PAUL JAFFARD

Théorie arithmétique des anneaux du type de Dedekind

Bulletin de la S. M. F., tome 80 (1952), p. 61-100
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1952__80__61_0>

THÉORIE ARITHMÉTIQUE DES ANNEAUX DU TYPE DE DEDEKIND

PAR P. JAFFARD.

Nous nous occuperons dans ce qui suit de la théorie de la divisibilité des idéaux dans des anneaux commutatifs (munis d'un élément unité). On sait que l'on appelle anneau de Dedekind un anneau d'intégrité dans lequel tout idéal se décompose de manière unique en un produit de puissances d'idéaux premiers. Si $\mathcal{O}$ est un anneau de Dedekind et $(\mathfrak{p}_\iota)_{\iota \in I}$ l'ensemble de ses idéaux premiers, on est donc amené à considérer le groupe ordonné $\Gamma = Z(I)$ des fonctions définies sur I à valeurs dans le groupe Z des entiers et qui sont nulles sauf pour un nombre fini d'éléments de I. Le groupe multiplicatif des idéaux de $\mathcal{O}$ est alors isomorphe au groupe ordonné Γ. Les idéaux entiers correspondent biunivoquement aux fonctions positives (c'est-à-dire partout positives ou nulles).

Dans un anneau de Dedekind, un idéal est puissance positive d'un idéal premier si et si seulement il est contenu dans un seul idéal maximal. Nous appelons anneau du type de Dedekind un anneau commutatif A ayant un élément unité et tel que tout idéal entier de A puisse se décomposer en un produit d'idéaux contenus chacun dans un seul idéal maximal. Tout idéal entier de A est alors représentable d'une manière et d'une seule sous la forme $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{a}_i$ étant contenu dans le seul idéal maximal $\mathfrak{m}_i (1 \leq i \leq n)$ et $i \neq j$ entraînant $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_j$. On dira que $\mathfrak{a}_i$ est la composante de $\mathfrak{a}$ relative à l'idéal maximal $\mathfrak{m}_i$. Les anneaux de Dedekind et les anneaux locaux sont des anneaux du type de Dedekind.

Nous donnons au paragraphe 1 une caractérisation des anneaux du type de Dedekind.

Rappelons qu'un anneau d'intégrité A est dit anneau de multiplication si tout idéal fini de A (entier ou fractionnaire) est inversible. Nous étudions aux paragraphes 3 et 4 la structure des anneaux de multiplication du type de Dedekind. Cette étude est basée sur les propriétés des familles de valuations indépendantes sur un anneau, propriétés qui sont exposées au paragraphe 2. K étant un corps (commutatif) et $\mathcal{O}$ un ordre de K (1), nous dirons que deux valuations (2) v_1 et v_2

(1) Un sous-anneau de K est dit ordre de K s'il contient l'élément unité de K et si K est corps des quotients de $\mathcal{O}$.

(2) Le mot valuation est pris au sens de Krull, c'est-à-dire que le groupe de valeurs est un groupe totalement ordonné quelconque.

de K sont indépendantes sur $\mathcal{O}$ si, Γ_i étant le groupe de valeurs correspondant à la valuation $v_i (i = 1, 2)$, pour tout couple (ξ_1, ξ_2), avec $0 \leqq \xi_i \in \Gamma_i (i = 1, 2)$, il existe un élément a de $\mathcal{O}$ tel que $v_i(a) = \xi_i$ $(i = 1, 2)$.

Dans le cas où $\mathcal{O}$ est un anneau de multiplication du type de Dedekind, il existe une famille de valuations canonique de son corps des quotients K deux à deux indépendantes sur $\mathcal{O}$. qui forme une famille $(v_\iota)_{\iota \in I}$ de définition de $\mathcal{O}$, c'est-à-dire telle que pour tout élément x de K on ait

$$x \in \rightleftharpoons \{ v_\iota(x) \geqq 0 \quad \text{pour tout} \quad \iota \in I \}$$

et telle que pour tout x de K (différent de zéro), $v_\iota(x)$ soit nul, sauf pour un sous-ensemble fini de I. Cette famille détermine complètement l'ensemble des idéaux entiers ou fractionnaires de $\mathcal{O}$. Pour un tel anneau, la notion de composante relative à un idéal maximal est étendue aux idéaux fractionnaires.

L'étude de la divisibilité des idéaux de $\mathcal{O}$ peut se faire complètement d'une manière assez simple dans le cas où chaque groupe de valeurs Γ_i est archimédien, c'est-à-dire peut être considéré comme un sous-groupe du groupe additif des nombres réels. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que $\mathcal{O}$ soit de plus un anneau uniforme (einartig), c'est-à-dire tel que de deux idéaux premiers non triviaux de $\mathcal{O}$ l'un ne contienne jamais l'autre. Nous montrons, en particulier, que dans un anneau de multiplication uniforme du type de Dedekind, pour tout idéal $\mathfrak{a}$, il existe des groupes multiplicatifs d'idéaux de $\mathcal{O}$ qui contiennent $\mathfrak{a}$ et qu'en particulier il en existe un qui contient tous les autres.

Nous montrons au paragraphe IV comment certaines des notions introduites au paragraphe I peuvent s'étendre à des ensembles ordonnés assez généraux. Ces ensembles ont une valeur de structure « universelle », ce qui éclaire l'avantage de leur introduction dans l'étude des idéaux d'un anneau et également dans celle des groupes abéliens ordonnés ([3]).

Pour concilier le langage de la divisibilité avec celui de la théorie des ensembles, lorsque deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ d'un anneau $\mathcal{O}$ sont tels que $\mathfrak{b}$ soit contenu dans $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$), nous dirons que $\mathfrak{a}$ est plus grand que $\mathfrak{b}$ (point de vue ensembliste), mais nous écrirons $\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{a}$ et nous dirons que $\mathfrak{b}$ est supérieur à $\mathfrak{a}$ (point de vue de la divisibilité). Un idéal $\mathfrak{m}$ sera dit maximal s'il l'est au sens ensembliste, c'est-à-dire si c'est un idéal entier, différent de $\mathcal{O}$ et tel qu'il n'y est pas d'idéal autre que $\mathfrak{m}$ contenant $\mathfrak{m}$ et différent de $\mathcal{O}$.

I. — Anneaux du type de Dedekind.

Les anneaux considérés dans ce paragraphe seront supposés commutatifs et munis d'un élément unité. Ils pourront avoir des diviseurs de zéro. Les seuls idéaux envisagés dans ce paragraphe seront des idéaux entiers.

([3]) Cette dernière étude a été l'objet de ma thèse : *Contribution à l'étude des groupes ordonnés* (Paris, 1951), à paraître au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*. Des résultats contenus dans cette thèse ont été publiés. (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 1024-1025, 1125-1126 et 1631-1632).

1. Étant donné un anneau A (commutatif et muni d'un élément unité), on rappelle que deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ de A sont dits *premiers entre eux* ou *étrangers* si l'idéal $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ est égal à A. On notera $\mathcal{J}$ l'ensemble des idéaux de A. On rappelle les lemmes bien connus suivants :

Lemme 1. — *Si l'idéal* X *de* A *est premier à* $\mathfrak{a}$ *et à* $\mathfrak{b}$, *il est premier à* $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$.

Puisque $X+\mathfrak{a}=A$, $X+\mathfrak{b}=A$, $\exists\, x, y \in X$; $a, b \in A$ tels que $1 = x+a = y+b$. On a donc $1=(x+a)(y+b)=xy+ay+bx+ab$. Mais $xy\in\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ et $ay+bx+ab\in X$ montrent que $X+(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=A$.

Lemme 2. — *Si les idéaux* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *sont premiers entre eux*, $\mathfrak{ab}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$.

On a évidemment $\mathfrak{ab}\subset\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$. Soient, d'autre part, $a\in\mathfrak{a}$, $b\in\mathfrak{b}$ tels que $1=a+b$. Si $x\in\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, on a $x=xa+xb\in\mathfrak{ab}$, donc $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\subset\mathfrak{ab}$, d'où le lemme.

On voit facilement que si l'on définit parmi les idéaux de A la relation $\mathfrak{a}\succ\mathfrak{b}$ par

$$(1)\qquad \mathfrak{a}\succ\mathfrak{b} \rightleftharpoons (\text{pour tout } X\in\mathcal{J},\ \mathfrak{b}+X=A\rightarrow\mathfrak{a}+X=A),$$

cette relation est une relation de préordre, c'est-à-dire que l'on a toujours

$$\mathfrak{a}\succ\mathfrak{a},\qquad \mathfrak{a}\succ\mathfrak{b}\quad\text{et}\quad\mathfrak{b}\succ\mathfrak{c}\rightarrow\mathfrak{a}\succ\mathfrak{c}.$$

Cette relation de préordre est plus fine que la relation d'inclusion, c'est-à-dire que

$$\mathfrak{a}\supset\mathfrak{b}\rightarrow\mathfrak{a}\succ\mathfrak{b}.$$

Cette relation de préordre permet, d'autre part, de définir des classes d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{J}$ par

$$(2)\qquad \mathfrak{a}\equiv\mathfrak{b}\rightleftharpoons(\mathfrak{a}\succ\mathfrak{b}\ \text{et}\ \mathfrak{b}\succ\mathfrak{a}).$$

Nous noterons $\bar{\mathfrak{a}}$ la classe d'équivalence à laquelle appartient $\mathfrak{a}$ et nous dirons que cette classe est la *strie* définie (ou engendrée) par $\mathfrak{a}$. Nous noterons $\mathfrak{S}$ l'ensemble des stries. La relation de préordre $\succ$ sur $\mathcal{J}$ donne par passage au quotient une relation d'ordre sur $\mathfrak{S}$ que l'on notera $\geqq$. Si $\bar{\mathfrak{a}}\geqq\bar{\mathfrak{b}}$, on dira que la strie $\bar{\mathfrak{a}}$ est plus grande que la strie $\bar{\mathfrak{b}}$. On notera $\bar{\mathfrak{a}}\geqq\bar{\mathfrak{b}}$ si $\bar{\mathfrak{a}}\geqq\bar{\mathfrak{b}}$ et si $\bar{\mathfrak{a}}\neq\bar{\mathfrak{b}}$. Il existe une strie plus grande que toutes les autres, c'est la strie $\bar{A}$ qui contient le seul idéal A. Il en existe une plus petite que toutes les autres, c'est la strie $\{\bar{0}\}$. Une strie $\bar{\mathfrak{a}}$ sera dite *maximale* si $\bar{\mathfrak{a}}\neq\bar{A}$ et si $\bar{\mathfrak{b}}>\bar{\mathfrak{a}}$ entraîne $\bar{\mathfrak{b}}=\bar{A}$.

Deux stries $\bar{\mathfrak{a}}$ et $\bar{\mathfrak{b}}$ seront dites *premières entre elles* ou *étrangères* si pour $\bar{X}\in\mathfrak{S}$, $\bar{X}\geqq\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}\rightarrow\bar{X}=\bar{A}$.

Remarque. — Dans certains cas, en particulier lorsque A est un anneau d'intégrité, on a avantage à ne pas considérer $\{0\}$ comme un idéal de A, Si l'on note $\mathcal{J}'$ l'ensemble des idéaux non nuls de A, on voit que :

Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{J}'$, $\mathfrak{a} \succ \mathfrak{b} \rightleftharpoons$ (pour tout $X \in \mathcal{J}'$, $\mathfrak{b} + X = A \to \mathfrak{a} + X = A$). Supposons, en effet, que $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{J}'$ soient tels que pour tout $X \in \mathcal{J}'$, $\mathfrak{a} + X = A$ entraîne $\mathfrak{b} + X = A$. Montrons que $\mathfrak{a} \succ \mathfrak{b}$. Il suffit de montrer que $\mathfrak{b} + \{o\} = A \to \mathfrak{a} + \{o\} = A$. Or $\mathfrak{b} + \{o\} = A$ signifie $\mathfrak{b} = A$, donc en particulier $\mathfrak{b} + \mathfrak{a} = A$, et comme on a supposé $\mathfrak{a} \in \mathcal{J}'$, on a par hypothèse $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = A$ ou $\mathfrak{a} + \{o\} = A$. On a bien $\mathfrak{a} \succ \mathfrak{b}$.

Ceci n'est évidemment plus vrai si l'on ne suppose plus $\mathfrak{a} \in \mathcal{J}'$ (c'est-à-dire $\mathfrak{a} \neq \{o\}$) : soit un corps K. $\mathcal{J}$ est composé des idéaux K et $\{o\}$, $\mathcal{J}'$ du seul idéal K. On a : pour tout $X \in \mathcal{J}'$, $K + X = K \to \{o\} + X = K$ et cependant on n'a pas $\{o\} \succ K$, car $\{o\} + \{o\} \neq K = K + \{o\}$.

Ceci montre que dans la définition des stries d'idéaux, on peut indifféremment considérer ou non $\{o\}$ comme un idéal.

2. On va montrer dans ce qui suit que l'addition, la multiplication et l'intersection des idéaux permettent de définir des opérations correspondantes sur l'ensemble $\mathfrak{S}$ des stries d'idéaux et que dans ce dernier ensemble la multiplication et l'intersection coïncident.

Théorème 1. — *Si* $\overline{\mathfrak{a}_1} = \overline{\mathfrak{b}_1}$ *et* $\overline{\mathfrak{a}_2} = \overline{\mathfrak{b}_2}$, *on a encore*

$$\overline{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2} = \overline{\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2} = \overline{\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2} = \overline{\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2} = \overline{\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2}.$$

Soient quatre idéaux, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}_2$ tels que

$$\mathfrak{a}_1 \equiv \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{a}_2 \equiv \mathfrak{b}_2.$$

Montrons d'abord que $\overline{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2} = \overline{\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2}$, ou encore

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 \equiv \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2,$$

Soit un idéal X tel que $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + X = A$. Comme $\mathfrak{a}_1 \equiv \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{a}_2 + X) = A$ entraîne $\mathfrak{b}_1 + (\mathfrak{a}_2 + X) = A$. Mais comme $\mathfrak{a}_2 \equiv \mathfrak{b}_2$, $A = \mathfrak{b}_1 + (\mathfrak{a}_2 + X) = \mathfrak{a}_2 + (\mathfrak{b}_1 + X)$ entraîne $\mathfrak{b}_2 + (\mathfrak{b}_1 + X) = A$. Donc, pour tout idéal X tel que $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + X = A$, on a $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + X = A$. De même,

$$\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + X = A \to \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + X = A.$$

Par suite, on a bien

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 \equiv \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2.$$

Montrons maintenant que $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \equiv \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$.

Soit un idéal X tel que $(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) + X = A$ et $\mathfrak{b}_2 + X = A$. On a évidemment $\mathfrak{a}_1 + X = A$ et $\mathfrak{a}_2 + X = A$. Donc, par hypothèse, $\mathfrak{b}_1 + X = A$. Le lemme 1 montre alors que $(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2) + X = A$.

Le théorème 1 résultera maintenant du lemme suivant :

Lemme 3. — $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *étant deux idéaux quelconques, on a toujours* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

Montrons d'abord que pour tout idéal $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^2 \equiv \mathfrak{a}$.

On a évidemment $\mathfrak{a} \succ \mathfrak{a}^2$. Montrons que $\mathfrak{a}^2 \succ \mathfrak{a}$. Soit un idéal X tel que $\mathfrak{a} + X = A$. Soient $a \in A$, $x \in X$ avec $1 = a + x$. On a encore $1 = (a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$.

Mais, puisque $a^2 \in \mathfrak{a}^2$ et $2ax + x^2 \in X$, on a bien $\mathfrak{a}^2 + X = A$ et, par suite, $\mathfrak{a}^2 \succ \mathfrak{a}$. Donc $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}^2$.

Ceci posé, si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont quelconques, on a toujours

$$(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}.$$

Donc

$$\overline{(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})} \leqq \overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \leqq \overline{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}}.$$

Mais comme on vient de voir que

$$(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \equiv (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}),$$

on en déduit

$$\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \overline{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

D'où le lemme 3 et, par suite, le théorème 1.

$\bar{\mathfrak{a}}$ et $\bar{\mathfrak{b}}$ étant deux stries quelconques, on pourra donc poser sans ambiguïté $\bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{b}} = \overline{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}$ et $\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{b}} = \overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$. Les stries $\bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{b}}$ et $\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{b}}$ seront dites respectivement *somme* et *produit* des stries $\bar{\mathfrak{a}}$ et $\bar{\mathfrak{b}}$. Ces opérations sont évidemment associatives et la multiplication est distributive par rapport à l'addition. On a les formules suivantes :

$$\bar{\mathfrak{a}} + \bar{A} = \bar{A}, \qquad \bar{\mathfrak{a}} + \overline{\{o\}} = \bar{\mathfrak{a}}, \qquad \bar{\mathfrak{a}}\bar{A} = \bar{\mathfrak{a}}, \qquad \bar{\mathfrak{a}}\overline{\{o\}} = \overline{\{o\}} \quad (\bar{\mathfrak{a}})^2 = \bar{\mathfrak{a}}, \qquad \bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{a}}.$$

Nous allons maintenant donner une interprétation de ces opérations en considérant la structure d'ordre sur l'ensemble $\mathfrak{S}$ des stries :

Théorème 2. — *L'ensemble des stries forme un treillis (ou réseau). On a*

$$\sup(\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}) = \bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{b}} \tag{3}$$

$$\inf(\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}) = \bar{\mathfrak{a}}.\bar{\mathfrak{b}}. \tag{4}$$

Puisque $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, on a évidemment $\bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{b}} \geqq \bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}$. Soit $\bar{\mathfrak{c}} \geqq \bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}$. Montrons que $\bar{\mathfrak{c}} \geqq \bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{b}} = \overline{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}$ ou encore que $\mathfrak{c} \succ \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Soit un idéal X tel que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + X = A$. Puisque $\mathfrak{c} \succ \mathfrak{a}$, on a aussi $\mathfrak{c} + \mathfrak{b} + X = A$. Mais, puisque $\mathfrak{c} \succ \mathfrak{b}$, on a encore $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} + X = A$. Donc $\bar{\mathfrak{c}} \geqq \bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{b}}$, d'où la formule (3).

Puisque $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, on a $\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}} \geqq \bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{b}} = \overline{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}}$. Soit $\bar{\mathfrak{c}}' \leqq \bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}$. Montrons que $\mathfrak{c}' + X = A$ entraîne $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + X = A$. Soit un idéal X tel que $\mathfrak{c}' + X = A$. On a aussi $\mathfrak{a} + X = \mathfrak{b} + X = A$. Mais X étant premier à $\mathfrak{a}$ et à $\mathfrak{b}$ est premier à $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ en vertu du lemme 1; donc $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + X = A$ et $\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{b}} \geqq \bar{\mathfrak{c}}'$, d'où la formule (4).

Corollaire 1. — *Une strie est maximale si et si seulement elle contient un idéal maximal.*

Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal et soit $\bar{\mathfrak{a}}$ une strie telle que $\bar{\mathfrak{a}} > \bar{\mathfrak{m}}$. D'après le théorème 2, $\bar{\mathfrak{a}} = \sup(\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{m}}) = \bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{m}} = \overline{\mathfrak{a} + \mathfrak{m}}$. Mais, $\mathfrak{m}$ étant maximal, on a nécessairement $\mathfrak{a} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ ou $\mathfrak{a} + \mathfrak{m} = A$. Si l'on avait $\mathfrak{a} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, on aurait $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{m}}$, ce qui contredit $\bar{\mathfrak{a}} > \bar{\mathfrak{m}}$; on a donc $\mathfrak{a} + \mathfrak{m} = A$, donc $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{A}$ et $\bar{\mathfrak{m}}$ est bien une strie maximale.

