Bulletin de la S. M. F.

Paul C. Rosenbloom

Quelques classes de problèmes extrémaux. II

Bulletin de la S. M. F., tome 80 (1952), p. 183-215

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1952__80__183_0>

QUELQUES CLASSES DE PROBLÈMES EXTRÉMAUX (*suite*);

PAR M. PAUL C. ROSENBLOOM,

Université de Minnesota, Minneapolis (U. S. A.).

CHAPITRE VI.

L'INTÉGRATION PAR RAPPORT AUX DISTRIBUTIONS DES CHARGES.

Essayons maintenant de généraliser les résultats des chapitres III et IV dans un autre sens. Dans ce but, nous avons besoin de la théorie de l'intégration par rapport à une fonction d'ensembles, additive au sens restreint. A. D. Alexandroff [27] l'a développée dans une série de travaux importants, mais elle est jusqu'à présent peu connue (1). Étant donné que ces travaux nous sont inaccessibles, nous donnons dans ce chapitre un exposé concis de ce qu'il nous faut ici, mais nous ne pouvons pas donner les renvois précis au travail d'Alexandroff. Quelques-uns de ces résultats avaient déjà été démontrés par Fichtenholz et Kantorovitch [22].

Soit S un espace, topologique ou non et soit $\mathfrak{X}$ un corps borélien des sous-ensembles de l'espace S, c'est-à-dire que $\mathfrak{X}$ est une algèbre booléenne qui est fermée par rapport à l'opération de la réunion dénombrable. Par un intervalle, nous entendons un ensemble de nombres réels de la forme $a \leqq x \leqq b$, $a < x \leqq b$, $a \leqq x < b$ ou $a < x < b$, où l'une ou l'autre où toutes les deux extrémités peuvent être infinies. Nous désignons par $B(\mathfrak{X})$ l'ensemble de toutes les fonctions f réelles et bornées sur S telles que $f^{-1}(I) \in \mathfrak{X}$, quel que soit l'intervalle I. Il est facile de voir que $B(\mathfrak{X})$ est un espace de Banach avec le norme

$$\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

Nous caractérisons maintenant l'espace conjugué $B^*(\mathfrak{X})$.

Soit $L \in B^*(\mathfrak{X})$, $\|L\| = k$. Si $E \in \mathfrak{X}$, la fonction caractéristique $c_E \in B(\mathfrak{X})$. Posons $\varphi(E) = L(c_E)$. Alors φ est une fonction d'ensembles sur $\mathfrak{X}$ additive au sens restreint. Soit

$$f \in B(\mathfrak{X}), \qquad M_1 = \inf_{x \in S} f(x), \qquad M_2 = \sup_{x \in S} f(x),$$

et soit $\mathfrak{A}$ une suite quelconque

$$a_0 < \ldots < a_n, \qquad \text{où} \quad a_0 < M_1, \qquad a_n > M_2$$

(1) Depuis que cela a été écrit, N. Dunford [82] a publié un autre exposé de cette théorie.

et soit E_ν l'ensemble des $x \in S$ tels que

$$f(x) \in I_\nu = [a_{\nu-1}, a_\nu) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

et enfin soit $g = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu c_{E_\nu}$. Alors $g \in B(\mathfrak{X})$ et

$$\| f - g \| \leq \max(a_\nu - a_{\nu-1}) = \| \mathfrak{A} \|,$$

de sorte que

$$| L(f) - L(g) | \leq k \| \mathfrak{A} \|.$$

Nous concluons donc que

$$L(f) = \lim_{\| \mathfrak{A} \| \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(E_\nu).$$

Cette dernière limite sera la définition de l'intégrale

$$\int f \, d\varphi.$$

Nous voyons que chaque $L \in B^*(\mathfrak{X})$ peut être représenté comme une intégrale par rapport à une fonction d'ensembles φ sur $\mathfrak{X}$, bornée et additive au sens restreint. Nous donnerons à une telle fonction le nom de *charge*.

Réciproquement, si φ est une charge et

$$L(f) = \int f \, d\varphi \qquad \text{pour} \quad f \in B(\mathfrak{X}),$$

alors $L \in B^*(\mathfrak{X})$.

Nous démontrons d'abord l'existence de l'intégrale. La fonction f étant élément de $B(\mathfrak{X})$ et $M_1 = \inf f(x)$, $M_2 = \sup f(x)$, soient $\mathfrak{A}$: $a_0 < \ldots < a_n$ et $\mathfrak{B}$: $b_0 < \ldots < b_m$ deux suites telles que $a_0, b_0 < M_1$, $a_n, b_m > M_2$ et $\| \mathfrak{A} \|, \| \mathfrak{B} \| < \delta$. Formons la suite $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, de sorte que $\mathfrak{C}$ est un raffinement commun des suites $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$. Posons $\mathfrak{C}$: $c_0 < \ldots < c_k$ et $J = [c_{\nu-1}, c_\nu)$. Si

$$I_\nu = [a_{\nu-1}, a_\nu) = \sum_{\mu=r}^{s} J_\mu \qquad \text{et} \qquad F_\mu = f^{-1}(J_\mu),$$

on a

$$a_\nu \varphi(E_\nu) - \sum_{\mu=r}^{s} c_\mu \varphi(F_\mu) = \sum_{\mu=r}^{s} (a_\nu - c_\mu) \varphi(F_\mu),$$

d'où

$$\left| a_\nu \varphi(E_\nu) - \sum_{\mu=r}^{s} c_\mu \varphi(F_\mu) \right| \leq \| \mathfrak{A} \| \sum_{\mu=r}^{s} | \varphi(F_\mu) | = \| \mathfrak{A} \| (\varphi(A_\nu) - \varphi(B_\nu)),$$

où

$$A_\nu = \sum_{\varphi(F_\mu) \geq 0} F_\mu \qquad \text{et} \qquad B_\nu = \sum_{\varphi(F_\mu) < 0} F_\mu.$$

Il s'ensuit que

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(E_\nu) - \sum_{\mu=1}^{k} c_\mu \varphi(F_\mu) \right| \leq \| \mathfrak{A} \| (\varphi(\Sigma A_\nu) - \varphi(\Sigma B_\nu))$$
$$\leq 2K \| \mathfrak{A} \|,$$

où $K = \sup_{E \in \mathfrak{X}} |\varphi(E)|$. Par conséquent,

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(E_\nu) - \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu \varphi(G_\nu) \right| \leq 4 \delta K,$$

où

$$G_\nu = f^{-1}([b_{\nu-1}, b_\nu)),$$

ce qui entraîne que

$$\int f \, d\varphi = \lim_{\|\mathfrak{A}\| \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(E_\nu)$$

existe et

(46) $$\left| \int f \, d\varphi - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(E_\nu) \right| \leq 4K \|\mathfrak{A}\|,$$

quelle que soit $f \in B(\mathfrak{X})$. Il est facile de voir que l'on obtient la même limite si l'on remplace, dans la somme ci-dessus, a_ν par $a_{\nu-1}$. Cela implique que

$$\int (-f) \, d\varphi = -\int f \, d\varphi$$

et, en général,

$$\int af \, d\varphi = a \int f \, d\varphi$$

pour une constante a quelconque.

