M est le noyau de A_1 et de B_{n-1}. Ceci permet de caractériser ces espaces puisque A_1 est *le résidu* au point λ de la fonction méromorphe $(\mathbf{1} - z\tilde{u})^{-1}$ et B_{n-1}, au facteur $(n-1)!$ près, la dérivée $(n-1)$-ième de $R(z)$ au point $z = \lambda$. *Enfin le projecteur spectral $P_{\frac{1}{\lambda}}$ est le résidu, au point λ, de la fonction méromorphe* $-\frac{1}{z}(\mathbf{1} - z\tilde{u})^{-1}$ *ou de la fonction méromorphe* $-\frac{1}{D(z)}uR(z)$: il suffit de le montrer pour la première fonction $\Big[$qui est égale à $-\frac{1}{z} - \frac{1}{D(z)}uR(z)$ et a donc même résidu en λ que $-\frac{1}{D(z)}uR(z)\Big]$; le résultat (9) s'obtient en exprimant $-\frac{1}{z}(\mathbf{1} - z\tilde{u})^{-1}$ au moyen de (22) et en notant que les résidus de tous les termes de la somme obtenue sont nuls, sauf celui du premier terme qui est égal à $\mathbf{1}$.

Remarque. — L'entier p qui figure dans le théorème 3 est au plus égal à l'ordre n du zéro λ de $\text{dét}(\mathbf{1} - zu)$, puisque

$$p = \dim E^1_{\frac{1}{\lambda}}, \qquad n = \dim E_{\frac{1}{\lambda}} \qquad \text{et} \qquad E^1_{\frac{1}{\lambda}} \subset E_{\frac{1}{\lambda}}.$$

On aura $p = n$ si et seulement si $E^1_{\frac{1}{\lambda}} = E_{\frac{1}{\lambda}}$, c'est-à-dire si l'espace des vecteurs propres pour la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$ est identique à l'espace spectral correspondant. Dans ce cas, l'opérateur N_0 de (21) (et, par suite, les opérateurs N_i et M_i) est nul, de sorte que (25) et (26) deviennent

$$(\mathbf{1} - z\tilde{u})^{-1} = \rho(z) - \lambda P_{\frac{1}{\lambda}}(z-\lambda)^{-1}, \tag{28}$$

$$R(z) = kP_{\frac{1}{\lambda}}(z-\lambda)^{n-1} + (z-\lambda)^n\sigma(z). \tag{29}$$

Il en est en particulier ainsi chaque fois que u est un opérateur de Fredholm *hermitien* ou même seulement *normal* (c'est-à-dire permutant avec son adjoint) dans un espace de Hilbert (puisque, dans un espace de Hilbert de

(9) Cela résulte aussi du fait plus général suivant, sans doute bien connu, et valable pour un opérateur *compact* u dans E, admettant la valeur propre α : le projecteur spectral de u relatif à la valeur propre α est identique à l'intégrale de Cauchy $\frac{1}{2i\pi}\int(\xi - u)^{-1}d\xi$, prise sur un contour entourant α, en sens direct et ne contenant pas d'autres valeurs propres (on peut calculer ainsi, plus généralement, le « projecteur spectral » correspondant à une partie à la fois ouverte et fermée du spectre d'un élément u d'une algèbre normée complète avec unité quelconque). On obtient à nouveau le résultat donné dans le texte par le changement de variable $z \to \frac{1}{\xi}$.

dimension finie, un opérateur normal qui n'a qu'une seule valeur propre est une homothétie).

5. **Généralisation aux espaces localement convexes.** — Nous envisageons maintenant exclusivement des espaces *localement convexes séparés* E (sur le corps des réels ou des complexes). On appelle *disque* ou ensemble disqué dans E tout ensemble convexe et cerclé. Si A est un disque borné dans E, E_A désigne l'espace vectoriel engendré par A, muni de la norme

$$(1) \qquad \| x \|_A = \inf_{x \in \lambda A} |\lambda|.$$

C'est donc un espace normé, dont la boule unité est A si, par exemple, A est fermé dans E, et qui est un espace de Banach (c'est-à-dire complet) si A est, par exemple, complet. Si V est un voisinage disqué de o dans E, on désigne par E_V l'espace normé obtenu par passage au quotient à partir de la semi-norme

$$(2) \qquad \| x \|_V = \inf_{x \in \lambda V} |\lambda|.$$

Son complété est noté $\hat{E}_V$. Il existe une application linéaire continue naturelle de E dans E_V; l'image réciproque de la boule unité est l'adhérence de V.

Soient $E_i (i = 1, \ldots, n)$ n espaces localement convexes; on désigne par $\mathfrak{B}(E_1, \ldots, E_n)$ l'espace des formes n fois linéaires sur $\prod E_i$ continues par rapport à chaque variable. Soit, pour tout i, A_i un disque borné dans E_i tel que $(E_i)_{A_i}$ soit complet, et soit $u \in \hat{\bigotimes}_i (E_i)_{A_i}$. Toute forme n fois linéaire séparément continue f sur $\prod_i E_i$ induit une forme n fois linéaire séparément continue $f_{(A_i)}$ sur le produit des espaces de Banach $(E_i)_{A_i}$, forme qui est continue, comme il est bien connu. Par suite, on peut considérer le produit scalaire $\langle u, f_{(A_i)} \rangle$, qui est une forme linéaire de $f \in \mathfrak{B}(E_1, \ldots, E_n)$.

DÉFINITION 3. — *On appelle noyau de Fredholm, relatif aux espaces localement convexes $E_i (i = 1, \ldots, n)$, toute forme linéaire sur $\mathfrak{B}(E_1, \ldots, E_n)$ qui est définie comme ci-dessus par un élément d'un espace $\hat{\bigotimes}_i (E_i)_{A_i}$ [où pour tout i, A_i est un disque borné dans E_i tel que $(E_i)_{A_i}$ soit complet]. L'espace de ces noyaux de Fredholm est noté $E_1 \overline{\bigotimes} E_2 \overline{\bigotimes} \ldots \overline{\bigotimes} E_n$ ou $\overline{\bigotimes}_i E_i$.*

On vérifie que c'est bien là un espace vectoriel; il est en dualité naturelle avec $\mathfrak{B}(E_1, \ldots, E_n)$. On peut le munir d'une topologie localement convexe naturelle donnant pour dual $\mathfrak{B}(E_1, \ldots, E_n)$ ([5], Chap. I, § 3, n^{os} 1' et 2), mais il ne sera en général pas complet; cette topologie est inutile ici. Dans le cas où les E_i sont des espaces de Banach, on retrouve l'espace $\hat{\bigotimes}_i E_i$ défini au paragraphe 1.

En utilisant le théorème signalé à la fin du paragraphe 1, ou plutôt sa généralisation (immédiate) à n espaces de Banach, on trouve facilement que : *tout élément de* $\overline{\bigotimes_i} E_i$ *provient d'un élément d'un espace* $\hat{\bigotimes}_i (E_i)_{A_i}$, *où les* A_i *sont des disques* compacts *dans les* E_i. (C'est vrai en effet si les E_i sont des espaces de Banach.)

Soient maintenant E et F deux espaces localement convexes, munissons E' d'une topologie localement convexe intermédiaire entre la faible et la forte. Soit $u_0 \in E'_B \hat{\otimes} F_A$, où A (resp. B) est un disque borné dans F (resp. E') tel que F_A (resp. E'_B) soit complet; u_0 définit une application linéaire continue $X \to u_0 X$ de $(E'_B)'$ dans F_A. Composée avec l'application naturelle $x \to x_B$ de E dans $(E'_B)'$, elle donne une application linéaire de E dans F_A notée encore $x \to u_0 x$. Par définition, on a pour $x \in E$, $y' \in F'$

$$\langle u_0 x, y' \rangle = \langle u_0 x_B, y' \rangle = \langle u_0, x_B \otimes y' \rangle = \langle u, x \otimes y' \rangle,$$

où u est l'élément de $E' \overline{\otimes} F$ défini par u_0, et où $x \otimes y'$ est considéré comme un élément de $\mathfrak{B}(E', F)$. Donc, l'application $x \to u_0 x$ de E dans F ne dépend que de $u \in E' \overline{\otimes} F$; on peut la noter $\tilde{u}$ ou $x \to ux$. Par définition,

$$\langle ux, y' \rangle = \langle u, x \otimes y' \rangle. \tag{3}$$

Ces applications linéaires $x \to ux$ de E dans F ne dépendent pas de la topologie mise sur E' car même pour la topologie faible (qui *a priori* donnera le plus d'applications) tout $u \in E' \overline{\otimes} F$ est défini par un $u_0 \in E'_B \hat{\otimes} F_A$, où B est un disque *faiblement compact* de E' (*voir* ci-dessus) et *a fortiori* borné et complet pour la topologie *forte* sur E'. On pourra supposer B compact pour la topologie forte, et A compact dans F.

