BULLETIN DE LA S. M. F.

URO KUREPA

Sur la relation d'inclusion et l'axiome de choix de Zermelo

Bulletin de la S. M. F., tome 80 (1952), p. 225-232
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1952__80__225_0>

SUR LA RELATION D'INCLUSION ET L'AXIOME DE CHOIX DE ZERMELO;

PAR DJURO KUREPA.

Zagreb.

On connaît plusieurs propositions dont chacune est équivalente à l'axiome

(0.1) $$Z$$

de choix de Zermelo; telles sont, par exemple, le lemme de Zorn (*voir* Bourbaki [1], p. 37; Birkhoff [2], p. 42; Witt [6]), l'existence d'une chaîne maximale dans chaque ensemble ordonné (*voir* Birkhoff [2], p. 42), l'existence d'une chaîne maximale dans chaque famille F d'ensembles ordonnée par rapport à $\subseteq$, l'existence d'une famille disjonctive maximale dans chaque $(F;\subseteq)$ (*voir* Vaught [5]), etc. Dans ce qui suit nous considérerons en particulier la relation d'inclusion $\subseteq$ et quelques relations se rattachant à $\subseteq$; nous prouverons quelques propositions nouvelles équivalentes à Z en donnant une solution partielle d'un problème (*cf.* le problème général 4.2 ci-après) dont la considération est, nous semble-t-il, intéressante au point de vue logique.

Notations. — Dans ce qui suit

(0.2) $$v, \quad F$$

désigneront respectivement l'ensemble vide (le vacuum) et une famille infinie quelconque d'ensembles non vides quelconques. Si au début d'une formule on a affaire au symbole (F), il faut le lire « *quelle que soit* F » ou « *pour chaque* F », F ayant, bien entendu, la signification de tout à l'heure.

1. Les relations K, D, I de comparabilité, de disjonction et d'empiètement, entre ensembles. — Pour deux ensembles non vides A, B, l'un et seulement l'un des trois cas que voici se présente :

K. A *et* B *sont comparables :* $A\subseteq B$ ou $B\supseteq A$, ce que l'on peut désigner par AKB;

D. A *et* B *sont disjoints :* $A\cap B = v$, ce que nous désignerons par ADB;

I. A *et* B *sont empiétants :* $A\setminus B\neq v\neq B\setminus A$, ce qu'on peut désigner par AIB.

2. **Les propositions** KF, DF, IF. — Si ρ désigne l'une des relations K, D, I, c'est-à-dire si $\rho \in \{K, D, I\}$, l'on peut considérer la proposition ρF que voici, F ayant la signification (0.2) :

Proposition ρF ou $\rho(F)$. — F *contient une sous-famille maximale, soit* F_ρ, *dont les éléments distincts sont en relation* ρ

$$A, B \in F_\rho, \qquad A \neq B \Rightarrow A \rho B.$$

Que F_ρ soit maximale, cela signifie que dans $F \setminus F_\rho$ il n'y ait aucun élément en relation ρ avec chaque élément de F_ρ.

Remarque. — Si F ne contient aucun couple d'éléments distincts en relation ρ, cela signifie que quel que soit $A \in F$ la famille $\{A\}$ joue le rôle de F_ρ. Ainsi, on a les propositions KF, DF, IF.

Manifestement,

$$Z \Rightarrow (F)(\rho F) \quad (\rho = K, D, J), \tag{2.1}$$

(F) signifiant « quelle que soit F », F ayant la signification de (0.2). Autrement dit, quelles que soient la relation $\rho \in \{D, I, K\}$ et la famille F, l'axiome Z de Zermelo entraîne l'existence d'une sous-famille maximale $F_\rho \subseteq F$ dont les éléments distincts sont en relation ρ. Par ailleurs, nous venons de mentionner que

$$(F)(KF) \rightleftharpoons Z \quad (\textit{cf.}\ \text{Birkhoff [1], p. 42}), \tag{2.2}$$

$$(F)(DF) \rightleftharpoons Z \quad (\textit{cf.}\ \text{Vaught [5]}). \tag{2.3}$$

Nous prouverons qu'on a aussi le

Théorème 2.1 :

$$(F)(IF) \rightleftharpoons Z. \tag{2.4}$$

En conséquence, les propositions

$$Z, \quad (F)(KF), \quad (F)(DF), \quad (F)(IF) \tag{2.5$_1$}$$

sont deux à deux équivalentes.