Avant d'achever la démonstration que $L \in B^*(\mathfrak{X})$, obtenons d'abord un théorème de décomposition comme celui de Jordan. Soient

$$\varphi^+(E) = \sup_{\substack{E_1 \subset E \\ E_1 \in \mathfrak{X}}} \varphi(E_1) \qquad \text{et} \qquad \varphi^-(E) = \inf_{\substack{E_1 \subset E \\ E_1 \in \mathfrak{X}}} \varphi(E_1).$$

Évidemment

$$\varphi^+(E) \geq 0 \geq \varphi^-(E).$$

Si

$$E_1 \cap E_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad E_1, E_2 \in \mathfrak{X},$$

alors

$$\varphi^+(E_1 \cup E_2) = \varphi^+(E_1) + \varphi^+(E_2), \qquad \text{et} \qquad \varphi^-(E_1 \cup E_2) = \varphi^-(E_1) + \varphi^-(E_2).$$

La démonstration en est classique. Posons

$$|\varphi| = \varphi^+ - \varphi^-.$$

Alors $|\varphi|$, φ^+ et $-\varphi^-$ sont des charges non négatives. De plus,

$$\varphi = \varphi^+ + \varphi^-,$$

dont la démonstration est la même que dans le cas d'une fonction d'ensembles additive au sens complet.

Nous démontrons maintenant que

(47) $$\left| \int f \, d\varphi \right| \leq \|f\| \cdot |\varphi|(S),$$

quelle que soit la fonction $f \in B(\mathfrak{X})$. Soit $\mathfrak{A} : a_0 < \ldots < a_n$ une suite telle que

$$M_1 - \varepsilon < a_0 < M_1, \qquad M_2 < a_n \leqq M_2 + \varepsilon.$$

Alors

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(E_\nu) \right| \leqq (\|f\| + \varepsilon) \Sigma |\varphi(E_\nu)|$$
$$\leqq (\|f\| + \varepsilon)(\varphi(A) - \varphi(B)),$$

où

$$A = \sum_{\varphi(E_\nu) \geq 0} E_\nu, \qquad B = \sum_{\varphi(E_\nu) \leq 0} E_\nu.$$

Il s'ensuit que

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(E_\nu) \right| \leqq (\|f\| + \varepsilon)(\varphi^+(S) - \varphi^-(S)),$$

ce qui entraîne (47).

Cette borne supérieure ne peut pas être améliorée. Car, soit ε un nombre positif quelconque. Alors, il y a un $A \in \mathfrak{X}$ tel que

$$\varphi(A) \geqq \varphi^+(S) - \varepsilon.$$

Posons $B = S - A$. Alors

$$\varphi(B) = \varphi(S) - \varphi(A) = \varphi^+(S) + \varphi^-(S) - \varphi(A) \leqq \varphi^-(S) + \varepsilon.$$

Soit $f = c_A - c_B$, de sorte que $\|f\| = 1$. Si nous choisissons

$$a_\nu = -1 - \frac{1}{n} + \frac{\nu}{n}, \qquad 0 \leqq \nu \leqq 2n + 2,$$

nous obtenons sans difficulté

$$\int f \, d\varphi = \varphi(A) - \varphi(B) \geqq |\varphi|(S) - 2\varepsilon.$$

Si $S = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu$, où $A_\nu \in \mathfrak{X}$ et $A_\mu \cap A_\nu = 0$ pour $\mu \neq \nu$, $1 \leqq \mu, \nu \leqq n$ et si $f \in B(\mathfrak{X})$,

$$m_\nu = \inf_{x \in A_\nu} f(x), \qquad M_\nu = \sup_{x \in B_\nu} f(x)$$

et si $\varphi^-(S) = 0$, alors

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \varphi(A_\nu) \leqq \int f \, d\varphi \leqq \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu \varphi(A_\nu).$$

Il suffit de démontrer l'inégalité au droit, parce que l'autre s'ensuit en considérant $-f$. Puisqu'on a, pour une constante arbitraire c,

$$\int (f + c) \, d\varphi = \int f \, d\varphi + \int c \, d\varphi,$$

il suffira de démontrer l'inégalité pour les fonctions non négatives. Soit

$$\mathfrak{A} : \quad a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_k \qquad (a_k > \|f\|),$$

une suite quelconque telle que $\|\mathfrak{A}\| < \delta$ et utilisons les mêmes notations qu'auparavant. Alors,

$$\sum_{\mu=1}^{k} a_\mu \varphi(E_\mu) = \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n} a_\mu \varphi(E_\mu \cap A_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{k} a_\mu \varphi(E_\mu \cap A_\nu).$$

Or, si $E_\mu \cap A_\nu \neq 0$, il y a un $x \in A_\nu$ tel que

$$a_{\mu-1} \leqq f(x) < a_\mu,$$

de sorte que

$$a_\nu < a_{\nu-1} + \delta \leqq f(x) + \delta \leqq M_\nu + \delta$$

et

$$\sum_{\mu=1}^{k} a_\mu \varphi(E_\mu) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} (M_\nu + \delta) \sum_{\mu=1}^{k} \varphi(E_\mu \cap A_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} (M_\nu + \delta) \varphi(A_\nu).$$

En faisant $\|\mathfrak{A}\|$ tendre vers zéro, nous obtenons le résultat cherché.

Nous pouvons compléter maintenant la démonstration de la linéarité de l'opération L. Supposons que $\varphi^-(S) = 0$ et soient f, $g \in B(\mathfrak{X})$ $(f \geqq 0,\ g \geqq 0)$ et choisissons une suite quelconque $\mathfrak{A}$: $0 = a_0 < \ldots < a_n$ telle que $a_n > \|f\|$, $a_n > \|g\|$. Posons

$$E_\nu = f^{-1}(I_\nu), \qquad F_\nu = g^{-1}(I_\nu).$$

Alors,

$$\left| \int f\, d\varphi - \Sigma a_\nu \varphi(E_\nu) \right| \leqq 4 \|\mathfrak{A}\| \cdot |\varphi|(S)$$

et

$$\left| \int g\, d\varphi - \Sigma a_\nu \varphi(F_\nu) \right| \leqq 4 \|\mathfrak{A}\| \cdot |\varphi|(S),$$

en vertu de (46). Or, les ensembles $E_\mu \cap F_\nu$ $(\mu,\ \nu = 1,\ \ldots,\ n)$ constituent une partition de l'espace S en des ensembles disjoints et pour $x \in E_\mu \cap F_\nu$, on a

$$a_{\mu-1} + a_{\nu-1} \leqq f(x) + g(x) < a_\mu + a_\nu,$$

de sorte que

$$\Sigma(a_{\mu-1} + a_{\nu-1}) \varphi(E_\mu \cap F_\nu) \leqq \int (f+g)\, d\varphi \leqq \Sigma(a_\mu + a_\nu) \varphi(E_\mu \cap F_\nu),$$

c'est-à-dire

$$\Sigma a_{\mu-1} \varphi(E_\mu) + \Sigma a_{\nu-1} \varphi(F_\nu) \leqq \int (f+g)\, d\varphi \leqq \Sigma a_\mu \varphi(E_\mu) + \Sigma a_\nu \varphi(F_\nu).$$