Réciproquement, soit $\bar{\mathfrak{a}}$ une strie maximale. On a nécessairement $\mathfrak{a} \neq A$. Soit donc $\mathfrak{m}$ un idéal maximal qui contienne $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}$ implique $\bar{\mathfrak{m}} \geqq \bar{\mathfrak{a}}$. Comme $\bar{\mathfrak{m}} \neq \bar{A}$, ceci implique $\bar{\mathfrak{m}} \neq \bar{\mathfrak{a}}$ et, par saite, la strie $\bar{\mathfrak{a}}$ contient bien l'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Corollaire 2. — *Les stries $\bar{\mathfrak{a}}$ et $\bar{\mathfrak{b}}$ sont premières entre elles si et si seulement les idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont premiers entre eux.*

En effet, par définition, dire que les stries $\bar{\mathfrak{a}}$ et $\bar{\mathfrak{b}}$ sont premières entre elles, c'est dire que $\bar{A} = \sup(\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}})$. Le théorème 2 montre que ceci est équivalent à $\bar{A} = \bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{b}}$ ou $A = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. D'où le corollaire.

3. Dans ce qui suit nous allons caractériser directement les idéaux définissant une même strie :

Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux équivalents ($\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$). Soit, d'autre part, $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A qui contienne $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{m}$ contient nécessairement $\mathfrak{b}$, sans cela sa maximalité impliquerait $\mathfrak{b} + \mathfrak{m} = A$ et, en vertu de $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$, on devrait avoir $\mathfrak{a} + \mathfrak{m} = A$, ce qui contredirait $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}$. On en déduit donc que l'ensemble des idéaux maximaux qui contiennent $\mathfrak{a}$ est le même que l'ensemble des idéaux maximaux qui contiennent $\mathfrak{b}$. Par la suite, nous désignerons par $\mathcal{M}$ l'ensemble des idéaux maximaux de A et, $\mathfrak{a}$ étant un idéal de A, nous désignerons par $\mathcal{M}(\mathfrak{a})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}$ qui contiennent $\mathfrak{a}$. On a évidemment $\mathcal{M}(A) = \emptyset$, $\mathcal{M}(\{o\}) = \mathcal{M}$. Nous venons de voir que $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$ entraîne $\mathcal{M}(\mathfrak{a}) = \mathcal{M}(\mathfrak{b})$. Réciproquement, nous allons montrer que si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont tels que $\mathcal{M}(\mathfrak{a}) = \mathcal{M}(\mathfrak{b})$, on a $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$. Montrons d'abord le

Lemme 4. — *Les idéaux X et Y sont premiers entre eux si et si seulement $\mathcal{M}(X) \cap \mathcal{M}(Y) = \emptyset$.*

Si $\mathcal{M}(X) \cap \mathcal{M}(Y) \ni Z$, on a $X + Y \subset Z \neq A$ et X et Y ne sont pas premiers entre eux. Si X et Y ne sont pas premiers entre eux, $X + Y \neq A$ et, puisque A possède un élément unité, en vertu du théorème de Krull, $\exists Z \in \mathcal{M}$ tel que $X + Y \subset Z$. Donc $\mathcal{M}(X) \cap \mathcal{M}(Y) \ni Z$. D'où le lemme.

Ceci posé, soient deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ tels que $\mathcal{M}(\mathfrak{a}) = \mathcal{M}(\mathfrak{b})$. Montrons, par exemple, que $\mathfrak{a} \succ \mathfrak{b}$. Si $\mathfrak{b} + X = A$, en vertu du lemme 4, $\mathcal{M}(\mathfrak{b}) \cap \mathcal{M}(X) = o$ et, puisque $\mathcal{M}(\mathfrak{a}) = \mathcal{M}(\mathfrak{b})$, ce même lemme montre que $\mathfrak{a} + X = A$, donc $\mathfrak{a} \succ \mathfrak{b}$. De même, $\mathfrak{b} \succ \mathfrak{a}$, d'où $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$. On en déduit le

Théorème 3. — *Deux idéaux appartiennent à une même strie si et si seulement l'ensemble des idéaux maximaux qui contiennent l'un est identique à l'ensemble des idéaux maximaux qui contiennent l'autre.*

Si $\bar{\mathfrak{a}}$ est une strie quelconque, on voit par conséquent que $\mathcal{M}(\mathfrak{a})$ ne dépend pas de l'idéal $\mathfrak{a}$ choisi pour définir la strie. D'après le théorème 3, l'intersection de tous les idéaux contenus dans $\mathcal{M}(\mathfrak{a})$ est un certain idéal $\tilde{\mathfrak{a}}$ qui appartient encore à la strie $\bar{\mathfrak{a}}$. $\tilde{\mathfrak{a}}$ contient évidemment tous les idéaux de la strie $\bar{\mathfrak{a}}$. D'où le

Corollaire. — *Parmi les idéaux d'une même strie, il en existe un plus grand que tous les autres. Il est égal à l'intersection de tous les idéaux maximaux qui le contiennent.*

$\mathfrak{a}$ étant un idéal quelconque, on désignera toujours par $\tilde{\mathfrak{a}}$ l'intersection de tous les idéaux appartenant à $\mathfrak{M}(\mathfrak{a})$. De tels idéaux seront dits $\sim$-idéaux.

Exemple. — Rappelons que l'on appelle *anneau de Dedekind* un anneau d'intégrité A tel que tout idéal de A se décompose d'une manière et d'une seule en un produit d'idéaux maximaux (Z. P. I.). Un anneau d'intégrité est de Dedekind si et si seulement il vérifie les conditions bien connues d'Emmy Nœther. Si A est un tel anneau et si $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \ldots \mathfrak{p}_m^{\alpha_m}$ est la décomposition canonique de l'idéal entier $\mathfrak{a}$ en produit d'idéaux premiers $(\alpha_i > 0\,;\, i \neq j \rightarrow \mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j)$, on a $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_m$.

A étant un anneau quelconque (commutatif avec élément unité), $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant deux idéaux de A, nous rappelons que $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ désigne le *transporteur de* $\mathfrak{b}$ *dans* $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments x de A tels que $\mathfrak{a}x \subset \mathfrak{a}$.

Théorème 4. — *Si l'idéal* $\mathfrak{a}$ *est un* $\sim$*-idéal, quel que soit l'idéal* $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ *est un* $\sim$*-idéal qui ne dépend que du striage auquel appartient* $\mathfrak{b}$.

Soit $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ et soit $\mathfrak{c}_1 \equiv \mathfrak{c}$. Montrons que $\mathfrak{c}_1 \subset \mathfrak{c}$. D'après le théorème 1, on a $\mathfrak{c}_1\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{c}\mathfrak{b}$, donc $\mathfrak{c}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ implique $\mathfrak{c}_1\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{c}_1 \subset \mathfrak{a}:\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. Par suite, $\mathfrak{c}$ est bien un $\sim$-idéal.

Montrons maintenant que si $\mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{b}$, on a encore $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}' = \mathfrak{c}$. Posons $\mathfrak{c}' = \mathfrak{a}:\mathfrak{b}'$. Puisque $\mathfrak{c}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b}'$ entraîne d'après le théorème 1, $\mathfrak{c}\mathfrak{b}' \subset \tilde{\mathfrak{a}}$ et $\mathfrak{c} \subset \tilde{\mathfrak{a}}:\mathfrak{b}' = \mathfrak{c}'$. On a, de même, $\mathfrak{c}' \subset \mathfrak{c}$, donc $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$, ce qui achève de démontrer le théorème 4.

Remarques. — 1° Au paragraphe 5, nous étudierons d'une manière plus précise les relations entre $\tilde{\mathfrak{a}}$ et $\tilde{\mathfrak{a}}:\mathfrak{b}$.

2° Le théorème 4 serait faux si l'on n'imposait pas à $\mathfrak{a}$ d'être un $\sim$-idéal: Soit A un anneau de Dedekind et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. On a $\mathfrak{p}^3:\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$; or $\mathfrak{p}^2$ n'est pas un $\sim$-idéal. De même, on a $\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{p}^3$ et cependant $\mathfrak{p}^3:\mathfrak{p}^3 = A \not\equiv \mathfrak{p}^3:\mathfrak{p}^2$.

4. Soit A un anneau de Dedekind. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A différent de $\{0\}$, il peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \ldots \mathfrak{p}_n^{\alpha_n} \qquad [i \neq j \rightarrow \mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j;\ \alpha_i > 0 (1 \leq i \leq n)].$$

Si nous posons $\tilde{\mathfrak{q}}_i = \mathfrak{p}_i^{\alpha_i}$, on voit que $\tilde{\mathfrak{q}}_i = \mathfrak{p}_i$ et, d'après le corollaire 1 du théorème 2, la strie $\bar{\mathfrak{q}}_i$ est maximale. De plus, si $i \neq j$, $\mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_j = \mathfrak{q}_j = A$ ou $\bar{\mathfrak{q}}_i + \bar{\mathfrak{q}}_j = A$, c'est-à-dire que les stries $\bar{\mathfrak{q}}_i$ et $\bar{\mathfrak{q}}_j$ sont premières entre elles.

Plus généralement, nous appellerons *anneau du type de Dedekind* un anneau A tel que tout idéal $\mathfrak{a}$ de A différent de $\{0\}$ puisse se mettre sous la forme : $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_n$, chaque $\mathfrak{q}_i$ étant une strie maximale et les stries $(\mathfrak{q}_i)_{1 \leq i \leq n}$ étant deux à deux premières entre elles. Nous montrerons qu'une telle décomposition est unique. Tout anneau de Dedekind est évidemment du type de Dedekind.

Théorème 5. — *Soit un anneau* A *quelconque* (*commutatif avec élément unité*) *et un idéal* $\mathfrak{a}$ *de* A *tel que l'on ait* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}'_1 \dots \mathfrak{a}'_m$, *les stries* $\bar{\mathfrak{a}}_i (1 \leqq i \leqq n)$ [resp $\mathfrak{a}'_j$ — $(1 \leqq j \leqq m)$ *étant maximales et deux à deux premières entre elles. Alors* $m = n$ *et il existe une permutation* σ *de l'ensemble* $(1, 2, \dots, n)$ *tel que* $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}'_{\sigma(j)}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ ([1]).

Soit $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}'_1 \dots \mathfrak{a}'_m$. En vertu du lemme 2, on a

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{a}_n.$$

$\mathfrak{a}'_j$ ne peut pas être premier à tous les $\mathfrak{a}_i (1 \leqq i \leqq n)$, sans cela, en vertu du lemme 1, il serait premier à $\mathfrak{a}$, ce qui contredirait $\mathfrak{a}'_j \supset \mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{a}_i$ tel que $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}'_j \neq A$, $\bar{\mathfrak{a}}_i + \bar{\mathfrak{a}}'_j \neq A$ et comme $\bar{\mathfrak{a}}_i$ et $\bar{\mathfrak{a}}'_j$ sont des stries maximales, on a $\bar{\mathfrak{a}}_i = \bar{\mathfrak{a}}'_j$. Ceci montre, en particulier, que si $i \neq k$, on a $\mathfrak{a}_k + \mathfrak{a}'_j = A$. Posons $\sigma(j) = i$. Si $j \neq l$, $\mathfrak{a}'_j + \mathfrak{a}'_l = A$ implique $\mathfrak{a}_{\sigma(j)} + \mathfrak{a}_{\sigma(l)} = A$ ou $\mathfrak{a}_{\sigma(j)} \neq \mathfrak{a}_{\sigma(l)}$. Donc σ est une application biunivoque de $(1, \dots, m)$ dans $(1, \dots, n)$. On en déduit $m \leqq n$. On aurait, de même, $n \leqq m$, donc $m = n$ et σ est une permutation. Supposons que les numérotages soient faits de telle manière que σ soit la permutation identique et montrons que pour tout i, $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}'_i$. Pour simplifier l'écriture, supposons $i = 1$.

Posons

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{a}_2 \dots \mathfrak{a}_n = \mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{a}'_1 = \mathfrak{b}', \qquad \mathfrak{a}'_2 \dots \mathfrak{a}'_n = \mathfrak{c}'.$$

On a

$$\bar{\mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{b}}' \quad \text{et} \quad \mathfrak{c} = \bar{\mathfrak{a}}_2 \dots \bar{\mathfrak{a}}_n = \mathfrak{a}'_2, \qquad \bar{\mathfrak{a}}'_2 \dots \mathfrak{a}'_n = \bar{\mathfrak{c}}'.$$

De plus, $\mathfrak{b}$ étant premier à $\mathfrak{a}_2 \dots \mathfrak{a}_n$ est premier à $\mathfrak{a}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{a}_n = \mathfrak{c}$. De même, $\mathfrak{b}' + \mathfrak{c}' = A$.

Soit $b \in \mathfrak{b}$, on a $b\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}'$, donc $b \in \mathfrak{b}' : \mathfrak{c}$ et $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}' : \mathfrak{c}$. Or $\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{c}'$ montre que $\mathfrak{c} + \mathfrak{b}' = A$. Donc $\exists c \in \mathfrak{c}$, $b' \in \mathfrak{b}'$, avec $1 = c + b'$. Mais si $x \in \mathfrak{b}' : \mathfrak{c}$, on a, en particulier, $xc = b'_1 \in \mathfrak{b}'$, donc $x = xc + xb' = b'_1 + xb' \in \mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{b}' : \mathfrak{c} \subset \mathfrak{b}'$. Comme $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}' : \mathfrak{c}$, on a $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}'$. On montrerait, de même, $\mathfrak{b}' \supset \mathfrak{b}$, donc $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$ ou $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}'_1$. D'où le théorème.

On vient également de montrer les lemmes suivants :

Lemme 5. — *Si* $\mathfrak{a}$ *est premier à* $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} : \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Lemme 6. — *Si* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, *avec* $\mathfrak{c} + \mathfrak{b}' = A$, *on a* $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}' \subset \mathfrak{c}$.

Lemme 7. — *Si* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, *avec* $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = A$, $\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{c}'$, *on a* $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$.

Si A est un anneau du type de Dedekind, on dira que $\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_n$ est la *décomposition canonique* de $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{m}_i$ est l'idéal maximal (unique) contenu dans la strie $\bar{\mathfrak{a}}_i$, on dira que $\mathfrak{a}_i$ est la *composante de* $\mathfrak{a}$ *relative à* $\mathfrak{m}_i$. Si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal qui ne contient pas $\mathfrak{a}$, on pourra encore dire que l'idéal A (formé par l'anneau tout entier) est la composante de $\mathfrak{a}$ par rapport à $\mathfrak{m}$. On voit alors que :

([1]) Ce théorème revient au théorème énoncé par W. Krull (*Idéaltheorie*, p. 21).

Dans un anneau du type de Dedekind tout idéal est égal au produit de ses composantes par rapport aux divers idéaux maximaux de A.

En vertu du lemme 2, on voit encore que *dans un anneau du type de Dedekind un idéal est égal à l'intersection de ses composantes relatives aux divers idéaux maximaux de* A.

On voit que :

Corollaire. — *Dans un anneau* A *du type de Dedekind, un idéal* $\mathfrak{a}$ *divise un idéal* $\mathfrak{b}$ *si et si seulement pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A *la composante de* $\mathfrak{a}$ *par rapport à* $\mathfrak{m}$ *divise la composante de* $\mathfrak{b}$ *par rapport à* $\mathfrak{m}$.

5. Nous allons maintenant donner une caractérisation des anneaux du type de Dedekind :

Théorème 6. — *Pour qu'un anneau* A *(commutatif et ayant un élément unité) soit un anneau du type de Dedekind, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions suivantes :*

1° *L'intersection d'une infinité d'idéaux maximaux différents se réduit à l'idéal* $\{0\}$.

2° *Tout idéal premier non nul et différent de* A *appartient à une strie maximale.*

Nécessité. — Soit A un anneau du type de Dedekind. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A différent de $\{0\}$ et de A. Soit $\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_n$ la décomposition canonique de $\mathfrak{p}$. Comme $\mathfrak{p}$ est premier, on a $n = 1$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1$. La strie $\mathfrak{p}$ est bien maximale par définition, d'où la condition 2°. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal différent de $\{0\}$ et de A et $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ sa décomposition canonique. Puisque $\tilde{\mathfrak{a}}_i$ est une strie maximale, $\tilde{\mathfrak{a}}_i$ est un idéal maximal et $\mathfrak{M}(\mathfrak{a}) \ni \tilde{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{a}}_n$. Soit $\mathfrak{M} \ni \mathfrak{m} \neq \tilde{\mathfrak{a}}_i (1 \leq i \leq n)$. Comme $\mathfrak{m}$ et $\tilde{\mathfrak{a}}_i$ sont maximaux, $\mathfrak{m} + \tilde{\mathfrak{a}}_i = A$ ou $\mathfrak{m} + \mathfrak{a}_i = A$. Par suite, en vertu du lemme 1, on ne peut avoir $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{a})$. On a donc $\mathfrak{M}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n\}$. $\mathfrak{M}(\tilde{\mathfrak{a}})$ est donc fini. Tout idéal non nul de A n'est donc contenu que dans un nombre fini d'idéaux minimaux. D'où la condition 1°.

Suffisance. — Supposons qu'un anneau A vérifie les conditions 1° et 2°. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal quelconque de A différent de $\{0\}$ et de A. Par hypothèse, il existe n idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ de A tels que $\mathfrak{M}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n\}$. Montrons qu'il existe des idéaux $\mathfrak{a}_i (1 \leq i \leq n)$ tels que $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ et $\tilde{\mathfrak{a}}_i = \mathfrak{m}_i (1 \leq i \leq n)$. Montrons ceci par récurrence sur n. La propriété est évidente pour $n = 1$ (il suffit de prendre $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$). Supposons-la vérifiée pour tous les nombres inférieurs à n et montrons ensuite qu'elle est vraie pour n. En vertu du théorème 3 et de son corollaire, on a

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_n.$$

On va montrer qu'il existe des idéaux $\mathfrak{q}_i (1 \leq i \leq n)$ tels que $\tilde{\mathfrak{q}}_i = \tilde{\mathfrak{m}}_i (1 \leq i \leq n)$ et tels que

$$\mathfrak{a} \supset \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n. \tag{5}$$

Soit S_1 le complémentaire de $\mathfrak{m}_1$ dans A, S_2 celui de $\mathfrak{m}_2$. Puisque $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ sont premiers, S_1 et S_2 sont multiplicativement clos. Désignons par S le sous-ensemble de A formé par les éléments de la forme $s_1 s_2 (s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2)$. S est multiplicativement clos. Le complémentaire $\complement S$ de S ne peut contenir aucun idéal différent de $\{o\}$, car si $\complement S \supset \mathfrak{q} \neq \{o\}$, il existerait un idéal premier $\mathfrak{p}$ tel que $\complement S \supset \mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$ [1]. On aurait donc $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \supset \mathfrak{p} \neq \{o\}$ et, par suite, la strie $\bar{\mathfrak{p}}$ ne serait pas maximale contrairement à la condition 2°.

Donc, en particulier, $S \cap \mathfrak{a} \neq \emptyset$ et $\exists s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2$, avec $s_1 s_2 \in \mathfrak{a}$. On a nécessairement $s_1 \in \mathfrak{m}_2$, sans cela on aurait $s_1 \in S_2$ et $s_1 s_2 \in S_2$, contrairement aux relations $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_2$ et $\mathfrak{m}_2 \cap S_2 = \emptyset$.

On a, de même, $s_2 \in \mathfrak{m}_1$.

