Bulletin de la S. M. F.

Claude Berge

# Le problème du gain dans la théorie généralisée des jeux sans informations

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 81 (1953), p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1953__81__1_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*

http://www.numdam.org/

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

# LE PROBLÈME DU GAIN DANS LA THÉORIE GÉNÉRALISÉE DES JEUX SANS INFORMATIONS ;

PAR M. CLAUDE BERGE.

**1. Introduction.** — On a un *jeu alternatif* lorsque deux joueurs (que nous désignerons par A et B) choisissent alternativement dans un ensemble donné des éléments (que nous appellerons *positions du jeu*) : A ayant choisi une position $x_1$, B peut choisir une position $x_2$ dans un ensemble $\Gamma x_1$ dépendant seulement de $x_1$, puis A choisit une position $x_3$ dans un ensemble $\Gamma x_2$ ne dépendant que de $x_2$, etc. Les joueurs s'arrêtent lorsque la position du jeu appartient à un certain ensemble K; un nombre $f(x)$, réel, défini sur K, et appelé le *résultat*, indique alors le gain du joueur A s'il est positif, ou sa perte s'il est négatif. Le but de A est d'obtenir un résultat $f(x)$ aussi grand que possible (¹).

$\Gamma$ est une application multiforme qui caractérise la règle du jeu : c'est par définition son *tranformateur fondamental*. On a montré ailleurs que dans certains cas (jeux alternatifs absolus), une algèbre des transformateurs permet de résoudre aisément et complètement les problèmes posés par les rapports entre la structure du jeu et les ensembles de positions gagnantes (²).

A l'aide de méthodes différentes, Von Neumann avait résolu ce problème pour les jeux alternatifs particuliers que sa théorie envisageait (³). Dans cette étude, nous nous proposons de résoudre le problème du gain pour une classe de jeux plus générale. C'est la classe de tous les jeux alternatifs pouvant être joués avec une information incomplète.

Il est à remarquer que cette classe généralise toutes les formes extensives de

(¹) Le point de vue exposé ici est celui de notre thèse [*cf.* C. BERGE, *Sur une théorie ensembliste des jeux alternatifs* (*J. Math. pures et appl.*, 1953)].

(²) C. BERGE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 294-296.

(³) O. MORGENSTERN et J. VON NEUMANN, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, 1944.

jeux envisagées par Kuhn ([4]), Krentel, Mac Kinsey, Quine ([5]); et, comme il arrive souvent en Analyse mathématique, la théorie plus générale se révèlera finalement d'un emploi plus simple que la théorie particulière.

**2. Jeux Neumanniens.** — Supposons que deux joueurs A et B jouent un jeu alternatif, mais ne connaissent pas exactement les choix de l'adversaire; pour qu'ils *puissent* choisir des positions, c'est-à-dire pour que le jeu ait un sens, il faut faire certaines restrictions sur la nature des positions du jeu et sur le transformateur fondamental. Nous appellerons neumanniens les jeux pour lesquels ces restrictions sont minima; ils se décrivent de la façon suivante :

Considérons deux ensembles $X^*$ et $Y^*$ dont les éléments respectifs $x$ et $y$ sont par définition les *positions des joueurs* A *et* B. Une application donnée $\sigma$ applique $X^*$ et $Y^*$ sur $\overline{X}^*$ et $\overline{Y}^*$. $\overline{x}=\sigma(x)$ et $\overline{y}=\sigma(y)$ sont par définition les *structures* des positions $x$ et $y$. Le joueur A, connaissant sa position initiale $x_0$ et seulement la structure $\overline{y}_0$ de la position de son adversaire, choisit une position $x_1$ dans un ensemble $G(x_0, \overline{y}_0)$ dépendant seulement de $x_0$ et de $\overline{y}_0$. Puis le joueur B, connaissant sa position $y_0$ et la structure $\overline{x}_1$, choisit à son tour une position $y_1$ dans un ensemble $G(\overline{x}_1, y_0)$, et ainsi de suite.

*La position du jeu*, qui est constituée par la position des deux joueurs et du trait ([6]), est par définition le produit topologique $\tau = x.y$ (si le trait est à A) ou $\tau' = y.x$ (si le trait est à B).