Définition 4. — *Soient E et F deux espaces localement convexes, E' le dual fort de E. On appelle application de Fredholm de E dans F toute application définie par un noyau de Fredholm, élément de $E' \overline{\otimes} F$, c'est-à-dire par un $u_0 \in E'_B \hat{\otimes} F_A$ où A (resp. B) est un disque compact dans F (resp. E').*

Si E et F sont des espaces de Banach, on retrouve la notion introduite au paragraphe 1.

« *Rappel.* — Soit A (resp. B) un disque borné dans F (resp. E') tel que F_A (resp. E'_B) soit complet, $u_0 \in E'_B \hat{\otimes} F_A$; l'application de Fredholm définie par u_0 est la composée d'une séquence

$$E \xrightarrow{\alpha} E_1 \xrightarrow{\beta} F_1 \xrightarrow{\gamma} F, \tag{4}$$

où $E_1 = \hat{E}_{B^0}$ (B^0, polaire de B dans E), $F_1 = F_A$, α et γ désignent les applications canoniques et β l'application de Fredholm de E_1 dans F_1 définie par u_0. Soit T une topologie localement convexe sur E, comprise entre la topologie de Mackey $\tau(E, E')$ et la topologie de la convergence uniforme sur les disques fortement compacts de E'. D'après ce qui précède, les applications de Fredholm de E dans F sont les composées de séquences (4) où E_1 et F_1 sont des espaces de *Banach*, α une application linéaire continue pour T, γ une application linéaire continue de F_1 dans F, β une application de Fredholm de E_1 dans F_1. *A fortiori*, une application de Fredholm est toujours faiblement continue [car continue pour la topologie $\tau(E, E')$ et la topologie donnée de F], mais elle peut ne pas être continue. On appelle application *nucléaire* de E dans F une application composée d'une séquence (4), où α est supposée continue; elle provient donc d'un élément d'un espace $E'_B \hat{\otimes} F_A$, où B est un disque *équicontinu* faiblement fermé dans E', et A un disque borné dans F tel que F_A soit complet. Une application nucléaire est continue. Les applications de Fredholm de E dans F sont identiques aux applications nucléaires de E muni de T dans F (on pourrait se borner à ne considérer que des applications nucléaires).

Remarquons que la notion d'application de Fredholm de E dans F ne dépend que des systèmes duaux (E, E') et (F, F'). Bien plus, une fois donné le système (E, E'), elle ne dépend que de la connaissance de l'ensemble des parties bornées de F et même seulement de l'ensemble des disques bornés A tels que F_A soit complet (ou de l'ensemble des disques compacts de F). En pratique, on ne trouve jamais deux topologies localement convexes séparées sur un espace vectoriel F qui donnent deux familles différentes de disques bornés A tels que F_A soit complet (c'est-à-dire pour lesquelles une application linéaire d'un espace de Banach H dans F peut être continue pour l'une sans l'être pour l'autre), aussi toutes les topologies localement convexes que l'on pourra mettre sur un espace vectoriel F conduiront-elles à la même notion d'application de Fredholm de E dans F ».

Pour simplifier, désormais tous les duaux seront munis de la topologie forte. On définit, comme dans le cas des espaces de Banach, les composés $u.A$, $B.u$, $B.u.A$ (où $u \in E' \overline{\otimes} F$, où A est une application linéaire faiblement continue d'un espace localement convexe G dans E, B une application linéaire faiblement continue de F dans un espace localement convexe H) : ce sont respectivement des éléments de $G' \overline{\otimes} F$, $E' \overline{\otimes} H$, $G' \overline{\otimes} H$. Les propriétés d'associativité sont encore valables. Ceci permet de composer deux noyaux de Fredholm $u \in E' \overline{\otimes} F$, $v \in F' \overline{\otimes} G$; on aura

$$vu \in E' \overline{\otimes} G \qquad \text{et} \qquad v.u = \tilde{v}.u = v.\tilde{u}.$$

En particulier, $E'\overline{\otimes} E$ *est une algèbre* (sans unité si E est de dimension infinie).

Considérons la forme bilinéaire canonique e sur $E'\times E$; elle est séparément continue et, pour tout $u\in E'\overline{\otimes} E$, on peut poser

$$(5) \qquad \operatorname{Tr} u = \langle u, e \rangle.$$

Plus généralement, pour des $u_i \in E'\overline{\otimes} E\ (i=1, \ldots, n)$, on définira $\alpha_n(u_1, \ldots, u_n)$ de la façon suivante : tous les u_i proviennent d'éléments u_i^0 d'un même espace $E'_B\hat{\otimes} E_A$; les $\alpha_n(v_1, \ldots, v_n)$, pour des arguments $v_i\in E'_B\hat{\otimes} E_A$, répondent à la condition que

$$\alpha_n(x'_1\otimes x_1, \ldots, x'_n\otimes x_n) = \frac{1}{n!}\operatorname{dét}(\langle x_i, x'_j\rangle)$$

$(x_i\in E_A,\ x'_j\in E'_B)$ et $\alpha_n(u_1^0, \ldots, u_n^0)$ ne dépend que des u_i (et non de A, B, et du choix des u_i^0); ce dernier point résulte de ce que $\alpha_n(x'\otimes x, v_2, \ldots, v_n)$ est une fonction bilinéaire f sur $E'\times E$, séparément continue, et

$$\begin{aligned}\alpha_n(v_1, \ldots, v_n) &= \langle v, f_{B,A}\rangle \quad (\text{où } f_{B,A} \text{ est la restriction de } f \text{ à } E'_B\times E_A)\\ &= \langle u_1, f\rangle \quad (\text{si } u_1 \text{ est l'élément de } E'\overline{\otimes} E \text{ défini par } v_1),\end{aligned}$$

donc nul si $u_1=0$. La formule usuelle permet encore de définir α_{n+p}^p à partir des α_n.

Soient n, p deux entiers $\geqq 0$; u_i et $v_j\ (i=1, \ldots, n; j=1, \ldots, p-1)$ des éléments de $E'\overline{\otimes} E$, $x\in E$. Les u_i et v_j proviennent d'éléments u_i^0, v_j^0 d'un même espace $E'_B\hat{\otimes} E_A$ et l'on peut supposer $x\in A$. Comme il existe une application linéaire continue naturelle de E'_B dans $(E_A)'$, on obtient des éléments $\overline{u}_i^0$, $\overline{v}_j^0$ de $(E_A)'\hat{\otimes} E_A$ et l'élément $R_n^p(\overline{u}_1^0, \ldots, \overline{u}_n^0)(\overline{v}_1^0, \ldots, \overline{v}_{p-1}^0).x$ de E_A (donc de E) qui dépend linéairement de $x\in E_A$. Pour $x'\in E'$, on a

$$\langle R_n^p(\ldots)(\ldots)x, x'\rangle = \alpha_{n+p}^p(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_{p-1}, x'\otimes x)$$

et cet élément ne dépend que des u_i, v_j et de x (non de A, B, u_i^0, v_j^0). D'où, pour des u_i, v_j donnés, une application linéaire $R_n^p(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1})$ de E dans E

$$(6) \quad \langle \mathrm{R}_n^p(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1})x, x'\rangle = \alpha_{n+p}^p(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1}, x'\otimes x),$$

fonction multilinéaire et symétrique des u_i et v_j. On écrira $R_n^p(u)$ au lieu de $R_n^p(\underbrace{u, \ldots, u}_{n})$; pour $u\in E'\overline{\otimes} E$ donné, c'est une application $(p-1)$ fois linéaire de $(E'\overline{\otimes} E)^{p-1}$ dans l'espace des applications linéaires de E dans E. Les applications linéaires obtenues dans E sont du type $\lambda.1+\tilde{u}$, où $u\in E'\overline{\otimes} E$, donc elles sont faiblement continues.

On définit de façon analogue les quantités

$$d_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p}) \qquad \text{et} \qquad d_n^p(u) = d_n^p(\underbrace{u, \ldots, u}_{n+p}),$$

éléments de $\left(\overline{\overset{p}{\otimes}} E\right) \overline{\otimes} \left(\overline{\overset{p}{\otimes}} E'\right)$ $\left(\text{pour des } u_i \in E' \overline{\otimes} E \text{ donnés}\right)$ et les quantités correspondantes

$$r_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p}) \qquad \text{et} \qquad r_n^p(u) = r_n^p(\underbrace{u, \ldots, u}_{n+p}),$$

applications $p - 1$ fois linéaires de $(\mathfrak{B}(E', E'))^{p-1}$ dans $E' \overline{\otimes} E$.

