BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES-LOUIS LIONS

Sur quelques problèmes aux limites relatifs à des opérateurs différentiels elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 83 (1955), p. 225-250
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1955__83__225_0>

Bull. Soc. Math. France,
83, 1955, p. 225 à 250.

SUR QUELQUES PROBLÈMES AUX LIMITES RELATIFS A DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS ELLIPTIQUES;

PAR J. L. LIONS.

Introduction. — Le but de cet article est l'étude de quelques problèmes aux limites relatifs à des opérateurs différentiels elliptiques.

Le paragraphe I donne un théorème général [généralisation de Schwartz [3] ou Lions [1] (chap. I, § 1)].

On donne aux paragraphes 2 et 3 quelques applications de ce théorème.

Le paragraphe II résout, en utilisant des notions introduites dans Deny-Lions [1], des problèmes aux limites relatifs à des opérateurs différentiels elliptiques du deuxième ordre, du type $\Lambda = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ (alors que la théorie donnée dans Schwartz [3] ou Lions [1] n'était applicable qu'à des opérateurs du type $\Lambda + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$).

Dans le paragraphe III, on résout pour des ouverts *bornés* particuliers des problèmes aux limites laissés en suspens dans Lions [1] (chap. I, § 2), relativement à l'opérateur $\Delta^2 + 1$.

Il y a évidemment d'autres applications possibles du théorème général du paragraphe I; on ne les a pas traitées ici, pour essayer de mieux dégager l'essentiel. On a aussi laissé de côté les questions de stabilité et les applications aux problèmes mixtes, questions que l'on peut traiter comme dans Lions [1].

Les résultats du paragraphe II ont été annoncés dans Lions [2].

I. — Un théorème préliminaire.

1. Notations. — On désigne par Ω un ouvert quelconque de R^n (1), par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω, à support compact dans Ω, muni de la topologie habituelle (*cf.* Schwartz [1]). On désigne par $\mathcal{D}'(\Omega)$, l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, espace des distributions sur Ω.

On considère un espace V de distributions sur Ω; cet espace est muni d'une

(1) Tout ceci se généralise sans difficulté nouvelle, par la méthode de Schwartz-Lions [1] au cas de certains espaces fibrés, en particulier au cas d'espaces de Riemann, et pour des systèmes différentiels.

structure préhilbertienne séparée *ou non*, c'est-à-dire, d'une forme sesquilinéaire [2] $u, v \to ((u, v))_1$, qui vérifie

$$(1.1) \qquad ((u, v))_1 = \overline{((v, u))_1} \quad \text{pour tout } u, v \in V \quad \text{et} \quad ((u, u))_1 \geq 0.$$

On suppose que $\mathcal{D}(\Omega)$ est contenu dans V, avec une topologie plus fine que celle induite par V [la topologie de V est définie par $((u, v))_1$]; on suppose que si T est dans V, la distribution complexe conjuguée $\overline{T}$ est aussi dans V.

On donne maintenant sur $V \times V$ une deuxième forme sesquilinéaire $u, v \to ((u, v))_2$, que l'on suppose *continue* et hermitienne [c'est-à-dire que $((u, v))_2 = \overline{((v, u))_2}$ pour tout $u, v \in V$].

On pose

$$(1.2) \qquad ((u, v)) = ((u, v))_1 + i((u, v))_2.$$

La forme sesquilinéaire $u, v \to ((u, v))$ est continue sur $V \times V$, donc il existe une constante C telle que

$$|((u, v))|^2 \leq C((u, u))_1((v, v))_1 \quad \text{pour tout } u, v \in V.$$

On va maintenant introduire la structure pré-hilbertienne *séparée* associée à V et $((u, v))_1$.

Pour cela, on introduit l'espace Z des éléments z de V tels que

$$(1.3) \qquad ((z, z))_1 = 0.$$

Posons

$$(1.4) \qquad \tilde{V} = V/Z;$$

si $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}$, et si u est quelconque dans $\tilde{u}$, v quelconque dans $\tilde{v}$, on peut poser

$$(1.5) \qquad ((\tilde{u}, \tilde{v}))_1 = ((u, v))_1,$$

ce qui munit $\tilde{V}$ d'une structure préhilbertienne séparée. On fait maintenant l'hypothèse fondamentale suivante :

(H) L'espace $\tilde{V}$ est un espace de Hilbert pour $((\tilde{u}, \tilde{v}))_1$.

Comme $((z, v))_2 = 0$, quel que soit z dans Z et v dans V, on peut poser

$$(1.6) \qquad ((\tilde{u}, \tilde{v})) = ((u, v)), \qquad u \in \tilde{u}, \qquad v \in \tilde{v};$$

ce qui définit sur $\tilde{V} \times \tilde{V}$ une forme sesquilinéaire continue.

Voici un lemme immédiat qui nous sera utile :

Lemme 1.1. — *On suppose que* (H) *a lieu. Soit* $\tilde{v} \to X(\tilde{v})$ *une forme semi-linéaire continue sur* $\tilde{V}$. *Il existe dans* $\tilde{V}$ *un élément* $\tilde{u}$ *et un seul tel que*

$$(1.7) \qquad X(\tilde{v}) = ((\tilde{u}, \tilde{v})) \quad \textit{pour tout } \tilde{v} \textit{ dans } V.$$

---

[2] C'est-à-dire $((u, v))$ dépend linéairement de u, et semi-linéairement de v [donc $((u, \lambda v)) = \overline{\lambda}((u, v))$].

Démonstration. — Puisque $\tilde{V}$ est un espace de Hilbert pour la structure $((\tilde{u}, \tilde{v}))_1$ il existe un élément $\tilde{\xi}$ dans $\tilde{V}$, et un seul, tel que

$$X(\tilde{v}) = ((\tilde{\xi}, \tilde{v}))_1 \quad \text{pour tout } \tilde{v} \in \tilde{V}$$

[ce qui montre le lemme si $((u, v))$ est hermitienne].

De même, il existe $H\tilde{u}$ unique dans $\tilde{V}$ tel que

$$((\tilde{u}, \tilde{v}))_2 = ((H\tilde{u}, \tilde{v}))_1 \quad \text{pour tout } \tilde{v} \in \tilde{V},$$

et ceci définit H, opérateur linéaire continu de $\tilde{V}$ dans lui-même, et hermitien pour la structure $((\tilde{u}, \tilde{v}))_1$.

L'équation (1.7) équivaut alors à

$$(1 + iH)\tilde{u} = \tilde{\xi},$$

équation qui admet une solution unique

$$\tilde{u} = (1 + iH)^{-1}\tilde{\xi}.$$

C. Q. F. D.

2. Problèmes aux limites. — Soit Q un espace vectoriel topologique localement convexe, avec

$$(2.1) \qquad \mathcal{D}(\Omega) \subset Q \subset \mathcal{D}'(\Omega) \quad [3],$$

$\mathcal{D}(\Omega)$ étant dense dans Q.

L'espace dual de Q, soit Q', peut être identifié à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ étant faiblement dense dans Q' :

$$(2.2) \qquad \mathcal{D}(\Omega) \subset Q' \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

On suppose que si T est dans Q (resp. Q') alors $\overline{T}$ est dans Q (resp. Q').

On donne un sous-espace vectoriel $\mathfrak{Z}$ de Q', *de dimension finie*, tel que si $\zeta \in \mathfrak{Z}$, alors $\bar{\zeta}$ est dans $\mathfrak{Z}$.

On désigne par $Q_{\mathfrak{Z}}$ (resp. $\mathcal{D}_{\mathfrak{Z}}$) le sous-espace vectoriel fermé de Q [resp. $\mathcal{D}(\Omega)$] formé des f tels que

$$(2.3) \qquad \langle f, \bar{\zeta} \rangle = 0 \quad \text{pour tout } \zeta \in \mathfrak{Z}$$

(le crochet désigne la dualité entre Q et Q').

On donne maintenant deux opérateurs linéaires A et B, de la façon suivante :

$$(2.4) \qquad A \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\mathfrak{Z}}; V) \quad [4],$$

$$(2.5) \qquad B = \text{opérateur linéaire de V dans } Q_{\mathfrak{Z}}, \text{ continu ou non.}$$

---

[3] $E \subset F$ signifie que E est contenu dans F avec une topologie plus fine.

[4] De façon générale, on désigne par $\mathcal{L}(E; F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

On suppose que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{Z}}$, on a

$$\mathrm{BA}\varphi = \varphi. \tag{2.6}$$

On désigne par Q'_0 l'espace des éléments f de Q' tels que

$$\langle f, \overline{\mathrm{B}z} \rangle = 0 \quad \text{pour tout } z \in \mathrm{Z}. \tag{2.7}$$

Si f est donné dans Q'_0, on a

$$\langle f, \overline{\mathrm{B}(v+z)} \rangle = \langle f, \overline{\mathrm{B}v} \rangle,$$

donc $\langle f, \overline{\mathrm{B}v} \rangle$ ne dépend que de $\tilde{v}$. On fera alors l'hypothèse suivante :

$$\text{la forme } \tilde{v} \to \langle f, \overline{\mathrm{B}v} \rangle,\ f \in Q'_0, \text{ est continue sur } \tilde{\mathrm{V}}. \tag{2.8}$$

On donne maintenant un opérateur A (qui sera un opérateur différentiel dans les applications) :

$$\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{V}; \mathcal{D}'(\Omega)), \tag{2.9}$$

qui est supposé vérifier

$$((u, \mathrm{A}\varphi)) = \langle \mathrm{A}u, \bar{\varphi} \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{Z}}. \tag{2.10}$$

Remarque 2.1. — Si $\mathfrak{Z} = \{0\}$, alors A est défini par la forme $((u, v))$ et A; en effet, $\varphi \to ((u, \mathrm{A}\varphi))$ est alors une forme semi-linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, donc du type $\langle \mathrm{A}u, \bar{\varphi} \rangle$, ce qui définit $\mathrm{A}u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et A.

Lemme 2.1. — *L'opérateur* A *applique* Z *dans* $\mathfrak{Z}$.