Soit $\mathfrak{b} = (\mathfrak{a},\ s_2)$ l'idéal engendré par l'ensemble $\mathfrak{a} \cup \{s_2\}$. Soit $\mathfrak{c} = (\mathfrak{a},\ s_1)$. On a évidemment :

$$\mathfrak{m}_2 \not\supset \tilde{\mathfrak{b}} \supset \tilde{\mathfrak{a}},$$
$$\mathfrak{m}_1 \not\supset \tilde{\mathfrak{c}} \supset \tilde{\mathfrak{a}}.$$

Or

(6) $$\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}\mathfrak{c} = (\mathfrak{a}^2,\ \mathfrak{a}s_1,\ \mathfrak{a}s_2,\ s_1 s_2).$$

Il résulte des constructions précédentes que $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont contenus dans au plus $(n-1)$ idéaux maximaux. On a

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{b}) \subset \{\mathfrak{m}_1,\ \mathfrak{m}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{m}_n\},$$
$$\mathfrak{M}(\mathfrak{c}) \subset \{\mathfrak{m}_2,\ \mathfrak{m}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{m}_n\}.$$

Donc, d'après les hypothèses de récurrence, on peut trouver des idéaux $\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{b}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{b}_n$ et $\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{c}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{c}_n$ tels que

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_n,$$
$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 \ldots \mathfrak{c}_n,$$

avec

$$\left.\begin{array}{llll} \mathfrak{b}_i = A & \text{si } \mathfrak{m}_i \notin \mathfrak{M}(\mathfrak{b}), & \mathfrak{b}_i \equiv \mathfrak{m}_i & \text{si } \mathfrak{m}_i \in \mathfrak{M}(\mathfrak{b}) \\ \mathfrak{c}_j = A & \text{si } \mathfrak{m}_j \notin \mathfrak{M}(\mathfrak{b}), & \mathfrak{c}_j \equiv \mathfrak{m}_j & \text{si } \mathfrak{m}_j \in \mathfrak{M}(\mathfrak{c}) \end{array}\right\} \quad (1 \leqq i \leqq n).$$

En particulier, on aura

$$\mathfrak{b}_1 \equiv \mathfrak{m}_1, \qquad \mathfrak{b}_2 = A, \qquad \mathfrak{c}_1 = A, \qquad \mathfrak{c}_2 \equiv \mathfrak{m}_2;$$

(6) peut donc s'écrire

$$\mathfrak{a} \supset (\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1)(\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2)\ldots(\mathfrak{b}_n\mathfrak{c}_n).$$

Posons

$$\mathfrak{q}_i = \mathfrak{b}_i\mathfrak{c}_i \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

On a pour tout i

$$\tilde{\mathfrak{q}}_i = \tilde{\mathfrak{b}}_i\tilde{\mathfrak{c}}_i.$$

On voit donc que l'on a, soit $\mathfrak{q}_i = A$, soit $\tilde{\mathfrak{q}}_i = \mathfrak{m}_i$.

---

[1] KRULL, *Ideultreorie*, p. 10.

Comme $\mathfrak{M}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{q}_i \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n)$, on voit que pour tout i, $\tilde{\mathfrak{q}}_i = \mathfrak{m}_i$ et que l'on a bien l'égalité (5).

Posons maintenant $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{q}_i + \mathfrak{a}$. On a $\mathfrak{a}_i = \sup(\bar{\mathfrak{q}}_i, \bar{\mathfrak{a}}) = \bar{\mathfrak{q}}_i$. Donc les idéaux $\mathfrak{a}_i$ sont deux à deux étrangers et l'on a

$$\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_n.$$

Or $\mathfrak{a}_i \supset \mathfrak{a}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ implique $\mathfrak{a}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_n \supset \mathfrak{a}$.

Mais $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n = (\mathfrak{a} + \mathfrak{q}_1)(\mathfrak{a} + \mathfrak{q}_2) \ldots (\mathfrak{a} + \mathfrak{q}_n) \subset \mathfrak{a}$ en vertu de l'égalité (5).

Donc $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ est la décomposition canonique cherchée de $\mathfrak{a}$. Le théorème 6 est complètement démontré.

Corollaire. — *Dans un anneau du type de Dedekind un idéal est fini si et si seulement chacune de ses composantes est finie.*

Il est bien évident que si un idéal $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ est tel que chaque composante $\mathfrak{a}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ est finie (c'est-à-dire engendrée par un nombre fini d'éléments), il en est de même de $\mathfrak{a}$. Pour voir la réciproque, il suffit de raisonner par récurrence sur n et de regarder dans la démonstration du théorème 6 la manière dont ont été formés les idéaux $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$.

En application du théorème 6, on peut donnér une condition nécessaire et suffisante pour que l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ d'un corps algébrique K soit du type de Dedekind; p étant un nombre premier et k un sous-corps fini de K, désignons par $k(p)$ le nombre des idéaux premiers différents de k qui divisent (p). Soit $(k_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ un ensemble de sous-corps finis de K tel que $\mathrm{K} = \bigcup_{\iota \in \mathrm{I}} k_\iota$.

Il faut alors que pour tout nombre premier p, il existe une borne $f(p)$ telle que pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, $k_\iota(p) \leqq f(p)$. Les corps de Stiemke répondent évidemment à la question, mais ils sont moins généraux, car ici on n'impose pas à l'indice de ramification d'être borné.

II. — Valuations indépendantes sur un anneau.

Les anneaux qui interviennent dans ce paragraphe sont des anneaux d'intégrité commutatifs. Les groupes considérés sont abéliens et écrits additivement. Les éléments unités de ces divers groupes sont toujours désignés par o sans qu'aucune confusion ne puisse en résulter.

1. Soit Γ un groupe (abélien) totalement ordonné écrit additivement. On désignera par Γ_+ le sous-ensemble de Γ ainsi défini

$$\xi \in \Gamma_+ \rightleftharpoons \xi \geqq 0.$$

Un sous-ensemble Ω de Γ est dit une *surclasse* (5) de Γ s'il vérifie les conditions suivantes :

1° $\exists\, \omega \in \Gamma$ tel que $\xi \in \Omega \rightarrow \xi \geqq \omega$ (Ω est borné inférieurement);
2° $\xi \in \Omega$ et $\eta \geqq \xi \rightarrow \eta \in \Omega$.

On voit facilement que les surclasses de Γ sont les s-idéaux de Γ tels qu'ils ont été définis par Lorenzen (6).

L'ensemble des surclasses de Γ est totalement ordonné par la relation d'inclusion Si Ω_1 et Ω_2 sont deux telles surclasses, on posera $\Omega_1 \geqq \Omega_2$ si et si seulement $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

Si α est un élément de Γ, le sous-ensemble (α) de Γ ainsi défini

$$\xi \in (\alpha) \rightleftharpoons \xi \geqq \alpha$$

est une surclasse de Γ. Une surclasse Ω est dite *principale* s'il existe un élément α de I tel que $\Omega = (\alpha)$. L'application $\alpha \rightarrow (\alpha)$ est une application biunivoque de Γ dans l'ensemble $\mathcal{C}$ des surclasses de Γ. Si l'on identifie par cette application Γ à un sous-ensemble de $\mathcal{C}$, on voit que la relation d'ordre sur $\mathcal{C}$ est compatible avec la relation d'ordre sur Γ, c'est-à-dire que

$$(\alpha) \geqq (\beta) \rightleftharpoons \alpha \geqq \beta.$$

Si Ω_1 et Ω_2 sont deux surclasses de Γ, on désigne par $\Omega_1 + \Omega_2$ la surclasse de Γ ainsi définie :

$$\xi \in \Omega_1 + \Omega_2 \rightleftharpoons \exists\, \xi_1 \in \Omega_1, \quad \xi_2 \in \Omega_2, \quad \text{avec} \quad \xi = \xi_1 + \xi_2.$$

(Dans la terminologie de Lorenzen, on voit que le s-idéal $\Omega_1 + \Omega_2$ est le produit des s-idéaux Ω_1 et Ω_2.)

On voit immédiatement que la surclasse $\Omega_1 + \Omega_2$ est principale si et si seulement les surclasses Ω_1 et Ω_2 sont principales. Plus précisément

$$(\alpha_1) + (\alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Si Ω_1 et Ω_2 sont deux surclasses de Γ, on appelle *transporteur* de Ω_1 dans Ω_2 et l'on désigne par $\Omega_2 : \Omega_1$ le sous-ensemble de Γ ainsi défini :

$$\xi \in \Omega_2 : \Omega_1 \rightleftharpoons (\xi) + \Omega_1 \subset \Omega_2.$$

On voit immédiatement que $\Omega_2 : \Omega_1$ est encore une surclasse de Γ.

On pose, en général,

$$(0) : \Omega = \Omega^{-1}.$$

---

(5) W. Krull, *Allgemeine Bewertungstheorie* (*J. Reine Angew. Math.*, t. 167, 1931, p. 160-196). Krull donne une définition des surclasses légèrement différente : il n'impose pas à une surclasse d'être bornée inférieurement. Corrélativement, si K est un corps et $\mathcal{O}$ un ordre de K, un $\mathcal{O}$-idéal $\mathfrak{a}$ de K est pour lui un $\mathcal{O}$-sous-module de K et n'est pas astreint à la condition qu'il existe un entier x de K tel que $x\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}$.

(6) P. Lorenzen, *Abstrakte begrundung der multiplicativen idealtheorie* (*Math. Zeit.*, t. 45, 1939, p. 533-553). Nous préférons employer ici le langage des surclasses, car les groupes ordonnés sont écrits additivement.

On peut définir parmi les éléments de Γ_+ la relation de préordre suivante :

$$\alpha \succ \beta \rightleftharpoons \exists \text{ un entier ordinaire } n > 0 \text{ tel que } n\alpha \geqq \beta.$$

La relation d'équivalence

$$\alpha \equiv \beta \rightleftharpoons (\alpha \succ \beta \text{ et } \beta \succ \alpha)$$

partage Γ_+ en classes qui sont dites *étages* de Γ. L'ensemble des étages est un ensemble totalement ordonné par la relation d'ordre quotient de la relation de préordre $\succ$. On désigne par $\mathcal{E}(\alpha)$ l'étage auquel appartient l'élément α. Il existe un étage plus petit que tous les autres, c'est $\mathcal{E}(0)$, qui se compose du seul élément zéro.

Pour tout couple (α, β) d'éléments de Γ_+, on a

$$\mathcal{E}(\alpha + \beta) = \sup[\mathcal{E}(\alpha), \mathcal{E}(\beta)].$$

On voit donc que si $\mathcal{E}(\alpha) \leqq \mathcal{E}(\beta)$, on a

$$\mathcal{E}(\alpha + \beta) = \mathcal{E}(\beta).$$

Un groupe ordonné est dit *archimédien* si l'ensemble de ses étages comprend au plus deux éléments. On sait que les groupes archimédiens sont ceux qui sont isomorphes aux sous-groupes de R (groupe additif ordonné des nombres réels).

Une surclasse Ω sera dite *entière* si $\Omega \subset \Gamma_+$. Une surclasse Ω sera dite *première* si elle est entière et si $\alpha + \beta \in \Omega$ et $\alpha \notin \Omega$ entraînent $\beta \in \Omega$. Il est facile de voir que la condition nécessaire et suffisante pour que la surclasse Ω soit première est qu'elle soit entière et que $\alpha \in \Omega$ entraîne $\mathcal{E}(\alpha) \subset \Omega$.

Étant donné un corps K, nous rappelons que l'on appelle *valuation* [7] de K une application v de K^* (ensemble des éléments non nuls de K) sur un groupe totalement ordonné Γ telle que

$$v(ab) = v(a) + v(b),$$
$$v(a+b) \geqq \inf[v(a), v(b)].$$

On voit que si $v(a) < v(b)$,

$$v(a+b) = v(a).$$

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que le groupe de valeurs Γ ne se réduise pas à $\{0\}$, c'est-à-dire que nous ne considérerons que des valuations non triviales.

L'ensemble $\mathcal{O}$ des éléments x de K tels que $x = 0$ ou $v(x) \geqq 0$ forme un *ordre* de K (sous-anneau de K contenant 1 et tel que K soit corps des quotients de $\mathcal{O}$). Cet ordre est un *anneau de valuation* (c'est-à-dire tel que si $x \in /\mathcal{O}$, $x^{-1} \in \mathcal{O}$). Réciproquement, on sait qu'un ordre de K qui est un anneau de valuation définit d'une seule manière une valuation de K.

$\mathcal{O}$ est un *anneau local* (au sens large), c'est-à-dire tel que l'ensemble de ses éléments non inversibles forme un idéal maximal $\mathfrak{p}$ (qui contient tout autre idéal

---

(7) W. Krull, *Allgemeine bewertungstheorie* (*loc. cit.*).

de $\mathcal{O}$ autre que $\mathcal{O}$). $\mathfrak{p}$ est l'ensemble des éléments x de $\mathcal{O}$ tels que $v(x) > 0$. $k = \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ est dit *corps des restes* de la valuation v. Soit f l'application canonique de $\mathcal{O}$ sur k. Pour tout élément x de K tel que $f(1/x) = 0$ on pose $f(x) = \infty$. On voit alors que f est une application de K sur (k, ∞).

K et k étant des corps, A un sous-anneau de K, on rappelle qu'une *spécialisation* de A sur k est une application g de A dans (k, ∞) telle que si $a, b \in A$, on ait

$$g(a+b) = g(a) + g(b),$$
$$g(ab) = g(a) g(b),$$
$$g(x) = \infty \quad \text{si et si seulement} \quad g(x^{-1}) = 0.$$

B étant un sous-anneau de K contenant A, on définit la notion de *prolongement* de g sur B. La spécialisation g est dite *non prolongeable* si A = K.

On voit que plus haut f était une spécialisation non prolongeable de K sur k. Réciproquement, une spécialisation non prolongeable f d'un corps K définit sans ambiguïté une valuation de K [le sous-anneau A des éléments x de K tels que $f(x) \neq \infty$ est, en effet, un anneau de valuation de K qui est dit *anneau de la spécialisation* f].

Enfin, on démontre que si A est un sous-anneau d'un corps K, toute spécialisation de A sur un corps k peut se prolonger en une spécialisation non prolongeable de K sur un surcorps (algébrique) de k. v étant une valuation d'un corps K à laquelle correspond l'anneau de valuation O et l'idéal premier P, un ordre $\mathcal{O}$ de K est dit *compatible avec la valuation* v (ou encore v compatible avec $\mathcal{O}$) si $\mathcal{O} \subset O$. $P \cap \mathcal{O} = \mathfrak{p}$ est alors un idéal premier de $\mathcal{O}$ qui est dit *centre* de v sur $\mathcal{O}$. La spécialisation de K sur O/P prolonge la spécialisation de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$.

Soient un corps K, $\mathcal{O}$ un ordre de K, v une valuation de K qui soit compatible avec $\mathcal{O}$ et Γ le groupe totalement ordonné correspondant (groupe des valeurs de v). Si $\mathfrak{a}$ est un idéal (entier ou fractionnaire) de $\mathcal{O}$, on désigne par $(v(\mathfrak{a}))$ la surclasse de Γ ainsi definie :

$$\xi \in (v(\mathfrak{a})) \rightleftarrows \exists x \in \mathfrak{a}, \quad \text{avec} \quad \xi \geqq v(x) \quad (7)$$ [8].

LEMME 8. — *Si $\mathcal{O}$ est un orde de* K *compatible avec la valuation v et si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux (entiers ou fractionnaires) de $\mathcal{O}$, on a*

$$(v(\mathfrak{ab})) = (v(\mathfrak{a})) + (v(\mathfrak{b})). \quad (8)$$

Soit $\xi \in (v(\mathfrak{a})) + (v(\mathfrak{b}))$. Par définition, $\exists \xi_1, \xi_2 \in \Gamma$, $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$, avec $\xi_1 \geqq v(a)$, $\xi_2 \geqq v(b)$ et $\xi = \xi_1 + \xi_2$. On a évidemment $\xi \geqq v(a) + v(b) = v(ab)$. Comme $ab \in \mathfrak{ab}$, on en déduit $\xi \in (v(\mathfrak{ab}))$.

Réciproquement, si $\xi \in (v(\mathfrak{ab}))$, $\exists x \in \mathfrak{ab}$, avec $\xi \geqq v(x)$.

Par définition, de $\mathfrak{ab}$, $\exists a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{b}$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{b}$, avec $x = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$. Or

$$v(x) \geqq \inf(v(a_1) + v(b_1), \ldots, v(a_n) + v(b_n)) = v(a_i) + v(b_i)$$

[8] On remarquera que si $\xi \in (v(\mathfrak{a}))$, il n'existe pas nécessairement $x \in \mathfrak{a}$, avec $\xi = v(x)$.

(pour un certain i tel que $1 \leqq i \leqq n$). Comme

$$v(a_i) \in (v(\mathfrak{a})) \quad \text{et} \quad v(b_i) \in (v(\mathfrak{b})),$$

$v(x) \geqq v(a_i) + v(b_i)$ implique

$$v(x) - v(a_i) \in (v(\mathfrak{b})) \quad \text{et} \quad v(x) = v(a_i) + (v(x) - v(a_i)) \in (v(\mathfrak{a})) + (v(\mathfrak{b})).$$

D'où le lemme.

Lemme 9. — *Si l'idéal $\mathfrak{a}$ admet un nombre fini de générateurs, la surclasse $(v(\mathfrak{a}))$ est principale.*

Soit $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ et supposons que $v(a_i) = \inf(v(a_1), \ldots, v(a_n))$. Pour tout $x \in \mathfrak{a}$, on a $v(x) \geqq \inf[v(a_1), \ldots, v(a_n)] = v(a_i)$. Donc $(v(\mathfrak{a})) = (v(a_i))$.

2. Étant donné un corps K, deux valuations v_1 et v_2 de K (avec les groupes de valeurs correspondants Γ_1 et Γ_2) sont dites *indépendantes* si pour tout couple $(\xi_1, \xi_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$, il existe un élément x de K tel que $v_1(x) \leqq \xi_1$, $v_2(x) \geqq \xi_2$.

Théorème 7 (théorème d'approximation) ([9]). — *Étant donnée une famille finie $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ de valuations de K deux à deux indépendantes et deux familles $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de K^* et de K respectivement, il existe un élément x de K tel que pour tout i $(1 \leqq i \leqq n)$ on ait $v_i(x - b_i) \geqq v(a_i)$.*

On va d'abord montrer le

Lemme 10. — *Étant données $m+1$ valuations $(v, v_1, \ldots, v_m)$ de K telles que v et v_i soient indépendantes pour $1 \leqq i \leqq m$, et $m+1$ éléments $a, b_1, \ldots, b_m$ de K^*, il existe un élément x de K tel que $v(x) \leqq v(a)$ et $v_i(x) \geqq v_i(b_i)$ $(1 \leqq i \leqq m)$.*

On peut toujours supposer

$$v(a) < 0 \quad \text{et} \quad v_i(b_i) > 0 \quad (1 \leqq i \leqq m).$$

On démontrera ceci par récurrence sur m. Pour $m = 1$ la propriété résulte de la définition des valuations indépendantes. Supposons-la donc vérifiée pour $m - 1$ $(m \geqq 2)$

$$\begin{aligned} \exists c, d \in K, \quad \text{avec } v(c) &\leqq v(a), & v_i(c) &\geqq v_i(b_i) & (1 \leqq i \leqq m-1); \\ v(d) &\leqq v(a), & v_j(d) &\geqq v_j(b_j) & (2 \leqq i \leqq m). \end{aligned}$$

Quatre cas peuvent alors se présenter :

1° Si $v_1(d) \geqq 0$ et si $v_m(c) \geqq 0$, on prend $x = cd$;
2° Si $v_1(d) \geqq 0$ et si $v_m(c) < 0$, on prend $x = cd(c+1)^{-1}$;
3° Si $v_1(d) < 0$ et si $v_m(c) \geqq 0$, on prend $x = cd(d+1)^{-1}$;
4° Si $v_1(d) < 0$ et si $v_m(c) < 0$, on prend $x = cd(c+d+1)^{-1}$.