Mais

$$\Sigma a_{\mu-1} \varphi(E_\mu) \geqq \Sigma(a_\mu - \|\mathfrak{A}\|) \varphi(E_\mu) = \Sigma a_\mu \varphi(E_\mu) - \|\mathfrak{A}\| \varphi(S)$$

et, de même, pour l'autre somme. Par conséquent,

$$\left| \int (f+g)\, d\varphi - \int f\, d\varphi - \int g\, d\varphi \right| \leqq 10 \|\mathfrak{A}\| \cdot |\varphi|(S).$$

Puisque $\|\mathfrak{A}\|$ est aussi petit que l'on veut, il s'ensuit que

$$\int (f+g)\, d\varphi = \int f\, d\varphi + \int g\, d\varphi.$$

Le cas général se déduit moyennant le théorème de décomposition, après l'addition des constantes convenables aux fonctions f et g.

Nous avons donc démontré qu'il y a une correspondance biunivoque entre les fonctionnelles linéaires $L \in B^*(\mathfrak{X})$ et les charges φ, et si L et φ se correspondent l'une à l'autre, alors

$$\|L\| = |\varphi|(S).$$

Si φ est une charge et $E_0 \in \mathfrak{X}$, la fonction

$$\varphi_0(E) = \varphi(E \cap E_0)$$

est aussi une charge. Nous définissons

$$\int_{E_0} f\,d\varphi = \int f\,d\varphi_0 = \int c_{E_0} f\,d\varphi.$$

Il faut maintenant discuter quelques charges spéciales dont Tarski [62] et Ulam [66] ont fait remarquer la signification. Soit φ une charge qui ne prend que les valeurs o et 1 et soit $\mathfrak{P}$ l'ensemble des $E \in \mathfrak{X}$ tels que $\varphi(E) = 0$. Alors, si $E \in \mathfrak{P}$, $E_1 \in \mathfrak{X}$, $E_1 \subset E$, on a

$$0 \leqq \varphi(E_1) = \varphi(E) - \varphi(E - E_1) \leqq \varphi(E) = 0,$$

de sorte que $E_1 \in \mathfrak{P}$. Si E_1, $E_2 \in \mathfrak{P}$, alors

$$\varphi(E_1 \cup E_2) = \varphi(E_1 - E_2) + \varphi(E_2 - E_1) + \varphi(E_1 \cap E_2) = 0.$$

Si φ ne s'annule pas identiquement, alors $\varphi(S) = 1$ et si $E \notin \mathfrak{P}$ il faut que

$$\varphi(S - E) = \varphi(S) - \varphi(E) = 0,$$

de sorte que $S - E \in \mathfrak{P}$. Ainsi $\mathfrak{P}$ est un idéal premier dans l'algèbre booléenne $\mathfrak{X}$. Réciproquement, si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier dans $\mathfrak{X}$, alors $\varphi(E) = 1 - c_{\mathfrak{P}}(E)$ est une charge qui ne s'annule pas identiquement et qui ne prend que les valeurs o et 1. Une telle charge s'appelle une *charge première*.

Une sorte particulière de charge première est triviale. Supposons que E_0 est un élément atomique de $\mathfrak{X}$, ce qui veut dire que $E_0 \neq 0$ et qu'il n'y a aucun $E \in \mathfrak{X}$ tel que $0 \subset E \subset E_0$, $E \neq 0$, $E \neq E_0$. Alors l'ensemble $\mathfrak{P}$ des $E \in \mathfrak{X}$ tels que $E \cap E_0 = 0$ est un idéal premier. La charge correspondante est définie par

$$\varphi_{E_0}(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E \cap E_0 = 0, \quad E \in \mathfrak{X}, \\ 1 & \text{si } E_0 \subset E \in \mathfrak{X}. \end{cases}$$

Nous conviendrons de donner à une telle charge le nom de *charge atomique*. Le cas le plus simple est celui où $E_0 = \{x_0\}$ est l'ensemble qui ne contient que l'élément x_0. Dans ce cas, la charge correspondante consiste d'une charge discrète $+1$ placée à x_0. Tarski et Ulam ont démontré que si $\mathfrak{X}$ est infini, il y a beaucoup plus de charges premières non atomiques qu'atomiques. Cependant, personne n'a construit une charge première non atomique sans l'aide de l'axiome de Zermelo ou d'autres moyens pareils. Il s'ensuit du travail de Tarski [63] sur les systèmes déductifs que si $\mathfrak{X}$ est une algèbre booléenne de propositions, il y a une correspondance biunivoque entre les idéaux premiers de $\mathfrak{X}$ et les systèmes déductifs *catégoriques*, c'est-à-dire ceux tels que pour chaque proposition p, où p ou sa négation est un théorème. Il paraît probable, d'après le théorème de Gödel [26], que dans le cas d'un système de logique constructivement défini et contenant l'arithmétique des nombres entiers, il est impossible de définir par des moyens constructifs un idéal premier qui contient l'idéal des propositions fausses. Récemment, notre élève, J. Dekker [19], a démontré qu'aucun idéal premier non atomique ne peut être défini constructivement dans l'algèbre booléenne des ensembles de nombres entiers (*cf.* [59]).