Démonstration. — Soit $z \in \mathrm{Z}$; alors $((z, \mathrm{A}\varphi)) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{Z}}$, donc $\langle \mathrm{A}z, \bar{\varphi} \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{Z}}$, c'est-à-dire que $\mathrm{A}z$ est dans $(\mathcal{D}_{\mathfrak{Z}})^0$ ensemble polaire de $\mathcal{D}_{\mathfrak{Z}}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Mais $\mathcal{D}_{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z}^0$ par définition, donc $\mathrm{A}z \in \mathfrak{Z}^{00} =$ bipolaire de $\mathfrak{Z}$. Comme $\mathfrak{Z}$ est de dimension finie, il est fermé, donc $\mathfrak{Z}^{00} = \mathfrak{Z}$, donc $\mathrm{A}z \in \mathfrak{Z}$. C. Q. F. D.

Espace $\mathcal{H}$. — On désigne par $\mathcal{H}$ l'espace (peut-être réduit à $\{0\}$) des éléments u de V tels que $\mathrm{A}u$ soit dans Q'. On le munit de la topologie la moins fine telle que les applications $u \to u$ et $u \to \mathrm{A}u$ soient continues de $\mathcal{H}$ dans V et Q respectivement.

Notons que Z est contenu dans $\mathcal{H}$, car si z est dans Z, alors $\mathrm{A}z$ est dans $\mathfrak{Z}$ (lemme 2.1) et $\mathfrak{Z} \subset Q'$ [5]. On a évidemment $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; Q')$.

Espace N. — On désigne par N le sous-espace de $\mathcal{H}$, formé des éléments u tels que

$$\langle \mathrm{A}u, \overline{\mathrm{B}v} \rangle = ((u, v)) \quad \text{pour tout } v \in \mathrm{V}. \tag{2.11}$$

Si u est dans $\mathcal{H}$, et si v est dans V du type $v = \mathrm{A}\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{Z}}$, alors (2.11) a lieu.

---

[5] On voit déjà que $\mathcal{H}$ n'est pas réduit à $\{0\}$ si Z n'est pas réduit à $\{0\}$.

En effet, $BA\varphi = \varphi$, le premier membre vaut $\langle Au, \bar{\varphi}\rangle$. Le deuxième est $((u, A\varphi))$. Il y a égalité par définition [*cf.* (2.10)].

L'espace N est muni de la topologie induite par $\mathcal{H}$. On a le

LEMME 2.2. — *L'espace* Z *est contenu dans* N.

Démonstration. — On a déjà vu que Z est dans $\mathcal{H}$. Reste à montrer que si $u = z \in Z$, alors (2.11) a lieu. Or le deuxième membre est nul. Mais (lemme 2.1) $Az \in \mathfrak{Z}$, et par (2.5), $Bv \in Q_{\mathfrak{Z}}$, donc $\langle Az, \overline{Bv}\rangle = 0$, d'où le résultat.

Étudions l'image de N par A. On a

$$\langle Au, \overline{Bz}\rangle = ((u, z)) = 0 \quad \text{pour tout } z \in Z,$$

donc par définition de Q'_0 [*cf.* (2.7)] on voit que Au est dans Q'_0. Donc

$$A \in \mathcal{L}(N; Q'_0). \tag{2.12}$$

Espace $\mathcal{K}$. — On donne un espace $\mathcal{K}$ de distributions sur Ω et un prolongement de A, encore noté A, à l'espace $\mathcal{K}$, de sorte que

$$A \in \mathcal{L}(\mathcal{K}; Q'). \tag{2.13}$$

Problème aux limites. — On appellera « problème aux limites » le problème suivant :

Problème 2.1. — Trouver U dans $\mathcal{K}$, solution de

$$AU = F, \tag{2.14}$$

où F est donné dans Q', avec *les conditions aux limites* (6)

$$h - U \in N, \tag{2.15}$$

où h est donné dans $\mathcal{K}$.

Ce problème sera résolu au numéro suivant.

3. Résolution des problèmes aux limites. — Le problème 2.1 va être résolu sous l'hypothèse (H) (p. 226), et sous une deuxième hypothèse (H') que l'on va préciser. Rassemblons ces deux hypothèses :

(H) L'espace $\tilde{V}$ est un espace de Hilbert pour $((\tilde{u}, \tilde{v}))_1$.

(H') L'opérateur A applique Z *sur* $\mathfrak{Z}$.

THÉORÈME 3.1. — *On suppose que les hypothèses* (H) *et* (H') *ont lieu. La condition nécessaire et suffisante pour que le problème* 2.1 *admette une solution est que*

$$\langle Ah - F, \overline{Bz}\rangle = 0 \quad \text{pour tout } z \in Z. \tag{3.1}$$

Dans ces conditions, si U_1 *est une solution du problème, toutes les solutions sont données par* $U_1 + z$, $z \in Z$, *tel que* $Az = 0$.

(6) Ceci est une définition, qui sera justifiée sur les exemples.

Démonstration. — *a.* Posons $u = h - U$. Le problème **2**.1 *équivaut* alors à trouver u dans N, solution de

$$(3.2) \qquad \Lambda u = f,$$

où $f = \Lambda h - F$ est donné dans Q'.

b. Comme Λ applique N dans Q'_0 [(**2**.12)], il est nécessaire, pour que (**3**.2) puisse avoir une solution, que f soit dans Q'_0, donc que l'on ait (**3**.1).

c. Cherchons les u dans N tels que $\Lambda u = 0$. On doit avoir $((u, u)) = 0$, donc $((u, u))_1 = 0$, donc $u \in Z$, et comme Z est dans N, toutes les solutions dans N de $\Lambda u = 0$ sont les z tels que $\Lambda z = 0$. Ceci montre la dernière partie du théorème.

d. Il reste à montrer ceci : si f est donné dans Q'_0, alors il existe u dans N solution de (**3**.2).

Si u est une solution de (**3**.2), alors, pour v quelconque dans V, on a

$$((u, v)) = \langle f, \overline{Bv} \rangle \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Comme f est dans Q'_0, on a

$$\langle f, \overline{B(v+z)} \rangle = \langle f, \overline{Bv} \rangle,$$

on peut donc poser

$$(3.3) \qquad \langle f, \overline{Bv} \rangle = X(\tilde{v}),$$

et l'on a supposé [*cf.* (**2**.8)] que $X(\tilde{v})$ dépend continûment de $\tilde{v}$. Il en résulte, d'après le lemme **1**.1, qu'il existe un élément $\tilde{u}$ et un seul dans $\tilde{V}$, tel que

$$(3.4) \qquad ((\tilde{u}, \tilde{v})) = X(\tilde{v}) \quad \text{pour tout } \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Par conséquent, si (**3**.2) admet une solution, la classe $\tilde{u}$ de u dans $\tilde{V}$ est *la* solution de (**3**.4).

Il reste à voir si l'on peut trouver dans $\tilde{u}$ un représentant qui soit dans N et vérifie (**3**.2). Pour cela, prenons u_1 quelconque dans $\tilde{u}$; donc $u_1 \in V$, et vérifie

$$(3.5) \qquad ((u_1, v)) = \langle f, \overline{Bv} \rangle \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Donc (**3**.5) a en particulier lieu avec $v = A\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{Z}}$. Alors $Bv = \varphi$, de sorte que (**3**.5) donne

$$((u_1, A\varphi)) = \langle \Lambda u_1, \overline{\varphi} \rangle = \langle f, \overline{\varphi} \rangle,$$

et ceci, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{Z}}$, donc

$$(3.6) \qquad \Lambda u_1 - f = \zeta \in \mathfrak{Z}.$$

Il en résulte que u_1 *est dans* N. En effet, soit v quelconque dans V. Alors Bv est dans $Q_{\mathfrak{Z}}$, de sorte que

$$\langle \zeta, \overline{Bv} \rangle = 0.$$

Donc (**3**.6) donne

$$\langle \Lambda u_1, \overline{Bv} \rangle = \langle f, \overline{Bv} \rangle.$$

Mais par (3.5), le deuxième membre vaut $((u_1, v))$, donc

$$\langle A u_1, \overline{Bv} \rangle = ((u_1, v)),$$

ce qui montre que u_1 est dans N.

Considérons maintenant deux cas :

Premier cas : $\mathfrak{Z} = \{o\}$. — Alors (3.6) s'écrit $A u_1 = f$, on peut prendre $u = u_1$, ce qui montre le théorème dans ce cas.

Deuxième cas : $\mathfrak{Z} \neq \{o\}$. — Par l'hypothèse (H'), A applique Z sur $\mathfrak{Z}$, donc il existe $z \in Z$ avec

$$Az = \zeta.$$

Mais $Z \subset N$, donc $u_1 - z$ est dans N, et vérifie

$$A(u_1 - z) = f,$$

on peut donc prendre $u = u_1 - z$, ce qui démontre le théorème.

Remarque 3.1. — Supposons que $Z = \{o\}$, $\mathfrak{Z} = \{o\}$, A et B étant les injections. Alors le théorème 3.1 est déjà donné dans Schwartz [3], Lions [1].

Remarque 3.2. — On peut faire une théorie en tous points analogues en supposant plus généralement que Λ est un espace fibré indéfiniment différentiable, de fibre vectorielle de dimension finie, comme il est fait dans Schwartz-Lions [1].

II. — Application (I).

1. Position du problème. — On donne sur $\Omega \subset R^n$, l'opérateur différentiel

$$A = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right), \qquad \text{où } g_{ij} \in L^\infty(\Omega) \text{ (}^7\text{)}. \tag{1.1}$$

On suppose que l'opérateur A est *elliptique* au sens suivant : pour tout système de n nombres complexes $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} (g_{ij}(x) + \overline{g_{ji}(x)})\zeta_j\bar{\zeta}_i \geq a \sum_{i=1}^{n} |\zeta_i|^2 \quad (a > o), \quad \text{presque partout dans } \Omega. \tag{1.2}$$

Si, au lieu de A, on considère par exemple l'opérateur $A + s$, $s > o$ [8], les problèmes aux limites correspondants sont résolus dans Lions [1] (chap. I, § 2, n° 1) [9]. Le cas $s = o$ que l'on étudie ici, est un peu plus délicat.