([9]) N. Bourbaki, *Spécialisations et valuations* (à paraître).

En remplaçant éventuellement c par c^2, on peut toujours en effet supposer dans ce dernier cas que $v(c) \neq v(d)$. D'où le lemme.

Passons maintenant à la démonstration du théorème :

Posons

$$x = \sum_{1 \leq i \leq n} t_i b_i.$$

On a

$$x - b_i = (t_i - 1) b_i + \sum_{j \neq i} t_j b_j.$$

Les conditions du théorème seront satisfaites si l'on a

$$v_i(t_i - 1) \geq v_i\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \quad \text{et} \quad v_i(t_j) \geq v_i\left(\frac{a_i}{b_j}\right) \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Posons

$$t_i = t, \quad \frac{a_j}{b_i} = c_j \in (\mathrm{K}, \infty).$$

On est amené à trouver $t \in \mathrm{K}$ tel que

$$v_i(t - 1) \geq v_i(c_i) \quad \text{et} \quad v_j(t) \geq v_i(c_j) \quad (j \neq i).$$

On peut toujours supposer $v_i(c_j) > 0$ $(1 \leq j \leq n)$. Soit $t = \frac{z}{(z+1)}$. Si pour $j \neq i$, on a $v_j(z) \geq v_j(c_j) > 0$, on aura

$$v_j(z+1) = 0 \quad \text{et} \quad v_j(t) = v_j(z) \geq v_j(c_j).$$

Si

$$v_i(z) \leq v_i\left(\frac{1}{c_i}\right) < 0,$$

$$v_i(z+1) = v_i(z) \quad \text{et} \quad v_i(t-1) = -v_i(z+1) \geq v_i(c_i).$$

Mais on peut toujours choisir un tel z d'après le lemme 10. D'où le théorème 7.

Corollaire 1. — *Si $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille finie de valuations deux à deux indépendantes de* K *et si Γ_i est le groupe de valeurs correspondant à v_i pour tout élément $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \ldots \times \Gamma_n$, il existe un élément x de* K *tel que*

$$v_i(x) = \xi_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Il suffit dans l'énoncé du théorème 7 de choisir $a_i (1 \leq i \leq n)$ tel que $v_i(a_i) > \xi_i$ et de prendre $b_i (1 \leq i \in n)$ tel que $v_i(b_i) = \xi_i$.

Corollaire 2. — *Les deux valuations v_1 et v_2 d'un corps* K *sont indépendantes si et si seulement pour tout couple $(\xi_1, \xi_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$ il existe un élément x de* K *tel que $v_1(x) = \xi_1$, $v_2(x) = \xi_2$.*

3. Une valuation v de K compatible avec un ordre $\mathcal{O}$ de K sera dite *indépendante de* $\mathcal{O}$ si, Γ étant le groupe de la valuation v, pour tout élément $\xi \in \Gamma_+$ il

existe un élément $a \in \mathcal{O}$ tel que $v(a) = \xi$, c'est-à-dire si $v(\mathcal{O}) = \Gamma_+$. Ceci se trouvera par exemple réalisé si, $\mathfrak{p}$ étant le centre de v sur K, l'anneau local $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation.

Deux valuations v_1 et v_2 de K compatibles avec $\mathcal{O}$ et ayant les groupes de valeurs respectifs Γ_1 et Γ_2 seront dites *indépendantes sur* $\mathcal{O}$ si pour tout couple $(\xi_1, \xi_2) \in \Gamma_{1+} \times \Gamma_{2+}$, il existe un élément a contenu dans $\mathcal{O}$ tel que

$$v_1(a) = \xi_1, \qquad v_2(a) = \xi_2.$$

Théorème 8. — *Deux valuations v_1 et v_2 indépendantes sur $\mathcal{O}$ sont chacunes indépendantes de $\mathcal{O}$. Deux valuations v_1 et v_2 indépendantes de $\mathcal{O}$, de centres respectifs $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ et telles que $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ ne contienne aucun idéal premier non nul sont indépendantes sur $\mathcal{O}$.*

La première assertion du théorème se déduit immédiatement des définitions.

Supposons que v_1 et v_2 soient indépendantes de $\mathcal{O}$ et que $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ ne contienne aucun idéal premier non nul. Montrons d'abord que si $\xi_2 \in \Gamma_{2+}$, $\exists a \in \mathcal{O}$ avec $v_1(a) = 0$ et $v_2(a) = \xi_2$: le théorème est trivial si $\xi_2 = 0$ (il suffit de prendre $a = 1$). Supposons donc $\xi_2 > 0$. $\mathcal{E}(\xi_2)$ représentant l'étage de ξ_2 dans Γ_{2+}, soit $\mathfrak{p}(\alpha)$ le sous-ensemble de $\mathcal{O}$ ainsi défini

$$x \in \mathfrak{p}(\alpha) \rightleftharpoons \mathcal{E}(v_2(x)) \geqq \mathcal{E}(\xi_2). \tag{9}$$

On voit que $\mathfrak{p}(\alpha)$ est un idéal premier de $\mathcal{O}$. Il n'est pas nul, car la valuation v_2 étant, par hypothèse, indépendante de $\mathcal{O}$, $\exists b \in \mathcal{O}$ tel que $v_2(b) = \xi_2$. On a alors $b \in \mathfrak{p}(\alpha)$. Si $v_1(b) = 0$, on prendra $a = b$. Supposons donc $v_1(b) > 0$. Comme $\xi_2 > 0$, $\mathfrak{p}(\alpha) \subset \mathfrak{p}_2$. Il résulte des hypothèses que $\mathfrak{p}(\alpha) \not\subset \mathfrak{p}_1$. Soit $c \in \mathfrak{p}(\alpha)$, $c \notin \mathfrak{p}_1$. On a

$$\mathcal{E}(v_2(c)) \geqq \mathcal{E}(\xi_2).$$

Donc, par définition de $\mathcal{E}(\xi_2)$, il existe un entier n positif tel que $nv_2(c) \geqq \xi_2$. On voit donc que

$$v_1(c^n) = 0, \qquad v_2(c^n) \geqq \xi_2.$$

Si $v_2(c^n) = \xi_2$, on prendra $a = \xi_2$. Si $v_2(c^n) > \xi_2$, on voit que l'on pourra prendre $a = b + c^n$.

Ceci posé, soit $\xi_1 \in \Gamma_{1+}$ et $\xi_2 \in \Gamma_{2+}$. D'après ce que l'on vient de voir, $\exists a_1 \in \mathcal{O}$ tel que $v_1(a_1) = \xi_1$, $v_2(a_1) = 0$. De même, $\exists a_2 \in \mathcal{O}_2$ tel que $v_1(a_2) = 0$, $v_2(a_2) = \xi_2$. Si l'on pose $a = a_1 a_2$, on voit que $a \in \mathcal{O}$, $v_1(a) = \xi_1$ et $v_2(a) = \xi_2$. Les valuations v_1 et v_2 sont bien indépendantes sur $\mathcal{O}$.

Théorème 9. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux valuations v_1 et v_2 du corps* K *soient indépendantes est qu'il existe un ordre $\mathcal{O}$ de* K *compatible avec ces deux valuations et tel que v_1 et v_2 soient indépendantes sur $\mathcal{O}$.*

La condition est évidemment suffisante; montrons qu'elle est nécessaire :

Soit O_i l'anneau de valuation de $v_i (i = 1, 2)$. Posons $\mathcal{O} = O_1 \cap O_2$. Soient

$\xi_i \in \Gamma_{i+} (i = 1, 2)$. Puisque, par hypothèse, v_1 et v_2 sont indépendantes, $\exists a \in K$ avec $v_i(a) = \xi_i (i = 1, 2)$. Mais ceci implique, puisque $\xi_i \geqq 0 (i = 1, 2)$, $a \in O_1 \cap O_2 = \mathcal{O}$. Il nous suffit donc de montrer que $\mathcal{O}$ est un ordre de K. Or, si $x \in K$, $v_i(x) = \eta_i (i = 1, 2)$. D'après ce que nous venons de voir, $\exists b \in \mathcal{O}$ avec $v_i(b) = \sup(-\eta_i, 0)$ $(i = 1, 2)$. On en déduit $bx \in \mathcal{O}$. Comme, d'autre part, $1 \in \mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ est bien un ordre de K.

Théorème 10. — *Soit $\mathcal{V} = (v_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de valuations de* K *deux à deux indépendantes sur un ordre $\mathcal{O}$ de* K *et soit Γ_ι le groupe de valeurs de la valuation $v_\iota (\iota \in I)$. Si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est un sous-ensemble fini de* I, *et si l'on se donne arbitrairement des éléments ξ_i tels que $\xi_i \in \Gamma_{\alpha_i +}$ $(1 \leqq i \leqq n)$, on peut trouver un élément a de $\mathcal{O}$ tel que $v_{\alpha_i}(a) = \xi_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$.*

Pour simplifier l'écriture, on posera au cours de la démonstration $\alpha_i = i (1 \leqq i \leqq n)$. Démontrons cette propriété par récurrence sur n. Elle résulte des définitions pour $n = 2$. Supposons qu'elle soit vraie pour $n - 1$ et montrons qu'elle est alors vraie pour n.

Montrons-le d'abord pour $\xi_i = 0$ $(2 \leqq i \leqq n)$ (ξ_1 quelconque).

Cherchons donc un élément x_1 de $\mathcal{O}$ tel que

$$v_1(x_1) = \xi_1, \qquad v_i(x_1) = 0 \qquad (2 \leqq i \leqq n).$$

D'après les hypotrèses de récurrence,

$$\exists y \in \mathcal{O} \quad \text{avec} \quad v_1(y) = \xi_1, \qquad v_i(y) = 0 \qquad (2 \leqq i \leqq n-1).$$

Si $v_n(y) = 0$ on posera $x_1 = y$. Supposons $v_n(y) > 0$. Les valuations étant indépendantes sur $\mathcal{O}$, il existe des éléments z_i de $\mathcal{O}$ avec

$$v_n(z_i) = 0, \qquad v_i(z_i) > 0 \qquad (2 \leqq i \leqq n-1).$$

De même,

$$\exists z_1 \in \mathcal{O}, \qquad \text{avec} \quad v_1(z_1) > \xi_1, \qquad v_n(z_1) = 0.$$

Posons $z = z_1 z_2 \ldots z_{n-1}$.

On a donc

$$\begin{aligned} v_1(z) &= v_1(z_1) + v_1(z_2) + \ldots + v_1(z_{n-1}) \geqq v_1(z_1) > \xi_1, \\ v_i(z) &= v_i(z_1) + v_i(z_2) + \ldots + v_i(z_{n-1}) > 0 \qquad \text{si} \quad 1 \leqq i \leqq n-1, \\ v_n(z) &= v_n(z_1) + v_n(z_2) + \ldots + v_n(z_{n-1}) = 0. \end{aligned}$$

Comme pour tout $i (1 \leqq i \leqq n)$, $v_i(y) \neq v_i(z)$, on a pour tout i

$$v_i(y + z) = \inf[v_i(y), v_i(z)].$$

On voit donc que si l'on pose $x_1 = y + z$, on a bien

$$v_1(x_1) = \xi_1, \qquad v_i(x_1) = 0 \qquad (2 \leqq i \leqq n).$$

Ceci posé, soient $\xi_i \in \Gamma_{i+} (1 \leqq i \leqq n)$. D'après ce que l'on vient de voir, il existe des éléments x_i de $\mathcal{O}$ tels que

$$v_i(x_i) = \xi_i \qquad \text{et} \qquad v_j(x_i) = 0 \qquad \text{si} \quad i \neq j \qquad (1 \leqq i, j \leqq n).$$

Si l'on pose $a = x_1 x_2 \ldots x_n$, on voit que $a \in \mathcal{O}$ et que

$$v_i(a) = \xi_i \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

Le théorème 10 est donc complètement démontré.

Soit $\mathcal{V} = (v_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de valuations du corps K.

Pour $x \in K$, soit $I(x)$ le sous-ensemble de I ainsi défini

$$\iota \in I(x) \rightleftharpoons v_\iota(x) \neq 0. \tag{10}$$

Nous dirons que la famille $\mathcal{V}$ est *régulière* si pour tout $x \in K$, $I(x)$ est un sous-ensemble fini de I.

Dans le cas d'une famille de valuations régulière, on a de plus le théorème suivant :

Théorème 11. — *Soit $\mathcal{V} = (v_\iota)_{\iota \in I}$ une famille régulière de valuations de* K *deux à deux indépendantes sur un ordre $\mathcal{O}$ de* K *et soit Γ_ι le groupe de valeurs de la valuation $v_\iota (\iota \in I)$. Si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ est un sous-ensemble fini de* I *et si l'on se donne arbitrairement des éléments ξ_i tels que $\xi_i \in \Gamma_{\alpha_i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$, on peut trouver un élément a de* K *tel que $v_{\alpha_i}(a) = \xi_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ et tel que $v_\iota(a) \geqq 0$ si $\iota \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.*

Nous poserons encore $\alpha_i = i (1 \leqq i \leqq n)$.

Supposons donc vérifiées les hypothèses du théorème et soit

$$\{\xi^1 \ldots \xi_n\} \in \Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n.$$

Les valuations v_i étant deux à deux indépendantes, en vertu du corollaire 1 du théorème 7, $\exists x \in K$ tel que $v_i(x) = \xi_i (1 \leqq i \leqq n)$. Supposons que x ne réponde pas aux conditions du théorème. La famille $\mathcal{V}$ étant régulière, il existe un sous-ensemble fini non vide $\{v_{n+1}, \ldots, v_{n+p}\}$ de $\mathcal{V}$ dont l'intersection avec $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est vide, tel que $v_{n+j}(x) < 0 \, (1 \leqq j \leqq p)$ et tel que $\iota \notin \{1, \ldots, n, n+1, \ldots, n+p\}$ entraîne $v_\iota(x) \geqq 0$. Posons $v_{n+j}(x) = \xi_{n+j}$. Puisque les valuations considérées sont deux à deux indépendantes sur $\mathcal{O}$, il existe, en vertu du théorème 10, $y \in \mathcal{O}$ tel que

$$v_i(y) = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n), \qquad v_{n+j}(y) = -\xi_{n+j} \quad (1 \leqq j \leqq p).$$

On voit alors que l'on peut poser $a = xy$.

III. — Anneaux de multiplication du type de Dedekind.

1. Étant donné un ordre $\mathcal{O}$ intégralement clos dans son corps des quotients K, on sait [10] qu'il existe une famille de valuations $\mathcal{V} = (v_\iota)_{\iota \in I}$ de K telle que

$$\text{pour tout } x \in K, \quad x \in \mathcal{O} \rightleftharpoons (v_\iota(x) \geqq 0 \text{ pour tout } \iota \in I). \tag{11}$$

Une telle famille $\mathcal{V}$ sera dite *famille de définition de $\mathcal{O}$*.

---

[10] Krull, *Allgemeine Bewertungstheorie* (*loc. cit*).

Lemme 11. — *$\mathcal{O}$ étant un anneau intégralement clos dans son corps des quotients* K, *il existe toujours une famille de définition $\mathcal{V} = (v_\iota)_{\iota\in I}$ de $\mathcal{O}$ telle que pour tout $\iota \in I$, le centre $\mathfrak{p}_\iota$ de v_ι sur $\mathcal{O}$ soit un idéal maximal de $\mathcal{O}$.*

Soit $x \in K$, $x \notin \mathcal{O}$. Puisque $\mathcal{O}$ est intégralement clos, il existe une valuation v compatible avec $\mathcal{O}$ de K telle que $v(x) < 0$. Soit $\mathfrak{p}$ le centre de v sur $\mathcal{O}$ et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal qui contienne $\mathfrak{p}$. Soit S le complémentaire de $\mathfrak{m}$ dans $\mathcal{O}$. On a $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \supset \mathcal{O}_\mathfrak{m}$ (11). Comme $x \notin \mathcal{O}_\mathfrak{p}$, on a donc $x \notin \mathcal{O}_\mathfrak{m}$. Comme l'anneau local $\mathcal{O}_\mathfrak{m}$ est intégralement clos, $x \notin \mathcal{O}_\mathfrak{m}$ entraîne que $y = \frac{1}{x}$ n'est pas inversible dans $\mathcal{O}_\mathfrak{m}[y]$ (anneau engendré par y et $\mathcal{O}_\mathfrak{m}$). Soit $\mathfrak{m}'$ l'idéal engendré par $\mathfrak{m}$ sur $\mathcal{O}_\mathfrak{m}$ $\Big(\mathfrak{m}'$ est l'idéal maximal unique de $\mathcal{O}_\mathfrak{m}$. Il est composé des éléments de K de la forme $\frac{a}{s}$ avec $a \in \mathfrak{m}$, $s \in S\Big)$. Soit $\mathfrak{m}''$ l'idéal de $\mathcal{O}_\mathfrak{m}[y]$ composé des éléments de $\mathcal{O}_\mathfrak{m}[y]$ qui peuvent se mettre sous la forme

$$z = a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n \qquad (a_0 \in \mathfrak{m}';\ a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}_\mathfrak{m}).$$

On a $\mathfrak{m}'' \cap \mathcal{O}_\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$. En effet, on a, d'une part, $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}''$. D'autre part, si $x \in \mathfrak{m}'' \cap \mathcal{O}_\mathfrak{m}$, on a

$$x = a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n \qquad (a_0 \in \mathfrak{m}';\ a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}_\mathfrak{m}).$$

Si l'on avait $x \notin \mathfrak{m}'$, on aurait $a_0 - x = b_0 \notin \mathfrak{m}'$, donc, $\mathcal{O}_\mathfrak{m}$ étant local, b_0 serait inversible dans $\mathcal{O}_\mathfrak{m}$ et y satisferait à une équation de la forme

$$1 + \left(\frac{a_1}{b_0}\right) y + \ldots + \left(\frac{a_n}{b_0}\right) y^n = 0.$$

Comme ici $n \neq 0$ (sans cela on aurait $x = a_0 \in \mathfrak{m}'$), on voit que y serait inversible dans $\mathcal{O}_\mathfrak{m}[y]$, ce qui a été exclu.

On a donc bien $\mathfrak{m}'' \cap \mathcal{O}_\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$. En particulier, $\mathfrak{m}'' \neq \mathcal{O}_\mathfrak{m}[y]$.

On voit, d'autre part, que

$$\mathcal{O}_\mathfrak{m}[y]/\mathfrak{m}'' \cong \mathcal{O}_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}' \cong \mathcal{O}/\mathfrak{m} = k$$

et que la spécialisation $\mathcal{O}_\mathfrak{m}[y] \to k$ prolonge la spécialisation $\mathcal{O} \to k$. Dans cette spécialisation, $y \to 0$. En utilisant le théorème de Zorn, on voit que cette spécialisation se prolonge en une spécialisation non prolongeable d'un anneau local A sur k. Cet anneau local est alors un anneau de valuation. La valuation w correspondante est compatible avec l'ordre $\mathcal{O}$, admet $\mathfrak{m}$ pour centre sur $\mathcal{O}$ et est telle que $w(x) < 0$. Le lemme 11 se déduit de là sans difficultés.