Pour prouver (2.4), il suffit d'après (2.3), de prouver l'équivalence

$$(F)(DF) \rightleftharpoons (F)(IF). \tag{2.5$_2$}$$

Tout d'abord, $(2.5)_1 \Rightarrow (2.5)_2$, c'est-à-dire le premier membre de (2.5) en implique le second. En effet, faisons correspondre (*cf.* Marczewski [3], § 3) à chaque $X \in F$ la famille

$$N(X)$$

ayant comme ses éléments : l'ensemble X et les

$$\{X, X'\}\ (X' \in F,\ X' \text{ non } IX) \ \text{(1)}. \tag{2.6}$$

(1) Bien entendu, $\{X, X'\}$ se compose de X et X'' comme ses éléments uniques; en conséquence, X' parcourant F de manière que X' non IX, on aura $\{X, X'\} \in N(X) \setminus \{X\}$ et *vice versa*.

NF désignant la famille des

$$(2.7) \qquad N(X), \quad (X \in F),$$

la transformation (2.7) est une correspondance biunivoque entre F et NF. C'est que $X \in N(X)$ et X non $\in N(Y)$ si $X \neq Y \in F$. Pour la même raison, les éléments de NF sont ou bien disjoints ou bien empiétants. En particulier, si pour deux éléments X, $Y \in F$, on a $N(X) \cap N(Y) = v$, on n'a pas d'après (2.6) X non IY; par conséquent, on a XIY. Autrement dit, Φ étant une famille disjonctive $\subseteq$ NF, les éléments $N^{-1}(A)$ $(A \in \Phi)$ sont deux à deux en relation I; en particulier, à une sous-famille *disjonctive maximale* de NF correspond ainsi une sous-famille *empiétante maximale* de la famille considérée F.

D'autre part, prouvons la conclusion inverse $(2.5)_2 \Rightarrow (2.5)_1$. Pour cela, considérons la transformation

$$(2.8) \qquad E(X) \quad (X \in F).$$

E(X) désignant pour chaque $X \in F$ la famille composée de X et des familles

$$\{X, X'\}, \quad (X' \in F, \; X'DX).$$

Comme tout à l'heure, on prouve que (2.8) est une application biunivoque entre F et l'ensemble EF des E(X), X parcourant F. En particulier, si X, $X' \in F$, alors

$$(2.9) \qquad XDX' \rightleftharpoons E(X)\,IE(X').$$

Par conséquent, la famille EF contenant une sous-famille empiétante maximale, soit F_0, la famille $E^{-1}F_0$ des $E^{-1}Y$ $(Y \in F_0)$ est une sous-famille disjonctive maximale de F. C. Q. F. D.

3. Relations $\bar{D}$, $\bar{I}$, $\bar{K}$ de non-comparabilité, de non-disjonction, de non-empiètement. Propositions $\bar{D}$F, $\bar{I}$F, $\bar{K}$F. — Les relations $\bar{D}$, $\bar{I}$, $\bar{K}$ respectivement les négations de K, D, I sont donc définies par les égalités suivantes :

$$(3.1) \qquad A\bar{K}B \rightleftharpoons (\text{ni } A \subseteq B, \text{ ni } B \subseteq A),$$

$$(3.2) \qquad A\bar{D}B \rightleftharpoons A \cap B \neq v,$$

$$(3.3) \qquad A\bar{I}B \rightleftharpoons \text{non } (AIB) \rightleftharpoons ADB \quad \text{soit AKB}.$$

On peut alors considérer les propositions

$$(3.4) \qquad \bar{D}F, \quad \bar{I}F, \quad \bar{K}F,$$

aussi bien que les propositions

$$(3.5) \qquad (F)(\bar{D}F), \quad (F)(\bar{I}F), \quad (F)(\bar{K}F),$$

lesquelles évidemment résultent de l'axiome Z.