Rappelons le résultat suivant, donné dans Deny-Lions [1]. Supposons pour

(7) On désigne par $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables sur Ω, essentiellement bornées.

(8) Plus généralement, on peut prendre s avec $\mathcal{R}(s)$ = partie réelle de $s > o$.

(9) Pour renvoyer à un article qui utilise une méthode fonctionnelle analogue à la méthode actuelle.

simplifier que n est $\geqq 3$. On introduit le nombre q donné par

(1.3) $$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}.$$

On désigne de façon générale par $L^p(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable sur Ω ; si $f \in L^p(\Omega)$, on pose

$$\| f \|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On désigne par $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ l'espace des $u \in L^q(\Omega)$ telles que les dérivées (au sens distribution) $\frac{\partial}{\partial x_i} u$ soient dans $L^2(\Omega)$ pour tout i. On pose

(1.4) $$\| u \|_1^2 = \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u \right\|_{L^2}^2.$$

et

(1.5) $$\| u \|_{\mathcal{E}^1_{q,2}} = \| u \|_{L^q} + \| u \|_1.$$

Pour cette norme, l'espace $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ est *un espace de Banach*. On désigne par $\mathcal{D}^1_{q,2}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ [10] et par $\mathcal{D}'^1_{q,2}(\Omega)$ l'espace dual de $\mathcal{D}^1_{q,2}(\Omega)$.

Ceci posé, *sous la condition* (1.2), *l'opérateur* Λ *définit un isomorphisme de* $\mathcal{D}^1_{q,2}(\Omega)$ *sur* $\mathcal{D}'^1_{q,2}(\Omega)$, ce qui résout le problème de Dirichlet (*cf.* Deny-Lions [1], et, pour une méthode analogue, Gårding [1], Browder [1]).

Voici maintenant ce qu'il est naturel d'appeler *le problème de Neumann* relatif à Λ. On désigne par N l'espace des éléments u de $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ tels que

(1.6) $$\Lambda u \in L^{q'}(\Omega), \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

et que, pour tout v dans $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$, on ait

(1.7) $$\langle \Lambda u, \bar{v} \rangle = (u, v)_g,$$

où l'on a posé

(1.8) $$(u, v)_g = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega g_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{v}(x) \, dx.$$

Supposons Ω connexe. Le problème de Neumann, avec conditions aux limites nulles, consiste à trouver u dans N, solution de

(1.9) $$\Lambda u = f \qquad [f \text{ donné dans } L^{q'}(\Omega)].$$

Si Ω est de mesure finie, il est évidemment nécessaire que f soit dans $L^{q'}_0(\Omega)$,

---

(10) La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{D}(\Omega)$ ne soit pas dense dans $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ est que $\complement\Omega$ ne soit pas de capacité nulle (*cf.* Deny-Lions [1]).

sous-espace de $L^{q'}(\Omega)$, formé des fonctions f telles que

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx = 0. \tag{1.10}$$

Par la même méthode que dans Deny-Lions [1], on montre ceci ([11]).

Premier cas : Ω est de mesure finie.

Si Λ applique N *sur* $L_0^{q'}(\Omega)$, il existe une constante $S(\Omega)$, telle que pour tout u dans $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$, on ait

$$\inf_c \| u + c \|_{L^q} \leq S(\Omega) \| u \|_1 \qquad (c = \text{const.}). \tag{1.11}$$

Deuxième cas : Ω est de mesure infinie.

Si Λ applique N *sur* $L^{q'}(\Omega)$, il existe une constante $S(\Omega)$ telle que pour tout u dans $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$, on ait

$$\| u \|_{L^q} \leq S(\Omega) \| u \|_1. \tag{1.12}$$

Or les inégalités (1.11) et (1.12) ne sont pas automatiquement réalisées. On est donc conduit (*cf.* Deny-Lions [1] à supposer que Ω *est un ouvert de Soboleff*, c'est-à-dire : sur Ω, connexe, introduisons l'espace $BL(\Omega)$ des distributions $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que $\frac{\partial}{\partial x_i} T$ soit dans $L^2(\Omega)$ pour tout i.

Si Ω *est de mesure finie*, on dira que Ω est un ouvert de Soboleff, si toute distribution T de $BL(\Omega)$ est dans $L^q(\Omega)$.

Si Ω *est de mesure infinie*, on dira que Ω est un ouvert de Soboleff, si, pour tout T dans $BL(\Omega)$, il existe une constante $c(T)$, dépendant de T, telle que $T + c(T)$ soit dans $L^q(\Omega)$.

Si Ω est un ouvert de Soboleff, les inégalités (1.11) ou (1.12) ont lieu. Tout ouvert de frontière trouvée assez régulière est un ouvert de Soboleff (*cf.* Deny-Lions [1]).

On va maintenant étudier les problèmes aux limites relatifs à Λ *sur un ouvert de Soboleff*, en utilisant le théorème du paragraphe I.

Rappelons encore un résultat qui va nous être utile. Soit Σ une portion de la frontière de Ω, bornée, variété de dimension $n-1$, une fois continûment différentiable par morceaux, Ω étant d'un même côté que Σ. Alors il existe une application linéaire continue et une seule, $u \to \sigma(u)$ de $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ dans $L^2(\Sigma)$ (espace des classes de fonctions de carré sommable sur Σ pour la mesure superficielle), telle que $\sigma(u)$ coïncide (presque partout) avec les valeurs de u sur Σ si u est donnée dans $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ continue dans $\Omega \cup \Sigma$.

Si Ω est non borné, on a un résultat analogue, en remplaçant $L^2(\Sigma)$ par l'espace $L^2_{\text{loc}}(\Sigma)$ des fonctions localement de carré sommable sur Σ ([12]).

([11]) La démonstration est facile. Par exemple dans le deuxième cas : soit A l'ensemble des u de $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ avec $\| u \|_1 \leq 1$. Il suffit de montrer que A est borné dans $L^q(\Omega)$, donc *faiblement borné*. Soit donc f donné dans $L^{q'}(\Omega)$. Il suffit de montrer que $\langle u, f \rangle$ est borné, $u \in A$. Or si Λ applique N *sur* $L^{q'}(\Omega)$, il existe u_0 dans N, avec $\Lambda u_0 = f$, d'où $\langle f, \bar{u} \rangle = (u_0, u)_g$ d'où le résultat.

([12]) On peut avoir des résultats de croissance globale sur σu en faisant des hypothèses de nature globale sur Σ.

On a également des résultats analogues en remplaçant l'espace $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ par l'espace $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ des $u \in L^2(\Omega)$ tels que $\frac{\partial}{\partial x_i} u$ soit dans $L^2(\Omega)$, pour tout i, muni de la norme dont le carré est donné par

$$(1.13) \qquad |||u|||_1^2 = ||u||_{L^2}^2 + ||u||_1^2.$$

Pour la norme $|||u|||_1$, $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert [13].

2. Problèmes aux limites sur un ouvert de Soboleff de mesure finie. — On désigne par V *un sous-espace vectoriel fermé de* $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$, contenant $\mathcal{D}^1_{q,2}(\Omega)$; c'est un espace de Banach pour la topologie induite par $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$.

On prend sur $V \times V$, la forme sesquilinéaire

$$(2.1) \qquad ((u, v)) = (u, v)_g + s(\sigma u, \sigma v)_{L^2(\Sigma)} \qquad (s > 0),$$

Σ étant un morceau borné de la frontière de Ω [14], et $(u, v)_g$ étant défini par (1.8). La partie hermitienne de cette forme est donnée par

$$(2.2) \qquad ((u, v))_1 = (u, v)_{g,1} + s(\sigma u, \sigma v)_{L^2(\Sigma)},$$

$$(2.3) \qquad (u, v)_{g,1} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (g_{ij} + \bar{g}_{ji}) \frac{\partial}{\partial x_j} u \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{v}\, dx.$$

Ceci définit sur V une structure préhilbertienne. L'espace V est désormais muni de la topologie correspondante. Cherchons l'espace Z (avec les notations du paragraphe I) : on cherche u telle que $((u, u))_1$ soit nul, donc $(u, u)_{g,1} = 0$ et $\sigma(u) = 0$ si $s \neq 0$. Or $(u, u)_{g,1} = 0$ entraîne $u = \text{const}$. On a donc les deux cas suivants à distinguer :

(A) $1 \notin V$, ou bien $s > 0$. Alors $Z = \{0\}$.
(B) $1 \in V$ et $s = 0$. Alors $Z = C$, ensemble des nombres complexes.

Il faut voir ensuite (et c'est le point fondamental) si (H) a lieu [hypothèse (H) du paragraphe I]. On a la

Proposition 2.1. — *On suppose que Ω est un ouvert de Soboleff de mesure finie. Alors :*

(A) *si* $1 \notin V$, *ou si* $1 \in V$ *et* $s > 0$, V *est un espace de Hilbert pour* $((u, v))_1$;
(B) *si* $1 \in V$, $s = 0$, *alors* $\tilde{V} = V/C$ *est un espace de Hilbert pour* $((\tilde{u}, \tilde{v}))_1$.

Démonstration. — Grâce à (1.2), on a

$$(2.4) \qquad ((u, u))_1 \geq a\, ||u||_1^2 + s\, ||\sigma u||_{L^2(\Sigma)}^2.$$

Cas (A), $1 \notin V$. — Soit u_k une suite de Cauchy dans V pour $\sqrt{((u, u))_1}$.

---

[13] L'application $u \to \sigma(u)$ applique encore $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2(\Sigma)$ ou $L^2_{loc}(\Sigma)$. Cette application n'est pas *sur*. Pour des précisions, *cf.* Lions [3]. (L'article détaillé correspondant est à paraître aux *Annals of Math.*)

[14] Tel que l'on puisse appliquer les résultats énoncés au n° 1, relativement à l'application σ.