De plus, on vérifie, par les calculs de majoration faits dans le paragraphe 2, que les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(u), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+p}^p(u)(v_1, \ldots, v_p),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{R}_n^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} d_n^p(u) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} r_n^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1})$$

convergent : les deux premières sont des séries absolument convergentes de scalaires, la troisième est une série absolument convergente dans un espace $L(E_{V}, E_A)$, où V est un voisinage disqué de o dans E muni de $\tau(E, E')$ et A un disque compact dans E, la quatrième provient d'une série absolument convergente dans un espace $\left(\overset{p}{\hat{\otimes}} E_A\right) \hat{\otimes} \left(\overset{p}{\hat{\otimes}} E'_B\right)$, et la dernière d'une série absolument convergente dans un espace $E'_B \hat{\otimes} E_A$. On a ainsi défini

$$\mathrm{D}(u) = \text{dét}(\mathbf{1} + u), \quad D^p(u), \quad R^p(u), \quad d^p(u) \quad \text{et} \quad r^p(u).$$

Toutes ces quantités satisfont aux identités données dans le chapitre I, en particulier on a la relation

$$(7) \qquad (\mathbf{1} + u)R(u) = R(u)(\mathbf{1} + u) = \text{dét}(\mathbf{1} + u)$$

et, plus généralement

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\mathbf{1} + u)^{p+1} R(u) v_1, \ldots, v_p) \\ &\quad = (D^p(u)(v_1, \ldots, v_p))\mathbf{1} - \sum_{i=1}^{p} v_i R^p(u)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p), \\ &(\mathrm{R}^{p+1}(u)(v_1, \ldots, v_p))(\mathbf{1} + u) \\ &\quad = (D^p(u)(v_1, \ldots, v_p))\mathbf{1} - \sum_{i=1}^{p} (R^p(u)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p))v_i. \end{aligned} \right.$$

Les formules (7) et (8) permettent de développer la théorie de résolution de Fredholm exactement comme dans le cas des espaces de Banach, les théorèmes 2, 3, 4 du paragraphe 4 sont valables tels quels. Il y a lieu surtout de retenir que *les valeurs propres non nulles de u sont les inverses des zéros de la fonction entière* dét$(1 - zu)$, *avec correspondance entre les ordres* (ordre d'une valeur propre défini au paragraphe 4 et ordre d'un zéro d'une fonction analytique).

On aura une conception plus nette des éléments de $E \widehat{\otimes} F$ en utilisant le théorème signalé à la fin du paragraphe 1 : *les éléments de* $E \widehat{\otimes} F$ *sont donnés par des séries* $\sum \lambda_i x_i \otimes y_i$ *où* (λ_i) *est une suite sommable, et où* (x_i) [*resp.* (y_i)] *est une suite formée d'éléments d'un disque compact de* E (*resp.* F). En particulier, quand on représente les éléments de $E' \widehat{\otimes} E$ par de telles séries, les quantités $\alpha_n(u_1, \ldots, u_n)$, ... s'explicitent facilement par des séries.

CHAPITRE III.

Application aux opérateurs intégraux.

1. Détermination d'opérateurs de Fredholm par des intégrales. — Soit M un espace localement compact, μ une mesure sur cet espace; on désigne par $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'espace des fonctions (ou plutôt des classes de fonctions) sur M, sommables pour μ, muni de sa norme naturelle

$$\|\varphi\|_1 = \int |\varphi(s)|\, d|\mu|(s),$$

qui en fait un espace de Banach. Si E est un espace de Banach, $\mathcal{L}^1_E(\mu)$ est l'espace des applications (ou plutôt des classes d'applications) intégrables de M dans E, muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int \|f(s)\|\, d|\mu|(s),$$

qui en fait encore un espace de Banach. Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $a \in E$, soit $\varphi.a$, la classe de la fonction $\varphi(s)a$ dans $\mathcal{L}^1_E(\mu)$. On a

$$\|\varphi.a\|_1 \leq \|\varphi\|_1 \|a\|$$

et $(\varphi, a) \to \varphi.a$ est une application linéaire de norme ≤ 1 de $\mathcal{L}^1(\mu) \times E$ dans $\mathcal{L}^1_E(\mu)$, donc définit une application linéaire de norme ≤ 1 de $\mathcal{L}^1(\mu) \widehat{\otimes} E$ dans $\mathcal{L}^1_E(\mu)$.

Théorème 1. — *Soient M un espace localement compact, μ une mesure sur cet espace, E un espace de Banach. L'application linéaire naturelle de $\mathcal{L}^1(\mu) \widehat{\otimes} E$ dans $\mathcal{L}^1_E(\mu)$ est un isomorphisme métrique du premier espace sur le second.*

L'image du premier espace est dense dans le second, aussi suffit-il de montrer que l'on a un isomorphisme métrique du premier espace dans le deuxième. Soit F_0 le sous-espace dense de $F = \mathcal{L}^1(\mu)$ formé des fonctions « en escalier » ; $F_0 \hat{\otimes} E$ est dense dans $F \hat{\otimes} E$; tout élément f de $F_0 \otimes E$ peut se mettre sous la forme $\sum_i \varphi_{A_i} \otimes a_i$, où les φ_{A_i} sont les fonctions caractéristiques d'ensembles ingrables A_i, *disjoints* deux à deux, et $a_i \in E$. Son image $\tilde{f} = \sum_i \varphi_{A_i} . a_i$ dans $\mathcal{L}^1_E(\mu)$ a pour norme $\sum_i |\mu|(A_i) \| a_i \|$ qui, *a priori*, est $\leq$ la norme de f. Par définition de la norme de $F \hat{\otimes} E$, on déduit de $f = \sum_i \varphi_{A_i} \otimes a_i$ que

$$\|f\|_1 \leq \sum_i \| \varphi_{A_i} \|_1 \| a_i \| = \sum_i |\mu|(A_i) \| a_i \| = \| \tilde{f} \|_1$$

et l'application induite de $F_0 \otimes E$ dans $\mathcal{L}^1_E(\mu)$ est une isométrie.

Ce théorème est un des plus utiles de la théorie des produits tensoriels topologiques et nous en donnons une démonstration différente et de nombreuses applications dans [5], notamment au Chapitre I (§ 2), n° 2. Ce qui précède peut s'appliquer tel quel à l'espace $l^1(I)$ construit sur un ensemble d'indices I quelconque, avec un corps de base valué complet quelconque.

COROLLAIRE 1. — *Soient M un espace localement compact muni d'une mesure μ, E un espace de Banach; les applications de Fredholm u de E dans $\mathcal{L}(\mu)^1$ sont celles définies par une application intégrable f de M dans E', par la formule*

$$u.x(s) = \langle x, f(s) \rangle. \tag{1}$$

La norme-trace de u est égale à la norme de f dans $\mathcal{L}^1_E(\mu)$

$$\| u \|_1 = \| f \|_1.$$

Bien entendu, la formule (1) signifie en réalité que $u.x$ est la *classe* de la fonction $s \rightarrow \langle x, f(s) \rangle$. Les applications de Fredholm de E dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ sont définies par les éléments de $E' \hat{\otimes} \mathcal{L}^1(\mu)$, espace qui, d'après le théorème 1, s'identifie à $\mathcal{L}^1_{E'}(\mu)$; il s'ensuit la caractérisation des applications de Fredholm de E dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ et le fait que l'application naturelle de $E' \hat{\otimes} \mathcal{L}^1(\mu)$ dans l'espace des opérateurs continus de E dans F est biunivoque, d'où la détermination donnée de la norme-trace de u.

COROLLAIRE 2. — *Soit M un espace localement compact, $\mathcal{C}_0(M)$ l'espace des fonctions scalaires continues sur M, nulles à l'infini, muni de la norme uniforme, E un espace de Banach. Pour toute mesure μ sur M et toute application μ-intégrable f de M dans E, l'application*

$$(2) \qquad u.\varphi = \int \varphi(s) f(s)\, d\mu(s)$$

de $\mathcal{C}_0(M)$ dans E est une application de Fredholm et a pour norme-trace $\int \| f(s) \| \, d|\mu|(s)$. Réciproquement, on obtient ainsi toutes les applications de Fredholm de $\mathcal{C}_0 M$ dans F.