THÉORÈME 3.1. — *Alors que chacune des propositions* $(F)(\bar{D}F)$; $(F)(\bar{J}F)$ *est*

(¹) C'est-à-dire Z est équivalent à ce que subsistent à la fois (V) et $\bar{K}$F pour chaque F.

équivalente à l'axiome Z *de Zermelo, nous ne savons pas s'il en est encore ainsi de* $(F)(\overline{K}F)$. *Toutefois, on a*

$$(3.6) \qquad (V) \cap (F)(\overline{K}F) \rightleftharpoons Z \quad (^2),$$

(V) *ou* V *désignant la proposition suivante :*

Proposition (V). — *Chaque ensemble peut être totalement ordonné* [3].

Corollaire 3.1. — *Chacune des propositions* $(F)(\overline{D}F)$, $(F)(\overline{I}F)$ *entraîne (en passant par* Z, *par exemple) la proposition* $(F)(\overline{K}F)$.

Notation. — Φ étant une famille non vide de propositions, l'intersection (le produit) des propositions $\varphi \in \Phi$, c'est la proposition

$$(3.7) \qquad \bigcap_{\varphi \in \Phi} \varphi$$

subsistant si et seulement si chaque proposition $\varphi \in \Phi$ subsiste. D'une manière duale, on définit l'union (la somme)

$$(3.8) \qquad \bigcup_{\varphi \in \Phi} \varphi$$

subsistant si et seulement si au moins une proposition $\varphi \in \Phi$ subsiste. En particulier, φ, ψ étant deux propositions, les propositions

$$(3.9) \qquad \varphi \cap \psi, \qquad \varphi \cup \psi$$

s'entendent d'elles-mêmes. Par exemple,

$$(3.10) \qquad \begin{cases} \overline{K} = D \cup I, & \overline{D} = I \cup K, & \overline{I} = K \cup D \\ K = \overline{D} \cap \overline{I}, & D = \overline{I} \cap \overline{K}, & I = \overline{K} \cap \overline{D}. \end{cases}$$

3.1. Tout d'abord,

$$(3.1.1) \qquad Z \rightleftharpoons (F)(\overline{D}F).$$

Pour cela, il suffit, d'après l'implication (2.3) de Vaught, de prouver que

$$(3.1.2) \qquad (F)(\overline{D}F) \rightleftharpoons (F)(DF).$$

Or, l'équivalence (3.1.2) résulte d'un théorème de Marczewski ([3], § 5), d'après lequel les relations D, $\overline{D}$ sont isomorphes. En effet, en considérant la transformation E définie par (2.8), on a affaire à une transformation biunivoque entre F et EF et ne jouissant de la propriété que pour $A, B \in F$, la relation ADB subsiste si et seulement si $E(A)\overline{D}E(B)$. Ceci étant, prouvons $(3.1.2)_1 \Rightarrow (3.1.2)_2$; la famille EF contenant, d'après $(3.1.2)_1$, une famille maximale antidisjonctive, soit Φ, $E^{-1}\Phi$ sera une famille maximale disjonctive de F, ce qui prouve que (F)(DF) subsiste. D'une façon analogue, en permutant les mots « antidisjonctive » et « disjonctive », on arrive à la conclusion $(3.1.2)_2 \Rightarrow (3.1.2)_1$.

---

[3] D'après Mostowski [4], on n'a pas $(V) \Rightarrow Z$.

8.2. Prouvons l'implication

$$(\mathrm{F})(\bar{\mathrm{D}}\mathrm{F}) \Rightarrow (\mathrm{F})(\bar{\mathrm{I}}\mathrm{F}). \tag{3.2.1}$$

Pour cela, il suffit de considérer la transformation (**2**.7); à une famille maximale $\Phi \subseteq \mathrm{NF}$ d'éléments deux à deux non disjoints correspond ainsi la famille $\mathrm{N}^{-1}\Phi$ maximale d'éléments non empiétants extraits de F.