Par (2.4) c'est une suite de Cauchy pour $\| u \|_1$. Comme Ω est un ouvert de Soboleff, il existe une suite de constantes c_k telles que

$$u_k + c_k \to w \quad \text{dans } \mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega). \tag{2.5}$$

Comme 1 n'est pas dans V, il existe, d'après le théorème de Hahn Banach, une forme linéaire continue $u \to L(u)$ sur $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$, nulle sur V, égale à 1 sur la fonction $u = 1$. Alors $L(u_k + c_k) = c_k$ tend vers $L(w) = c$, donc

$$u_k \to u = w - c \quad \text{dans } \mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega), \tag{2.6}$$

et comme V est fermé dans $\mathcal{E}^1_{q,2}$, $u_k \to u$ dans V, ce qui montre que V est complet pour $\sqrt{((u, u))_1}$, ce qui montre la proposition dans ce cas.

Cas (A), $1 \in V$, $s > 0$. — Soit encore u_k une suite de Cauchy dans V pour $\sqrt{((u, u))_1}$. On a encore (2.5). Par (2.4), $\sigma(u_k)$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Sigma)$, donc

$$\sigma(u_k) \to f \quad \text{dans } L^2(\Sigma). \tag{2.7}$$

Mais de (2.5) résulte (σ étant continue)

$$\sigma u_k + c_k \to \sigma w \quad \text{dans } L^2(\Sigma), \tag{2.8}$$

ce qui en comparant avec (2.7) montre que c_k est une suite convergente; on termine comme précédemment.

Cas (B), $1 \in V$, $s = 0$. — Comme Ω est un ouvert de Soboleff, sur $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)/C$ les normes $\| \tilde{u} \|_1$ et $\inf_{c \in C} \||(u + c)\||_1$ sont équivalentes, donc $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)/C$ est un espace de Hilbert pour $\| \tilde{u} \|_1$. Or sur $\tilde{V}$, $\sqrt{((\tilde{u}, \tilde{u}))_1}$ est une norme équivalente à $\| \tilde{u} \|_1$, d'où le résultat. La proposition est complètement démontrée.

Appliquons maintenant la théorie du paragraphe I. On prend

$$Q = L^q(\Omega) \qquad [\text{donc } Q' = L^{q'}(\Omega)].$$

On prend $\mathfrak{Z} = \{0\}$, donc $\mathcal{D}_{\mathfrak{z}} = \mathcal{D}(\Omega)$, et pour A on prend l'injection de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans V. On prend également

$$B = \text{injection de V dans } L^q(\Omega).$$

Si $Z = \{0\}$, cette injection est continue, donc (2.8) (§ I) a lieu. Si $Z = C$, vérifions que (2.8), (§ I), a encore lieu (l'injection n'est plus continue). L'espace Q'_0 [défini par (2.7), § I] est l'espace $L^{q'}_0(\Omega)$ des f tels que $\int_\Omega f(x)\,dx = 0$. Pour f dans $L^{q'}_0(\Omega)$,

$$\langle f, \bar{v} \rangle = \langle f, \bar{v} + \bar{c} \rangle \quad \text{(constante quelconque)}$$

et $\langle \tilde{v} \to \langle f, \bar{v} \rangle$ est une forme semi-linéaire continue sur $\tilde{V}$.

On est donc dans les conditions d'application de la théorie du paragraphe I. Voyons quels sont les problèmes aux limites que l'on a ainsi résolus.

On prend pour espace $\mathcal{K}$ l'espace des $u \in BL(\Omega)$ tels que Au soit dans $L^{q'}(\Omega)$.

Espace N. — C'est l'ensemble des $u \in V$ tels que $\Lambda u \in L^{q'}(\Omega)$ et que

$$\langle \Lambda u, \bar{v} \rangle = ((u, v)) \quad \text{pour tout } v \in V. \tag{2.9}$$

Énonçons de nouveau le problème 2.1 (§ I).

Problème 2.1. — Trouver U dans $\mathcal{K}$, ~~solution~~ de

$$\Lambda U = F, \qquad [F \text{ donné dans } L^{q'}(\Omega)], \tag{2.10}$$

avec les conditions aux limites

$$h - U \in N \qquad (h \text{ étant donné dans } \mathcal{K}). \tag{2.11}$$

On a, d'après le théorème 3.1, (§ I), le

Théorème 2.1. — *On suppose que Ω est un ouvert de Soboleff de mesure finie. Dans ces conditions, l'hypothèse* (1.2) *ayant lieu :*

(A) *si* $1 \notin V$ *ou si* $s > 0$, *le problème* 2.1 *admet une solution unique;*

(B) *si* $1 \in V$, $s = 0$, *la condition nécessaire et suffisante pour que le problème* 2.1 *admette une solution est que*

$$\int_\Omega (\Lambda h - F)\, dx = 0. \tag{2.12}$$

Alors la solution est déterminée à une constante additive près.

Donnons quelques exemples. Pour cela, nous notons la formule [15]

$$\langle \Lambda u, \bar{v} \rangle = \int_{\partial\Omega} (\gamma_\Lambda u)\, \bar{v}\, d\omega + (u, v)_g, \tag{2.13}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_\Lambda u = \text{dérivée normale de } u \text{ par rapport à } \Lambda \text{ [16], sur } \partial\Omega, \text{ frontière de } \Omega, \\ \qquad\qquad d\omega \text{ étant l'élément superficiel de } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.14}$$

Exemple 2.1 : $V = \mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$, $s = 0$. — Alors 1 est dans V, on est dans le cas (B). Dire que u est dans N signifie que $\gamma_\Lambda u = 0$ sur $\partial\Omega$. Le problème 2.1 correspondant est *le problème de Neumann.* Pour que ce problème ait une solution, il est nécessaire et suffisant que (2.12) ait lieu.

Exemple 2.2 : $V = \mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$, $s > 0$. — On est dans le cas (A). La condition (2.9) s'écrit

$$\int_{\partial\Omega} \gamma_\Lambda u \bar{v}\, d\omega = s(\sigma u, \sigma v)_{L^2(\Sigma)},$$

([15]) Cette formule est formelle, ce qui suffit pour interpréter de façon intuitive les problèmes aux limites. On peut donner un sens rigoureux à cette formule, *cf* Lions [3].

([16]) On a

$$\gamma_\Lambda u = \sum_{i,j} g_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u \cos(n, x_i), \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où n = vecteur directeur de la normale intérieure à Ω en un point de $\partial\Omega$, et (n, x_i) = angle de n avec l'axe des x_i.

donc dire que u est dans N signifie que

$$\gamma_\Lambda u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega - \Sigma, \qquad \gamma_\Lambda u = s\sigma u \quad \text{sur } \Sigma.$$

Le problème aux limites correspondant revient donc à trouver U, vérifiant (2.10), avec

$$\gamma_\Lambda U = \gamma_\Lambda k \quad \text{sur } \partial\Omega - \Sigma, \qquad \gamma_\Lambda U - sU \quad \text{donné sur } \Sigma.$$

Ce problème admet une solution unique ([17]).

Exemple 2.3. — $V =$ sous-espace de $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ formé des u tels que $\sigma u = 0$, et $s = 0$.

Alors 1 n'est pas dans V, on est encore dans les conditions (A). Dire que u est dans N signifie que

$$\gamma_\Lambda u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega - \Sigma, \qquad u = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Le problème 2.1 correspondant est un problème *de type mélangé*.

On peut varier les exemples précédents à l'infini ([18]).

3. **Problèmes aux limites sur un ouvert de Nikodym.** — On peut remplacer dans le numéro précédent, la notion d'ouvert de Soboleff par une notion moins restrictive et plus élémentaire : celle d'ouvert de Nikodym. Un ouvert Ω connexe de mesure finie est dit *ouvert de Nikodym* (la dimension n est quelconque $\geqq 2$) si toute distribution T de $BL(\Omega)$ est dans $L^2(\Omega)$ ([19]).

On a introduit à la fin du n° 1 l'espace $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$. On montre (*cf.* Deny-Lions [1]) que, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ouvert Ω soit un ouvert de Nikodym est qu'il existe une constante $P(\Omega)$ telle que, pour tout u dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, on ait

$$\|u\|^2_{L^2} - \frac{1}{\text{mes}(\Omega)}\left|\int_\Omega u(x)\,dx\right|^2 \leqq P(\Omega)\,\|u\|_1^2 \quad (3.1)$$ ([20]).

Prenons alors V, sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, contenant $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$, $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ étant l'adhérence dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ ([21]). Prenons pour forme

---

([17]) On peut plus généralement considérer une forme

$$((u, v)) = (u, v)_g + \int_\Sigma k(t)\,\sigma(u)\,\overline{\sigma(v)}\,dt,$$

[$t \in \Sigma$, $dt =$ mesure superficielle sur Σ, $k(t) > 0$]. On a pris dans le texte : $k(t) =$ constante s.

([18]) Il n'y a pas que le problème de Neumann qui corresponde au cas (B). Signalons en effet l'exemple suivant : on prend pour V le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$, formé des u tels que $\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} u\,dx = 0$, pour tout i, (plus généralement, pour une famille d'indices i). Cet espace V contient $\mathcal{D}(\Omega)$ et contient 1. Si $s = 0$, on est donc dans le cas (B). De telles conditions aux limites peuvent être utiles (*cf.* Minakshisundaram [1]).

([19]) On a montré dans Deny-Lions [1], que tout ouvert borné de frontière assez régulière, est un ouvert de Nikodym. Un ouvert de R^n ($n \geqq 3$), peut être un ouvert de Nicodym sans être un ouvert de Soboleff.

([20]) $\text{mes}(\Omega) =$ mesure de Ω. L'inégalité (3.1) est l'inégalité de Poincaré. *Cf.* Courant-Hilbert [1] Deny-Lions [1].

([21]) La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{D}(\Omega)$ ne soit pas dense dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ est que $\complement\Omega$ ne soit pas de capacité nulle.

sesquilinéaire la forme (2.1). On montre de façon analogue à la proposition 2.1 la

PROPOSITION 3.1. — *Soit Ω un ouvert de Nikodym. Alors :*

(*a*) *si* $1 \notin V$, *ou si* $s > 0$, V *est un espace de Hilbert pour* $((u, v))_1$.
(*b*) *si* $1 \in V$, $s = 0$, $\tilde{V} = V/C$ *est un espace de Hilbert* $((\tilde{u}, \tilde{v}))_1$.