$\mathcal{V}$ étant une famille de définition de $\mathcal{O}$ et $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathcal{O}$ (entier ou fractionnaire), à chaque $\iota \in I$ correspond une surclasse $(v_\iota(\mathfrak{a}))$ de Γ_ι (Γ_ι étant le groupe de

(11) Comme toujours, $\mathfrak{p}$ désignant un idéal premier, $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ est l'anneau formé par les éléments de K de la forme $\frac{a}{s}$ $(a, s \in \mathcal{O},\ s \notin \mathfrak{p})$.

valeurs de v_ι). La famille $\mathcal{V}$ est dite *arithmétiquement utilisable* [12] si deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ tels que pour tout ι on ait $(v_\iota(\mathfrak{a})) = (v_\iota(\mathfrak{b}))$ sont tels que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. On sait [13], en particulier, que la famille de toutes les valuations de K compatibles avec l'anneau intégralement clos $\mathcal{O}$ est arithmétiquement utilisable si et si seulement $\mathcal{O}$ vérifie la propriété v_β de Prüfer, c'est-à-dire si tout idéal fini de $\mathcal{O}$ est inversible. Un tel anneau est dit *anneau de multiplication.*

Lemme 12. — *Soit v une valuation de* K *compatible avec l'ordre $\mathcal{O}$, $\mathfrak{p}$ le centre de v sur $\mathcal{O}$. La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ soit un anneau de valuation est que pour tout couple a, b de* K, *il existe un élément x de* K *qui divise a et b et tel que $v(x) = \inf[v(a), v(b)]$.*

On voit immédiatement que si $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation, c'est nécessairement l'anneau A de la valuation v. On désignera par S le complémentaire de $\mathfrak{p}$ dans $\mathcal{O}$.

Nécessité. — Soit $\mathcal{O}_\mathfrak{p} = A$. Soient a, $b \in K$ et supposons $v(a) \leqq v(b)$. Puisque $v\left(\frac{b}{a}\right) \geqq 0$, par définition $\frac{b}{a} \in A$, et, puisque $\mathcal{O}_\mathfrak{p} = A$, $\exists c \in \mathcal{O}$ et $s \in S$, avec $\frac{b}{a} = \frac{c}{s}$. Il suffit de poser $x = \frac{a}{s}$.

Suffisance. — On a évidemment $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \subset A$. Soit $x \in A$; $v(x) \geqq v(1)$ entraîne, d'après les hypothèses, l'existence d'un élément y de K tel que

$$x = ay, \qquad 1 = by \quad (a, b \in \mathcal{O}) \qquad \text{et} \qquad v(y) = 0.$$

Par suite, $\frac{1}{y} = b \in \mathcal{O}$ et $v\left(\frac{1}{y}\right) = 0$, donc $\frac{1}{y} = s \in S$ et $x = \frac{a}{s} \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$, donc $\mathcal{O}_\mathfrak{p} = A$.

Le lemme précédent fournit une démonstration simple du

Théorème 12 (Krull) [12]. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau intégralement clos $\mathcal{O}$ soit un anneau de multiplication, est que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ soit un anneau de valuation.*

Suffisance. — Soit $\mathfrak{M} = (\mathfrak{m}_\iota)_{\iota \in I}$ l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{O}$. Comme, par hypothèse, pour tout $\iota \in I$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}_\iota}$ est un anneau de valuation, il existe une seule valuation v_ι de K, compatible avec $\mathcal{O}$, qui admette $\mathfrak{m}_\iota$ comme centre sur $\mathcal{O}$. En vertu du lemme 11, la famille $(v_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille de définition de $\mathcal{O}$. Soit $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ un idéal fini de $\mathcal{O}$. Pour tout $\iota \in I$, on a

$$(v_\iota(\mathfrak{a})) = (\xi_\iota) \quad \text{si} \quad \xi_\iota = \inf[v_\iota(a_1), \ldots, v_\iota(a_n)] \quad (\textit{voir}\ \text{lemme 9}).$$

Soit l'idéal $\mathfrak{a}'$ ainsi défini

$$x \in \mathfrak{a}' \rightleftarrows (\text{pour tout } \iota \in I,\ v_\iota(x) \geqq -\xi_\iota). \tag{12}$$

---

[12] W. Krull *Beitrage zur arithmetik kommutativen integritatsbereiche* (*Math. Zeit.*, T. 41, 1936, p. 545-577).

[13] P. Lorenzen, *Abstrakte begrundung der multiplicativen idealtheorie* (*loc. cit.*).

Je dis que pour tout $\alpha \in \mathrm{I}$, on a $(v_\alpha(\mathfrak{a}')) = (-\xi_\alpha)$.

En effet, puisque $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}_\iota}$ est un anneau de valuation, en appliquant plusieurs fois de suite le lemme 12, on voit qu'il existe $x \in \mathrm{K}$ qui divise $a_1, \ldots, a_n$ et tel que

$$v_\alpha(x) = \inf[v_\alpha(a_1), \ldots, v_\alpha(a_n)] = \xi_\alpha.$$

On a donc, pour tout $\iota \in \mathrm{I}$,

$$v_\iota(x) \leqq \inf[v_\iota(a_1), \ldots, v_\iota(a_n)] = \xi_\iota.$$

Par suite, $v_\iota\left(\frac{1}{x}\right) \geqq -\xi_\iota(\iota \in \mathrm{I})$. Donc $\frac{1}{x} \in \mathfrak{a}'$. Mais comme $v_\alpha\left(\frac{1}{x}\right) = -\xi_\alpha$, on voit que $(v_\alpha(\mathfrak{a}')) \supset (-\xi_\alpha)$. Comme on a évidemment $(v_\alpha(\mathfrak{a}')) \subset (-\xi_\alpha)$, on voit que pour tout $\alpha \in \mathrm{I}$, $(v_\alpha(\mathfrak{a}')) = (-\xi_\alpha)$.

Le lemme 8 montre donc que pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, $v_\iota(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') = (0)$.

Comme $(v_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ est une famille de définition de $\mathcal{O}$, on voit que $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ est un idéal entier. Il est nécessairement égal à $\mathcal{O}$, sans cela on pourrait trouver $\beta \in \mathrm{I}$, avec $\mathfrak{m}_\beta \supset \mathfrak{a}\mathfrak{a}'$, mais alors on aurait $v_\beta(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') \neq (0)$, contrairement à ce que l'on a vu. $\mathcal{O}$ est donc bien un anneau de multiplication.

Nécessité. — Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}$. On sait, en vertu du théorème du prolongement des spécialisations, qu'il existe une valuation v de K admettant $\mathfrak{p}$ pour centre $\mathcal{O}$. Soient $a, b \in \mathrm{K}$ et $\mathfrak{a} = (a, b)$ l'idéal engendré par a et b. Puisque $\mathcal{O}$ est un anneau de multiplication, il existe un idéal $\mathfrak{a}'$ tel que $\mathfrak{a}'(a, b) = \mathcal{O}$. On a nécessairement

$$(v(\mathfrak{a}')) = (v(\mathfrak{a}))^{-1} = -(\inf[v(a), v(b)]).$$

Par suite, $\exists y \in \mathrm{K}$ tel que $y \in \mathfrak{a}'$ et $v(y) = -\inf[v(a), v(b)]$. Si l'on pose $x = \frac{1}{y}$, on voit que x divise a et b et que $v(x) = \inf[v(a), v(b)]$. En vertu du lemme 11, $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ est bien un anneau de valuation.

Théorème 13. — *Si $\mathcal{O}$ est un anneau de multiplication, il existe une famille de définition de $\mathcal{O}$ qui est arithmétiquement utilisable et telle que chaque valuation de cette famille ait pour centre sur $\mathcal{O}$ un idéal maximal.*

Soit $\mathfrak{L} = (\mathfrak{p}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ l'ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{O}$ et soit $\mathfrak{M} = (\mathfrak{p}_\iota)_{\iota \in \mathrm{J}}$ le sous-ensemble formé par les idéaux maximaux.

Pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, il existe, en vertu du théorème 12, une et une seule valuation v_ι de K qui ait $\mathfrak{p}_\iota$ pour centre sur $\mathcal{O}$. Or, on sait que la famille $(v_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ est arithmétiquement utilisable. Montrons que la famille $(v_\iota)_{\iota \in \mathrm{J}}$ l'est aussi.

Soit donc $\mathfrak{a}$ un idéal quelconque de $\mathcal{O}$ et $\mathfrak{a}'$ l'idéal défini par

$$x \in \mathfrak{a}' \rightleftharpoons \text{pour tout } \iota \in \mathrm{J}, \qquad v_\iota(x) \in (v_\iota(\mathfrak{a})).$$

Si l'on avait $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{a}$, comme la famille $(v_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ est arithmétiquement utilisable, il existerait un élément $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que

$$(v_\alpha(\mathfrak{a}')) \neq (v_\alpha(\mathfrak{a})),$$

c'est-à-dire un élément $a \in \mathfrak{a}'$ tel que pour tout $x \in \mathfrak{a}$, $v_\alpha(a) < v_\alpha(x)$. Mais $\mathfrak{p}_\alpha$ est contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{p}_\beta (\beta \in J)$. Comme $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\alpha} \supset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\beta}$, si un élément y de K est tel que $v_\alpha(y) > 0$, on a $\frac{1}{y} \notin \mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\alpha}$, donc $\frac{1}{y} \notin \mathcal{O}_{\mathfrak{p}_\beta}$ ou $v_\beta(y) > 0$. On en déduirait donc que pour tout $x \in \mathfrak{a}$, on aurait $v_\beta(a) < v_\beta(x)$, ce qui contredirait $a \in \mathfrak{a}'$.

La famille $(v_\iota)_{\iota \in J}$ est donc arithmétiquement utilisable et satisfait aux conditions du théorème **13**.

2. Théorème **14**. — *Pour qu'un anneau $\mathcal{O}$ intégralement clos dans son corps des quotients* K *soit un anneau de multiplication du type de Dedekind, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions suivantes :*

1° *L'intersection d'une infinité d'idéaux maximaux de $\mathcal{O}$ différents se réduit à* $\{0\}$;

2° *Si $\mathfrak{M} = (\mathfrak{m}_\iota)_{\iota \in I}$ est l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{O}$, il existe une famille de définition de $\mathcal{V}$, soit $\mathcal{V} = (v_\iota)_{\iota \in I}$ formée de valuations deux à deux indépendantes sur $\mathcal{O}$ et telles que pour $\iota \in$ I, $\mathfrak{m}_\iota$ soit le centre de v_ι sur $\mathcal{O}$.*

Suffisance. — Les conditions 1° et 2° impliquent que la famille $\mathcal{V}$ est régulière. Soit un idéal fini $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ et

$$\xi_\iota = \inf(v_\iota(a_1), \ldots, v_\iota(a_n)).$$

Soit J le sous-ensemble fini de I ainsi défini.

$$\iota \in J \rightleftharpoons \xi_\iota \neq 0.$$

En vertu du théorème **11**, $\exists x \in$ K tel que

$$v_\iota(x) = -\xi_\iota \quad \text{si} \quad \iota \in I \qquad \text{et} \qquad v_\iota(x) \geqq 0 \quad \text{si} \quad \iota \notin J.$$

Soit J′ le sous-ensemble fini de I ainsi défini :

$$\iota \in J' \rightleftharpoons \{\iota \notin J \text{ et } v_\iota(x) > 0\}.$$

Si $J' = \emptyset$, on voit que pour tout $\iota \in I$, $v_\iota(x) = -\xi_\iota$. On pose, en ce cas, $\mathfrak{a}' = (x)$.

Si $J' = \emptyset$, en vertu du théorème **11**, il existe $y \in$ K tel que $v_\iota(y) = -\xi_\iota$ si $\iota \in J$, que $v_\iota(y) = 0$ si $\iota \in J'$ et $v_\iota(y) \geqq 0$ si $\iota \notin J \cup J'$.

On pose alors $\mathfrak{a}' = (x, y)$.

On voit que dans les deux cas, pour tout $\iota \in I$, on a $(v_\iota(\mathfrak{a}')) = (-\xi_\iota)$. Donc $(v_\iota(\mathfrak{a}\mathfrak{a}')) = (0)$. $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ est un idéal entier et comme, par hypothèse, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}_\iota$ la valuation v_ι a pour centre $\mathfrak{m}_\iota$ un raisonnement identique à celui du théorème **12** montre que $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = \mathcal{O}$.

Tout idéal fini de $\mathcal{O}$ étant inversible, $\mathcal{O}$ est bien un anneau de multiplication.

Montrons que $\mathcal{O}$ est du type de Dedekind. Il suffit pour cela de montrer que si $\mathfrak{a}$ est un idéal entier non nul de $\mathcal{O}$ tel que

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{m}_\beta \qquad (\alpha, \beta \in I),$$

$\mathfrak{a}$ n'est pas premier. La famille $\mathcal{V}$ étant régulière, le sous-ensemble $\mathfrak{a}(\mathrm{I})$ ainsi défini :

(13) $$\iota \in \mathfrak{a}(\mathrm{I}) \rightleftharpoons \mathfrak{m}_\iota \supset \mathfrak{a} \quad (\text{ou } \mathfrak{m}_\iota \in \mathcal{M}(\mathfrak{a}))$$

est finie. Si $\iota \notin \mathfrak{a}(\mathrm{I})$, $(v_\iota(\mathfrak{a})) = (\mathrm{o})$.

Soit pour tout $\iota \in \mathfrak{a}(\mathrm{I})$, $\xi_\iota \in (v_\iota(\mathfrak{a}))$. Comme α, $\beta \in \mathfrak{a}(\mathrm{I})$, on peut, en vertu du théorème **10**, trouver deux éléments a et b contenus dans $\mathcal{O}$ tels que

$$v_\beta(a) = \mathrm{o}, \qquad v_\iota(a) = \xi_\iota \qquad \text{si} \quad \iota \neq \beta \quad \text{et} \quad \iota \in \mathfrak{a}(\mathrm{I}),$$
$$v_\alpha(b) = \mathrm{o}, \qquad v_\iota(b) = \xi_\iota \qquad \text{si} \quad \iota \neq \alpha \quad \text{et} \quad \iota \in \mathfrak{a}(\mathrm{I}).$$

On voit alors que pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, $v_\iota(ab) \in (v_\iota(\mathfrak{a}))$. Comme, en vertu du théorème **13**, la famille $(v_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ est arithmétiquement utilisable, on en conclut $ab \in \mathfrak{a}$. Or $v_\beta(a) = \mathrm{o}$ montre que $a \notin \mathfrak{a}$. De même, $b \notin \mathfrak{b}$. Par suite, $\mathfrak{a}$ n'est pas premier et $\mathcal{O}$ est bien du type de Dedekind.

Nécessité. — Supposons que $\mathcal{O}$ soit un anneau de multiplication du type de Dedekind. Soit $\mathcal{M} = (\mathfrak{m}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ l'ensemble de ses idéaux maximaux. On sait, d'après le théorème **12**, qu'à chaque $\iota \in \mathrm{I}$ est attaché une valuation v_ι bien déterminé qui a pour centre $\mathfrak{m}_\iota$ sur $\mathcal{O}$. Cette valuation v_ι est indépendante de $\mathcal{O}$, puisque $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}_\iota}$ est l'anneau de la valuation v_ι. Si $\alpha \neq \beta$, les deux valuations v_α et v_β sont indépendantes en vertu des théorèmes **6** et **8**. On sait, d'après le lemme **11**, que la famille $(v_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ est une famille de définition de $\mathcal{O}$. Le reste de l'énoncé est une conséquence du théorème **6**.

Si $\mathcal{O}$ est un anneau de multiplication du type de Dedekind, la famille $(v_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ ainsi définie sera dite *famille de définition canonique de* $\mathcal{O}$.

3. Nous nous proposons dans ce qui suit d'étudier plus particulièrement les idéaux d'un anneau de multiplication du type de Dedekind.

Soit $\mathcal{O}$ un tel anneau, K son corps des quotients, $\mathcal{M} = (\mathfrak{m}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ l'ensemble de ses idéaux maximaux, $\mathcal{V} = (v_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ la famille de définition canonique de $\mathcal{O}$. Comme pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}_\iota}$ est l'anneau de la valuation v_ι, on déduit immédiatement du théorème **13** le

Théorème 15. — *La famille de définition canonique d'un anneau de multiplication du type de Dedekind est arithmétiquement utilisable.*

Si $(\Gamma_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ est l'ensemble des groupes de valeurs de $(v_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ et si pour chaque indice ι on se donne une surclasse Ω_ι de Γ_ι, cherchons à quelles conditions il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}$ tel que pour tout $\iota \in \mathrm{I}$ on ait $(v_\iota(\mathfrak{a})) = \Omega_\iota$.

Si un tel idéal $\mathfrak{a}$ existe et si $x \in \mathfrak{a}$, la famille $\mathcal{V}$ étant régulière, il n'y a qu'un nombre fini d'indices correspondant à des valuations pour lesquelles x a une valeur strictement positive. Par suite, on voit qu'une condition nécessaire pour que notre problème admette une solution est que pour tous les indices ι de I, sauf peut-être pour un nombre fini, on ait $\Omega_\iota \supset (\mathrm{o}) = \Gamma_{\iota+}$.

D'autre part, d'après la définition des idéaux fractionnaires, il faut qu'il existe un élément y de K tel que $y\mathfrak{a}$ soit entier.

Par suite, $(v_\iota(y)) + (v_\iota(\mathfrak{a})) \subset \Gamma_{\iota+}$. Comme $\mathcal{V}$ est une famille régulière, $v_\iota(y)$ est nul pour tous les éléments n'appartenant pas à un sous-ensemble fini de I et, par suite, $(v_\iota(\mathfrak{a})) \subset \Gamma_{\iota+}$ pour ces éléments. On voit donc que pour que le problème ait une solution, il faut qu'il existe un sous-ensemble fini de I tel que pour tout indice ι n'appartenant pas à ce sous-ensemble, on ait $\Omega_\iota = (0) = \Gamma_{\iota+}$. Dans la suite, nous désignerons par $I(\mathfrak{a})$ cet ensemble.

Montrons que cette condition est suffisante pour que le problème admette une solution.

Soit $(\Omega_\iota)_{\iota\in I}$ un tel ensemble de surclasses et soit J le sous-ensemble fini de I ainsi défini :

$$\iota \in J \rightleftharpoons \Omega_\iota \neq \Gamma_{\iota+} = (0).$$

Soit le sous-ensemble $\mathfrak{a}$ de K ainsi défini :

$$x \in \mathfrak{a} \rightleftharpoons (\text{pour tout } \iota \in I,\ v_\iota(x) \in \Omega_\iota). \tag{14}$$

Montrons d'abord que $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathcal{O}$; la formule (14) montre que $\mathfrak{a}$ est un $\mathcal{O}$-module. Pour montrer que c'est idéal, il suffit donc de montrer qu'il existe $y \in K$ tel que $y\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}$. Toute surclasse étant bornée inférieurement, on peut à tout $\iota \in J$ associer un élément ζ_ι de Γ_ι tel que $\zeta_\iota \notin \Omega_\iota$. Comme J est fini, il existe un élément y de K tel que

$$v_\iota(y) = -\zeta_\iota \quad \text{si } \iota \in J \qquad \text{et} \qquad v_\iota(y) \geqq 0 \quad \text{si } \iota \notin J.$$

On voit que $y\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}$; $\mathfrak{a}$ est bien un idéal de $\mathcal{O}$.

Montrons que l'on a $(v_\iota(\mathfrak{a})) = \Omega_\iota$.

On a évidemment $\Omega_\iota \supset (v_\iota(\mathfrak{a}))$. Réciproquement, soit $\xi_\iota \in \Omega_\iota$.

A tout entier $\alpha \in J$, on atachera un élément η_α de Ω_α avec la seule restriction que si $\iota \in J$, on posera $\eta_\iota = \xi_\iota$.