D'après le théorème 1, f définit un élément de $\mathcal{L}^1(\mu) \hat{\otimes} E$, donc de $(\mathcal{C}_0(M))' \hat{\otimes} E$ [car $\mathcal{L}^1(\mu)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel normé du dual de $\mathcal{C}_0(M)$] et il est évident que l'application de Fredholm qui lui correspond est l'application u donnée par (2). L'application naturelle de $\mathcal{L}^1(\mu) \hat{\otimes} E$ dans $\mathfrak{M}^1(M) \hat{\otimes} E$ [où $\mathfrak{M}^1(M)$ est l'espace des mesures bornées sur M, dual de $\mathcal{C}_0(M)$] est un isomorphisme métrique, car $\mathcal{L}^1(\mu)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel normé de $\mathfrak{M}^1(M)$ et il existe une projection naturelle de norme 1 de $\mathfrak{M}^1(M)$ sur $\mathcal{L}^1(\mu)$ (celle qui, à toute mesure bornée ν sur M, fait correspondre sa « composante suivant μ » dans la décomposition de Riesz de cette mesure) ; d'autre part, pour toute suite $\mu_i \in \mathfrak{M}^1(M)$ il existe une $\mu \in \mathfrak{M}^1(M)$ telle que

$$\mathcal{L}^1(\mu) \supset \mathcal{L}^1(\mu_i) \quad \text{pour tout } i$$

$\left(\text{on prend } \mu = \sum_i \frac{1}{2^i \| \mu_i \|} |\mu_i|\right)$; ainsi la réunion des sous-espaces $\mathcal{L}^1(\mu) \hat{\otimes} E$ de $\mathfrak{M}^1(M) \hat{\otimes} E$, qui est dense et complète, est identique à $\mathfrak{M}^1(M) \hat{\otimes} E$. Avec (2), on obtient toutes les applications de Fredholm de $\mathcal{C}_0(M)$ dans E; si u est nul, $f \in \mathcal{L}^1_E(\mu)$ est nul et l'application canonique de $\mathfrak{M}^1(M) \hat{\otimes} E$ dans l'espace des applications de Fredholm de $\mathcal{C}_0(M)$ dans E est biunivoque. D'où l'expression donnée de la norme-trace de u.

Les corollaires 1 et 2 permettent de déterminer les opérateurs de Fredholm dans un espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ ou d'un espace $\mathcal{C}_0(M)$. Signalons tout de suite un cas particulier important.

COROLLAIRE 3. — *Soient M et L deux espaces compacts, μ une mesure sur L, $K(s, t)$ une fonction continue sur $M \times L$. L'application linéaire $\varphi \to K.\varphi$ de $\mathcal{C}(L)$ dans $\mathcal{C}(M)$*

$$(3) \qquad K.\varphi(s) = \int K(s, t)\, \varphi(t)\, d\mu(t)$$

est une application de Fredholm, de norme-trace égale à

$$\int \sup_s |K(s, t)|\,)\,d|\mu|(t).$$

En effet, interprétons $K(s, t)$ comme une application continue $t \to K_t$ de L dans $\mathcal{C}(M)$; on a

$$K.\varphi = \int (\varphi(t) K_t \, d\mu(t)$$

ce qui est le cas du corollaire 2.

Soient maintenant E et F deux espaces de Banach, M un espace localement compact muni d'une mesure μ.

Désignons par $\mathcal{L}^\infty_{E'_s}(\mu)$ l'espace des applications scalairement mesurables et scalairement bornées de M dans E' [c'est-à-dire des applications $g(s)$ telles que, pour tout $x \in E$, $\langle x, g(s) \rangle$ soit une fonction mesurable et bornée sur M], prises modulo les fonctions scalairement localement négligeables; une telle fonction g définit une application linéaire de E dans $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, continue d'après le théorème du graphe fermé et dont la norme sera notée $\|g\|_\infty$. Avec cette norme $\mathcal{L}^\infty_{E'_s}(\mu)$ est un espace de Banach. Pour tout $g \in \mathcal{L}^\infty_{E'_s}(\mu)$ et tout $f \in \mathcal{L}^1_F(\mu)$, nous allons définir un élément de $E' \hat{\otimes} F$, noté

$$\int g(s) \otimes f(s)\, d\mu(s) \quad \text{(par abus de langage)},$$

qui dépendra bilinéairement de f, g et dont la norme sera $\leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$; ce sera une application bilinéaire de $\mathcal{L}^\infty_{E'_s}(\mu) \times \mathcal{L}^1_F(\mu)$ dans $E' \hat{\otimes} F$. En vertu du théorème 1,

$$L^1_F(\mu) = L^1(\mu) \hat{\otimes} F;$$

on est ainsi ramené à définir une application trois fois linéaire de $\mathcal{L}^\infty_{E'_s}(\mu) \times \mathcal{L}^1(\mu) \times F$ dans $E' \hat{\otimes} F$, de norme ≤ 1; pour celà, on fera correspondre au triplet (g, φ, a) l'élément $(g.\varphi) \otimes a$, où l'on pose

$$g.\varphi = \int \varphi(s) g(s)\, d\mu(s) \quad \text{(intégrale faible dans } E');$$

comme (définition de l'intégrale faible) $\varphi \to g.\varphi$ est l'application de $\mathcal{L}^1(\mu)$ induite par l'application transposée de l'application linéaire naturelle de E dans $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ définie par g, sa norme est égale à $\|g\|_\infty$, d'où

$$\|g.\varphi\| \leq \|g\|_\infty \|\varphi\|_1$$

et

$$\|(g.\varphi) \otimes a\| \leq \|g\|_\infty \|\varphi\|_1 \|a\|.$$

Soit $A \in L(F, E)$, ${}^tA$ la forme bilinéaire continue sur $E' \times F$ définie par A;

je dis que

$$(4)\quad \begin{cases} \left\langle \int g(s)\otimes f(s)\,d\mu(s),\ {}^tA \right\rangle = \int \langle g(s)\otimes f(s),\ {}^tA\rangle\,d\mu(s) \\ \qquad\qquad \left(= \int \langle A.f(s),\ g(s)\rangle\,d\mu(s)\right) \end{cases}$$

[ce qui justifie en partie la notation intégrale utilisée : il s'agit d'une intégrale faible dans $E'\hat{\otimes} F$ mis en dualité, éventuellement non séparée, avec le sous-espace $L(F, E)$ de son dual ordinaire $B(E', F)\approx L(F, E'')$]. Comme $s\to A f(s)$ est une application intégrable de M dans E, la fonction $\langle A f(s), g(s)\rangle$ est sommable [approcher $A f(s)$ par une suite de fonctions en escalier] et a dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ une norme $\leq \|A\|.\|g\|_\infty \|f\|_1$. Pour vérifier l'égalité des deux membres extrêmes de (4), on peut donc se borner au cas où f est du type $\varphi\otimes a\,[\varphi\in\mathcal{L}^1(\mu), a\in F]$ et la vérification est immédiate. En particulier, si $A = y'\otimes x$ $(y'\in F', x\in E)$, (4) donne

$$(5)\quad \left\langle \left(\int g(s)\otimes f(s)\,d\mu(s)\right).x,\ y'\right\rangle = \int \langle (g(s)\otimes f(s)).x,\ y'\rangle\,d\mu(s) = \int \langle x, g(s)\rangle\langle f(s), y'\rangle\,d\mu(s)$$

qui exprime que l'opérateur de Fredholm défini par $\int g(s)\otimes f(s)\,d\mu(s)$ est $\int g(s)\otimes f(s)\,d\mu(s)$ considéré comme intégrale faible dans $L(E, F)$ (mis en dualité avec $E\otimes F'$).

Soient alors n éléments de $E'\hat{\otimes} E$ donnés par

$$(6)\quad u_i = \int g_i(s)\otimes f_i(s)\,d\mu(s)\in E'\hat{\otimes} E \qquad [g_i\in L^\infty_{E'_s}(\mu),\ f_i\in L^1_E(\mu)];$$

en se ramenant au cas où les f_i sont décomposés, on trouve

$$(7)\quad \alpha_n(u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{n!}\int\cdots\int \text{dét}(\langle f_i(s_i), g_j(s_j)\rangle)\,d\mu(s_1)\ldots d\mu(s_n).$$