G est une application multiforme qui décrit la règle du jeu; nous l'appellerons encore *transformateur fondamental*, bien qu'il diffère un peu du transformateur proprement dit $\Gamma$; on a d'ailleurs

$$\Gamma(x.y) = y.G(x.\overline{y}), \qquad \Gamma(y.x) = x.G(\overline{x}.y).$$

Remarquons qu'ici, le moment $n$ où l'on obtient la position $x.y$ ne joue aucun rôle : on adopte de ce fait un point de vue global, différent de celui de Von Neumann et de ses élèves.

La présente description étant plus générale que la description classique, il convient aussi de remarquer que l'on peut retrouver cette dernière avec les hypothèses supplémentaires suivantes :

$H_1$ : Le transformateur G est isovalent.

$H_2$ : La structure de $x$ et de $y$ est le moment $n$ où ces choix peuvent être effectués.

$H_3$ : La durée du jeu est limitée par un nombre fixé à l'avance.

$H_4$ : Les ensembles de positions consécutives à une position donnée sont finis.

---

([4]) H. W. Kuhn, *Extensive Games* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, 1950, p. 570-576).

([5]) W. D. Krentel, J. C. Mac Kinsey et W. V. Quine, *A Simplification of Games in Extensive Form*. (*Duke Math. J.*, vol. 18, 1951, p. 885).

([6]) On appelle *trait* l'indication du joueur qui a le droit de jouer au moment considéré.

3. **Schéma d'information.** — Considérons sur $Y^*$ une sous-partition $D = \{Y^\alpha\}_\alpha$ de la partition d'homomorphisme $\{\sigma^{-1}(z)\}_{z \in \bar{Y}^*}$. On a donc

$$\begin{array}{ll} & Y^\alpha \neq O, \\ z \in Y^*, & Y^\alpha \cap \sigma^{-1}(z) \neq O \quad \text{entraîne} \quad Y^\alpha \subset \sigma^{-1}(z), \\ & \alpha \neq \beta \quad \text{entraîne} \quad Y^\alpha \cap Y^\beta = O, \\ & \bigcup_\alpha Y^\alpha = Y^*. \end{array}$$

On dira que A a D pour *schéma d'information* si par suite de renseignements plus ou moins précis sur la position $y$ de son adversaire, le joueur A peut prétendre *a priori* connaître l'ensemble $Y^\alpha$ de D qui contiendra $y$ quand B aura joué.

D′ est un schéma d'information *plus fin* que D si D′ est une sous-partition de D. Le plus fin de tous les schémas d'information est le *schéma* $D_0$ formé de la partition discrète $\{y\}_{y \in Y^*}$ : c'est un schéma pour la connaissance totale. Le moins fin de tous les schémas d'information est le *schéma* $D_1$, formé de la partition $\{\sigma^{-1}(z)\}_{z \in \bar{Y}^*}$ : c'est un schéma pour l'ignorance totale.

Si A possède deux schémas d'information

$$D_1 = \{Y_1^\alpha\}_\alpha \qquad \text{et} \qquad D_2 = \{Y_2^\beta\}_\beta,$$

il possèdera aussi le *schéma produit*

$$D_1 \times D_2 = \{Y_1^\alpha \cap Y_2^\beta\}_{\alpha,\beta}.$$

Les schémas d'information constituent ainsi un demi-groupe abélien avec élément neutre.

4. **Stratégie.** — Supposons que le joueur A joue un jeu neumannien avec un schéma d'information D. En général, A ne connaîtra pas la position du jeu $x.y$, mais seulement un élément $x$ choisi par lui et un certain ensemble Y déterminé par le choix de son adversaire. Y est donc un élément d'une famille $\mathfrak{T}(Y^*)$, définie par les différents sous-ensembles d'un quelconque des éléments de D.

Le produit topologique $t = x.Y$ est par définition la *situation* du jeu pour A au moment considéré.

Considérons une application $\pi$ de $X^*.\mathfrak{T}(Y^*)$ dans $X^*$, telle que

$$\pi(x.Y) \in G(x.Y).$$

On dira que A adopte $\pi$ pour *stratégie* s'il décide à l'avance de choisir la position $x' = \pi(x.Y)$ devant toute situation $x.Y$ qu'il rencontrera.

Il est à remarquer que si A adopte une stratégie $\pi$ et B une stratégie $\xi$, le déroulement de la partie est entièrement déterminé, et, par suite, il en résultera pour A un gain ne dépendant que de $\pi$ et de $\xi$. En considérant $\pi$ et $\xi$ comme les positions des joueurs A et B, on obtient un jeu neumannien particulièrement simple appelé *forme normalisée* du jeu considéré.