Ceci posé, puisque J est un ensemble fini, il en est de même de $J \cup \{\iota\}$ et en vertu du théorème **11**, on peut trouver un élément a de K, tel que

$$v_\alpha(a) = \eta_\alpha \quad \text{si } \alpha \in J \cup \{\iota\}, \qquad v_\beta(a) \geqq 0 \quad \text{si } \beta \notin J \cup \{\iota\}.$$

On voit que $a \in \mathfrak{a}$; $v_\iota(a) = \xi_\iota$ implique donc $\xi_\iota \in v_\iota(\mathfrak{a})$.

On en déduit donc que

$$\Omega_\iota = (v_\iota(\mathfrak{a})) \qquad (\iota \in I).$$

La famille $\mathcal{V}$ étant arithmétiquement utilisable, on voit que l'idéal que l'on vient de définir est la seule solution du problème. D'où :

Théorème **16**. — *Si à chaque indice $\iota \in I$ on associe une surclasse Ω_ι de Γ_ι, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un $\mathcal{O}$-idéal $\mathfrak{a}$ de K tel que pour tout $\iota \in I$ on ait $(v_\iota(\mathfrak{a})) = \Omega_\iota$, est qu'il existe un sous-ensemble fini J de I tel que pour tout indice ι n'appartenant pas à J on ait $\Omega_\iota = \Gamma_{\iota+} = (0)$. L'idéal $\mathfrak{a}$ est alors défini d'une manière unique par*

$$x \in \mathfrak{a} \rightleftharpoons (\textit{pour tout } \iota \in I,\ v_\iota(x) \in \Omega_\iota).$$

Du théorème précédent, on déduit sans difficultés les corollaires suivants :

Corollaire 1. — *Si* $\mathfrak{a}$ *est un idéal entier, sa composante relative à l'idéal maximal* $\mathfrak{m}_\iota$ *est l'idéal* $\mathfrak{a}_\iota$ *ainsi défini :* $(v_\alpha(\mathfrak{a}_\iota))$ *est la surclasse* $\Gamma_{\alpha+}$ *si* $\alpha \neq \iota$; $(v_\iota(\mathfrak{a}_\iota)) = (v_\iota(\mathfrak{a}))$.

Remarquons que si $\mathfrak{a}$ est un idéal fractionnaire, on peut encore définir une *composante de* $\mathfrak{a}$ *relative à l'idéal maximal* $\mathfrak{m}_\iota$ comme étant l'idéal $\mathfrak{a}_\iota$ (non nécessairement entier) tel que

$$(v_\alpha(\mathfrak{a}_\iota)) = \Gamma_{\alpha+} \quad \text{si } \alpha \neq \iota \qquad \text{et} \qquad (v_\iota(\mathfrak{a}_\iota)) = (v_\iota(\mathfrak{a})).$$

Corollaire 2. — *Un idéal (entier ou fractionnaire) n'admet qu'un nombre fini de composantes différentes de* $\mathcal{O}$. *Il est égal au produit de ses composantes.*

Remarque. — Il est facile de voir que, sauf dans le cas très particulier où $\mathcal{O}$ est un anneau de valuation, un idéal de $\mathcal{O}$ n'est égal à l'intersection de ses composantes que s'il est entier.

Corollaire 3. — *Si* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *sont deux idéaux quelconques, la composante du produit* $\mathfrak{ab}$ *relative à l'indice* ι *est le produit des composantes de* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *relatives à cet indice.*

Ceci se déduit immédiatement des définitions et du lemme 8.

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal, on a pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, $(v_\iota(\mathfrak{a})) = v_\iota(\mathfrak{a})$. En effet, par définition, $(v_\iota(\mathfrak{a})) \supset v_\iota(\mathfrak{a})$. Si, d'autre part, $\xi_\iota \in (v_\iota(\mathfrak{a}))$, il résulte de la démonstration du théorème 16 qu'il existe $a \in \mathfrak{a}$ avec $v_\iota(a) = \xi_\iota$. D'où :

Corollaire 4. — *Pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *et tout indice* $\iota \in \mathrm{I}$, *on a* $(v_\iota(\mathfrak{a})) = v_\iota(\mathfrak{a})$.

Désormais, dans un anneau de multiplication du type de Dedekind et pour une valuation v de sa famille canonique, nous écrirons $v(\mathfrak{a})$ au lieu de $(v(\mathfrak{a}))$ pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de cet anneau.

Corollaire 5. — *Pour tout* $\iota \in \mathrm{I}$, *on a* $v_\iota(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}) = v_\iota(\mathfrak{a}):v_\iota(\mathfrak{b})$ ($\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *étant deux idéaux quelconques de* $\mathcal{O}$).

Remarquons d'abord que si $x \in \mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ et si v est une valuation de K compatible avec l'ordre $\mathcal{O}$, $x\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ implique

$$v(x) + (v(\mathfrak{b})) \subset (v(\mathfrak{a})) \qquad \text{ou} \qquad v(x) \in (v(\mathfrak{a})):(v(\mathfrak{b})).$$

Donc ici on aura toujours

$$v_\iota(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}) \subset v_\iota(\mathfrak{a}):v_\iota(\mathfrak{b}) \qquad (\iota \in \mathrm{I}).$$

D'autre part, l'ensemble des surclasses $\Omega_\iota = v_\iota(\mathfrak{a}):v_\iota(\mathfrak{b})$ remplit les conditions du théorème 16, donc $\exists$ un idéal $\mathfrak{c}$ tel que

$$v_\iota(\mathfrak{c}) = v_\iota(\mathfrak{a}):v_\iota(\mathfrak{b}) \qquad (\iota \in \mathrm{I}).$$

On a $v_\iota(\mathfrak{bc}) \subset v_\iota(\mathfrak{a})$ et, par suite, $\mathfrak{bc} \subset \mathfrak{a}$, donc $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}:\mathfrak{b}$. Mais, d'autre part, $v_\iota(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}) \subset \Omega_\iota (\iota \in I)$ montre que $\mathfrak{a}:\mathfrak{b} \supset \mathfrak{c}$. Donc $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ et l'on a bien la propriété annoncée.

Théorème 17. — *Un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{O}$ est fini si et si seulement toutes les surclasses $v_\iota(\mathfrak{a})$ $(\iota \in I)$ sont principales. Tout idéal fini de $\mathfrak{O}$ peut être engendré au moyen de deux éléments.*

On sait (lemme 9) que si un idéal $\mathfrak{a}$ est fini, toutes les surclasses $v_\iota(\mathfrak{a})$ sont principales. Supposons réciproquement que toutes les surclasses $v_\iota(\mathfrak{a})$ soient principales. Posons $(\xi_\iota) = v_\iota(\mathfrak{a})$. D'après le théorème 16, le sous-ensemble J de I défini par $\iota \in J \rightleftharpoons \xi_\iota \neq o$ est fini. Donc $\exists a \in K$ tel que $v_\iota(a) = \xi_\iota$ si $\iota \in J$ et $v_\iota(a) \geqq o$ si $\xi_\iota = o$. Soit J_1 le sous-ensemble de I (qui peut être vide) ainsi défini :

$$\iota \in J_1 \rightleftharpoons \{ \xi_\iota = o \quad \text{et} \quad v_\iota(a) > o \}.$$

Comme J_1 est fini, il existe $b \in K$ tel que

$$v_\iota(b) = \xi_\iota \quad \text{si } \iota \in J, \qquad v_\iota(b) = o \quad \text{si } \iota \in J_1$$

et

$$v_\iota(b) \geqq o \quad \text{si } \iota \notin J \cup J_1.$$

On voit alors que pour tout $\iota \in I$, $v_\iota((a, b)) \mathrel{\underset{\iota}{=}} (\xi_\iota)$. Puisque $\mathfrak{V}$ est une famille arithmétiquement utilisable, on voit donc que $\mathfrak{a} = (a, b)$ est fini. Ceci montre de plus que l'idéal $\mathfrak{a}$ peut être engendré par deux éléments, d'où le théorème.

Corollaire. — *Un idéal (entier ou fractionnaire) de $\mathfrak{O}$ est fini si et si seulement toutes ses composantes sont finies.*

Ce corollaire résulte immédiatement du théorème 17 et de la définition des composantes. On a vu que dans le cas d'un anneau du type de Dedekind, qui n'est pas un anneau de multiplication, cette propriété est encore vraie pour les idéaux entiers (corollaire du théorème 6).

Soit $\mathfrak{G}$ le groupe des idéaux finis d'un anneau de multiplication $\mathfrak{O}$. La relation d'ordre sur $\mathfrak{G}$

$$\text{(15)} \qquad \mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b} \rightleftharpoons \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{G})$$

fait de $\mathfrak{G}$ un groupe partiellement ordonné, car $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$ entraîne $\mathfrak{ac} \geqq \mathfrak{bc}$. Comme, d'autre part, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est un idéal fini $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{G})$, on voit que dans le groupe ordonné $\mathfrak{G}$ on a $\inf(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

$\mathfrak{G}$ est, par suite, un groupe réticulé. L'idéal $\sup(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est le plus grand idéal fini (au sens de l'inclusion) contenu dans $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Il est égal à $\mathfrak{ab}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^{-1}$, d'après la théorie élémentaire des groupes réticulés [14].

Comme on a, d'autre part, $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{ab}$, on en déduit $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{ab}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^{-1}$

---

[14] *Voir*, par exemple, G. Birkhoff, *Lattice Theorie*.

Donc

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{ab}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^{-1}.$$

THÉORÈME 18. — *Dans un anneau de multiplication, l'intersection de deux idéaux finis est encore un idéal fini.*

Les théorèmes 16 et 17 montrent, d'autre part, le

THÉORÈME 19. — *Soit $\mathcal{O}$ un anneau de multiplication du type de Dedekind, $(v_\iota)_{\iota\in I}$ sa famille de définition canonique et $(\Gamma_\iota)_{\iota\in I}$ l'ensemble des groupes de valeurs correspondants. Alors, le groupe ordonné $\mathfrak{G}$ formé par les idéaux finis de $\mathcal{O}$, est un groupe réticulé isomorphe à la somme directe ordonnée $\sum_{\iota\in I}\Gamma_\iota$ des groupes $(\Gamma_\iota)_{\iota\in I}$.*

IV. — Anneaux de multiplication uniformés du type de Dedekind.

1. Nous rappelons [15] qu'un domaine d'intégrité $\mathcal{J}$ est dit *uniforme* (einartig) si deux idéaux premiers de $\mathcal{J}$ différents de $\{o\}$ sont toujours premiers entre eux.

Si $\mathcal{O}$ est un anneau du type de Dedekind, si $(\mathfrak{m}_\iota)_{\iota\in I}$ est l'ensemble de ses idéaux maximaux et si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier (non nul) de $\mathcal{O}$, $\exists \alpha \in I$ tel que $\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{m}_\alpha$. Il en résulte donc que $\mathcal{O}$ est uniforme si et si seulement chacun des anneaux locaux $(\mathcal{O}_{\mathfrak{m}_\iota})$ est uniforme. Si $\mathcal{O}$ est, de plus, un anneau de multiplicaton, $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}_\iota}$ est pour tout $\iota \in I$ un anneau de valuation. Or [16], un anneau de valuation est uniforme si et si seulement son groupe de valeurs est archimédien, c'est-à-dire isomorphe à un sous-groupe du groupe additif des nombres réels. D'où :

LEMME 13. — *Un anneau de multiplication du type de Dedekind est uniforme si et si seulement chacune des valuations de sa famille de définition canonique admet un groupe de valeur archimédien.*

Dans un tel anneau, nous sommes complètement renseigné sur la divisibilité des idéaux, grâce au

LEMME 14 [16]. — *Si Γ est un groupe totalement archimédien ordonné et si Ω et Ω' sont deux surclasses de Γ, il existe une surclasse Ω'' telle que $\Omega = \Omega' + \Omega''$ si et si seulement on est dans l'un des deux cas suivants :*

1° *Ω' est une surclasse principale;*
2° *Ni Ω, ni Ω' ne sont des surclasses principales.*

Si Ω'' existe, comme Ω ne peut être principale que s'il en est de même de Ω' et Ω'', on voit que l'on est nécessairement dans l'un de ces deux cas. Supposons

---

[15] W. KRULL, *Idealtheorie*, n° 10.
[16] W. KRULL, *Allgemeine bewertungstheorie* (*loc. cit.*).

réciproquement, que l'on soit dans le premier cas; alors $\Omega' = (\alpha)$ et l'on voit que l'ensemble des éléments $(\xi - \alpha)_{\xi \in \Omega}$ est une surclasse Ω'' de Γ telle que $\Omega = \Omega' + \Omega''$.

Supposons que l'on soit maintenant dans le cas 2°.

Le groupe Γ n'est alors pas discret et il peut être considéré comme un sous-groupe partout dense de R (groupe additif des nombres réels). Il est alors facile de voir que si Ω est une surclasse non principale dans Γ il, existe un élément $\alpha \in$ R tel que Ω soit composé des éléments de Γ qui sont strictement supérieurs à α. Posons alors $\Omega = ((\alpha))$ [17].

Si l'on est dans le cas 2°, $\exists \alpha, \alpha' \in$ R avec

$$\Omega = ((\alpha)) \quad \text{et} \quad \Omega' = ((\alpha')).$$

On voit, par suite, que l'on pourra prendre

$$\Omega'' = ((\alpha - \alpha')).$$

Si $\mathcal{O}$ est un anneau de multiplication du type de Dedekind et si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux quelconques de $\mathcal{O}$, le lemme **14** permet de savoir s'il existe un idéal $\mathfrak{c}$ tel que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$.

En effet, s'il existe un tel idéal $\mathfrak{c}$ on a, pour tout $\iota \in$ I,

$$v_\iota(\mathfrak{a}) = v_\iota(\mathfrak{b}) + v_\iota(\mathfrak{c}).$$

Réciproquement, supposons que pour tout $\iota \in$ I il existe une surclasse Ω_ι de Γ_ι telle que $v_\iota(\mathfrak{a}) = v_\iota(\mathfrak{b}) + \Omega_\iota$. Comme $\mathrm{I}(\mathfrak{a}) \cup \mathrm{I}(\mathfrak{b})$ est fini et comme si $\iota \notin \mathrm{I}(\mathfrak{a}) \cup \mathrm{I}(\mathfrak{b})$, on a $\Omega_\iota = (0)$, on voit, d'après le théorème **16**, qu'il existe un idéal $\mathfrak{c}$ tel que pour tout $\iota \in$ I, $v_\iota(\mathfrak{c}) = \Omega_\iota$. Donc quel que soit $\iota \in$ I, on a $v_\iota(\mathfrak{a}) = v_\iota(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$. Puisque la famille $\mathcal{V}$ est arithmétiquement utilisable, on en déduit donc $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$. Le lemme **14** montre alors qu'il existe un idéal $\mathfrak{c}$ tel que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ si et si seulement pour tout indice $\iota \in$ I tel que $v_\iota(\mathfrak{a})$ soit une surclasse principale, il en est de même de $v_\iota(\mathfrak{b})$. Or, il résulte de la définition de $\mathfrak{a}_\iota$, du théorème **17** et de son corollaire que $v_\iota(\mathfrak{a})$ est une surclasse principale si et si seulement $\mathfrak{a}_\iota$ est un idéal fini, d'où le

Théorème **20**. — *Soit $\mathcal{O}$ un anneau de multiplication uniforme du type de Dedekind et deux idéaux quelconques $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ de $\mathcal{O}$. Il existe un idéal $\mathfrak{c}$ de $\mathcal{O}$ tel que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ si et si seulement pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}$ tel que la composante de $\mathfrak{a}$ relative à $\mathfrak{m}$ soit finie, la composante de $\mathfrak{b}$ relative à $\mathfrak{m}$ est également finie.*

2. Soit $\mathcal{O}$ un anneau de multiplication uniforme du type de Dedekind, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ trois idéaux quelconques de $\mathcal{O}$. Cherchons à quelles conditions l'égalité $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}'$ implique $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$.

Soit d'abord Γ un groupe totalement ordonné archimédien qui sera considéré comme plongé dans R. Étant données trois surclasses A, B et B' de Γ telles que $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{A} + \mathrm{B}'$, cherchons à quelles conditions on a $\mathrm{B} = \mathrm{B}'$.

---

[17] Le symbole $((\alpha))$ ne devra être considéré comme défini que si Γ est dense dans R.

Soit $C = A + B = A + B'$.

1° Si A est une surclasse principale, on voit que $B = B'$.

En effet, si $A = (\alpha)$ et si $\xi \in B$, $\alpha + \xi \in C$, donc $\exists \eta \in B'$, $\alpha' \geqq 0$ tels que $\alpha + \xi = (\alpha + \alpha') + \eta$ et $\xi = \alpha' + \eta$ montre que $\xi \in (\eta)$. Comme $\eta \in B'$, on en déduit $\xi \in B'$ et, par suite, $B \subset B'$. On a de même $B' \subset B$.

2° Supposons que A ne soit pas une surclasse principale. Γ peut être alors considéré comme un sous-groupe partout dense de R. Soit donc $\alpha \in R$ tel que $A = ((\alpha))$. C n'est pas une surclasse principale et l'on a $C = ((\gamma))$. Remarquons d'abord que si D est une surclasse de Γ telle que $C = A + D$, on a $D \subset C{:}A$ et, par suite, $C = A + (C{:}A)$.

Or, on peut voir que

$$C{:}A = (\gamma - \alpha) \quad \text{si} \quad \gamma - \alpha \in \Gamma,$$
$$C{:}A = ((\gamma - \alpha)) \quad \text{si} \quad \gamma - \alpha \notin \Gamma.$$

Montrons pour cela que

$$\eta \in C{:}A \rightleftharpoons (\eta \geqq \gamma - \alpha \text{ et } \eta \in \Gamma).$$

On voit à partir des définitions que $\eta \in \Gamma$ et $\eta \geqq \gamma - \alpha$ entraînent $\eta \in C{:}A$. Réciproquement, soit $\eta \in C{:}A$. On a alors par définition $\eta \in \Gamma$. Si l'on avait $\eta < \gamma - \alpha$, l'inégalité $\eta + \alpha < \gamma$ entraînerait (puisque Γ est partout dense dans R) l'existence d'un élément η' de Γ tel que $\eta + \alpha < \eta' < \gamma$. $\xi = \eta' - \eta$ serait alors un élément de Γ tel que $\alpha < \xi$. Donc $\xi \in ((\alpha)) = A$. Comme $\eta + \xi = \eta' < \gamma$, on voit que l'on aurait

$$\xi \in ((\alpha)) = A \quad \text{et} \quad \eta + \xi \notin ((\gamma)) = C.$$

Ceci entraînerait $\eta \notin C{:}A$, contrairement à l'hypothèse. Or, on voit à partir des définitions que ($\eta \geqq \gamma - \alpha$ et $\eta \in \Gamma$) est équivalent à $\eta \in (\gamma - \alpha)$ si $\gamma - \alpha \in \Gamma$ et à $\eta \in ((\gamma - \alpha))$ si $\gamma - \alpha \notin \Gamma$.