Appliquons la même méthode et la formule (11) du chapitre I (§ 6); on a

$$(8)\quad \delta^n_p(u_1, \ldots, u_{n+p}) = \int\cdots\int \Delta_1\, g_{n+1}(s_{n+1})\otimes\cdots \otimes g_{n+p}(s_{n+p})\,d\mu(s_1)\ldots d\mu(s_{n+p}),$$

avec

$$\Delta_1 = \text{dét}\begin{pmatrix} \langle f_1(s_1), g_1(s_1)\rangle\ldots & \langle f_1(s_1), g_n(s_n)\rangle & \overbrace{f_1(s_1)\ldots f_1(s_1)}^{p} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \langle f_{n+p}(s_{n+p}), g_1(s_1)\rangle\ldots & \langle f_{n+p}(s_{n+p}), g_n(s_n)\rangle & f_{n+p}(s_{n+p})\ldots f_{n+p}(s_{n+p}) \end{pmatrix},$$

où le déterminant Δ_1 figurant au second membre de (8) désigne un élément de $\left(\overset{p}{\otimes} E\right) \otimes \left(\overset{p}{\otimes} E'\right)$ qui a été explicité au chapitre I (§ 6) et où l'intégrale du second membre, en toute rigueur, devrait se définir explicitement comme le symbole

$$\int g(s) \otimes f(s)\, d\mu(s)$$

plus haut; mais si l'on se borne à considérer la forme $2n$ fois linéaire sur $E'^p \times E^p$ définie par $\delta_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$ (ce qui suffira pour l'usage qu'on aura à en faire), le deuxième membre de (8) peut se lire comme une intégrale faible dans $B\big(\underbrace{E', \ldots, E'}_{p}, \underbrace{E, \ldots, E}_{p}\big)$ mis en dualité avec $\left(\overset{p}{\otimes} E'\right) \otimes \left(\overset{p}{\otimes} E\right)$.
Les formules (7) et (8) deviennent pour $u_1 = \ldots = u$

$$(9) \qquad \alpha_n(u) = \frac{1}{n!} \int \cdots \int \text{dét}(\langle f(s_i), g(s_j) \rangle)\, d\mu(s_1) \ldots d\mu(s_n),$$

$$(10) \quad \delta_n^p(u) = \frac{1}{n!} \int \cdots \int \Delta\, g(s_{n+1}) \otimes \cdots \otimes g(s_{n+p})\, d\mu(s_1) \ldots d\mu(s_{n+p}),$$

avec

$$\Delta = \text{dét} \begin{pmatrix} \langle f(s_1), g(s_1) \rangle & \ldots & \langle f(s_1), g(s_n) \rangle & \overbrace{f(s_1) \ldots f(s_1)}^{p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle f(s_{n+p}), g(s_1) \rangle & \ldots & \langle f(s_{n+p}), g(s_n) \rangle & f(s_{n+p}) \ldots f(s_{n+p}) \end{pmatrix}.$$

En résumé :

PROPOSITION 1. — *Soient E et F deux espaces de Banach, M un espace localement compact muni d'une mesure μ. On peut de façon unique, pour toute $g \in \mathcal{L}^\infty_{E'_s}(\mu)$ et $f \in \mathcal{L}^1_F(\mu)$, définir un élément u de $E' \hat{\otimes} F$, noté $\int g(s) \otimes f(s)\, d\mu(s)$, par la condition qu'il dépende de façon bilinéaire et continue de g et f, et, pour $f = \varphi \otimes a$, ($\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $a \in F$), soit identique à $(g.\varphi) \otimes a$ $\left[\text{où } g.\varphi = \int \varphi(s) g(s)\, d\mu(s), \text{ intégrale faible dans } E'\right]$. On a la formule (4) pour toute $A \in L(F, E)$, et l'opérateur de Fredholm défini par u est égal à $\int g(s) \otimes f(s)\, d\mu(s)$ considéré comme une intégrale faible d'opérateurs [intégrale faible dans $L(E, F)$ mis en dualité avec $E \otimes F'$]. Lorsque $F = E$, on a les formules (9) et (10).*

Il semble que les représentations explicites d'opérateurs de Fredholm par des noyaux rentrent toutes dans le schéma de la proposition 1. Précisons maintenant sur un cas-type classique l'allure des formules de résolution de Fredholm pour des opérateurs intégraux.

2. Le cas classique : opérateur défini par un noyau continu. — Soit M un espace compact muni d'une mesure μ, $K(s, t)$ une fonction continue sur $M \times M$; l'opérateur $f \to K.f$ dans $\mathcal{C}(M)$ (espace des fonctions continues sur M) défini par K

$$K.f(s) = \int K(s, t) f(t)\, d\mu(t) \tag{1}$$

est un opérateur de Fredholm (th. **1**, cor. **3**), noté encore K, qui peut s'écrire, avec les notations de la proposition **1**,

$$K = \int \varepsilon_t \otimes K_t\, d\mu(t), \tag{2}$$

où pour tout $t \in M$, ε_t désigne l'élément du dual $\mathfrak{M}(M)$ de $\mathcal{C}(M)$ tel que $\langle \varphi, \varepsilon_t \rangle = \varphi(t)$, et K_t l'élément $s \to K(s, t)$ de $\mathcal{C}(M)$. L'application $t \to \varepsilon_t$ est faiblement continue de M dans le dual $\mathfrak{M}(M)$ de $\mathcal{C}(M)$ et $t \to K_t$ une application continue de M dans $\mathcal{C}(M)$; et la proposition **1** peut s'appliquer. Comme nous l'avons déjà dit, la distinction entre noyaux et opérateurs de Fredholm est inutile ici et (2) peut être prise pour une intégrale d'opérateurs. Explicitons les formules (9) et (10) du paragraphe **1**; pour simplifier, nous poserons, suivant l'usage classique,

$$K\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_n \\ t_1, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} = \text{dét}(K(s_i, t_j))_{i,j \leq n}; \tag{3}$$

on obtient une fonction continue des $2n$ arguments s_i, $t_j \in M$ et (9) s'écrit

$$\alpha_n(K) = \frac{1}{n!} \int \cdots \int K\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_n \\ s_1, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} d\mu(s_1) \ldots d\mu(s_n), \tag{4}$$

d'où le déterminant de Fredholm

$$\text{dét}(\mathbf{1} - zK) = \sum_0^\infty (-1)^n \alpha_n(K)\, z^n.$$

De façon générale, toute fonction continue $N\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix}$ sur $M^p \times M^p$ définit une forme $2p$ fois linéaire continue sur $(\mathfrak{M}(M))^p \times (\mathfrak{M}(M))^p$, par la formule

$$\begin{aligned} (5) \quad & \langle N, \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_p \otimes \nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_p \rangle \\ & = \int \cdots \int N\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix} d\mu_1(s_1) \ldots d\mu_p(s_p)\, d\nu_1(t_1) \ldots d\nu_p(t_p) \end{aligned}$$

d'où, en composant avec l'application linéaire naturelle de $\mathcal{C}(M)$ dans $\mathcal{L}^1(M) \subset \mathfrak{M}(M)$, une forme $2p$ fois linéaire continue sur $(\mathfrak{M}(M)^p \times (\mathcal{C}(M))^p$, explicitée par

$$\begin{aligned} (6) \quad & \langle N, (\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_p \otimes \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p \rangle \\ & = \int \cdots \int N\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix} d\mu_1(s_1) \ldots d\mu_p(s_p)\, \varphi_1(t_1)\, d\mu(t_1) \ldots \varphi_p(t_p)\, d\mu(t_p). \end{aligned}$$

Si dans la forme $2p$ fois linéaire (5) on fixe $2p-1$ arguments μ_i, ν_i (par exemple tous sauf ν_p), la forme linéaire par rapport à l'argument qui reste libre est faiblement continue [par topologie faible, nous entendons ici la topologie faible du dual de $\mathcal{C}(M)$] et, de façon précise, est définie par l'élément de $\mathcal{C}(M)$

$$t \to \int \cdots \int N\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_{p-1}, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_{p-1}, & t \end{pmatrix} d\mu_1(s_1) \ldots d\mu_p(s_p)\, d\nu_1(t_1) \ldots d\nu_{p-1}(t_{p-1}).$$

On en conclut que, si l'on fixe $p-1$ couples d'éléments (μ_i, ν_i), par exemple ceux avec $i=1, \ldots, p-1$, l'application linéaire de $\mathfrak{M}(M)$ dans $\mathcal{C}(M)$ qui, à tout $\nu_p \in \mathfrak{M}(M)$, fait correspondre la forme linéaire, élément de $\mathcal{C}(M)$, définie par (5) (forme linéaire par rapport à l'argument μ_p), est continue pour les topologies faibles sur $\mathfrak{M}(M)$ et sur $\mathcal{C}(M)$; cette application et, par suite, l'application linéaire de $\mathcal{C}(M)$ dans $\mathcal{C}(M)$ qui lui correspond [en composant avec l'application canonique de $\mathcal{C}(M)$ dans $\mathfrak{M}(M)$] est donnée par le noyau

$$(7) \qquad \langle N, \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_{p-1} \otimes \varepsilon_s \otimes \nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_{p-1} \otimes \varepsilon_t \rangle$$

qui est une fonction continue des deux variables s et $t \in M$.