Réciproquement,

$$(\mathrm{F})(\bar{\mathrm{I}}\mathrm{F}) \Rightarrow (\mathrm{F})(\bar{\mathrm{D}}\mathrm{F}). \tag{3.2.3}$$

La démonstration en est analogue à celle de (**3**.2.1)

Les relations (**2**.**3**) de Vaught, (**3**.1.2), (**3**.2.1) et (**3**.2.2) impliquent ceci :

$$\mathrm{Z} \rightleftharpoons (\mathrm{F})(\mathrm{DF}) \rightleftharpoons (\mathrm{F})(\bar{\mathrm{D}}\mathrm{F}) \Rightarrow (\mathrm{F})(\bar{\mathrm{I}}\mathrm{F}). \tag{3.2.3}$$

3.**3**. Pour achever la démonstration du théorème **3**.**1**, il nous reste à prouver que

$$(\mathrm{V}) \cap (\mathrm{F})(\bar{\mathrm{K}}\mathrm{F}) \Rightarrow \mathrm{Z}. \tag{3.3.1}$$

LEMME 3.3.1. — *La proposition* $(\mathrm{F})(\bar{\mathrm{K}}\mathrm{F})$ *entraîne la proposition* $(\bar{\mathrm{K}})$ *que voici :*

PROPOSITION $(\bar{\mathrm{K}})$. — *Chaque ensemble ordonné* $(\mathrm{M}; \leqq)$ *contient une antichaîne maximale (antichaîne veut dire ordonné sans points dinstincts comparables).*

En effet, F désignant la famille des

$$(-\infty, x]_{\mathrm{M}} \quad (x \in \mathrm{M}), \tag{3.3.2}$$

$(-\infty, x]_{\mathrm{M}}$ étant l'ensemble des $x' \in \mathrm{M}$ vérifiant $x' \leqq x$, on voit que les ensembles ordonnés $(\mathrm{M}; \leqq)$, $(\mathrm{F}; \subseteq)$ sont isomorphes, la transformation (3.3.2) en étant une similitude ; en particulier, chaque famille maximale de F avec des éléments, non comparables — dont l'existence est assurée par $\bar{\mathrm{K}}\mathrm{F}$ — provient d'un sous-ensemble de $(\mathrm{M}; \leqq)$, lequel est une antichaîne maximale dans $(\mathrm{M}; \leqq)$ comme étant isomorphe d'une antichaîne maximale de $(\mathrm{F}; \subseteq)$; le lemme 3.3.1 est ainsi prouvé.

Or,

$$(\mathrm{V}) \cap (\bar{\mathrm{K}}) \Rightarrow \mathrm{Z}. \tag{3.3.3}$$

En effet, soit F une famille non vide quelconque d'ensembles non vides; il s'agit de prouver l'existence d'un sous-ensemble

$$\mathrm{E} \subseteq \bigcup_{\mathrm{X}} \mathrm{X} \quad (\mathrm{X} \in \mathrm{F})$$

tel que E contienne un et seulement un point de chaque $\mathrm{X} \in \mathrm{F}$. Tout d'abord, à la suite de l'hypothèse (V), chaque $\mathrm{X} \in \mathrm{F}$ peut être considéré comme une chaîne, mettons $(\mathrm{X}; \leqq_{\mathrm{X}})$; soit alors $f\mathrm{X}$ l'ensemble des paires ordonnées

$$(\mathrm{X}, a) \quad (a \in \mathrm{X}); \tag{3,3.4}$$

l'ensemble fX sera ordonné par le principe de première différence : si $a, b \in X$, alors

$$(X;\ a) \leqq (X;\ b) \quad \text{dans } fX \rightleftharpoons a(\leqq_X b \quad \text{dans } X.$$

Ceci étant, soit

$$F_0 = \bigcup_X fX(X \in F);$$

ordonnons F_0 par $\leqq$ de manière que, pour $(X;\ a)$, $(X';\ a') \in F_0$, l'on ait

$$(X;\ a) \leqq (X;\ a') \quad \text{dans } F \rightleftharpoons a,\ a' \in X = X', \qquad a \leqq a' \quad \text{dans } X.$$