Ceci posé, soit D une surclasse de Γ telle que $C = A + D$. Montrons que $D \supset ((\gamma - \alpha))$. Raisonnons par l'absurde : soit $\xi \in ((\gamma - \alpha))$ tel que $\xi \notin D$. On peut écrire $\xi = \gamma - \alpha + \varepsilon (0 < \varepsilon \in R)$. Comme Γ est partout dense dans R, $\exists \varepsilon' \in R$ tel que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et $\gamma + \varepsilon' \in C$. Puisque $A + D = C$, $\exists \alpha' \in A$, $\delta \in D$ avec $\alpha' + \delta = \gamma + \varepsilon'$. On en déduit $\alpha' - \alpha = \gamma + \varepsilon' - \delta - \alpha = \xi - \varepsilon + \varepsilon' - \delta$. Or $\varepsilon' - \varepsilon < 0$. $\xi \notin D$ entraîne $\xi - \delta < 0$. Donc $\alpha' - \alpha < 0$, contrairement à $\alpha' \in A$. L'hypothèse $\xi \notin D$ est donc impossible et l'on a bien

$$\Delta \supset ((\gamma - \alpha)).$$

Ceci posé, si $A + D = C$, on a donc

$$C{:}A \supset D \supset ((\gamma - \alpha)).$$

Or on sait que $A + ((\gamma - \alpha)) = C$. On en déduit donc

$$(16) \qquad A + D = C \rightleftharpoons C{:}A \supset D \supset ((\gamma - \alpha)).$$

Deux cas sont à distinguer :

a) $\gamma - \alpha \in \Gamma$. Alors

$$C:A = (\gamma - \alpha) \quad \text{et} \quad A + D = C \rightleftharpoons (D = ((\gamma - \alpha)) \ \text{ou} \ D = (\gamma - \alpha)).$$

b) $\gamma - \alpha \notin \Gamma$. Alors

$$C:A = ((\gamma - \alpha)) \quad \text{et} \quad A + D = C \rightleftharpoons D = C:A = ((\gamma - \alpha)).$$

En tenant compte du lemme **14**, l'ensemble de ces résultats peuvent s'exprimer dans le

LEMME 15. — *Soient un groupe ordonné archimédien* Γ *considéré comme plongé dans* R *et deux surclasses* A *et* B *de* Γ.

Si B *est une surclasse principale, il existe une et une seule surclasse* X *de* Γ *telle que* $A = B \dot{+} X$. (*Cette surclasse* X *est principale si et si seulement* A *est principale.*)

Si B *n'est pas principale, une telle surclasse* X *existe si et si seulement* A *n'est pas principale. Dans ce dernier cas, en posant* $A = ((\alpha))$, $B = ((\beta))$, X *est déterminée de manière unique et égale à* $((\alpha - \beta))$ *si* $\alpha - \beta \notin \Gamma$. *Si* $\alpha - \beta \in \Gamma$, *il y a deux solutions possibles :*

$$X = ((\alpha - \beta)) \quad \text{et} \quad X = (\alpha - \beta).$$

Le lemme **16** permet alors de résoudre le problème posé au début de ce paragraphe, car si l'on a trois idéaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ tels que $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ab}'$, on voit, comme dans la démonstration du théorème **20**, que la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait sûrement $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$ est que pour tout $\iota \in I$, il existe une seule surclasse X_ι de Γ_ι telle que $v_\iota(\mathfrak{ab}) = v_\iota(\mathfrak{a}) + X_\iota$. On peut d'ailleurs remarquer que $v_\iota(\mathfrak{a})$ est principale (et, par suite, X_ι parfaitement déterminée) dans le cas où $\iota \notin I(\mathfrak{a})$ [18]. Comme dans le cas où $\iota \in I(\mathfrak{a})$, X_ι admet au plus deux déterminations, on voit que les idéaux $\mathfrak{b}'$ de $\mathcal{O}$ satisfaisant à l'égalité $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ab}'$ sont en nombre fini.

On voit immédiatement à partir de la démonstration du lemme **15** que l'on peut énoncer le

THÉORÈME 21. — A *et* B *étant deux surclasses d'un groupe ordonné archimédien* Γ, *il existe une et une seule surclasse* X *de* Γ *telle que* $A = B + X$ *si et si seulement on est dans un des deux cas suivants :*

1° B *est une surclasse principale;*

2° A, B *et* A:B *ne sont pas des surclasses principales.*

Ce théorème permet de donner une condition exprimable en termes d'idéaux pour que $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ étant trois idéaux, $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ab}'$ entraîne $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$.

En vertu du théorème **21**, il faut et il suffit que pour tout $\iota \in I$ tel que $v_\iota(\mathfrak{a})$ ne

---

(18) On a vu au n° 2, du paragraphe III le sens de $I(\mathfrak{a})$ si $\mathfrak{a}$ est entier. Plus généralement, si $\mathfrak{a}$ est fractionnaire, on posera :

$$\iota \in I(\mathfrak{a}) \rightleftharpoons v_\iota(\mathfrak{a}) \neq \Gamma_{\iota +}.$$

soit pas une surclasse principale de Γ_ι, il en soit de même de $v_\iota(\mathfrak{ab}):v_\iota(\mathfrak{a})$, c'est-à-dire de $v_\iota(\mathfrak{ab}:\mathfrak{a})$ (cette identification résulte du corollaire 5 du théorème 16), ou encore que si $v_\iota(\mathfrak{ab}:\mathfrak{a})$ est une surclasse principale de Γ_ι, il en soit de même de $v_\iota(\mathfrak{a})$, ce qui revient à dire, en vertu du théorème 20, qu'il faut et il suffit que $\mathfrak{a}$ divise $\mathfrak{ab}:\mathfrak{a}$.

Théorème 22. — *Soient $\mathcal{O}$ un anneau de multiplication uniforme du type de Dedekind, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de $\mathcal{O}$. Il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux de $\mathcal{O}$ satisfaisant à l'égalié $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a}X$; X est nécessairement égal à $\mathfrak{b}$ si et si seulement $\mathfrak{a}$ divise $\mathfrak{ab}:\mathfrak{a}$.*

3. Soit $\mathcal{O}$ un anneau de multiplication uniforme du type de Dedekind, $(\mathfrak{m}_\iota)_{\iota\in I}$ l'ensemble des idéaux maximaux, $(v_\iota)_{\iota\in I}$ et $(\Gamma_\iota)_{\iota\in I}$ les valuations et les groupes de valeurs correspondant. Nous considérerons chaque Γ_ι comme plongé dans R. On voit facilement, à partir de ce qui précède, que Γ_ι est discret (c'est-à-dire isomorphe au groupe Z des entiers) si et si seulement l'idéal maximal correspondant $\mathfrak{m}_\iota$ est tel que $\mathfrak{m}_\iota \neq \mathfrak{m}_\iota^2$. On considérera dans ce cas $\Gamma_\iota = Z$. Si, au contraire, $\mathfrak{m}_\iota = \mathfrak{m}_\iota^2$, on voit que Γ_ι est dense dans R.

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal entier de $\mathcal{O}$ contenu dans la strie $\overline{\mathfrak{m}}_\iota$, il existe $\alpha \in R_+$ tel que l'on ait, soit $v_\iota(\mathfrak{a}) = (\alpha)$, soit $v_\iota(\mathfrak{a}) = ((\alpha))$. [Si $v_\iota(\mathfrak{a}) = (\alpha)$, $\mathfrak{a}$ est évidemment un idéal fini et l'on a $\alpha \in \Gamma_\iota$]. Le nombre α bien déterminé sera appelé la *valeur de l'idéal* $\mathfrak{a}$ pour la valuation v_ι. On voit, en particulier, que $\mathfrak{m}_\iota$ a pour valeur 1 si Γ_ι est discret et pour valeur zéro dans le cas contraire. Dans le premier cas $v_\iota(\mathfrak{m}_\iota) = (1)$, dans le deuxième $v_\iota(\mathfrak{m}_\iota) = ((0))$.

La condition nécessaire et suffisante pour que Γ_ι soit discret est que tous les idéaux appartenant à la strie $\overline{\mathfrak{m}}_\iota$ soient finis (pour cela il faut et il suffit d'ailleurs que $\mathfrak{m}_\iota$ soit fini).

Dans le cas où Γ_ι est dense dans R, à tout nombre réel α positif ou nul correspond un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}$ qui appartient à la strie $\overline{\mathfrak{m}}_\iota$ et qui admet la valeur α pour la valuation v_ι. Si $\alpha \notin \Gamma_\iota$ ou si $\alpha = 0$, cet idéal est bien déterminé, on a $v_\iota(\mathfrak{a}) = ((\alpha))$. Si α est différent de zéro et contenu dans Γ_ι, il y a deux idéaux de $\overline{\mathfrak{m}}_\iota$ répondant à la question : l'un, $\mathfrak{a}$ est fini et l'on a $v_\iota(\mathfrak{a}) = (\alpha)$, l'autre $\mathfrak{a}'$, ne l'est pas et l'on a $v_\iota(\mathfrak{a}') = ((\alpha))$. (Si $\alpha = 0$, on voit évidemment qu'un idéal $\mathfrak{a}$ tel que $v_\iota(\mathfrak{a}) = (0)$ n'appartient pas à la strie $\overline{\mathfrak{m}}_\iota$.

De ces remarques, on déduit facilement les théorèmes suivants :

Théorème 23. — *Soit $\mathcal{O}$ un anneau de multiplication uniforme du type de Dedekind et $\mathfrak{m}$ un idéal entier maximal de $\mathcal{O}$. Si $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$, $\mathfrak{m}$ est un idéal fini ainsi que tout autre idéal appartenant à la strie $\overline{\mathfrak{m}}$.*

D'après ce que nous venons de voir, si $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$, le groupe de valeur relatif à $\mathfrak{m}$ est discret. Si v est la valuation correspondante, $v(\mathfrak{m}) = (1)$ est une surclasse principale. Le théorème 23 résulte alors du théorème 17.

Théorème 24. — *Si $\mathcal{O}$ est un anneau de multiplication uniforme du type de*

Dedekind et si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathcal{O}$ tel que $\mathfrak{a}^2 \not\supset \mathfrak{a}$, l'intersection de toutes les puissances de $\mathfrak{a}$ est vide.

Soit $(v_\iota)_{\iota \in I}$ la famille de définition canonique de $\mathcal{O}$. Supposons que l'on ait $\mathfrak{a}^2 \not\supset \mathfrak{a}$. Puisque $(v_\iota)_{\iota \in I}$ est arithmétiquement utilisable, $\exists \eta \in I$ tel que $v_\eta(\mathfrak{a}^2) \not\supset v_\eta(\mathfrak{a})$. Soit donc $a \in \mathfrak{a}$ tel que $v_\eta(a) \notin v_\eta(\mathfrak{a}^2)$. Comme $v_\eta(a^2) = 2v_\eta(a)$ et que $a^2 \notin \mathfrak{a}^2$, on voit que $2v_\eta(a) \notin (v_\eta(a))$. Comme Γ_η est un sous-groupe de R, ceci impose que $v_\eta(a)$ soit strictement positif. Soit α la valeur de $\mathfrak{a}$ pour la valuation v_η. Cette valeur est strictement positive. On voit facilement que pour tout entier n positif, $n\alpha$ est la valeur de $\mathfrak{a}^n$ pour la valuation v_η. Si, par suite, s'il existait x tel que $x \in \bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{a}^n$, on devrait avoir $v_\eta(x) \geqq n\alpha (n \in Z_+)$, ce qui est impossible puisque, α étant strictement positif, $n\alpha$ peut être pris aussi grand qu'on le veut. On a donc bien $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{a}^n = \emptyset$.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal quelconque de $\mathcal{O}$. Définissons le sous-ensemble suivant de $I : \iota \in F(\mathfrak{a}) \rightleftharpoons$ la composante $\mathfrak{a}_\iota$ de $\mathfrak{a}$ par rapport à l'indice ι est un idéal fini.

Cherchons maintenant à définir un ensemble $\mathfrak{G}$ d'idéaux de $\mathcal{O}$ qui forme un groupe multiplicatif et tel que $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$,

Supposons le problème résolu et soit $\mathfrak{e}$ l'unité d'un tel groupe.

Il existe alors un idéal $\mathfrak{a}'$ contenu dans $\mathfrak{G}$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = \mathfrak{e}$. Comme une composante $\mathfrak{e}_\iota$ de $\mathfrak{e}$ est le produit des composantes $\mathfrak{a}_\iota$ et $\mathfrak{a}'_\iota$, $\mathfrak{e}_\iota$ ne peut être un idéal fini que s'il en est de même de $\mathfrak{a}_\iota$ et $\mathfrak{a}'_\iota$. On en déduit donc $F(\mathfrak{e}) \subset F(\mathfrak{a})$. Mais comme $\mathfrak{a}\mathfrak{e} = \mathfrak{a}$, le même raisonnement montre que $F(\mathfrak{e}) \supset F(\mathfrak{a})$. On doit donc avoir $F(\mathfrak{e}) = F(\mathfrak{a})$. On voit de même que si $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$, on a $F(\mathfrak{b}) = F(\mathfrak{a})$. Puisque $\mathfrak{e}^2 = \mathfrak{e}$, on doit avoir $v_\iota(\mathfrak{e}) = (0)$ si $\iota \in F(\mathfrak{a})$ et $v_\iota(\mathfrak{e}) = ((0))$ si $\iota \notin F(\mathfrak{a})$. Ceci définit $\mathfrak{e}$ sans ambiguïté.

Si l'on désigne par $\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$ l'ensemble d'idéaux de $\mathcal{O}$ ainsi défini

$$\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}(\mathfrak{a}) \rightleftharpoons F(\mathfrak{b}) = F(\mathfrak{a}), \tag{17}$$

on voit, à partir de l'étude qui précède, que cet ensemble forme effectivement un groupe qui se trouve donc être le plus grand groupe possible qui contienne $\mathfrak{a}$.

On voit, à partir du théorème 20, que $\mathfrak{b}$ appartient à $\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$ si et si seulement $\mathfrak{b}$ divise $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}$ divise $\mathfrak{b}$.

L'inverse de $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{G}$ est l'idéal $\mathfrak{a}'$ ainsi défini :

$$v_\iota(\mathfrak{a}') = (-\alpha) \quad \text{si } v_\iota(\mathfrak{a}) = (\alpha) \quad (\text{cas où } \iota \in F(\mathfrak{a})),$$
$$v_\iota(\mathfrak{a}') = ((-\alpha)) \quad \text{si } v_\iota(\mathfrak{a}) = ((\alpha)) \quad (\text{cas où } \iota \in F(\mathfrak{a})).$$

Il est facile de voir que $\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$ est un groupe réticulé isomorphe à la somme directe ordonnée

$$\sum_{\iota \in F(\mathfrak{a})} \Gamma_\iota \oplus \sum_{\xi \notin F(\mathfrak{a})} R_\xi,$$

où pour tout $\xi \notin F(\mathfrak{a})$, on pose $R_\xi \cong R$.

On voit que deux idéaux entiers $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ appartiennent à un même filet de ce groupe ([19]) si et si seulement ils appartiennent à une même strie.

On voit, en particulier, que si $\mathfrak{a}$ est fini (inversible), $F(\mathfrak{a}) = I$ et $\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$ est le groupe formé par tous les idéaux finis de $\mathcal{O}$. Si $\mathfrak{a}'$ est l'inverse de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{G}$, il est facile de voir que le sous-groupe $\mathfrak{H}(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$ ainsi défini :

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{a}) = \{\varepsilon\} \bigcup_{p \geq 1} \mathfrak{a}^p \bigcup_{q \geq 1} \mathfrak{a}'^q$$

est le plus petit sous-groupe d'idéaux possible contenant $\mathfrak{a}$.

THÉORÈME 25. — *Soit $\mathcal{O}$ un anneau de multiplication uniforme du type de Dedekind et $\mathfrak{a}$ un idéal (entier ou fractionnaire) de $\mathcal{O}$. On peut définir deux groupes multiplicatifs d'idéaux de $\mathcal{O}$, $\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$ et $\mathfrak{H}(\mathfrak{a})$ qui contiennent $\mathfrak{a}$ et tels que tout groupe multiplicatif d'idéaux de $\mathcal{O}$ qui contienne $\mathfrak{a}$ contienne $\mathfrak{H}(\mathfrak{a})$ et soit contenu dans $\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$. Un idéal $\mathfrak{b}$ de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$ si et si seulement il divise et est divisé par $\mathfrak{a}$.*

V. — Théorie générale des striages.

Nous allons dans ce paragraphe donner une théorie des striages qui sera valable pour certains ensembles ordonnés remarquables. Nous avons déjà appliqué cette théorie dans l'étude des groupes abéliens réticulés ([20]).

1. Dans la suite, nous aurons à considérer un ensemble ordonné (partiellement) E ayant un élément plus petit que tous les autres que nous désignerons par Ω ([21]). Si a et b sont deux éléments de E, nous dirons que a et b sont *étrangers* et nous écrirons $a \perp b$, si pour tout élément x de E les relations $x \leqq a$ et $x \leqq b$ entraînent $x = \Omega$. Lorsque nous aurons à considérer plusieurs ensembles tels que E, nous désignerons toujours par Ω les éléments de ces ensembles plus petits que tous les autres sans qu'aucune confusion ne soit possible.

E et F étant deux tels ensembles, une application φ de E dans F sera dite *fidèle* si

$$x \perp y \rightleftharpoons \varphi(x) \perp \varphi(y). \tag{18}$$

On voit facilement que si l'application φ est fidèle, on a

$$\varphi^{-1}(\Omega) = \{\Omega\}.$$

THÉORÈME 26. — *Soient* E *et* F *deux ensembles (partiellement) ordonnés possédant chacun un élément plus petit que tous les autres. Une application* φ *de* E *dans* F *vérifiant*

([19]) P. JAFFARD, *Théorie des filets dans les groupes réticulés* [voir ([3])].

([20]) P. JAFFARD (*op. cit.*).

([21]) Nous réservons dans un tel ensemble le nom *d'élément minimal* à un élément a tel que $a \neq \Omega$ et tel que $x < a$ entraîne $x = \Omega$.

1° $x \perp y \to \varphi(x) \perp \varphi(y)$;
2° $\varphi^{-1}(\Omega) = \Omega$;
3° $x \geqq y \to \varphi(x) \geqq \varphi(y)$ (φ *est une application croissante*) *est fidèle.*

Il suffit de montrer que $\varphi(x) \perp \varphi(y) \to x \perp y$. Supposons donc $\varphi(x) \perp \varphi(y)$. Si l'on n'avait pas $x \perp y$, par définition il existerait $z \in E$, avec $x, y \geqq z > \Omega$. En vertu de 3°, $\varphi(x), \varphi(y) \geqq \varphi(z) \geqq \Omega$. En vertu de 2°, $\varphi(z) > \Omega$ et ceci contredirait $\varphi(x) \perp \varphi(y)$. On a donc bien $x \perp y$.

Pour un ensemble tel que E, nous définissons l'axiome :

(St_1) Si $a, b \in E$, $a \not\leqq b \to \exists c \in E$ tel que $b \perp c$ et $a \geqq c > \Omega$.

Théorème 27. — *Soient* E *et* F *deux ensembles partiellement ordonnés possédant chacun un élément plus petit que tous les autres et tels que* F *vérifie l'axiome* (St_1) *Une application fidèle de* E *sur* F *est alors une application croissante.*

Soit φ une telle application. Soient $a, b \in E$ tels que $a \leqq b$. Supposons $\varphi(a) \not\leqq \varphi(b)$. Puisque F vérifie ($St_1$) et que φ est une application *sur*, $\exists c \in E$, avec $\varphi(a) \geqq \varphi(c) > \Omega$ et $\varphi(b) \perp \varphi(c)$, φ étant fidèle, on a $b \perp c$. Comme $a \leqq b$, on a donc $a \perp c$ et $\varphi(a) \perp \varphi(c)$, ce qui contredit $\varphi(a) \geqq \varphi(c) > \Omega$. On a donc bien $\varphi(a) \leqq \varphi(b)$.