Posons maintenant

$$(8) \quad d_n^p\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix} = \frac{1}{n!} \int \cdots \int K\begin{pmatrix} \sigma_1, & \ldots, & \sigma_n, & s_1, & \ldots, & s_p \\ \sigma_1, & \ldots, & \sigma_n, & t_1. & \ldots, & t_p \end{pmatrix} d\mu(\sigma_1) \ldots d\mu(\sigma_n),$$

c'est une fonction continue des arguments s_i, t_j; je dis que la forme $2p$ fois linéaire sur $(\mathfrak{M}(M))^p \times (\mathcal{C}(M))^p$ qui lui correspond n'est autre que $d_n^p(K)$. Pour le voir, il suffit de calculer

$$\langle d_n^p(K), \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_p \otimes \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p \rangle$$

par la formule (10) du paragraphe 1; prenons pour variables d'intégration $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, t_1, \ldots, t_p$; explicitons les produits scalaires $\langle K_{\sigma_j}, \mu_i \rangle$ et $\langle K_{t_j}, \mu_i \rangle$ au moyen des intégrales

$$\int K(s_i, \sigma_j)\, d\mu(s_i) \quad \text{et} \quad \int K(s_i, t_j)\, d\mu(s_i)$$

et intégrons dans l'intégrale $(n+2p)$-uple obtenue par rapport à $d\mu(\sigma_1) \ldots d\mu(\sigma_n)$; il reste alors à effectuer l'intégration

$$\int \cdots \int d_n^p\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix} d\mu_1(s_1) \ldots d\mu_p(s_p)\varphi_1(t_1)\, d\mu(t_1) \ldots \varphi_p(t_p),\, d\mu(t_p).$$

Donc

$$d_n^p(-zK) = (-1)^p d_n^p(z)$$

[avec les notations du chapitre II, § 4, form. (2)] est donné par le noyau [d'ordre

$2p](-z)^{p+n} d_n^p\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_p \\ t_1, \ldots, t_p \end{pmatrix}$ et $d_n^p(z)$ par le noyau $z^p\left((-1)^n d_n^p\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_p \\ t_1, \ldots, t_p \end{pmatrix} z^n\right)$.

Considérant $d_n^p(K)$ comme un élément de l'espace de Banach $\mathcal{C}(M^p \times M^p)$ donné par (8), nous allons montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n d_n^p(K) z^n$ est une série entière à valeurs dans cet espace de Banach, d'où il résultera que $d^p(z)$ est donné par le noyau continu

$$d_p\left(\begin{matrix} s_1, \ldots, s_p \\ t_1, \ldots, t_p \end{matrix} \middle| z\right) = z^p \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n d_n^p\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_p \\ t_1, \ldots, t_p \end{pmatrix} z^n. \tag{9}$$

En effet, en vertu de la majoration de Hadamard, le premier membre de (3) est majoré par $n^{\frac{n}{2}}\|K\|_\infty^n$ (où $\|K\|_\infty = \sup|K(s, t)|$), d'où [déf. (8)]

$$\|d_n^p\|_\infty \leq \frac{1}{n!}(n+p)^{\frac{n+p}{2}}\|K\|_\infty^{n+p}\|\mu\|^n \tag{10}$$

(majoration qui pourrait être améliorée, *voir* chap. II, § 2, mais qui nous suffira) et, par la formule de Stirling

$$(\|d_n^p\|)_\infty^{\frac{1}{n}} = o(\|K\|_\infty)\|\mu\|\frac{n^{\frac{n}{2}}}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \to 0.$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner les formules de résolution définitives, relatives au noyau $K(s, t)$. Pour simplifier, nous supposerons que le support de μ est M tout entier; alors la forme $2p$ fois linéaire sur $(\mathfrak{M}(M))^p \times (\mathcal{C}(M))^p$ définie par un noyau continu $N\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_p \\ t_1, \ldots, t_p \end{pmatrix}$ est nulle si et seulement si N est identiquement nul [car l'image de $\mathcal{C}(M)$ dans $\mathfrak{M}(M)$ sera faiblement dense; donc la forme $2p$ fois linéaire sur $(\mathfrak{M}(M))^p \times (\mathfrak{M}(M))^p$ définie par N sera nulle, d'où notre assertion en prenant $\mu_i = \varepsilon_{s_i}$, $\nu_i = \varepsilon_{t_i}$].

THÉORÈME 2. — *Soit M un espace compact muni d'une mesure μ de support M, K une fonction continue sur $M \times M$; considérons l'opérateur dans $\mathcal{C}(M)$ défini par K [form. (1)], noté encore K. Pour que $1 - \lambda K$ soit inversible, il faut et il suffit que $d^0(\lambda) \neq 0$ et la solution de l'équation $f - \lambda K.f = g$ (où f est l'inconnue) est donnée par*

$$f(s) = g(s) + \frac{1}{d^0(\lambda)}\int d^1\left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \middle| \lambda\right) g(t)\, d\mu(t). \tag{11}$$

Si, par contre, λ est zéro d'ordre $n > 0$ de $d^0(z)$, $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre *d'ordre n de l'opérateur K. Il existe un plus petit entier p tel que l'on ait*

$$d^p\left(\begin{matrix} s_1, & \dots, & s_p \\ t_1, & \dots, & t_p \end{matrix}\middle|\lambda\right) \neq 0$$

pour un système convenable de valeurs s_i, t_i. Pour un tel système, on obtient une base de l'espace des solutions de l'équation homogène $f - \lambda K.f = 0$, formée des p fonctions

$$(12) \qquad f_i(s) = d^p\left(\begin{matrix} s_1, & \dots, & s_{i-1}, & s, & s_{i+1}, & \dots, & s_p \\ t_1, & \dots, & t_{i-1}, & t_i, & t_{i+1}, & \dots, & t_p \end{matrix}\middle|\lambda\right)$$

et une base de l'équation transposée $g - \lambda^t K.g = 0$ formée des p fonctions

$$(13) \qquad g_i(t) = d^p\left(\begin{matrix} s_1, & \dots, & s_{i-1}, & s_i, & s_{i+1}, & \dots, & s_p \\ t_1, & \dots, & t_{i-1}, & t, & t_{i+1}, & \dots, & t_p \end{matrix}\middle|\lambda\right)$$

(identifiés aux mesures de densité g_i par rapport à μ). Pour que l'équation en f : $f - \lambda K.f = g$ ait une solution, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int g g_i \, d\mu = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, p.$$

Une solution particulière de cette équation est alors

$$(14) \quad f(s) = g(s) + \frac{1}{d^p\left(\begin{matrix} s_1, & \dots, & s_p \\ t_1, & \dots, & t_p \end{matrix}\middle|\lambda\right)} \int d^{p+1}\left(\begin{matrix} s_1, & \dots, & s_p, & s \\ t_1, & \dots, & t_p, & t \end{matrix}\middle|\lambda\right) g(t)\, d\mu(t).$$

Compte tenu de la théorie de Fredholm générale développée au chapitre II (§ **4**, th. **2**, **3**, **4**), il faut seulement prouver que (12) [resp. (13)] fournit une base de l'espace des solutions de $f - \lambda K.f = 0$ (resp. $g - \lambda^t K.g = 0$) et que, moyennant les conditions d'orthogonalité $\int g g_i \, d\mu = 0$, la formule (14) donne une solution de $f - \lambda K.f = g$. Pour tout système d'éléments $\mu_2, \dots, \mu_n$ de $\mathfrak{M}(M)$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de $\mathcal{C}(M)$, l'élément

$$s \to \langle d^p(\lambda), \varepsilon_s \otimes_2 \mu \otimes \dots \otimes \mu_p \otimes \varphi_1 \otimes \dots \varphi_p \rangle \quad \text{de } \mathcal{C}(M)$$

[qui définit la forme linéaire $\mu_1 \to \langle d^p(\lambda), \mu_1 \otimes \dots \otimes \varphi_p \rangle$ sur $\mathfrak{M}(M)$] est solution de l'équation $f - \lambda K.f = 0$; par raison de continuité faible, ceci reste vrai si l'on remplace les φ_i par des $\nu_i \in \mathfrak{M}(M)$ quelconques; faisant

$$\mu_i = \varepsilon_{s_i} \quad (i = 2, \dots, n), \qquad \nu_i = \varepsilon_{t_i} \quad (i = 1, \dots, n),$$

on voit bien que $f_1(s)$ est solution de $f - \lambda K.f = 0$. Je dis, d'autre part, que les f_i sont linéairement indépendants et, de façon précise, que l'on a

$$f_i(s_j) = k\delta_{ij},$$

δ_{ij}, indice de Kronecker; $k = d^p\left(\begin{matrix} s_1, & \dots, & s_p \\ t_1, & \dots, & t_p \end{matrix}\middle|\lambda\right) \neq 0$.