On est donc encore dans les conditions d'application de la théorie du paragraphe I. Prenons $Q = L^2(\Omega)$, donc $Q' = L^2(\Omega)$, et pour A l'injection de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans V (on prend $\mathfrak{Z} = 0$). Prenons pour B l'injection de V dans $L^2(\Omega)$. Si l'on est dans le cas (*a*) de la proposition 3.1, cette injection est continue. Sinon, pour vérifier (2.8), (§ I) on prend f dans $Q'_0 = L^2_0(\Omega)$, sous-espace de $L^2(\Omega)$ formé des f telles que $\int_\Omega f(x)\,dx = 0$; il faut alors voir que $\tilde{v} \to (f, v)_{L^2}$ est une forme semi-linéaire continue sur V, ce qui est vrai.

Voyons quels sont les problèmes aux limites résolus par le théorème 3.1, (§ I). L'espace $\mathcal{K}$ est cette fois l'espace des u dans $\mathrm{BL}(\Omega)$ tels que $\Lambda u \in L^2(\Omega)$. L'espace N est l'espace des $u \in V$, tels que $\Lambda u \in L^2(\Omega)$ et que

$$(3.2) \qquad (\Lambda u, v)_{L^2} = ((u, v)) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Le problème aux limites correspondant au problème 2.1, (§ I), est le

Problème 3.1. — Trouver U dans $\mathcal{K}$, solution de

$$(3.3) \qquad \Lambda U = F \qquad [F \text{ donné dans } L^2(\Omega)],$$

avec les conditions aux limites

$$(3.4) \qquad h - U \in N \qquad (h \text{ étant donné dans } \mathcal{K}).$$

Le théorème 3.1 (§ I), donne le

THÉORÈME 3.1. — *On suppose que Ω est un ouvert de Nikodym et que* (1.2) *a lieu. Alors :*

(*a*) *si* $1 \notin V$ *ou si* $s > 0$, *le problème* 3.1 *admet une solution unique;*
(*b*) *si* $1 \in V$ *et* $s = 0$, *la condition nécessaire et suffisante pour que le problème* 3.1 *admette une solution est que* (2.12) *ait lieu.*

La solution est alors déterminée à une constante additive près.

Les applications de ce théorème sont analogues aux applications du théorème 2.1.

4. **Problème aux limites sur un ouvert de Soboleff de mesure infinie.** — Soit toujours Σ une portion bornée de la frontière de Ω, Σ étant supposée une variété de dimension $n-1$ une fois continûment différentiable par morceaux. On prend encore V, sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$, contenant $\mathcal{D}^1_{q,2}(\Omega)$, et sur V, la forme sesquilinéaire

$$(4.1) \qquad ((u, v)) = (u, v)_g + s(\sigma u, \sigma v)_{L^2(\Sigma)}, \qquad (s > 0).$$

La structure préhilbertienne définie par $((u, v))$ sur V est toujours séparée, car 1 n'est jamais dans V puisque Ω est de mesure infinie. L'espace $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ est, l'ouvert Ω étant un ouvert de Soboleff, un espace de Hilbert pour la norme $\|u\|_1$ et par (1.2), on a $((u, u))_1 \geqq a\|u\|_1^2$, donc :

PROPOSITION 4.1. — *Si Ω est un ouvert de Soboleff de mesure infinie, l'espace* V *est un espace de Hilbert pour* $((u, v))_1$.

On introduit alors les espaces Q et Q' comme au n° 2. L'espace N est défini de la même façon, ainsi que $\mathcal{K}$, et le problème 2.1 est posé de façon identique. Donc, d'après le théorème 3.1, (§ I) :

THÉORÈME 4.1. — *On suppose que Ω est un ouvert de Soboleff de mesure infinie, et que* (1.2) *a lieu. Alors le problème* 2.1 *admet une solution unique.*

Les applications sont analogues à celles du théorème 2.1. Donnons la variante suivante :

Exemple 4.1. — Soit Σ_1 une portion supposée bornée ou non de la frontière de Ω, Σ_1 étant une variété de dimension $n-1$, une fois continûment différentiable par morceaux, ne rencontrant pas Σ. Prenons pour V le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ des u tels que $\sigma_1(u) = 0$ dans $L^2_{\text{loc}}(\Sigma_1)$. Alors dire que u est dans N signifie que

$$\gamma_\Lambda u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega - \Sigma - \Sigma_1, \qquad u = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1, \qquad \gamma_\Lambda u = su \quad \text{sur } \Sigma.$$

5. **Problème de Poisson.** — On considère maintenant deux ouverts Ω_1, Ω_2, *connexes*, avec

(5.1) $\Omega_1 \cap \Omega_2 =$ ensemble vide (Ω_1 et Ω_2 étant des ouverts de Soboleff) $(n \geqq 3)$,

(5.2) $\text{mes}(\Omega_2) = \infty$, ($\Omega_1$ étant de mesure finie ou non),

(5.3) $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ ont en commun une variété Σ, de dimension $n-1$, bornée ou non, une fois continûment différentiable par morceaux.

On peut alors définir des applications « prolongement », $u_i \to \sigma_i(u_i)$, de $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega_i)$ dans $L^2_{\text{loc}}(\Sigma)$ $(i = 1, 2)$. On pose

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2. \tag{5.4}$$

Tout élément u de $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ est du type

$$u = (u_1, u_2), \qquad u_i \in \mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega_i). \tag{5.5}$$

On désigne par V le sous-espace vectoriel *fermé* de $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ formé des éléments u tels que

$$\sigma_1 u_1 = k\,\sigma_2 u_2, \qquad k \in C, \text{ non nul}, \tag{5.6}$$

l'égalité ayant lieu dans $L^2_{\text{loc}}(\Sigma)$.

Sur V on prend la forme sesquilinéaire

$$((u, v)) = \varepsilon_1(u_1, v_1)_1 + \varepsilon_2(u_2, v_2)_1, \tag{5.7}$$

où

$$(u_j, v_j)_j = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{v}_j \, dx \qquad (j = 1, 2) \quad [22], \tag{5.8}$$

et où $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, sont des constantes dépendant du milieu Ω_1 ou Ω_2[23].

On a $((u, v)) = \overline{((v, u))}$; on définit donc sur V une structure préhilbertienne; cette structure est séparée. En effet, $((u, u)) = 0$ équivaut à $\| u_1 \|_1 = 0$, $\| u_2 \|_1 = 0$. Comme Ω_2 est de mesure infinie, il en résulte que $u_2 = 0$, et $u_1 = c_1$ (constante). Par (5.6) il en résulte que $c_1 = 0$. C. Q. F. D.

L'hypothèse (H) (§ I), a lieu. En effet :

PROPOSITION 5.1. — *L'espace* V *est un espace de Hilbert pour la forme* $((u, v))$.

Démonstration. — Soit u^α une suite de Cauchy dans V pour $\sqrt{((u, u))}$. Alors, si $u^\alpha = (u_1^\alpha, u_2^\alpha)$, u_2^α est une suite de Cauchy dans $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega_2)$ (puisque Ω_2 est un ouvert de Soboleff de mesure infinie), donc $u_2^\alpha \to u_2$ dans $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega_2)$. Comme Ω_1 est un ouvert de Soboleff, il existe une suite de constantes c^α telles que $u_1^\alpha + c^\alpha \to v$ dans $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega_1)$ (si Ω_1 est de mesure infinie, on peut prendre $c^\alpha = 0$, et la proposition est démontrée). Il en résulte que $\sigma_1(u_1^\alpha) + c^\alpha$ converge dans $L^2_{loc}(\Sigma)$. Mais $\sigma_2(u_2^\alpha)$ converge dans le même espace. Comme on a (5.6), on en déduit que c^α converge, donc $u_1^\alpha \to u_1$ dans $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega_1)$, d'où le résultat.

On va alors appliquer la théorie du paragraphe I. On prend $Q = L^q(\Omega)$, donc $Q' = L^{q'}(\Omega)$, puis $\mathfrak{Z} = 0$; pour A on prend l'injection de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans V, pour B l'injection de V dans $L^q(\Omega)$ (qui est continue). L'opérateur Λ est alors défini par $((u, v))$:

$$((u, \varphi)) = \langle \Lambda u, \bar{\varphi} \rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

d'où

$$\Lambda u = (-\varepsilon_1 \Delta u_1, -\varepsilon_2 \Delta u_2), \qquad (\Delta = \text{laplacien}). \tag{5.9}$$

Espace $\mathcal{K}$. — C'est ici l'espace des $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tels que Λu soit dans $L^{q'}(\Omega)$, c'est-à-dire

$$\Delta_i u_i \in L^{q'}(\Omega_i) \qquad (i = 1, 2).$$

Espace N. — C'est l'espace des $u \in V$, tels que $\Lambda u \in L^{q'}(\Omega)$ et $\langle \Lambda u, \bar{v} \rangle = ((u, v))$ pour tout $v \in V$, c'est-à-dire

$$-\varepsilon_1 \langle \Delta u_1, \bar{v}_1 \rangle - \varepsilon_2 \langle \Delta u_2, \bar{v}_2 \rangle = \varepsilon_1 (u_1, v_1)_1 + \varepsilon_2 (u_2, v_2)_1. \tag{5.10}$$

Le problème 2.1 (§ I), devient

Problème 5.1. — Trouver U dans $\mathcal{K}$, solution de $\Lambda U = F$, c'est-à-dire

$$-\varepsilon_1 \Delta U_1 = F_1, \qquad -\varepsilon_2 \Delta U_2 = F_2, \qquad F_i \in L^{q'}(\Omega_i), \tag{5.11}$$

---

[22] On prend cette forme sesquilinéaire pour simplifier. Tout ceci se généralise au cas $((u, v)) = ((u_1, v_1))_{\Omega_1} + ((u_2, v_2))_{\Omega_2}$ où $((u_i, v_i))_{\Omega_i}$ = forme sesquilinéaire sur $\Omega_i (i = 1, 2)$, comme aux numéros précédents.