Évidemment, l'ensemble $(F_0;\ \leqq)$ est ordonné et l'on voit que chaque fX en est une chaîne maximale. Or, d'après la propostion $(\overline{K})$ l'ensemble ordonné $(F_0; \leqq)$ contient une antichaîne maximale, soit $\overline{L}$; d'autre part, pour aucun $X \in F$, l'ensemble

(3.3.5) $$\overline{L} \cap f(X)$$

n'est vide; l'ensemble (3.3.5) étant à la fois une chaîne et une antichaîne en tant qu'appartenant à fX et à $\overline{L}$ respectivement, l'ensemble (3.3.5) est monoponctuel; à cause de la forme (3.3.4) des éléments de fX, on en conclut que l'unique point de (3.3.5) est de la forme

(3.3.6) $$(X;\ \varphi(X))$$

$\varphi(X)$ désignant le point unique de X tel que $(3.3.6) \in (3.3.5)$. En désignant, enfin, par E l'ensemble des $\varphi(X)\,(X \in F)$, on voit bien que E est l'ensemble demandé, étant donné qu'il contient un et un seul point de chaque $X \in F$, à savoir le point $\varphi(X)$.

3.4. *Remarque sur les relations* D, I *et* K. — A propos du comportement précédent des relations D, I, K, il y a intérêt à signaler ceci. D'une part, les relations D, I sont des relations binaires symétriques les plus générales dans le sens que, pour $\alpha \in \{D, I\}$, quelle que soit la relation binaire symétrique ρ définie dans un ensemble E, il y a une transformation φ_α faisant correspondre à tout $x \in E$ un ensemble non vide $\varphi_\alpha(x)$ telle que l'on ait l'équivalence

$$x,\ y \in E,\ x \neq y,\ x\rho y \quad \rightleftharpoons \quad \varphi_\alpha(x)\alpha\varphi_\alpha(y)$$

(*voir* Marczewski [3], § 2 et 5).

D'autre part, la proposition analogue pour la relation K ne subsiste pas. En effet, soit $(S;\ \leqq)$ un ensemble ordonné; si pour $x,\ y \in S$, $x \| y$ signifie qu'on n'ait ni $x \leqq y$, ni $x \geqq y$, on a la relation symétrique $\|$ dans E; si alors, il existait une transformation φ faisant correspondre à tout $x \in S$ un ensemble non vide $\varphi(x)$ tel que l'on ait

$$x,\ y \in S,\ x \| y \quad \rightleftharpoons \quad \varphi(x) \neq \varphi(y), \quad \varphi(x) K \varphi(y),$$

on en déduirait une extension totale d'ordre $(S;\ \leqq)$ par la relation $\leqq_1$ signifiant

$$x \leqq_1 y \rightleftharpoons (x \leqq y) \cup (\varphi(x) \subset \varphi(y)).$$

De même, si l'on définit $\leqq_2$ de manière que

$$x \leqq_2 y \rightleftharpoons (x \leqq y) \cup (\varphi(x) \supset \varphi(y)),$$

l'ensemble $(S;\leq_2)$ est totalement ordonné; la superposition des ordonnances $(S;\leq_1)$, $(S;\leq_2)$ coïnciderait avec l'ordre donné $(S;\leq)$, ce qui ne serait pas possible si la dimension de celui-ci était > 2, comme, par exemple, si $(S;\leq)$ coïncide avec l'ensemble des points et côtés d'un triangle (polygone) ordonné par $\subseteq$ (c'est-à-dire ordonné par incidence).