Pour le voir, il suffit d'utiliser le fait que $d^p\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix}\lambda\Big)$ est une fonction alternée des s_i, c'est-à-dire change de signe quand on permute deux arguments s_i et, par suite, s'annule si deux des s_i coïncident; cette propriété résulte en effet de ce que

$$\langle d^p(\lambda), \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_p \otimes \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p \rangle$$

est alternée par rapport aux μ_i. Ainsi les f_i sont p solutions linéairement indépendantes de l'équation $f - \lambda K.f = 0$ et comme l'espace de ces solutions a pour dimension p (chap. II, th. 3) les f_i en forment une base. On vérifie aussitôt que l'opérateur ${}^tK$ dans $\mathfrak{M}(M)$, transposé de K, induit dans $\mathcal{C}(M)$ un opérateur défini par le noyau

$${}^tK(s, t) = K(t, s);$$

appliquons ce qui précède au noyau

$$(s, t) \to K(t, s);$$

les g_i donnés par (13) représentent, dans $\mathcal{C}(M)$, p solutions linéairement indépendantes de l'équation $g - \lambda {}^tK.g = 0$. Comme l'espace des solutions *dans* $\mathfrak{M}(M)$ a pour dimension p, les g_i forment une base de cet espace. Enfin, on sait (chap. II, th. 3), que les conditions $\int g g_i \, d\mu = 0$ sont nécessaires et suffisantes pour que l'équation $f - \lambda K.f = g$ ait une solution; alors, quels que soient les $\mu_i \in \mathfrak{M}(M)$ et les $\varphi_i \in \mathcal{C}(M)$ $(i = 1, \ldots, p)$ la fonction

$$\begin{aligned}\varphi(s) = \langle d^p(\lambda), \mu_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p \rangle g(s) \\ + \langle d^{p+1}(\lambda), \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_p \otimes \varepsilon_s \otimes \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p \otimes g \rangle\end{aligned}$$

est solution de l'équation

$$\varphi - \lambda K.\varphi = \langle d^p(\lambda), \mu_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p \rangle g;$$

par raison de continuité faible, ceci reste vrai si l'on remplace les φ_i par des $\nu_i \in \mathfrak{M}(M)$ quelconques. Faisant alors

$$\mu_i = \varepsilon_{s_i}, \qquad \nu_i = \varepsilon_{t_i} \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

on voit que la fonction $f(s)$ donnée par (14) est solution de l'équation $f - \lambda K.f = g$. Ainsi le théorème 2 est entièrement démontré.

Remarques complémentaires. — Soit $K(s, t)$ une fonction continue sur $M \times M$; elle définit de façon naturelle une application linéaire de $\mathfrak{M}(M)$ dans $\mathcal{C}(M)$ (indépendamment de la donnée d'une mesure μ sur M), faisant correspondre à la mesure $\nu \in \mathfrak{M}(M)$ la fonction

$$K.\nu(s) = \int K(s, t) \, d\nu(t). \tag{15}$$

On a manifestement

(16) $$\| K.\nu \| \leqq \| K \|_\infty \| \nu \|$$

$\left[\text{où } \| K \|_\infty = \sup\limits_{s,t} | K(s, t) |\right]$ et, par ailleurs, pour ν, $\lambda \in \mathfrak{M}(M)$

(17) $$\langle K.\nu, \lambda \rangle = \langle {}^tK.\lambda, \nu \rangle,$$

où ${}^tK$ est le noyau symétrique de K. On en conclut que $\nu \to K.\nu$ *est une application linéaire faiblement continue de $\mathfrak{M}(M)$ dans $\mathcal{C}(M)$, de norme* $\leqq \| K \|_\infty$ [par topologie faible sur $\mathfrak{M}(M)$, nous entendons la topologie faible du dual de $\mathcal{C}(M)$], dont la transposée est $\lambda \to {}^tK.\lambda$. On a donc une application linéaire naturelle de $\mathcal{C}(M \times M)$ dans $L(\mathfrak{M}(M), \mathcal{C}(M))$, de norme $\leqq 1$ [faisant correspondre, à $K \in \mathcal{C}(M \times M)$, l'opérateur $\nu \to K.\nu$], et comme les éléments du type $\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i \, [f_i, g_i \in \mathcal{C}(M)]$ sont denses dans $\mathcal{C}(M \times M)$ comme il est bien connu, et définissent des opérateurs de rang fini et *a fortiori* compacts; il en résulte, par raison de continuité, que les opérateurs $\nu \to K.\nu$ sont *compacts*. [Il est d'ailleurs facile de voir qu'on obtient même un *isomorphisme*, respectant les normes, de $\mathcal{C}(M \times M)$ *sur* l'espace des applications linéaires compactes et faiblement continues de $\mathfrak{M}(M)$ dans $\mathcal{C}(M)$; mais nous ne nous en servirons pas ici.] L'application $f \to K.f$ définie par (1) n'est autre que l'application composée de l'application naturelle $f \to f\mu$ de $\mathcal{C}(M)$ dans $\mathfrak{M}(M)$ (définie par la donnée de μ) et de l'application précédente $\nu \to K.\nu$. On peut se proposer de résoudre, de façon générale, l'équation

(18) $$\nu - \lambda K.\nu = \nu_0,$$

où $\nu_0 \in \mathfrak{M}(M)$ est un second membre donné, et où l'inconnue est aussi dans $\mathfrak{M}(M)$. Ici, $\lambda K.\nu$, qui est *a priori* une *fonction* continue sur M, est identifiée à la mesure qu'elle définit. Comme $\nu \to K.\nu$ est le transposé de l'opérateur dans $\mathcal{C}(M)$ défini par le noyau ${}^tK(s, t) = K(t, s)$, on peut appliquer la théorie de Fredholm (th. 2). On trouve aussitôt :

Si $d^0(\lambda) \neq 0$, l'équation (18) *a une solution et une seule pour toute $\nu_0 \in \mathfrak{M}(M)$, donnée par*

(19) $$\nu = \nu_0 + \frac{1}{d^0(\lambda)} d^1(\lambda)\nu_0,$$

où $d^1(\lambda)$ désigne le noyau continu $(s, t) \to d^1\left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \middle| \lambda\right)$. *Dans le cas singulier $d^0(\lambda) = 0$, si les entiers p et les s_i, t_i sont définis comme dans le théorème* 2, (18) *a une solution si et seulement si ν_0 est orthogonal aux $g_i \in \mathcal{C}(M)$ donnés par* (13) *et l'on a la solution particulière*

(20) $$\nu = \nu_0 + \frac{1}{d^p\left(\begin{matrix} s_1, \ldots, s_p \\ t_1, \ldots, t_p \end{matrix} \middle| \lambda\right)} d^{p+1}\left(\begin{matrix} s_1, \ldots, s_p, s \\ t_1, \ldots, t_p, t \end{matrix} \middle| \lambda\right)_{s,t} . \nu_0$$

(où, dans le second terme du second membre, on fait opérer un noyau continu en s, t, sur la mesure ν_0). *Enfin, les f_i donnés par* (12), *identifiées aux mesures $f_i\mu$, forment une base de l'espace des solutions de l'équation homogène*

$$\nu - \lambda K.\nu = 0.$$

Notons que, si E est un espace vectoriel quelconque intermédiaire entre $\mathcal{C}(M)$ et $\mathfrak{M}(M)$ et si, dans (19) ou (20), on fait $\nu_0 \in E$, le premier membre est dans E [somme d'un élément de E et d'un élément de $\mathcal{C}(M) \subset E$]; de même, les f_i sont dans E [puisque dans $\mathcal{C}(M)$] et les g_i peuvent être considérés comme des formes linéaires *sur* E. Ainsi, la théorie de résolution de l'équation (18) où $\mathbf{1} - \lambda K$ est pris pour un opérateur *dans* E est exactement la même que dans le cas particulier où $E = \mathfrak{M}(M)$. Par exemple, on pourra prendre

$$E = \mathcal{L}^p(\mu), \qquad \text{avec} \quad 1 \leqq p \leqq +\infty.$$

3. Exemples de cas non classiques. — Le formalisme développé au chapitre II (§ 4) et au chapitre III (§ 1) est assez souple pour englober des formules de résolution de Fredholm explicites pour des opérateurs définis par des formules intégrales qui ne rentrent pas dans la théorie classique. Nous nous bornerons à quelques indications sommaires sur quelques exemples.