[23] Par exemple : ε_i = constante diélectrique de Ω_i.

avec les conditions aux limites

$$h - U \in N \quad (h \text{ étant donné dans } \mathcal{H}). \tag{5.12}$$

D'après le théorème 3.1, (§ I), on a le

THÉORÈME 5.1. — *Sous les hypothèses* (5.1), (5.2), (5.3), *l'espace* V *étant défini par* (5.6), *le problème* 5.1 *admet une solution unique.*

Interprétation. — Pour interpréter le problème 5.1, il suffit d'interpréter la condition « $u \in N$ ». Or, le premier membre de (5.10) vaut

$$\varepsilon_1(u_1, v_1)_1 + \varepsilon_2(u_2, v_2)_1 - \varepsilon_1 \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial}{\partial n_1} u_1 \bar{v}_1 \, d\omega_1 - \varepsilon_2 \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial}{\partial n_2} u_2 \bar{v}_2 \, d\omega_2,$$

où

$$\frac{\partial}{\partial n_i} u_i = \text{dérivée normale de } u_i \text{ sur } \partial\Omega_i, \qquad d\omega_i = \text{élément superficiel de } \partial\Omega_i:$$

donc (5.10) équivaut à [24]

$$\varepsilon_1 \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial}{\partial n_1} u_1 \bar{v}_1 \, d\omega_1 + \varepsilon_2 \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial}{\partial n_2} u_2 \bar{v}_2 \, d\omega_2 = 0. \tag{5.13}$$

Mais $\sigma_1 v_1 = k \sigma_2 v_2$, de sorte que (5.13) donne

$$\frac{\partial}{\partial n_1} u_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_1 - \Sigma, \qquad \frac{\partial}{\partial n_2} u_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_2 - \Sigma,$$

$$k \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial n_1} u_1 + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial n_2} u_2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Cas particulier : $k = 1$; le problème correspondant est un problème de Poisson.

Variante. — Désignons par Γ_i diverses portions, distinctes de Σ, de $\partial\Omega_1$ ou $\partial\Omega_2$; on suppose toujours que les Γ_i sont des variétés de dimension $n - 1$, une fois continûment différentiables par morceaux; on désigne par $\gamma_i(u)$ le prolongement (en moyenne) de $u \in \mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ sur Γ_i. On peut alors prendre pour espace V l'espace (fermé) des u tels que

$$\sigma_1(u_1) = k \sigma_2(u_2) \qquad \text{et} \qquad \gamma_i(u) = 0.$$

Toutes les considérations précédentes sont valables [25].

6. **Généralisations.** — Dans les numéros précédents, on a résolu de larges classes de problèmes aux limites pour les opérateurs A du type (1.1), avec la condition (1.2); en particulier pour $A = -\Delta$. Il est naturel de poser des problèmes analogues pour les opérateurs différentiels du type $A = (-1)^m \Delta^m$. On va seulement donner ici quelques indications sur le cas

$$A = \Delta^2. \tag{6.1}$$

---

[24] Formellement. *Cf.* note [15].

[25] Les problèmes aux limites correspondants interviennent en Électrostatique.

On peut attacher à Δ^2 un grand nombre de formes sesquilinéaires (*cf.* par exemple Aronszajn [1], Lions [1]). Prenons ici

$$(6.2) \qquad ((u, v)) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v \right)_{L^2},$$

ce qui a un sens sur l'espace des distributions sur Ω dont toutes les dérivées d'ordre 2 sont de carré sommable [espace noté $BL_2(\Omega)$ dans Deny-Lions [1], chap. 3].

Pour simplifier on suppose que Ω est *connexe*.

Supposons d'abord que Ω soit un ouvert de Soboleff ($n \geqq 3$). Si T est dans $BL(\Omega)$, alors T est dans $L^q(\Omega)$, ou bien, si Ω est de mesure infinie, il existe une constante $c(T)$ telle que $T + c(T)$ soit dans $L^q(\Omega)$. Donc si T est dans $BL_2(\Omega)$, alors $\frac{\partial}{\partial x_i} T \left[\text{ou } \frac{\partial}{\partial x_i} T + c_i(T) \right]$ est dans $L^q(\Omega)$. On est alors conduit à étudier les ouverts ayant *en outre* la propriété suivante : si T est dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\frac{\partial}{\partial x_i} T \in L^q(\Omega)$ pour tout i, il existe une constante $c(T)$ (quelconque si Ω est de mesure finie) telle que

$$(6.3) \qquad T + c(T) \in L^{q_1}(\Omega), \qquad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}, \qquad (n \geqq 5).$$

On montre par la même méthode que dans Deny-Lions (chap. I, n° 6) que tout ouvert de frontière bornée assez régulière, dans R^n avec $n \geqq 5$, donne lieu à (6.3).

On peut éviter d'avoir à supposer $n \geqq 5$ en opérant comme suit.

On suppose que Ω est un ouvert de Nikodym ($n \geqq 2$). Désignons par $\mathcal{E}^2_{L^2}(\Omega)$ l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u \in L^2(\Omega), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u \in L^2(\Omega), \qquad \text{pour tout } i, j = 1, \ldots, n.$$

On pose

$$(6.4) \qquad \| u \|_2 = \sqrt{((u, u))}$$

et

$$(6.5) \qquad ||| u |||_2^2 = \| u \|_{L^2}^2 + \| u \|_1^2 + \| u \|_2^2.$$

Pour la norme $||| u |||_2$, $\mathcal{E}^2_{L^2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On désigne par $\mathcal{D}^2_{L^2}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}^2_{L^2}(\Omega)$ [26]. On prend maintenant un sous-espace vectoriel fermé V de $\mathcal{E}^2_{L^2}(\Omega)$, contenant $\mathcal{D}^2_{L^2}(\Omega)$. Cherchons l'espace Z (avec les notations du paragraphe I) : $((u, u)) = 0$ signifie que u est un polynome du premier degré, donc

$$(6.6) \qquad Z = \text{sous-espace de V formé des polynomes du premier degré.}$$

---

[26] La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{D}(\Omega)$ ne soit pas dense dans $\mathcal{E}^2_{L^2}(\Omega)$ [plus généralement dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$] est donnée dans un autre article.

L'hypothèse (H) du paragraphe I a lieu. En effet

PROPOSITION 6.1. — *On suppose que* Ω *est un ouvert de Nikodym. Alors l'espace* $\tilde{V} = V/Z$ *est un espace de Hilbert pour* $((\tilde{u}, \tilde{v}))$.

Démonstration. — Soit $\tilde{u}$ une suite de Cauchy dans $\tilde{V}$ pour $\|\tilde{u}\|_2 = \|u\|_2$, $u \in \tilde{u}$. Si u_k est quelconque dans $\tilde{u}$, alors $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_k$ converge dans $L^2(\Omega)$, pour tout i, j; comme Ω est un ouvert de Nykodym, il existe des constantes $c_{k,i}$ telles que $\frac{\partial}{\partial x_i} u_k + c_{k,i}$ converge dans $L^2(\Omega)$. Posons

$$v_k = u_k + \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i.$$

Alors $\frac{\partial}{\partial x_i} v_k$ converge dans $L^2(\Omega)$, donc, toujours parce que Ω est un ouvert de Nikodym, il existe des constantes c_k telles que $v_k + c_k$ converge dans $L^2(\Omega)$. Finalement, il existe $p_k \in P$, $P =$ espace de tous les polynomes du premier degré, avec

$$w_k = u_k + p_k \quad \text{converge dans } \mathcal{E}^2_{L^2}(\Omega). \tag{6.7}$$

Si $Z = P$, alors $\tilde{w}_k = \tilde{u}_k$, d'où le résultat.

Supposons maintenant $Z \subset P$ strictement. Décomposons P en somme directe : $P = Z \oplus S$, S de base $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu$. On a donc la décomposition

$$p_k = z_k + s_k, \qquad s_k = \Sigma \xi_{ki} \sigma_i, \qquad w_k = u_k + z_k + s_k.$$

Mais Z est contenu dans V, et $S \cap V = \{0\}$. D'après le théorème de Hahn Banach, il existe, pour tout i, une forme linéaire L_i continue sur $\mathcal{E}^2_{L^2}(\Omega)$, avec :

$$L_i \text{ est nulle sur } V; \qquad L_i(\sigma_j) = 0 \ \text{ si } i \neq j, \qquad = 1 \ \text{ si } i = j.$$

Il résulte de (6.7) que $L_i(s_k) = \xi_{k_i}$ converge, donc s_k converge, et par conséquent

$$u_k + z_k \to u \quad \text{dans } \mathcal{E}^2_{L^2}(\Omega), \tag{6.8}$$

donc $\tilde{u}_k \to \tilde{u}$ dans $\tilde{V}$, d'où le résultat.

On peut alors appliquer la théorie du paragraphe I. Prenons $Q = L^2(\Omega)$, donc $Q' = L^2(\Omega)$; $\mathfrak{Z} = \{0\}$; $\mathcal{D}_{\mathfrak{Z}} = \mathcal{D}(\Omega)$; $A =$ injection de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans V; $B =$ injection de V dans $L^2(\Omega)$. Si $Z = \{0\}$, cette injection est continue. Si $Z \neq \{0\}$, on introduit l'espace Q'_0 des $f \in L^2(\Omega)$, tels que

$$(f, z)_{L^2} = 0 \quad \text{pour tout } z \in Z \text{ (car } Bz = z). \tag{6.9}$$

Si $f \in Q'_0$, on a $(f, v)_{L^2} = (f, v + z)_{L^2}$ et $\tilde{v} \to (f, v)_{L^2}$ est une forme semi-linéaire continue sur $\tilde{V}$.