Le théorème suivant sera très utile dans la suite :

Théorème 36. — *Si* φ *est une charge sur* $\mathfrak{X}$, *et si l'on ne peut trouver plus de k ensembles disjoints* $E_1, \ldots, E_k \in \mathfrak{X}$ *tels que* $\varphi(E_i) \neq 0$, *alors* φ *est une combinaison linéaire de k charges premières au plus.*

Démonstration. — Admettons qu'il y a k ensembles disjoints $E_1, \ldots, E_k \in \mathfrak{X}$ tels que

$$\varphi(E_i) = \lambda_i \neq 0 \qquad (1 \leq i \leq k)$$

et posons

$$\varphi_i(E) = \varphi(E \cap E_i)/\lambda_i \qquad (1 \leq i \leq k).$$

Alors φ_i est une charge première. Car si $\varphi_i(E) \neq 0$, 1, alors $E \neq 0$, E_i et $E_1, \ldots, E_{i-1}, E_i \cap E, E_i - E, E_{i+1}, \ldots, E_k$ sont $k+1$ ensembles disjoints et, d'ailleurs,

$$\varphi(E_i \cap E) = \lambda_i \varphi(E) \neq 0,$$

tandis que

$$\varphi(E_i - E) = \lambda_i \varphi_i(S - E) = \lambda_i(1 - \varphi_i(E)) \neq 0,$$

ce qui est contraire à notre supposition. Si $E \in \mathfrak{X}$, alors $E_1, \ldots, E_k, E - \sum_{i=1}^{k} E_i$ sont $k+1$ ensembles disjoints dans $\mathfrak{X}$, de sorte que

$$\varphi\left(E - \sum_{i=1}^{k} E_i\right) = 0$$

et, par conséquent,

$$\varphi(E) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(E \cap E_i) + \varphi\left(E - \sum_{i=1}^{k} E_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i(E).$$

Le théorème suivant montre que, dans des conditions assez générales, l'intégration des fonctions continues par rapport à une charge première est équivalente à l'intégration par rapport à une charge atomique.

Théorème 37. *Si* S *est un espace topologique compact et* $\mathfrak{X}$ *est un corps qui contient tous les ensembles ouverts dans* S *et* φ *est une charge première, il y a un point* x_0 *tel que*

$$\int f\, d\varphi = f(x_0) = \int f\, d\varphi_0, \tag{48}$$

quelle que soit la fonction continue f, *où* φ_0 *est la charge atomique qui cor-*

respond à l'atome $\{x_0\}$ *de* $\mathfrak{X}$. *Si* S *est un espace de Hausdorff, le point* x_0 *est unique.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{P}$ l'idéal premier de $\mathfrak{X}$ correspondant à φ. Supposons qu'à chaque point $x \in S$ il correspond un ensemble ouvert $U_x \in \mathfrak{P}$ contenant x. Alors, on peut déjà couvrir S par un nombre fini de ces ensembles, $U_{x_1}, \dots U_{x_n}$, et

$$\varphi(S) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} U_{x_i}\right) \leqq \sum_{i=1}^{k} \varphi(U_{x_i}) = 0,$$

donc φ est identiquement égal à zéro, ce qui est impossible. Il y a donc un point $x_0 \in S$ tel qu'aucun ensemble ouvert U qui contient x_0 n'appartient à $\mathfrak{P}$. Si f est une fonction continue sur S et $\varepsilon > 0$, il y a un ensemble ouvert U contenant x_0 tel que

$$|f(x) - f(x_0)| \leqq \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \in U.$$

Alors

$$f(x_0) - \varepsilon = (f(x_0) - \varepsilon)\,\varphi(U) \leqq \int f\,d\varphi \leqq (f(x_0) + \varepsilon)\,\varphi(U) = f(x_0) + \varepsilon,$$

d'où se déduit le résultat cherché.

Si S est un espace de Hausdorff, il est normal (Lefschetz [**44**], p. 27), et alors si $x_1 \neq x_0$, il y a une fonction continue f sur S telle que $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1$, de sorte que $0 = \int f\,d\varphi \neq f(x_1)$. L'unicité dn point x_0 est ainsi établie.

COROLLAIRE 37 *a.* — *L'espace* S *étant localement compact, soit* φ *une charge première telle qu'il n'y a aucun point* x_0 *ayant la propriété* (48) *et supposons que* $\mathfrak{X}$ *contient tous les ensembles ouverts. Soit* f *une fonction continue telle qu'il y a un nombre* $f(\infty)$ *avec la propriété qu'étant donné le nombre positif* ε, *on peut trouver un ensemble compact* $E \subset S$ *tel que* $|f(x) - f(\infty)| < \varepsilon$ *pour* $x \in S - E$. *Alors on a*

$$\int f\,d\varphi = f(\infty).$$

Démonstration. — On peut étendre S à un espace compact S_1 par l'adjonction d'un seul point ∞. Les fonctions f qui possèdent la propriété ci-dessus sont précisément celles qui peuvent être étendues à des fonctions continues sur S_1. Soit $\mathfrak{X}_1$ l'ensemble des $E \subset S_1$ tels que $E \cap S \in \mathfrak{X}$ et, pour chaque $f \in B(\mathfrak{X}_1)$, désignons par f_1 la restriction de f à S, et posons enfin

$$L_1(f) = \int f_1\,d\varphi.$$

Alors $L_1 \in B^*(\mathfrak{X}_1)$, de sorte qu'il y a une charge φ_1 sur S_1 telle que

$$L_1(f) = \int f\,d\varphi_1$$

et φ_1, lui aussi, ne prend que les valeurs 0 et 1 ; en effet, si $E \subset S_1$, on a

$$\varphi_1(E) = \varphi(E \cap S).$$

C'est maintenant une conclusion triviale que le point $x_0 \in S_1$ dont l'existence a été affirmée dans le théorème 37 est précisément ∞.

L'existence des charges premières de ce type est facile à démontrer. Car, soit $\mathfrak{K}$ l'idéal dans $\mathfrak{X}$ généré par les ensembles compacts et fermés de l'espace S. Alors, on peut étendre $\mathfrak{K}$ à un idéal premier $\mathfrak{P}$ (*cf.* Stone [61] et Tarski [63]) et la charge première associée à $\mathfrak{P}$ possède les propriétés désirées.

Le théorème 37 montre que si S est compact, alors en ce qui concerne l'intégration des fonctions continues, les charges premières les plus générales sont équivalentes aux charges atomiques. En effet, la démonstration de ce théorème met en évidence le fait qu'une charge première non atomique correspond à une répartition d'une charge positive unitaire, qui n'est pas placée exactement à quelque point x_0, mais est tellement diffusée dans le voisinage immédiat de ce point qu'un ensemble ouvert quelconque contenant x_0 doit contenir la charge totale. De même, si S est un espace localement compact, une charge première non atomique correspond à une charge unitaire diffusée ou dans le voisinage immédiat de quelque point ou dans le voisinage immédiat du « point à l'infini ». Nous avons trouvé ces images physiques utiles dans l'interprétation de nos résultats.

CHAPITRE VII.

Les problèmes extrémaux pour les intégrales.