5. **Fonctions-guides.** — On dira que A peut *garantir fortement* un nombre $g$ si, quel que soit le nombre positif $\varepsilon$, il existe une stratégie $\pi$ permettant à A d'obtenir à coup sûr un résultat supérieur à $g - \varepsilon$. En outre, s'il ne peut garantir fortement aucun nombre fini, on dira que A peut garantir fortement le gain $-\infty$. On dira de la même façon que A peut *garantir* $g$ s'il peut obtenir un gain supérieur ou égal à $g$.

En présence de toute situation $t$, un joueur A donné peut annoncer un gain $g_A(t)$ qu'il garantit fortement, et qui lui semble le plus intéressant. $g_A(t)$ est par définition la *fonction-guide* du joueur A. $h(t) = \sup_A g_A(t)$ est par définition le *meilleur gain garanti* (m. g. g.) du joueur A. Le problème du gain consiste à exprimer $h(t)$ en fonction de D, $f(x)$, G. Si $h(t)$ ne dépend pas du schéma d'information D, on dira que le jeu est *parfait* (ce qui généralise la notion de « strictly determined games » introduite par Von Neumann).

Démontrons dès maintenant le lemme suivant :

Lemme. — *$h(t)$ est une fonction-guide.*

Montrons en effet que, si petit que soit $\varepsilon$, il existe une stratégie permettant à A d'obtenir un résultat supérieur à $h(t) - \varepsilon$.

Cela provient de ce qu'il existe au moins un gain $g$ que A peut garantir fortement, et supérieur à $h(t) - \varepsilon$. $\eta = g - h(t) + \varepsilon$ est alors positif, et il existe une stratégie assurant un gain supérieur à

$$g - \eta = h(t) - \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

6. Dans tout ce qui suit nous ferons une hypothèse supplémentaire, à savoir que la durée du jeu est bornée par un nombre N fixé à l'avance (hypothèse $H_3$) ; autrement dit, après que A et B aient choisi chacun N fois leurs positions, le jeu s'arrête. A la position $x.y$ à ce moment là correspond un résultat $f(x, y)$ représentant le gain (positif ou négatif) du joueur A, et que celui-ci essaie de rendre aussi grand que possible.

Théorème 1. — *La condition nécessaire et suffisante pour que $g(x, Y)$ soit une fonction-guide est que l'on ait*

$$(1) \qquad g(x, Y) \leq \sup_{x' \in G(x, \bar{Y})} \; \inf_{Y' \in D/G(\bar{x}', Y)} g(x', Y')$$

*si la situation $t = x.Y$ se présente avant le $N^{ième}$ coup ;*

$$(2) \qquad g(x, Y) \leq \inf_{y \in Y} f(x, y)$$

*si la situation $t = x.y$ se présente au $N^{ième}$ coup.*

*La condition est nécessaire* : Désignons par $D/Z = \{Z \cap Y^\alpha\}_\alpha$ la trace de D sur un sous-ensemble Z de Y. Supposons qu'un joueur A prétende garantir fortement $g(x, Y)$ devant toute situation $x.Y$. Cette fonction vérifie évidemment (2); elle vérifie également (1), car si A prétend obtenir un gain supérieur à $g(x, Y) - \varepsilon$ en choisissant une certaine position $x'_0$, il peut obtenir un gain au moins égal devant toute situation $x'_0 . Y'$ qu'il rencontrera au coup suivant. D'où

$$\inf_{Y' \in D/G(\overline{x}'_0, Y)} g(x'_0, Y') \geqq g(x, Y).$$

On en conclut

$$\sup_{x' \in G(x, \overline{Y})} \inf_{Y' \in D/G(\overline{x}', Y)} g(x', Y') \geqq g(x, Y). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

*La condition est suffisante :* Soit $g(x, Y)$ une fonction qui satisfasse aux relations (1) et (2). D'après (2), A peut la garantir fortement au $N^{\text{ième}}$ coup. Raisonnons maintenant par récurrence, et démontrons que si A peut la garantir fortement au $k^{\text{ième}}$ coup, il peut la garantir fortement au $(k-1)^{\text{ième}}$ coup.