On désigne par $\mathcal{K}$ l'espace des distributions u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ telles que $\Delta^2 u \in L^2(\Omega)$. L'espace N est l'espace des $u \in V$ tels que $\Delta^2 u \in L^2(\Omega)$ et que

$$(\Delta^2 u, v)_{L^2} = ((u, v)) \quad \text{pour tout } v \in V. \tag{6.10}$$

Le problème 2.1 (§ I) devient ici

Problème 6.1. — Trouver U dans $\mathcal{K}$ solution de

$$\Delta^2 U = F \quad [F \text{ donné dans } L^2(\Omega)], \tag{6.11}$$

avec les conditions aux limites

$$h - U \in N, \quad (h \text{ étant donné dans } \mathcal{K}). \tag{6.12}$$

D'après le théorème 3.1, (§ I) on a le

THÉORÈME 6.1. — *On suppose que* Ω *est un ouvert de Nikodym. La condition nécessaire et suffisante pour que le problème* 6.1 *admette une solution est que l'on ait*

$$\int_\Omega (\Delta h - F)\bar{z}\, dx = 0 \quad \textit{pour tout } z \in Z, \tag{6.13}$$

Z étant l'espace des polynomes du premier degré appartenant à V. *La solution est alors déterminée à un élément de Z près.*

Exemple 6.1 : $V = \mathcal{E}^2_{L^2}(\Omega)$. — Alors $Z = P$, et (6.13) équivaut à

$$\int_\Omega (\Delta h - F)\, dx = 0, \qquad \int_\Omega (\Delta h - F) x_i\, dx = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{6.14}$$

Pour l'interprétation du problème correspondant, *cf.* Lions [1] (chap. I, § 2, n° 5, point 10).

Exemple 6.2. — Prenons pour V le sous-espace (fermé) de $\mathcal{E}^2_{L^2}(\Omega)$ formé des u tels que

$$\sigma(u) = 0, \qquad \sigma\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u\right) = 0 \quad (27).$$

Alors $Z = 0$, car si $z(x) = a_0 + \Sigma a_i x_i$, on doit avoir $z \in V$, donc $\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x_i} z\right) = 0$, soit $a_i = 0$. Alors $z(x) = a_0$, et $\sigma(z) = 0$ entraîne $a_0 = 0$. Il n'y a donc pas de condition du type (6.13); le problème 6.1 admet toujours une solution unique (27 *bis*).

---

(27) On désigne toujours par σ l'application « prolongement » de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2(\Sigma)$; si $u \in \mathcal{E}^2_{L^2}(\Omega)$. alors $\frac{\partial}{\partial x_j} u$ est dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, de sorte que $\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u\right)$ est défini.

(27 *bis*) *Note ajoutée à la correction des épreuves.* — Voici une remarque suggérée par M. B. Malgrange. Soit Ω un ouvert connexe *quelconque* de R^ν. On applique le paragraphe I avec $V = BL(\Omega)$; $Q = L^2_{loc}(\Omega)$; $Q' = L^2_c(\Omega)$ = espace des fonctions de carré sommable sur Ω à support compact; $\tilde{V} = BL^0(\Omega)$ est un espace de Hilbert; Q'_0 = espace des $f \in Q'$ avec $\int_\Omega f dx = 0$. On prend pour A et B les injections. La théorie s'applique. On résout ainsi un *problème de Neumann* pour Δ avec Ω quelconque. Remarques analogues pour les autres problèmes au limites. Si $n \geq 3$, on peut remplacer $L^2_{loc}(\Omega)$ par $L^q_{loc}(\Omega)$.

III. — Applications (II).

1. **Position du problème.** — On considère un ouvert Ω *connexe* de R^n. Sur Ω on considère l'opérateur Δ^2+1 ($\Delta =$ laplacien). Les problèmes aux limites les plus importants relativement à cet opérateur (mais non les seuls, *cf.* Pleijel [1]) consistent à trouver U, solution de

$$\Delta^2 U + U = F, \tag{1.1}$$

F étant une distribution donnée sur Ω, U et F ayant des propriétés à préciser, et les couples de fonctions suivants ayant des valeurs données sur la frontière de Ω :

(*a*) $\quad U, \ \dfrac{\partial}{\partial n} U$ [28];

(*b*) $\quad \Delta U, \ \dfrac{\partial}{\partial n}\Delta U;$

(*c*) $\quad U, \ \Delta U;$

(*d*) $\quad \dfrac{\partial}{\partial n} U, \ \dfrac{\partial}{\partial n}\Delta U;$

(*e*) $\quad U, \ \dfrac{\partial}{\partial n}\Delta U;$

(*f*) $\quad \dfrac{\partial}{\partial n} U, \ \Delta U.$

Les problèmes (*a*), ..., (*d*) [29] sont résolus par exemple dans Lions [1], (chap. I, § 2, n° 6).

Les problèmes (*e*) et (*f*) sont plus délicats. La raison en est essentiellement que dans la formule de Green (formelle)

$$\int_\Omega (\Delta^2 u) v \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial n}\Delta u\right) v \, d\omega - \int_{\partial\Omega} (\Delta u)\left(\frac{\partial}{\partial n} v\right) d\omega + \int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx$$

les quantités $\dfrac{\partial}{\partial n}\Delta u$, v et Δu, $\dfrac{\partial}{\partial n} v$, apparaissent dans *la même* intégrale de surface.

On va s'en tirer en intégrant par parties $\int_\Omega \Delta^2 u \Delta v \, dx$ et en utilisant le théorème du paragraphe I.

Pour cela, posons d'abord les problèmes de façon plus précise. On considère encore comme au paragraphe II (n° 1) les espaces $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ et l'on considère sous deux espaces vectoriels fermés, W_1 et W_2 de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, avec

$$\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega) \subset W_i \subset \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega) \qquad (i = 1, 2). \tag{1.2}$$

On désigne par $N(W_i, -\Delta)$, l'espace des $u \in W_i$, tels que Δu soit dans $L^2(\Omega)$, et qui vérifient

$$(-\Delta u, v)_{L^2} = (u, v)_1 \quad \text{pour tout } v \in W_i. \tag{1.3}$$

---

[28] De façon générale, $\dfrac{\partial}{\partial n} f =$ dérivée normale de f sur $\partial\Omega$.

[29] Posés évidemment de façon plus précise.

On le munit de la norme dont le carré est $|||u|||_1^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2$; pour cette norme, $N(W_i, \in \Delta)$, est un espace de Hilbert.

On désigne alors par $\mathcal{N}$, l'espace des $u \in N(W_1, -\Delta)$, tels que $\Delta u \in N(W_2, -\Delta)$. On munit $\mathcal{N}$ de la norme dont le carré est $|||u|||_1^2 + |||\Delta u|||_1^2 + \|\Delta^2 u\|_{L^2}^2$. Pour cette norme, $\mathcal{N}$ est un espace de Hilbert.

Exemple 1.1 : $W_1 = \mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$, $W_2 = \mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$. — Alors $u \in \mathcal{N}$ signifie

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \qquad \frac{\partial}{\partial\Omega}\Delta u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Exemple 1.2 : $W_1 = \mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$, $W_2 = \mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$. — Alors $u \in \mathcal{N}$ signifie

$$\frac{\partial}{\partial n}u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \qquad \Delta u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Exemple 1.3 : $W_1 = W_2 = \mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$. — Alors $u \in \mathcal{N}$ signifie que u et Δu sont nuls sur $\partial\Omega$.

Exemple 1.4 : $W_1 = W_2 = \mathcal{E}_{L^2}^1(\Omega)$. — Alors $u \in \mathcal{N}$ signifie que $\frac{\partial}{\partial n}u$ et $\frac{\partial}{\partial n}u$ sont nuls sur $\partial\Omega$.

On pose maintenant le

Problème 1.1. — Trouver U dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, solution de

$$\Delta^2 U + U = F, \tag{1.1}$$

F étant donné dans $L^2(\Omega)$, avec les conditions aux limites

$$h - U \in \mathcal{N}, \tag{1.4}$$

h étant donné dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, avec $\Delta^2 h + h \in L^2(\Omega)$.

Les problèmes (e), (f), (c), (d), correspondent respectivement aux exemples 1.1, 1.2, 1.3, 1.4. Les problèmes (c) et (d) — de façon plus générale, le problème 1.1 *lorsque* $W_1 = W_2$ — ont été résolus de façon plus générale et plus simple que ce qui suit dans Lions [1]; mais la méthode n'est pas valable si W_1 est différent de W_2. Les problèmes (a) et (b) (résolus dans Lions [1]) ne rentrent pas dans le cadre du problème 1.1.

2. **Résolution du problème** 1.1. — On va supposer que Ω est *un ouvert de Nikodym* [30]. On suit les notations du paragraphe I. *L'espace* V du paragraphe I est ici l'espace des u dans $N(W_1, -\Delta)$ tels que $\Delta u \in W_2$. Posons

$$(u, v)_V = (u, v)_{N(W_1, -\Delta)} + (\Delta u, \Delta v)_{W_2} \quad [31]; \tag{2.1}$$

l'espace V est alors un espace de Hilbert. On pose ensuite

$$((u, v)) = (u, v)_1 + (\Delta u, \Delta v)_1, \tag{2.2}$$

ce qui est une forme sesquilinéaire hermitienne, qui définit sur V une structure

(30) Sinon les problèmes aux limites correspondants ne sont pas résolus.

(31) De façon générale, si E est un espace de Hilbert, $(u, v)_E$ = produit scalaire de u, $v \in E$

préhilbertienne ([32]). Cherchons Z : $((u, u)) = 0$ équivaut à $u = \text{const}$ dans Ω, et $u \in W_1$; donc

$$\text{(2.3)} \qquad \text{Si} \quad 1 \in W_1, \quad Z = C, \qquad \text{si} \quad 1 \notin W_1, \quad Z = \{0\}.$$

L'hypothèse (H) du paragraphe I a lieu. En effet

PROPOSITION 2.1. — *On suppose que Ω est un ouvert de Nikodym. Alors :*

(a) *si* $1 \notin W_1$, V *est un espace de Hilbert pour* $((u, v))$.

(b) *si* $1 \in W_1$, $\tilde{V} = V/C$ *est un espace de Hilbert pour* $((\tilde{u}, \tilde{v}))$.