Dans ce chapitre, nous considérons des problèmes du type suivant : Soit S un espace et soit $\mathfrak{X}$ un corps borélien de sous-ensembles de S. Soient $f_1, \ldots, f_k, f$, $(k+1)$ fonctions données dans $B(\mathfrak{X})$, et soient $c_1, \ldots, c_k$, k constantes données. Envisageons la classe $\mathfrak{M}$ des charges non négatives μ sur S telles que

$$L_i(\mu) = \int f_i \, d\mu = c_i \qquad (1 \leqq i \leqq k)$$

et cherchons la charge dans $\mathfrak{M}$ qui donne un maximum ou un minimum à l'intégrale

$$L(\mu) = \int f \, d\mu.$$

Si nous ne considérons que les charges non négatives et additives au sens complet, c'est-à-dire les mesures et si nous prenons pour S l'ensemble des entiers positifs, ce problème se ramène au problème général du troisième chapitre. D'autres problèmes de ce genre sont : les problèmes d'interpolation pour les fonctions harmoniques non négatives, pour les solutions non négatives de l'équation de la chaleur (*cf.* Widder [73]) et pour les fonctions absolument monotones dans l'intervalle $(-\infty, 0]$; le problème des moments; quelques généralisations de l'inégalité de Tchebyscheff dans la théorie de probabilité (*cf.*, par exemple, Wald [68]); et beaucoup d'autres problèmes dans des parties différentes de l'analyse. Comme nous le verrons, on peut traiter de ces problèmes en suivant une méthode commune qui repose sur les principes du sommet et de la déformation.

Dans la suite, nous allons identifier tout simplement les éléments de $B^*(\mathfrak{X})$ avec les charges correspondantes.

Ainsi que dans le troisième chapitre, nous étudierons une classe de problèmes un peu plus générale. Soient $f_1, \ldots, f_k, f, c_1, \ldots, c_k$ comme ci-dessus, et soient $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{G}$ une partition des entiers $1, \ldots, k$ en classes disjointes. Soit $\mathfrak{M}$ la classe des charges non négatives μ sur S telles que

$$\int f_i \, d\mu = c_i \qquad (i \in \mathfrak{E}),$$
$$\int f_i \, d\mu \leqq c_i \qquad (i \in \mathfrak{L}),$$
$$\int f_i \, d\mu \geqq c_i \qquad (i \in \mathfrak{G}).$$

Si pour un entier i dans $\mathfrak{E} \cup \mathfrak{L}$ $f_i(x) \geqq a > 0$ sur tout l'espace S, alors $\mathfrak{M}$ est bornée, car $|\mu|(S) \leqq c_i/a$. Dans tous les cas, $\mathfrak{M}$ étant caractérisée par les conditions ci-dessus et par

$$\int c_E \, d\mu \geqq 0,$$

quel que soit $E \in \mathfrak{X}$, on voit que $\mathfrak{M}$ est régulièrement convexe.

Soit μ_0 un point extrême de $\mathfrak{M}$. Supposons qu'il y a $k+1$ ensembles disjoints $E_0, \ldots, E_k$ dans $\mathfrak{X}$ tels que $\mu_0(E_i) \neq 0$, $0 \leqq i \leqq k$. Posons

$$E_{k+1} = S - E_1 - \ldots - E_k \supset E_0,$$

de sorte que $\mu_0(E_{k+1}) > 0$. A chaque point $(a_1, \ldots, a_{k+1})$ de l'espace affine à $k+1$ dimensions, on peut associer une charge μ telle que

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{k+1} a_i \mu_0(E \cap E_i),$$

quel que soit $E \in \mathfrak{X}$. Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des points tels que les charges correspondantes appartiennent à $\mathfrak{M}$. Alors, $\mathfrak{A}$ est le tronçon défini par

$$(49) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a_i \geqq 0 & (1 \leqq i \leqq k+1), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} a_i \int_{E_i} f_j \, d\mu_0 = c_j & (j \in \mathfrak{E}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} a_i \int_{E_i} f_j \, d\mu_0 \geqq c_j & (j \in \mathfrak{G}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} a_i \int_{E_i} f_j \, d\mu_0 \leqq c_j & (j \in \mathfrak{L}). \end{array} \right.$$

Puisque μ_0 est un point extrême, alors $(1, \ldots, 1)$ est un point extrême de $\mathfrak{A}$. Mais en un point extrême de $\mathfrak{A}$ l'égalité doit avoir lieu dans au moins $k+1$ des conditions (49), de sorte que $a_i = 0$ pour au moins une valeur de i.

Cette contradiction, combinée avec le théorème 36, nous donne le

Théorème 38. — *Si μ_0 est un point extrême de $\mathfrak{M}$, il est une combinaison linéaire à coefficients constants de k charges premières tout au plus.*

Corollaire 38 a. — *Si $\mathfrak{M}$ est borné et n'est pas vide, il contient au moins une telle charge.*

Ceci s'ensuit immédiatement du théorème 31.

Corollaire 38 b. — *Si $\mathfrak{M}$ n'est pas vide, il contient au moins une telle charge.*

Démonstration. — Soit $\mu' \in \mathfrak{M}$, soit $f_{k+1} \equiv 1$, et soit

$$c_{k+1} = \int f_{k+1}\, d\mu' + 1.$$

Soit $\mathfrak{M}_1$ l'ensemble des $\mu \in \mathfrak{M}$ telles que

$$L_{k+1}(\mu) = \int f_{k+1}\, d\mu \leqq c_{k+1}.$$

Alors $\mathfrak{M}_1$ est borné, non vide et régulièrement convexe. Il s'ensuit que $L_{k+1}(\mu)$ atteint son minimum sur $\mathfrak{M}_1$ en un point extrême de $\mathfrak{M}_1$, en vertu du théorème 32. Un tel point extrême est une combinaison linéaire de $k+1$ charges premières tout au plus. Si c'est une combinaison linéaire des charges $\mu_0, \ldots, \mu_k$, considérons l'ensemble $\mathfrak{A}$ des points $(a_0, \ldots, a_k)$ dans l'espace affine à $k+1$ dimensions tels que

$$\mu = \sum_{i=0}^{k} a_i \mu_i \in \mathfrak{M}_1.$$

Alors $\mathfrak{A}$ est le polyèdre convexe défini par les conditions

$$(50)\quad \begin{cases} a_i \geqq 0 \qquad (0 \leqq i \leqq k), \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i \int f_j\, d\mu_i = c_j \qquad (j \in \mathfrak{C}, \text{ et ainsi de suite}), \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i \int f_{k+1}\, d\mu_i \leqq c_{k+1}. \end{cases}$$

Or, le minimum de l'intégrale

$$\int f_{k+1}\, d\mu = \sum_{i=0}^{k} a_i \mu_i(S) = \sum_{i=0}^{k} a_i$$

sur $\mathfrak{A}$ est atteint en un point où au moins $k+1$ des égalités dans (50) ont lieu. Mais ce minimum coïncide avec celui de $\int f_{k+1}\, d\mu$ sur $\mathfrak{M}_1$, qui est inférieur à c_{k+1}. On conclut qu'en un point de $\mathfrak{A}$ où le minimum est atteint, au moins un coefficient s'annule, de sorte que la charge correspondante est une combinaison linéaire de k charges premières au plus.