En effet, donnons-nous un nombre $\varepsilon$ petit ; si la situation $t = x . Y$ est rencontrée au $(k-1)^{\text{ième}}$ coup, il existe pour A une position $x'_0 [x'_0 \in G(x, \overline{Y})]$ telle que

$$\inf_{Y' \in D/G(\overline{x}'_0, Y)} g(x'_0, Y') \geqq \sup_{x' \in G(x, \overline{Y})} \inf_{Y' \in D/G(\overline{x}', Y)} g(x', Y') - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quelle que soit la situation $x'_0 . Y'$ au $k^{\text{ième}}$ coup, on aura donc

$$g(x'_0, Y') \geqq g(x, Y) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, par hypothèse, A peut obtenir un résultat supérieur à $g(x'_0, Y') - \frac{\varepsilon}{2}$, donc supérieur à $g(x, Y) - \varepsilon$. Comme $\varepsilon$ est arbitraire, A peut donc garantir fortement $g(x, Y)$ au $(k-1)^{\text{ième}}$ coup. C. Q. F. D.

Par la suite, on posera

$$\sup_{x' \in G(x, \overline{Y})} \inf_{Y' \in D/G(\overline{x}', Y)} g(x', Y') = \Lambda g(x, Y).$$

7. Théorème 2. — *La condition nécessaire et suffisante pour que $h(x. Y)$ soit la fonction m. g. g. et que l'on ait*

$$(1') \qquad h(x, Y) = \Lambda h(x, Y)$$

*si la situation $t = x . Y$ se présente avant le $N^{\text{ième}}$ coup ;*

$$(2') \qquad h(x, Y) = \inf_{y \in Y} f(x, y)$$

*si la situation $t = x . Y$ se présente au $N^{\text{ième}}$ coup.*

*La condition est nécessaire* : La relation (2′) étant évidente pour la fonction m. g. g., démontrons seulement la relation (1′).

La fonction m. g. g. étant d'après le lemme une fonction-guide, on a

$$h(x, Y) \leqq \Lambda h(x, Y).$$

Si l'on avait l'inégalité stricte au $k^{\text{ième}}$ coup pour une situation $x . Y$, il existerait un nombre positif $\eta$ tel que

$$\Lambda h(x, Y) = h(x, Y) + \eta,$$

A peut donc choisir une position $x'_0$ telle que

$$\inf_{Y' \in D/G(x'_0, Y)} h(x'_0, Y') > h(x, Y) + \frac{\eta}{2}.$$

Quelle que soit la situation $x'_0.Y'$, on aurait alors

$$h(x'_0, Y') > h(x, Y) + \frac{\eta}{2}.$$

Au $(k+1)^{\text{ième}}$ coup, A pourrait garantir un gain $g$ tel que

$$g \geqq h(x'_0, Y') - \frac{\eta}{4} > h(x, Y) + \frac{\eta}{4},$$

Mais alors, dès le $k^{\text{ième}}$ coup, A peut garantir fortement $h(x, Y) + \frac{\eta}{4}$; la borne supérieure de tous les gains qu'il peut garantir fortement étant $h(x, Y)$, on a une contradiction. La fonction m. g. g. vérifie donc bien (2').

*La condition est suffisante* : Soit $h(x, Y)$ une fonction vérifiant (1') et (2'); d'après le théorème 1, $h$ est une fonction-guide. Au $N^{\text{ième}}$ coup, A ne peut garantir plus que $h(t)$ d'après (2'). Si au $k^{\text{ième}}$ coup A ne peut pas garantir davantage, il en est de même au $(k-1)^{\text{ième}}$ coup; car s'il pouvait garantir $h(x_{k-1}, Y_{k-1}) + \eta$ $(\eta > 0)$ pour une situation $x_{k-1}.Y_{k-1}$ donnée en jouant $x_k$, on aurait

$$A\, h(x_{k-1}, Y_{k-1}) \geqq h(x_{k-1}, Y_{k-1}) + \eta.$$

On voit donc que $h(x, Y)$ est une borne supérieure des gains que A peut garantir, donc aussi une borne supérieure des gains que A peut garantir fortement. C. Q. F. D.