EXEMPLE 1 : *Opérateurs de Fredholm dans $\mathcal{L}^1(\mu)$.* — Soit M un espace localement compact, muni d'une mesure μ (non nécessairement bornée); on sait caractériser les opérateurs de Fredholm dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ comme les éléments de $\mathcal{L}^1(\mu) \hat{\otimes} \mathcal{L}^\infty(\mu)$, espace concrétisé grâce au théorème 1. D'où une classe remarquable non classique de noyaux, définis par des applications intégrables $s \to K(s, t)$ de M dans l'espace de Banach $\mathcal{L}^\infty(\mu)$; leur norme-trace est

$$\int \left(\operatorname{Vrai\,Sup}_t |K(s, t)|\right) d\mu(s). \tag{1}$$

On pourrait essayer de donner aux formules de Fredholm correspondantes la même forme que dans le théorème 2. Ceci est possible, moyennant quelques précautions pour avoir des énoncés non affectés par changement de $K(s, t)$ sur un ensemble de mesure nulle. En premier lieu, il faut donner au premier membre de (8) (§ 2) considéré comme une classe de fonctions mesurables sur $M^p \times M^p$ modulo les fonctions négligeables, un sens indépendant des changements susdits de $K(s, t)$; déjà, pour $n = 1$ et $p = 0$, le deuxième membre de (8) ne sera pas défini $\left[\text{car, pour calculer} \int K(s, s)\, d\mu(s)\right.$ il faudrait connaître les valeurs de $K(s, s)$ presque partout, ce qui n'est pas le $\left.\text{cas}\right]$; mais il n'est pas difficile, à l'aide de prescriptions précises pour le calcul de l'intégrale qui intervient dans (8), de donner au premier membre le sens qui convient pour le développement des formules de Fredholm. En second lieu, on pourra montrer seulement que, pour *presque tout* système (s_i, t_i) tel que $d^p\left(\begin{matrix} s_1, \ldots, s_p \\ t_1, \ldots, s_p \end{matrix} \middle| \lambda\right) \neq 0$, les fonctions f_i (resp. g_i) données par (12) [resp. par (13)] forment une base de l'espace des solutions de $f - \lambda K.f = 0$ (resp. $g - \lambda {}^tK.g = 0$) et que la formule (14) donne une solution de $f - \lambda K.f = g$ (lorsque la solution existe). Pour éviter ces difficultés, il peut être plus commode de garder les formules de résolution sous la forme donnée au chapitre II (§ 4), ce qui élimine le « presque partout ». Mais ceci oblige à écrire, dans la formule (14), une intégrale multiple d'ordre $p+1$ au lieu d'une intégrale simple. Ces ennuis techniques disparaissent si $K(s, t)$ est une fonction *continue* sur $M \times M$, auquel cas l'énoncé du théorème **2** est valable tel quel. En effet, la formule (8) du paragraphe **2** définit alors sans ambiguïté les d_n^p comme des fonctions *continues* sur $M^p \times M^p$, et la formule (9) identifie les $d^p\left(\begin{matrix} s_1, \ldots, s_p \\ t_1, \ldots, t_p \end{matrix} \middle| z\right)$ à des fonctions *continues* sur $M^p \times M^p$, dont les valeurs en chaque point sont donc définies.

Exemple **2** : *Cas des espaces nucléaires. Opérateurs de Fredholm dans* $(\mathcal{E})$. — La considération des opérateurs de Fredholm dans les espaces localement convexes généraux (non nécessairement normables) est surtout intéressante à cause de la théorie des *espaces nucléaires* ([5], chap. II, § 2 et 3). Un espace localement convexe E est en effet nucléaire si et seulement si toute application linéaire continue de E dans un espace de Banach F est *nucléaire* (*voir* définition des applications nucléaires au chapitre II, § 5, Rappel). Il en résulte aussitôt que si E est un espace localement convexe quelconque dont les parties bornées et fermées sont complètes (espace appelé *quasi-complet*), les applications linéaires de E dans F nucléaires sont identiques aux applications linéaires bornées (c'est-à-dire transformant un voisinage convenable de 0 dans E en une partie bornée de F). *A fortiori*, *toute application linéaire bornée d'un espace nucléaire E dans un espace localement convexe quasi-complet est une application de Fredholm.* De plus, il résulte de la théorie des espaces nucléaires que ces applications se concrétisent, dans la plupart des cas pratiques, de façon simple, par exemple par des noyaux d'un type déterminé ([5], chap. III, § 3). On trouve, si $E = F = \mathcal{E}(U) = \mathcal{E}$, espace des fonctions indéfiniment différentiables sur l'ouvert $U \in R^n$, muni de sa topologie naturelle [qui en fait un espace $(\mathcal{F})$, nucléaire, d'après *loc. cit.*], que les opérateurs de Fredholm dans $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire les endomorphismes bornés de $\mathcal{E}$) sont les opérateurs $\varphi \to K.\varphi$ définis par des noyaux-distributions $K_{x,y}$ [10] (distributions sur $U \times U$) qui sont sommes finies de dérivées multiples, par rapport à y, de fonctions continues $f(x, y)$ sur $U \times U$, dotées de dérivées partielles en x de tous ordres, continues en x, y et nulles quand y est dans le complémentaire d'un compact $K' \subset U$, indépendant de x. Pour un tel noyau K, on définit comme au paragraphe 2 les noyaux 2 p-uples d_n^p et $d^p(z)$, qui sont (pour z donné) des distributions sur $U^p \times U^p$ de même type que K (avec U remplacé par U^p). Les formules de résolution de Fredholm s'écrivent immédiatement, mais il faut les prendre sous la forme du théorème 3 du chapitre II, (§ 4) [car l'énoncé du théorème 2 du chapitre III (§ 2) perd ici toute signification].

EXEMPLE 3 : *Espaces de fonctions holomorphes.* — Soit U un ouvert de la sphère de Riemann Ω, avec $U \neq \emptyset$ et $U \neq \Omega$, $P(U)$ l'espace des fonctions holomorphes sur U, nulles à l'infini si $\infty \in U$, muni de sa topologie naturelle qui en fait un espace $(\mathcal{F})$, sous-espace vectoriel topologique fermé de l'espace nucléaire $\mathcal{E}(U)$. L'espace $P(U)$ est nucléaire ([5], § 2, n° 2). D'après ([6], § 5, prop. 4), les opérateurs bornés (donc les opérateurs de Fredholm) dans $P(U)$ sont ceux définis à l'aide de fonctions holomorphes K sur un ensemble $U \times V$, où V est un voisinage (dépendant de K) de $\complement_\Omega U$, par la formule : $f \to K.f$,

$$K.f(s) = \int_\Gamma f(t)\,K(s,\,t)\,dt \tag{2}$$

où le deuxième membre est une intégrale de Cauchy sur le contour Γ, bord orienté d'un domaine simple contenant $\complement_\Omega U$ et dont l'adhérence est contenue dans V. L'intégrale ne dépend pas de V $\left(\text{qu'on peut remplacer, pour } K \text{ donné, par un voisinage plus petit de } \complement_\Omega U\right)$ ni de Γ. Deux telles fonctions F et G, définies respectivement dans $U \times V_1$ et $U \times V_2$, définissent le même endomorphisme de $P(U)$ si et seulement si elles coïncident dans un ensemble $U \times V$, où V est un voisinage de $\complement_\Omega U$ contenu dans $V_1 \cap V_2$. On peut alors développer pour l'opérateur (2) des formules de résolution de Fredholm identiques à celles données dans le paragraphe 2, à cela près qu'on intègre sur Γ (muni de la « mesure de Cauchy » dt) et ses puissances Γ^p, au lieu d'intégrer sur l'espace U où sont définies les $f \in P(U)$. Pour des généralisations possibles d'opérateurs du type (2), voir : *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles* (*J. Anal. Math.*, Jérusalem, t. 2, 1952-1953, p. 243-280).

Signalons pour terminer que les opérateurs nucléaires dans les espaces *nucléaires* ont des propriérés très spéciales, qui ne sont pas vraies pour les opérateurs de Fredholm généraux, dans les espaces de Banach par exemple. Ainsi, le déterminant de Fredholm $\det(\mathbf{1} - zu)$ (défini sans ambiguïté par la donnée de l'opérateur nucléaire u) est *d'ordre* 0, en particulier la suite des valeurs propres de u est à *décroissance rapide* ([5], § 2, n° 4).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires* Varsovie, 1932.

[2] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique*, *Algèbre*, chap. III (*Act. Scient, et Ind.*, n° 1044, Paris, Hermann, 1948).

[3] N. Bourbaki, *Intégration*, chap. I-IV (*Act. Scient. et ind.*, n °1175, Paris, Hermann, 1952).

[4] J. Dieudonné et L. Schwartz, *La dualité dans les espaces* ($\mathfrak{F}$) *et* ($\mathfrak{LF}$) (*Ann. Inst. Fourrier*, t. 1, 1949, p. 61-101).

[5] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* (*Memoirs of the Amer. math. Soc.*, n° 16, Providence, 1955).

[6] A. Grothendieck, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes* (*J. de Grelle*, Bd 192, 1953, p. 35-64 et 77-95).

[7] A. Ruston, *Direct products of Banach spaces and linear functional équations* (*Proc. London math. Soc.*, séries 3, t. 1, 1951, p. 327-384).

[8] R. Schatten, *A theory of cross-spaces*, Princeton University Press, 1950.

[9] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, t. I et II (*Act. Scient. et Ind.*, n° 1091 et 1122, Paris, Hermann, 1950 et 1951).

[10] L. Schwartz, *J. An. Math.*, Jérusalem, t. 4, 1re partie, 1954-1955, p. 88-148.

Manuscrit reçu en février 1956.