Dans la suite, nous supposons que le corps $\mathfrak{X}$ est infini, bien que la plupart des résultats restent exacts si $\mathfrak{X}$ est fini, mais le nombre de ces éléments est suffisamment grand.

Corollaire 38 c. — *Si μ est une combinaison linéaire de k charges premières au plus, et $\mu \in \mathfrak{M}$, si $\mathfrak{G} = \mathfrak{L} = o$, et si*

$$\text{dét}\left(\int f_i \, d\mu_j\right) \neq 0, \tag{51}$$

quel que soit l'ensemble $\mu_1, \ldots, \mu_k$ de k charges premières distinctes, alors μ est un point extrême de $\mathfrak{M}$.

Démonstration. — Supposons que

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu_i,$$

où $a_i \geqq 0$ et μ_i est une charge première pour $1 \leqq i \leqq k$. Si

$$\mu = t\mu' + (1-t)\mu'' \qquad (\mu', \mu'' \in \mathfrak{M}, \qquad 0 < t < 1)$$

et $E_0, \ldots, E_k$ sont $k+1$ ensembles disjoints dans $\mathfrak{X}$, alors $\mu(E_i) = 0$ pour un entier i, $0 \leqq i \leqq k$ et, par conséquent

$$\mu'(E_i) = \mu''(E_i) = 0.$$

Il s'ensuit que μ' et μ'' sont aussi des combinaisons linéaires de k charges premières tout au plus. Si $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ sont les idéaux premiers qui correspondent à $\mu_1, \ldots, \mu_k$ et si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier qui correspond à l'un des composants premiers de μ' ou μ'', nous allons démontrer que $\mathfrak{P}$ se trouve parmi les idéaux $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$. Car, si $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}_i$, $(1 \leqq i \leqq k)$, on a $\mathfrak{P}_i - \mathfrak{P} \neq 0$ pour $1 \leqq i \leqq k$. Prenons un ensemble $E_i \in \mathfrak{P}_i - \mathfrak{P}\,(1 \leqq i \leqq k)$ et posons

$$E = \prod_{i=1}^{k} E_i = S - \sum_{i=1}^{k} (S - E_i).$$

Alors, $E \in \mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_k - \mathfrak{P}$, de sorte que

$$\mu(E) = 0 \neq t\mu'(E) + (1-t)\mu''(E).$$

Les charges μ' et μ'' sont donc des combinaisons linéaires de $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Mais, en vertu de (51), les nombres $a_1, \ldots, a_k$ tels que

$$\int f_i \, d\left(\sum_{j=1}^{k} a_j \mu_j\right) = \sum_{j=1}^{k} a_j \int f_i \, d\mu_j = c_i \qquad (1 \leqq i \leqq k)$$

sont uniques, de sorte que $\mu = \mu' = \mu''$.

Si la condition (51) est satisfaite, nous dirons que le système des fonctions $f_1, \ldots, f_k$ est *régulier*. Si nous choisissons pour les μ dans (51) des charges atomiques distinctes, nous voyons qu'un système régulier est toujours Tchebyscheffien.

Supposons maintenant que S est un espace topologique et que $\mathfrak{X}$ contient tous les ensembles ouverts. Alors, l'espace $C(S)$ des fonctions continues et bornées sur S est un sous-espace linéaire fermé de $B(\mathfrak{X})$. Son espace conjugué $C^*(S)$ est isomorphe à l'espace quotient $B^*(\mathfrak{X})/Z(\mathfrak{X})$, où $Z(\mathfrak{X})$ est l'ensemble des charges μ telles que $\int f\,d\mu = 0$, quelle que soit $f \in C(S)$. On peut encore identifier les éléments de $C^*(S)$ avec les charges, mais on doit compter comme identiques deux charges dont la différence appartient à $Z(\mathfrak{X})$. Avec cette convention, nous obtenons le

Corollaire 38 *d*. — *Si* S *est un espace compact et* $\mathfrak{X}$ *contient tous les ensembles ouverts, chaque point extrême de* $\mathfrak{M}$ *est une combinaison linéaire de* k *charges atomiques au plus.*

Corollaire 38 *e*. — *Dans les conditions du corollaire* 38 *d, si* $\mathfrak{M}$ *est non vide, il contient une combinaison linéaire de* k *charges atomiques au plus.*

Si S n'est que localement compact, ces deux corollaires restent valides avec des modifications évidentes pour tenir compte du « point à l'infini ».

Corollaire 38 *f*. — *Si* $\mathfrak{M}$ *est borné et non vide et* $G(\mu)$ *est une fonction convexe et faiblement semi-continue supérieurement sur* $\mathfrak{M}$, *alors* $G(\mu)$ *atteint son maximum sur* $\mathfrak{M}$ *en quelque point extrême de* $\mathfrak{M}$. *Cela vaut, en particulier, si* $G(\mu) = \int f\,d\mu$, *où* $f \in B(\mathfrak{X})$.

Corollaire 38 *g*. — *Si* $0 < a \leq f(x) \leq M$ *pour tout* $x \in S$ *et* $\mathfrak{M}$ *n'est pas vide, alors* $G(\mu) = \int f\,d\mu$ *atteint son minimum sur* $\mathfrak{M}$ *pour quelque combinaison linéaire de* k *charges premières au plus.*

La démonstration est essentiellement la même que celle du corollaire 38 *b*.

Si S est un espace compact ou localement compact, et les fonctions $f_1, \ldots, f_k$, f sont continues, on doit modifier ces derniers corollaires d'une manière évidente, d'après les corollaires 38 *d* et 38 *e*.

Nous dirons qu'un système de fonctions est *complètement régulier* si chaque sous-système fini est régulier.