*Conséquence*. — Considérons un jeu dans lequel la position initiale est $x_0.y_0$. Pour le joueur A, la situation initiale est $x_0.\sigma^{-1}(y_0) = x_0.Y_0$. Si ce joueur possède un schéma d'information D, le meilleur gain qu'il peut garantir fortement avant la partie est

$$V(D) = h(x_0, Y_0) = \sup_{x_1 \in G(x_0, \bar{Y}_0)} \; \inf_{Y_1 \in D/G(\bar{x}_1, Y_0)} h(x_1, Y_1),$$

avec

$$h(x_1, Y_2) = \sup_{x_2 \in G(x_1, \bar{Y}_1)} \; \inf_{Y_2 \in D/G(\bar{x}_2, Y_1)} h(x_2, Y_2),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$h(x_{n-1}, Y_{n-1}) = \sup_{x_n \in G(x_{n-1}, \bar{Y}_{n-1})} \; \inf_{Y_n \in D/G(\bar{x}_n, Y_{n-1})} h(x_n, Y_n),$$

$$h(x_n, Y_n) = \inf_{y_n \in Y_n} f(x_n, y_n).$$

En groupant les deux derniers termes, on voit que

(3) $$V(D) = \sup_{x_1 \in G(x_0, \bar{Y}_0)} \dots \sup_{x_n \in G(x_{n-1}, \bar{Y}_{n-1})} \; \inf_{y_n \in G(\bar{x}_n, Y_{n-1})} f(x_n, y_n).$$

$V(D)$ est appelé la *valeur* du jeu. On a aussi

(3') $$V(D) = A^{(n)} A^* f(x_0, Y_0),$$

en posant

$$A^* f(x, Y) = \sup_{x' \in G(x, \overline{Y})} \inf_{y' \in G(\overline{x}', Y)} f(x', y').$$

8. **Théorème 3.** — *Si* D′ *est une sous-partition de* D, *on a*

$$V(D') \geqq V(D).$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un nombre positif $\eta$ tel que

$$V(D) = V(D') + \eta.$$

Le joueur A peut déterminer, avec le schéma d'information D, une stratégie $\pi$ lui assurant un résultat supérieur à

$$V(D) - \frac{\eta}{2} = V(D') + \frac{\eta}{2}.$$

Supposons que le joueur A connaisse les schémas d'information D et D′, mais que la partie s'effectue avec D′; A pourra alors procéder de la façon suivante :

Au premier coup, il choisira la position $x_1 = \pi(x_0, Y_0)$. Il s'en suivra un ensemble $Y'_1$, de $D'/G(\overline{x}_1, Y_0)$, qui sera contenu dans un ensemble $Y_1$, de $D/G(\overline{x}_1, Y_0)$. Au coup suivant, A choisira la position $x_2 = \pi(x_1, Y_1)$, etc. Cette stratégie permettra à A d'obtenir un résultat supérieur à $V(D') + \frac{\eta}{2}$ avec le schéma d'information D′, ce qui est absurde.

*Conséquence.* — On dira qu'un schéma d'information D′ est *meilleur que* D si $V(D') \geqq V(D)$. Le théorème précédent indique donc qu'*un schéma d'information « plus fin » est un schéma d'information « meilleur »*; on a ainsi introduit une relation d'ordre dans un ensemble qui n'était seulement que semi-ordonné, par prolongation.

9. **Théorème 4.** — *La condition nécessaire et suffisante pour que le jeu soit parfait est que les deux quantités suivantes :*

$$v = \sup_{x_1 \in G(x_0, \overline{Y}_0)} \inf_{y_1 \in G(\overline{x}_1, Y_0)} \dots \inf_{y_n \in G(\overline{x}_n, Y_{n-1})} f(x_n, y_n),$$

$$w = \sup_{x_1 \in G(x_0, \overline{Y}_0)}, \inf_{Y_1 \in D'_1/G(\overline{x}_1, Y_0)} \dots \inf_{y_n \in G(\overline{x}_n, Y_{n-1})} f(x_n, y_n);$$

*soient égales. De plus, on a toujours* $v \geqq w$.

En effet, d'après le théorème 3, on a, quel que soit le schéma d'information D :

$$v = V(D_0) \geqq V(D) \geqq V(D_1) = w,$$

on a donc bien le théorème énoncé.

Chaque fois que le jeu sera parfait, on dira que $\sigma$ est un *pseudo-isomorphisme*.

D'après le théorème 4 on voit que tout isomorphisme est aussi un pseudo-isomorphisme.

Bien entendu, ces résultats sont aussi valables sans l'hypothèse $H_3$ ; seulement dans ce cas, il faut reformuler le jeu. Le problème du gain est alors en relation étroite avec la théorie des nombres transfinis ([7]).

(Manuscrit reçu le 5 décembre 1952.)

---

([7]) *Cf.* C. Berge, *loc. cit.*, chap. 3.