4. L'ensemble T. Problèmes. — Soit

$$T = \{D, \overline{D}, I, \overline{I}, K, \overline{K}\}; \tag{4.1}$$

pour chaque ensemble non vide $S \subseteq T$, on a [*cf.* (3.7), (3.8)] des relations bien définies

$$\bigcup_{\varphi \in S} \varphi, \quad \bigcap_{\varphi \in S} \varphi;$$

en particulier, pour chaque famille F non vide d'ensembles non vides, on a des propositions bien définies

$$\bigcup_{\varphi \in S} \varphi F, \quad \bigcap_{\varphi \in S} \varphi F.$$

PROBLÈME 4.1. — A-t-on

$$\overline{D}F \rightleftharpoons IF \cup KF \quad ([4])? \tag{4.1}$$

D'une manière analogue, a-t-on

$$\overline{I}F \rightleftharpoons DF \cup KF, \tag{4.2}$$

$$\overline{K}F \rightleftharpoons DF \cup IF\ ? \tag{4.3}$$

Nous venons de voir (th. 3.1) que, abstraction faite du cas où S se compose de $\overline{K}$ comme son élément unique, on a

$$(F)\left(\bigcap_{\varphi \in S} \varphi F\right) \rightleftharpoons Z;$$

dans tous les cas si $v \neq S \subseteq T$, alors ([5])

$$(F)\left(\bigcap_{\varphi \in S} \varphi F\right) \rightleftharpoons Z.$$

Dans cet état de choses, il y a lieu de poser le problème suivant :

PROBLÈME 4.2. — Si $v \subset S \subseteq T$, a-t-on

$$(F)\left(\bigcup_{\varphi \in S} \varphi F\right) \rightleftharpoons Z\ ? \tag{4.4}$$

([4]) Bien entendu, $\overline{I} = D \cup K$ [*cf.* (3.10)]. Explicitons (4.1) : si une famille F contient une famille maximale d'ensembles non disjoints, contient-elle nécessairement une famille maximale d'ensembles deux à deux : *a.* empiétants; *b.* comparables; et réciproquement.

([5]) Quant au (V), *voir* th. 3.1.

ou, du moins ([5]),

$$(4.5) \qquad (V) \cap (F) \Big(\bigcup_{\varphi \in S} \varphi F \Big) \rightleftharpoons Z\,?$$

En particulier, a-t-on

$$(4.6) \qquad (F)(DF \cup IF \cup KF) \rightleftharpoons Z\,?$$

ou, du moins,

$$(4.7) \qquad (V) \cap (F)(DF \cup IF \cup KF) \rightleftharpoons Z\,?$$

De même, est-ce que pour chaque $X \in \{D, I, K\}$, on a

$$(F)(XF \cup \bar{X}F) \rightleftharpoons Z\,?$$

En particulier, a-t-on

$$(4.6)_1 \Rightarrow Z\,?$$

ou, d'une manière explicite, est-ce que l'axiome Z est une conséquence de l'hypothèse $(4.6)_1$ disant que chaque famille F d'ensembles non vides contient une famille maximale F_0 telle que l'on a bien

$$A,\ B \in F_0,\ A \neq B \Rightarrow ADB$$

ou bien

$$A,\ B \in F_0,\ A \neq B \Rightarrow AIB$$

ou bien

$$A,\ B \in F_0,\ A \neq B \Rightarrow AKB\,?$$

Est-ce que cela subsiste au moins en supposant encore (V)? C'est-à-dire a-t-on $(4.7)_1 \Rightarrow Z$?

Il y a là un complexe de problèmes bien intéressants au point de vue logique?

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BIRKHOFF (G.), *Lattice Theory*, New-York, 1948, 2e édition, p. 14-284.

[2] BOURBAKI (N.), *Éléments de Mathématiques*, 1re partie, livre I (Théorie des ensemçles), Paris, 1939, p. 8-51.

[3] MARCZEWSKI (SZPILRAJN) (E.), *Sur deux propriétés des classes d'ensembles* (*Fundamenta Math.*, Warszawa, t. 33, 1945, p. 303-307).

[4] MOSTOWSKI (A.), *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip* (*Fundamenta Math.*, Warszawa, t. 32, 1939, p. 201-252).

[5] VAUGHT (R. L.), *On the equivalence of the Axiome of choice and a maximal principle* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, New-York, t. 58, 1952, p. 66).

[6] WITT (E), *Beweisstudien zum Satz von M. Zorn* (*Math. Nachrichten*, Berlin, t. 4, 1951, p. 434-438.