Corollaire 38 *h*. — *Dans les hypothèses du corollaire* 38 *a, si* $f \in B(\mathfrak{X})$ *et* $(f_1, \ldots, f_k, f)$ *est complètement régulier, la charge dans* $\mathfrak{M}$ *qui donne à* $\int f\,d\mu$ *un maximum ou un minimum est unique.*

Démonstration. — Soit μ_0 une combinaison linéaire de k charges premières au plus, qui donne à $\int f\,d\mu$ un minimum pour $\mu \in \mathfrak{M}$. S'il y a une autre charge $\mu' \in \mathfrak{M}$ telle que

$$\int f\,d\mu' = \int f\,d\mu_0,$$

il y a un ensemble $E \in \mathfrak{X}$ tel que

$$\mu'(E) \neq \mu_0(E).$$

En vertu du corollaire **38** *b*, il y a une combinaison linéaire μ'' de $k+2$ charges premières au plus telle que $\mu'' \in \mathfrak{M}$,

$$\int f\,d\mu'' = \int f\,d\mu' = \int f\,d\mu_0 \tag{52}$$

et

$$\int c_E\,d\mu'' = \mu''(E) = \int c_E\,d\mu' = \mu'(E) \neq \mu_0(E). \tag{53}$$

Soient $\mu_1, \ldots, \mu_r$ les charges premières distinctes dont μ_0 et μ'' sont des combinaisons linéaires. Considérons l'ensemble $\mathfrak{A}$ des points $(a_1, \ldots, a_r)$ dans l'espace affine à r dimensions tels que $\sum_{i=1}^{k} a_i\mu_i$ appartient à $\mathfrak{M}$. Alors, $\mathfrak{A}$ est un polyèdre convexe et, par le théorème **2**, le maximum de la fonction

$$\int f\,d\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\mu_i\right) = \Sigma a_i \int f\,d\mu_i$$

sur $\mathfrak{A}$ est atteint en un point unique, ce qui est contraire à (52) et (53).

Corollaire **38** *i*. — *Dans les hypothèses du corollaire* **38** *d, si $f_1, \ldots, f_k, f$ est c. T. et $\mathfrak{M}$ est borné et non vide, alors* $G(\mu) = \int f\,d\mu$ *atteint son maximum sur $\mathfrak{M}$ pour une distribution unique de k charges discrètes au plus. Si* S *n'est que localement compact, et si les nombres $f_i(\infty)$ $(1 \leqq i \leqq k)$ et $f(\infty)$ existent, la distribution extrémale est encore unique, mais l'une des charges peut se trouver au point à l'infini.*

Le théorème suivant montre comment l'application du théorème d'unicité affirmé dans le dernier corollaire est limitée par la structure topologique de l'espace S.

Théorème **39**. — *Si* S *est un espace topologique et (f_1, f_2) est c. T. sur* S, *alors f_2/f_1 est une transformation continue et biunivoque de* S *sur un ensemble linéaire.*

Démonstration. — Puisque le système qui consiste de la seule fonction f_1 est Tchebyscheffien, cette fonction ne s'annule pas sur S. Quel que soit le nombre réel a, la fonction $-af_1 + f_2$ s'annule une fois tout au plus, ce qui entraîne le théorème.

Corollaire **39** *a*. — *Dans la même hypothèse, si* S *est compact, l'application f_2/f_1 est un homéomorphisme de* S *sur un ensemble linéaire borné et fermé. La dimension de l'espace* S *est donc égale ou à zéro ou à un* (*cf.* Lefschetz [**44**], p. 25). *Si* S *est localement compact, l'application f_2/f_1 est un homéomorphisme dans un voisinage de chaque point.*

Il n'est pas nécessaire que f_2/f_1 soit un homéomorphisme si S n'est que localement compact. Par exemple, si S consiste des deux intervalles $[0, 1)$ et $[2, 3]$, et $f_1 \equiv 1$, tandis que

$$f_2(x) = \begin{cases} x & \text{pour } 0 \leqq x < 1, \\ x - 1 & \text{pour } 2 \leqq x \leqq 3, \end{cases}$$

toutes les conditions du théorème sont remplies, mais f_2/f_1 n'est pas un homéomorphisme.

Nous ne pouvons donc nous attendre à des théorèmes d'unicité par nos méthodes lorsque S est compact ou localement compact et les fonctions f_i et f ne sont continues que si S est essentiellement un ensemble linéaire.

Remarquons que l'on peut aussi déduire le corollaire 38 *d* d'une manière élémentaire du théorème bien connu que chaque point d'un ensemble fermé et convexe dans un espace affine à un nombre fini de dimensions est contenu dans un simplexe dont les sommets appartiennent à l'ensemble. En revanche, le corollaire 38 *d* donne, en effet, une démonstration très non élémentaire de cet énoncé. La démonstration donnée ici peut quand même posséder quelque intérêt, parce qu'elle rattache ce théorème à des conceptions qui ont paru assez séparées jusqu'à présent et, d'ailleurs, elle met sous un jour nouveau de telles représentations d'un point d'un ensemble fermé et convexe comme barycentre d'un simplexe contenu dans cet ensemble (*cf.* Bonnesen-Fenchel [9]).

Nous donnons une extension du principe de déformation adaptée aux problèmes envisagés dans ce chapitre.

Théorème 40. — *Soit* I *l'intervalle* $0 \leqq t \leqq 1$, *et soient* $f_i(t, s)(1 \leqq i \leqq k)$ *et* $f(t, s)$ *des fonctions réelles sur* $I \times S$ *telles que pour chaque* $t \in I$ *ces fonctions appartiennent à* $B(\mathfrak{X})$ *et pour chaque* $s \in S$ *elles sont continues sur* I. *Supposons qu'il y a une fonction positive* $a(t)$ *sur* I *telle que* $a(t) \leqq f(t, s)$ *pour* $(t, s) \in I \times S$. *Soient* $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}$ *et* $\mathfrak{L}$ *une partition des entiers* $1, \ldots, k$, *et soit* $c_i(t)$ *une fonction réelle et continue sur* I *pour* $1 \leqq i \leqq k$. *Soit* $\mathfrak{M}(t)$ *l'ensemble des charges non négatives* μ *telles que*

$$\begin{aligned} L_i(t)(\mu) = \int f_i(t, s)\, d\mu &= c_i(t) \qquad (i \in \mathfrak{E}), \\ L_i(\mu) &\geqq c_i(t) \qquad (i \in \mathfrak{G}), \\ L_i(\mu) &\leqq c_i(t) \qquad (i \in \mathfrak{L}) \end{aligned}$$

et supposons que $(f_1, \ldots, f_k, f)$ *est complètement régulier pour* $t \in I$. *Soit* φ_t *la charge unique dans* $\mathfrak{M}(t)$ *pour laquelle* $L(t)(\mu) = \int f(t, s)\, d\mu$ *atteint son minimum. Supposons que* φ_0 *est une combinaison linéaire des charges premières* $\mu_1, \ldots, \mu_K$, $K \leqq k$ *et que*

$$\psi_t = \sum_{l=1}^{K} a_l(t) \mu_l,$$

où $a_l(t)$ *est positive et continue sur* I, *appartient à* $\mathfrak{M}(t)$ *pour* $t \in I$. *Supposons enfin que* $\psi_0 = \varphi_0$ *et que l'ensemble des entiers* i *tels que* $L_i(t)(\psi_t) \neq c_i(t)$ *reste constant pour* $t \in I$. *Alors*, $\psi_t = \varphi_t$ *pour* $t \in I$.