Démonstration. — (a) Soit u_k une suite de Cauchy dans V pour $\sqrt{((u, u))}$. Donc u_k est une suite de Cauchy pour $\|u\|_1$, et comme $1 \notin W_1$, il résulte de la proposition 3.1 [§ II, (a)] que $u_k \to u$ dans W_1. Par ailleurs Δu_k est une suite de Cauchy pour $\|u\|_1$, donc, Ω étant un ouvert de Nikodym, il existe une suite de constantes c_k telles que $\Delta u_k + c_k \to w$ dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$. Mais comme $u_k \to u$ dans W_1, on a $\Delta u_k \to \mathcal{D}'(\Omega)$, donc c_k est une suite convergente, et par conséquent $\Delta u_k \to w - c = \Delta u$ dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, donc dans W_2, et par conséquent $u_k \to u$ dans V, d'où la proposition dans ce cas (a).

(b) Soit $\tilde{u}_k$ une suite de Cauchy dans $\tilde{V}$ pour $\sqrt{((\tilde{u}, \tilde{u}))}$. D'après la proposition 3.1 [§ II, (b)], $\tilde{u}_k \to \tilde{u}$ dans $\tilde{W}_1 = W_1/C$, et comme au (a), il existe une suite de constantes c_k telles que $\Delta u_k + c_k \to w$ dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$. Mais comme précédemment, Δu_k converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, et l'on termine comme au (a).

On prend maintenant $Q = L^2(\Omega)$, donc $Q' = L^2(\Omega)$, puis $\mathfrak{Z} = Z$ (donc $\{0\}$ ou C). On prend $\Lambda = \Delta_2 + 1$; donc Λ est un isomorphisme de Z sur $\mathfrak{Z}$ (isomorphisme identique).

Notons que, d'après le paragraphe II, on a les résultats suivants (Ω étant un ouvert de Nikodym) ;

a. Si $1 \notin W_1$, $-\Delta$ est un isomorphisme de $N(W_1, -\Delta)$ sur $L^2(\Omega)$.

b. Si $1 \in W_1$, on désigne par $L^2_0(\Omega)$ l'espace des $f \in L^2(\Omega)$ tels que

$$\int_\Omega f(x)\,dx = 0 \qquad [L^2_0(\Omega) = Q_{\mathfrak{Z}}]$$

et l'on désigne par $N_0(W_1, -\Delta)$ le sous-espace de $N(W_1, -\Delta)$ formé des u tels que $\int_\Omega u(x)\,dx = 0$. Alors $-\Delta$ est un isomorphisme de $N_0(W_1, -\Delta)$ sur $L^2_0(\Omega)$. En effet, soit f dans $L^2_0(\Omega)$; alors il existe u, déterminée à une constante additive près, telle que $-\Delta u = f$. Donc si l'on impose la condition $\int_\Omega u(x)\,dx = 0$, u existe et est unique ; donc $-\Delta u = f$, $f \in L^2_0(\Omega)$, admet une solution unique dans $N_0(W_1, -\Delta)$. Si $f_k \to 0$ dans $L^2_0(\Omega)$, et si $u_k \in N_0(W_1, -\Delta)$, avec $-\Delta u_k = f_k$, on a $\tilde{u}_k \to 0$ dans W_1/C ; il existe donc une suite de constantes c_k telles que

dans E.

([32]) C'est cette structure que l'on considère désormais sur V.

$u_k + c_k \to 0$ dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$. Il en résulte que

$$\int_\Omega u_k(x)\,dx + c_k \operatorname{mes}(\Omega) = c_k \operatorname{mes}(\Omega) \to 0,$$

donc $u_k \to 0$ dans W_1, et $-\Delta u_k \to 0$ dans $L^2(\Omega)$, donc $u_k \to 0$ dans $N_0(W_1, -\Delta)$.

C. Q. F. D.

Désignons dans tous les cas par G l'inverse de cet isomorphisme; G est donc un isomorphisme de $L^2(\Omega)$ sur $N(W_1, -\Delta)$ dans le cas a et de $L^2_0(\Omega)$ sur $N_0(W_1, -\Delta)$ dans le cas b. Pour tout φ dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{Z}}$ on prend

$$A\varphi = G\varphi. \tag{2.4}$$

Vérifions que l'on a

$$A \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\mathfrak{Z}};\, V). \tag{2.5}$$

En effet, $A\varphi$ est dans $N(W_1, -\Delta)$ ou $N_0(W_1, -\Delta)$, et $-\Delta(A\varphi) = \varphi$, donc est dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{Z}} \subset W_2$. Par conséquent A opère linéairement de $\mathcal{D}_{\mathfrak{Z}}$ dans V, et il est immédiat que A est continu, d'où le résultat (2.5).

On prend pour opérateur B :

$$B = -\Delta. \tag{2.6}$$

On a bien

$$BA\varphi = \varphi \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{Z}}.$$

L'opérateur B est continu de V dans $L^2(\Omega)$, V étant muni de $((u, v))$. En effet, si $u_k \to 0$ dans V, et si $1 \notin W_1$, alors

$$u_k \to 0 \quad \text{dans } W_1, \tag{2.7}$$

et il existe une suite de constantes c_k telles que

$$\Delta u_k + c_k \to 0 \quad \text{dans } \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega). \tag{2.8}$$

Mais on déduit de (2.7) que $\Delta u_k \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, ce qui en comparant avec (2.8) montre que $c_k \to 0$, donc $\Delta u_k \to 0$ dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, donc en particulier dans $L^2(\Omega)$. Si maintenant 1 est dans W_1, il existe une suite de constantes d_k telles que

$$u_k + d_k \to 0 \quad \text{dans } \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega), \tag{2.9}$$

d'où l'on déduit encore que $\Delta u_k \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et l'on termine comme précédemment

Construisons maintenant l'espace N du paragraphe I. C'est l'espace des $u \in V$, tels que $\Delta^2 u + u$ soit dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire que $\Delta^2 u \in L^2(\Omega)$, et tels que

$$(\Delta^2 u + u, -\Delta v)_{L^2} = ((u, v)) \quad \text{pour tout } v \subset V. \tag{2.10}$$

Mais dans (2.10) u et v sont dans V, donc, en particulier v est dans $N(W_1, -\Delta)$ et u dans W_1; donc, par définition de $N(W_1, -\Delta)$ on a

$$(u, -\Delta v)_{L^2} = (u, v)_1,$$

de sorte que (2.10) se réduit à

$$(2.11) \qquad (\Delta^2 u, -\Delta v)_{L^2} = (\Delta u, \Delta v)_1 \quad \text{pour tout } v \in V,$$

Montrons la

PROPOSITION 2.2. — *L'espace* N *coïncide avec l'espace* $\mathcal{N}$ *construit* page 246.

Démonstration. — Il est évident que $\mathcal{N} \subset N$. Il reste à montrer que si u est dans N, alors u est dans $\mathcal{N}$, donc que Δu est dans $N(W_2, -\Delta)$, c'est-à-dire que

$$(2.12) \qquad (\Delta^2 u, w)_{L^2} = -(\Delta u, w)_1 \quad \text{pour tout } w \in W_2.$$

D'après (2.11), ceci a lieu pour les w de la forme

$$(2.13) \qquad w = -\Delta v, \qquad v \in V.$$

Si $1 \notin W_1$, quel que soit w dans W_2, il existe v dans $N(W_1, -\Delta)$ solution de (2.13). Alors v est dans V, et donc (2.12) a lieu.

Si $1 \in W_1$, considérons une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, telle que $\int_\Omega \varphi(x)\,dx = 1$. Tout élément w de W_2 s'écrit

$$(2.14) \qquad w = \varphi \int_\Omega w(x)\,dx + w_0,$$

ce qui donne $\int_\Omega w_0(x)\,dx = 0$; w_0 est dans W_2. Il existe maintenant v dans $V(W_2, -\Delta)$ tel que l'on ait

$$(2.15) \qquad -\Delta v = w_0,$$

et comme $w_0 \in W_2$, v est dans V, donc (2.12) a lieu avec $w = w_0$. Comme (2.12) a lieu avec $w = \varphi$, on a (2.12) dans tous les cas, d'où la proposition.

Le théorème 3.1 (§ 1) donne, alors

THÉORÈME 2.1. — *Si l'ouvert* Ω *est un ouvert de Nikodym, le problème* 1.1 *admet une solution unique, dépendant continûment des données.*

Ce théorème résout, en particulier, les problèmes (e) et (f).

BIBLIOGRAPHIE.

ARONSZAJN :

[1] *Studies in eigen value problems* (*Technical reports*, University of Kansas, Lawrence).

BROWDER :

[1] *The Dirichlet and Vibration problem...* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, Vol. 38, n° 3, 1952, p. 230-235).

DENY-LIONS :

[1] *Sur les espaces du type de Beppo Levi* (*Ann. Inst. Fourier*, 1955, p. 304-370).
[2] *Espaces de Beppo Levi et applications* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1954, p. 1174-1177).

GÅRDING :

[1] *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations* (*Math. Scand.*, t. 1, 1953, p. 55-72).

LIONS :

[1] *Problèmes aux limites en théorie des distributions*, à paraître aux *Acta Math.*
[2] *Problèmes aux limites* (II) (*C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 2470-2472).
[3] *Sur les problèmes de dérivée oblique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 266-268).

MINAKSHI-SUNDARAM :

[1] *A generalization of Epstein ζ functions* (with supplementary note by H. WEYL (*Canad. J. Math.*, vol. 8, n° 4, 1949, p. 320-327).

PLEIJEL :

[1] *On green's functions...* (*Proc. of the symposium on spectral theory and differential problem*, Stillwater, Okl. 1951, p. 143).

SCHWARTZ :

[1] *Théorie des distributions*, t. I, Paris, Hermann, 1950.
[2] *Ibid.*, t. II, 1951.
[3] *Problèmes aux limites pour opérateurs différentiels elliptiques*, Bruxelles, mai 1954.

SCHWARTZ-LIONS :

[1] *Problèmes aux limites sur des espaces fibrés*, à paraître aux *Acta Math.*

SOBOLEFF :

[1] *Applications de l'analyse fonctionnelle à la physique mathématique*, Léningrad, 1950.

COURANT-HILBERT :

[1] *Methoden der Math. Phys.*, Berlin, t. II, 1937.