Soit E un ensemble (partiellement) ordonné ayant un élément plus petit que tous les autres Ω. La relation $\succ$ définie sur E par

$$a \succ b \rightleftharpoons (\text{pour tout } x \in E,\ a \perp x \to b \perp x) \tag{19}$$

est une relation de préordre qui est plus fine que la relation d'ordre initiale. Cette relation de préordre permet de définir sur E des classes d'équivalence au moyen de la relation

$$a \equiv b \rightleftharpoons (a \succ b \text{ et } b \succ a). \tag{20}$$

Désignons par $\bar{a}$ la classe d'équivalence à laquelle appartient a et par $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble de ces classes d'équivalence. La relation de préordre $\succ$ permet, par passage au quotient, de définir une relation d'ordre sur $\mathfrak{S}(E)$

$$\bar{a} \geqq \bar{b} \rightleftharpoons a \succ b. \tag{21}$$

On voit que $\mathfrak{S}(E)$ admet le plus petit élément $\bar{\Omega}$ (on posera parfois $\bar{\Omega} = \Omega$ suivant nos conventions antérieures). La classe $\bar{\Omega}$ contient le seul élément Ω.

L'application canonique $x \to \bar{x}$ *de* E *sur* $\mathfrak{S}(E)$ *est une application fidèle.* — Supposons $\bar{a}$ non étranger à $\bar{b}$. $\exists \bar{c} > \Omega$, avec $\bar{a}, \bar{b} \geqq \bar{c} > \Omega$. On a alors, par définition, $a \succ c$. Comme $c \neq \Omega$, c n'est pas étranger à lui-même, c n'est donc pas étranger à a et $\exists d \in E$, avec $a, c \geqq d > \Omega$. $\bar{b} \geqq \bar{c} > \Omega$ entraîne $\bar{b} \geqq \bar{d} > \Omega$. Un raisonnement identique à celui qui vient d'être fait montre l'existence de $d' \in E$, avec $b, d \geqq d' > \Omega$. On a donc $a, b \geqq d' > \Omega$. Par suite, a n'est pas étranger à b.

Réciproquement, si a n'est pas étranger à b, $\exists c$ avec $a, b \geqq c > \Omega$. On en déduit donc $\bar{a}, \bar{b} \geqq \bar{c} > \Omega$, ce qui implique que $\bar{a}$ n'est pas étranger à $\bar{b}$.

$\mathfrak{S}(E)$ *vérifie* (St_1). — Soit $\bar{a} \not\leqq \bar{b}$. Par définition, $\exists x \in E$, avec $b \perp x$, x non étranger à a. Donc $\exists c \in E$, avec $a, x \geqq c > \Omega$. Par suite, $\bar{a} \geqq \bar{c} > \Omega$; $b \perp x$ entraîne $b \perp c$ et l'application canonique de E sur $\mathfrak{S}(E)$ étant fidèle, entraîne que $\bar{b} \perp \bar{c}$. (St_1) se trouve bien vérifié.

On va montrer maintenant que cette application canonique π de E sur $\mathfrak{S}(E)$ joue le rôle d'une application universelle :

Théorème 28. — *L'application canonique π de* E *sur* $\mathfrak{S}(E)$ *factorise toute application fidèle de* E *sur un ensemble vérifiant* (St_1).

Réciproquement, s'il existe un ensemble ordonné S *vérifiant* (St_1) *et une application τ de* E *sur* S *qui factorise toute application fidèle de* E *sur un ensemble vérifiant* (St_1), *il existe un isomorphisme (de structure d'ordre) σ de* S *sur* (E) *tel que* $\pi = \tau\sigma$.

Soit φ une application fidèle de E dans un ensemble ordonné F vérifiant (St_1). Montrons d'abord que si $\bar{a} = \bar{b}$, on a $\varphi(a) = \varphi(b)$,

Si l'on avait $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, on aurait, par exemple, $\varphi(a) \not\leqq \varphi(b)$, donc, puisque F vérifie (St_1) et que l'application φ est sur, il existerait $c \in E$, avec $\varphi(a) \geqq \varphi(c) > \Omega$ et $\varphi(b) \perp \varphi(c)$. φ étant fidèle, $b \perp c$. Mais $\bar{a} = \bar{b}$ entraînerait alors $a \perp c$ et, φ étant fidèle, $\varphi(a) \perp \varphi(c)$, ce qui contredirait $\varphi(a) \geqq \varphi(c) > \Omega$. Donc $\bar{a} = \bar{b}$ entraîne $\varphi(a) = \varphi(b)$. On en déduit donc une application ψ de $\mathfrak{S}(E)$ sur F telle que $\varphi = \pi\psi$. Montrons que ψ est une application fidèle.

Soit $\bar{x} \perp \bar{y}$. Puisque π est fidèle, on en déduit $x \perp y$ et, puisque φ est fidèle, $\varphi(x) \perp \varphi(y)$. Par suite, $\bar{x} \perp \bar{y} \rightarrow \psi(\bar{x}) \perp \psi(\bar{y})$.

Réciproquement, soit $\psi(\bar{x}) \perp \psi(\bar{y})$. Comme, par définition, $\psi(\bar{x}) = \varphi(x)$, $\psi(\bar{y}) = \varphi(y)$, on a $\varphi(x) \perp \varphi(y)$. Mais, φ étant fidèle, $x \perp y$, donc $\bar{x} \perp \bar{y}$ et $\psi(\bar{x}) \perp \psi(\bar{y}) \rightarrow \bar{x} \perp \bar{y}$.

ψ est donc bien une application fidèle et la première partie du théorème se trouve démontrée.

Soit maintenant S vérifiant les conditions de l'énoncé. Comme π est une application fidèle de E sur $\mathfrak{S}(E)$, on en déduit une application fidèle σ de S sur $\mathfrak{S}(E)$ telle que $\pi = \tau\sigma$. En vertu de la première partie du théorème, il existe une application fidèle ψ de $\mathfrak{S}(E)$ sur S telle que $\tau = \pi\psi$. On en déduit que $\psi = \sigma^{-1}$; ψ est donc une application biunivoque et fidèle. On déduit alors du théorème 27 que c'est un isomorphisme.

Corollaire. — *L'application π est biunivoque si et si seulement* E *vérifie l'axiome* (St_1).

Ce corollaire peut d'ailleurs se vérifier immédiatement à partir des définitions.

2. Nous dirons qu'un ensemble ordonné E est *striable*, s'il possède un plus petit élément, s'il est semi-réticulé supérieurement et vérifie l'axiome :

(St_2) Si x est étranger à a et b, il est étranger à $\sup(a, b)$.

Si un ensemble striable vérifie, de plus, l'axiome (St_1), il sera dit un *striage*.

Remarque. — Les axiomes (St_1) et (St_2) ne s'impliquent pas : un ensemble totalement ordonné et contenant trois éléments vérifie (St_2) et ne vérfie pas (St_1).

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension au moins égale à 2. Soit E l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$ ainsi ordonné. Si X, Y $\in$ E, on posera

$$X \geqq Y \rightleftharpoons X \subset Y.$$

E admet pour plus petit élément l'espace $\mathcal{E}$ tout entier. Il est réticulé. Dans un tel ensemble, $A \perp B$ équivaut à $\inf(A, B) = A + B = \mathcal{E}$, on a de plus $\sup(A, B) = A \cap B$.

Il vérifie l'axiome (St_1). Soit $A \not\leqq B$. On a $B \not\subset A$. On en déduit que B contient une droite D non contenue dans A. Il existe alors un hyperplan X contenant A et non D, $D + X = \mathcal{E}$, donc $B \perp X$. Comme, de plus, $A \geqq X > 0$, l'axiome (St_1) se trouve bien vérifié.

Montrons que E ne vérifie pas (St_2). Soit une droite D. Puisque la dimension de $\mathcal{E}$ est au moins égale à 2, on peut trouver deux hyperplans distincts P et P′ ne contenant pas D; P et P′ sont étrangers à D, or $P \cap P'$ n'est pas un hyperplan, donc $D + (P \cap P') \neq \mathcal{E}$ et D est étranger à P et P′ sans l'être à $\sup(P, P')$.

Théorème 29. — *Si* E *est un ensemble striable,* $\mathcal{S}(E)$ *forme un striage et l'on a*

$$\sup(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{\sup(a, b)}.$$

Soit E un ensemble striable. Nous avons vu que $\mathcal{S}(E)$ avait un plus petit élément et remplissait l'axiome (St_1).

Montrons que $\mathcal{S}(E)$ est semi-réticulé supérieurement Soient $a, b \in E$. On a

$$\overline{\sup(a, b)} \geqq \bar{a}, \bar{b}.$$

Soit $\bar{c} \geqq \bar{a}, \bar{b}$. Si $x \perp c$, on a $x \perp a$, $x \perp b$. Mais, puisque E vérifie (St_2), ceci implique $x \perp \sup(a, b)$. Donc si $\bar{c} \geqq \bar{a}, \bar{b}$, $x \perp c$ implique $x \perp \sup(a, b)$ ou $\bar{c} \geqq \overline{\sup(a, b)}$. On a bien $\sup(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{\sup(a, b)}$.

D'autre part, si $\bar{x} \perp \bar{a}$, $\bar{x} \perp \bar{b}$, on a $x \perp a$, $x \perp b$, donc $x \perp \sup(a, b)$ ou $\bar{x} \perp \sup(\bar{a}, \bar{b})$. $\mathcal{S}(E)$ vérifie bien (St_2). $\mathcal{S}(E)$ est bien un striage.

Lorsque E est un ensemble striable, nous dirons qu'il est *strié* par $\mathcal{S}(E)$ et les éléments de $\mathcal{S}(E)$ seront appelés *stries* de E. Les striages ont un certain nombre de propriétés que nous avons déjà eu l'occasion d'étudier à propos des groupes ordonnés [22]. Nous allons énoncer ici ces propriétés et donner une idée de leurs démonstrations.

E étant un ensemble ordonné ayant un plus petit élément Ω, on dira qu'un élément a de E est *minimal* si $a \neq \Omega$ et si $x < a$ entraîne $x = \Omega$. Si $a \in E$, $\mathcal{M}(a)$ désignera l'ensemble des éléments minimaux de E qui sont inférieurs ou égaux à a.

([22]) P. Jaffard, *Contribution à l'étude des groupes ordonnés.*

Théorème 30. — *Dans un striage, les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

α. $x \neq \Omega \rightarrow \mathcal{M}(x) \neq \emptyset$;

β. $a \geq b \rightleftharpoons \mathcal{M}(a) \supset \mathcal{M}(b)$;

γ. $a = b \rightleftharpoons \mathcal{M}(a) = \mathcal{M}(b)$;

δ. $a \perp b \rightleftharpoons \mathcal{M}(a) \cap \mathcal{M}(b) = \emptyset$.

Les trois dernières relations sont toujours vraies de gauche à droite, il suffira donc dans la démonstration de les vérifier de droite à gauche.

α implique β : Si α est vérifié et si $a \not\geq b$, en vertu de (St_1) $\exists c$ tel que $c \perp a$ et $b \geq c > \Omega$; α implique $\mathcal{M}(c) \neq \emptyset$. Or $\mathcal{M}(b) \supset \mathcal{M}(c)$ et $c \perp a$ implique $\mathcal{M}(c) \cap \mathcal{M}(a) = \emptyset$. On ne peut donc avoir $\mathcal{M}(a) \supset \mathcal{M}(b)$.

β implique évidemment γ.

γ implique δ : Si γ est vérifié et si a n'est pas étranger à b, $\exists c$ avec $a, b \geq c > \Omega$. En vertu de γ,

$$\mathcal{M}(c) \neq \mathcal{M}(\Omega) = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}(a) \cap \mathcal{M}(b) \supset \mathcal{M}(c) \neq \emptyset.$$

On a donc bien δ.

δ implique α : Si $\mathcal{M}(x) = \emptyset$, $\mathcal{M}(x) \cap \mathcal{M}(x) = \emptyset$ et δ montre que $x \perp x$ ou $x = \Omega$.

Un striage vérifiant les conditions précédentes sera dit vérifier *la propriété* M.

E étant un ensemble semi-réticulé supérieurement et possédant un plus petit élément Ω, x et a deux éléments de E tels que $a \geq x \geq \Omega$, un élément y de E est dit *complément de x par rapport à a* si $x \perp y$ et $\sup(x, y) = a$.

Théorème 31. — *Dans un striage* S, *si $a \geq x' \geq x \geq \Omega$ et si y (resp. y') est complément de x (resp. x') par rapport à a, on a*

$$a \geq y \geq y' \geq \Omega.$$

Si l'on avait $y \not\geq y'$, en vertu de (St_1), il existerait $z \in \mathrm{S}$ tel que $z \perp y$ et $y' \geq z > \Omega$. Or $x' \perp y'$ entraînerait $x' \perp z$; $x \leq x'$ entraînerait $x \perp z$. Mais alors, en vertu de (St_2), z étranger à x et y serait étranger à $a = \sup(x, y)$, ce qui contredirait $a \geq z > \Omega$.

Corollaire 1. — *Dans un striage si y et y' sont des compléments de x par rapport à a, on a $y = y'$.*

Cette unicité du complété dans un striage permet de poser sans ambiguïté $y = \mathrm{C}_a x$. On a évidemment $x = \mathrm{C}_a y$.

Corollaire 2. — *Dans un striage $a \geq x' > x \geq \Omega$ entraîne $\mathrm{C}_a x > \mathrm{C}_a x'$.*

Nous dirons qu'un striage S est *relativement complémenté*, si pour tout couple d'éléments (a, x) de S tels que $a \geqq x \geqq \Omega$, $C_a x$ existe ([23]).

Nous dirons qu'un striage E vérifie la *propriété* MF, s'il vérifie la propriété M et si, de plus, pour tout $x \in E$, $\mathcal{M}(x)$ est fini.

Au moyen du théorème 31 et de ses corollaires, on peut alors montrer le

THÉORÈME 32. — *Dans un striage* S, *les quatre conditions suivantes sont équivalentes :*

1° S *vérifie la condition affaiblie de chaîne ascendante ;*

2° S *est relativement complémenté et vérifie la condition de chaîne descendante ;*

3° S *vérifie la condition* MF ;

4° S *est isomorphe à l'ensemble* (*ordonné par inclusion*) *des parties finies d'un certain ensemble.*

3. L'ensemble G_+ des éléments positifs ou nuls d'un groupe réticulé G est striable. Ce sont les stries correspondantes que nous avons appelées filets.

L'ensemble des idéaux d'un anneau commutatif avec élément unité ordonné par la relation $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b} \rightleftharpoons \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ est striable. Les stries correspondantes sont celles définies au paragraphe 1. (Un tel striage vérifie la propriété M.) Nous conservons cependant dans ce cas la terminologie de l'inclusion utilisée au début de cette étude : nous dirons que la strie $\bar{\mathfrak{a}}$ est plus grande que la strie $\bar{\mathfrak{b}}$ et nous écrirons $\bar{\mathfrak{a}} \geqq \bar{\mathfrak{b}}$ si tout idéal étranger (premier) à $\mathfrak{b}$ est étranger à $\mathfrak{a}$.

Certains des théorèmes du paragraphe 1 peuvent s'étendre à des anneaux plus généraux que les anneaux commutatifs avec élément unité. Nous n'aborderons pas ici cette étude et nous nous bornerons à appliquer les considérations précédentes au théorème 4 :

THÉORÈME 33. — *Soit* $\mathcal{O}$ *un anneau commutatif avec élément unité. Si le striage des idéaux de* $\mathcal{O}$ *est relativement complémenté et si* $\tilde{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{b}$, *on a* $(\overline{\tilde{\mathfrak{a}} : \mathfrak{b}}) = C_{\bar{\mathfrak{a}}} \bar{\mathfrak{b}}$.

Soit $\bar{\mathfrak{c}} = C_{\bar{\mathfrak{a}}} \bar{\mathfrak{b}}$. On peut toujours supposer $\mathfrak{c} = \tilde{\mathfrak{c}}$. On a $\overline{\mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}} = \mathfrak{a}$ par définition. D'après le lemme 3, on a donc $\mathfrak{c}\mathfrak{b} \subset \tilde{\mathfrak{a}}$. Par suite, $\mathfrak{c} \subset \tilde{\mathfrak{a}} : \mathfrak{b}$. Mais, d'autre part, si l'on pose $\mathfrak{c}' = \tilde{\mathfrak{a}} : \mathfrak{b}$, $\bar{\mathfrak{c}}' \geqq \bar{\mathfrak{c}}$ montre que $\bar{\mathfrak{c}}' \perp \bar{\mathfrak{b}}$. Comme $\mathfrak{c}'\mathfrak{b} \subset \tilde{\mathfrak{a}}$, le lemme 3 montre que $\overline{\mathfrak{c}' \cap \mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{a}}$, donc $\mathfrak{c}'$ est complément de $\mathfrak{b}$ par rapport à $\mathfrak{a}$ et, d'après le corollaire 1 du théorème 31, on a bien $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$.

([23]) On peut démontrer que dans un striage S cette définition coïncide bien avec la définition habituelle (G. BIRKHOFF, *Lattice Theorie*), c'est-à-dire que si S est relativement complémenté, pour tout système d'éléments a, b, x de S tel que $a \geqq x \geqq b$, $\exists y \in S$ tel que

$$a = \sup(x, y) \qquad \text{et} \qquad b = \inf(x, y).$$

Corollaire. — *Si le striage des idéaux de $\mathfrak{O}$ est relativement complémenté, on a pour tout couple d'idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$:*

$$\left(\overline{\tilde{\mathfrak{a}}:\mathfrak{b}}\right) = \mathrm{C}_{\bar{\mathfrak{a}}}\overline{\mathfrak{b}+\mathfrak{a}}.$$

Ceci découle du théorème **33** et de l'égalité

$$\tilde{\mathfrak{a}}:\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{a}}:(\mathfrak{b}+\mathfrak{a}).$$

Si l'ensemble $\mathfrak{S}$ vérifie la condition affaiblie de chaîne descendante (c'est-à-dire toute suite décroissante bornée n'a qu'un nombre fini d'éléments distincts), le théorème **32** montre alors que $\mathfrak{S}$ est relativement complémenté (il faut, en effet, changer le sens des inégalités) et l'on pourra appliquer les résultats du théorème **33**. Il en sera ainsi, en particulier, si $\mathfrak{O}$ est un anneau d'Artin, c'est-à-dire si ses idéaux vérifient la condition de chaîne descendante. Dans ce cas, $\{o\}$ pourra être considéré comme un idéal. Si $\mathfrak{O}$ vérifie seulement la condition affaiblie de chaîne descendante (c'est-à-dire pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{O}$ différent de $\{o\}$, $\mathfrak{O}/\mathfrak{a}$ est un anneau d'Artin), $\mathfrak{S}$ vérifiera encore la condition affaiblie de chaîne descendante, à condition de ne pas considérer $\{o\}$ comme un idéal; un anneau de Dedekind est un exemple de ce dernier cas. On voit bien sur cet exemple que la formule du théorème **33** n'est plus valable si l'on considère $\{o\}$ comme un idéal; en effet, si l'on pose $\mathfrak{a} = \{o\}$, on aura $\tilde{\mathfrak{a}} = \{o\}$ (à condition qu'on ait pris la précaution d'imposer à l'anneau la condition d'avoir une infinité d'idéaux premiers) et, $\mathfrak{O}$ étant un anneau d'intégrité, si $\mathfrak{b} \neq \{o\}$, $\tilde{\mathfrak{a}}:\mathfrak{b} = \{o\}$. Or $\{o\}$ n'est pas étranger à $\mathfrak{b}$ si $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{O}$. Donc, si $\mathfrak{b} \neq \{o\}$, $\mathfrak{O}$, on ne peut avoir $\left(\overline{\tilde{\mathfrak{a}}:\mathfrak{b}}\right) = \mathrm{C}_{\bar{\mathfrak{a}}}\bar{\mathfrak{b}}$, avec $\mathfrak{a} = \{o\}$.