Démonstration. — Soit $o \leqq t_0 \leqq 1$ et soient $\mu_1, \ldots, \mu_r$ les charges premières distinctes qui rentrent dans les charges ψ_0 et φ_{t_0}. Soit $\mathfrak{A}(t)$ l'ensemble des points $(a_1, \ldots, a_r)$ dans l'espace affine à r dimensions, tels que $\sum_{i=1}^{r} a_i \mu_i$ appartient à $\mathfrak{M}(t)$. Alors, le point $P(t) = (a_1(t), \ldots, a_K(t), o, \ldots, o) \in \mathfrak{A}(t)$ pour $t \in I$. En vertu du corollaire 5 *c*, le minimum de

$$L(t)\left(\sum_{i=1}^{r} a_i \mu_i\right) = \sum_{i=1}^{r} a_i L(t)(\mu_i)$$

sur $\mathfrak{A}(t)$ est atteint uniquement au point $P(t)$ pour $t \in I$ et, en particulier, pour $t = t_0$. Il suit de là que

$$L(t_0)(\psi_{t_0}) \leqq L(t_0)(\varphi_{t_0}),$$

de sorte que $\psi_{t_0} = \varphi_{t_0}$.

La même méthode donne les résultats suivants :

Corollaire 40 *a.* — *Si l'on omet l'hypothèse que* $f(t, s) \geqq a(t)$, *mais en outre des autres hypothèses on suppose que* $\mathfrak{M}(t)$ *est borné pour* $t \in I$, *on a la même conclusion.*

Corollaire 40 *b.* — *Si* S *est un espace compact, et les fonctions* f_i *et* f *sont continues, et si l'on garde les autres hypothèses, on a la même conclusion, compte tenu que deux charges dont la différence appartient à* $Z(\mathfrak{X})$ *doivent être identifiées.*

Corollaire 40 *c.* — *Si* S *est localement compact, et les fonctions* f_i *et* f *appartiennent à* C(S), *et si les nombres* $f_i(t, \infty)$ *et* $f(t, \infty)$ *existent pour* $o \leqq t \leqq 1$, *et si l'on garde les autres hypothèses, on a la même conclusion.*

Nous allons appliquer ces résultats maintenant à certaines classes de fonctions qui sont représentées par des intégrales. Parmi les cas particuliers de la théorie exposée ici se trouvent les problèmes d'interpolation pour les fonctions absolument monotones dans l'intervalle $(-\infty, o]$, pour les fonctions harmoniques non négatives, et pour les solutions non négatives de l'équation de la chaleur.

Soient X et S des intervalles sur l'axe réel; ils peuvent être finis ou infinis, ouverts, demi-ouverts, ou fermés. Soit $K(x, s)$ une fonction réelle, positive et continue sur $X \times S$, et supposons que pour $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in X$, la fonction $\frac{K(x_1, s)}{K(x_2, s)}$ est bornée, et que si s_0 est une extrémité de S (qui peut être le point à l'infini) qui n'appartient pas à S, alors

$$\lim_{s \to s_0} \frac{K(x_1, s)}{K(x_2, s)} = o. \tag{54}$$

Par un K-*nome*, nous entendons une fonction de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i K(x, s_i),$$

où $s_i \in \mathrm{S}$, $1 \leqq i \leqq k$ et les a_i sont constants. Si $x_0 \in \mathrm{X}$, nous désignons par $\mathfrak{A}(x_0)$ l'ensemble des fonctions f de la forme

$$f(x) = \int_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{K}(x, s)}{\mathrm{K}(x_0, s)} d\mu,$$

où μ est une charge non négative sur S, en prenant $\mathfrak{X}$ comme le corps des ensembles boréliens dans S. Évidemment chaque K-nome à coefficients non négatifs appartient à $\mathfrak{A}(x_0)$.

Nous donnons maintenant quelques conséquences immédiates du théorème 38 et ses corollaires.

Théorème 41. — *Si $x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1}$ et $x_i \in \mathrm{X}$ pour $1 \leqq i \leqq k+1$, et $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{G}$ sont une partition des entiers $1, \ldots, k$, si $\mathfrak{F}$ est l'ensemble des $f \in \mathfrak{A}(x_{k+1})$ telles que*

$$\begin{aligned} f(x_i) &= c_i \qquad (i \in \mathfrak{E}), \\ f(x_i) &\leqq c_i \qquad (i \in \mathfrak{L}), \\ f(x_i) &\geqq c_i \qquad (i \in \mathfrak{G}) \end{aligned}$$

et si $\mathfrak{F}$ n'est pas vide, le minimum de $f(x_{k+1})$ pour $f \in \mathfrak{F}$ est atteint pour un K-nome dont k coefficients au plus ne s'annulent pas.

Démonstration. — En vertu du corollaire 38 g et du théorème 38, le minimum de $f(x_{k+1})$ est atteint pour une combinaison linéaire de k charges premières au plus, qui peuvent être prises comme atomiques si S est compact, et autrement l'une d'elles peut être concentrée en la « frontière idéale » de S, tandis que les autres sont atomiques. Il suffira donc de considérer ce dernier cas. Alors le minimum est atteint pour une fonction de la forme

$$f(x) = f_1(x) + a \int \frac{\mathrm{K}(x, s)}{\mathrm{K}(x_{k+1}, s)} d\mu,$$

où f_1 est un K-nome dont au plus $k-1$ coefficients sont différents de zéro et μ est une charge première concentrée en la frontière idéale de S. Mais il suit de (54) que $f(x_i) = f_1(x_i)$ pour $1 \leqq i \leqq k$ et

$$f(x_{k+1}) = f_1(x_{k+1}) + a \geqq f_1(x_{k+1}).$$

On voit donc que $f_1 \in \mathfrak{F}$ et la propriété extrémale de f entraîne que $a = 0$.

Corollaire 41 *a.* — *Dans les mêmes hypothèses, soit $\mathfrak{F}'$ l'ensemble des $f \in \mathfrak{F}$ telles que $f(x_{k+1}) \leqq c_{k+1}$. Alors, pour un x quelconque dans X tel que $x < x_{k+1}$ le minimum et le maximum de $f(x)$ pour $f \in \mathfrak{F}'$ sont atteints pour des K-nomes dont au plus $k+1$ coefficients ne s'annulent pas.*

Cela se démontre par la même méthode.

Le noyau K est dit *tchebyscheffien* sur $\mathrm{X} \times \mathrm{S}$ si, pour un choix quelconque de points en nombre fini, $x_1, \ldots, x_k \in \mathrm{X}$, le système $\{\mathrm{K}(x_1, s), \ldots, \mathrm{K}(x_k, s)\}$ est tchebyscheffien. Il s'ensuit, évidemment, que le système est, en effet, complètement tchebyscheffien. Pour que K soit tchebyscheffien, il faut et il suffit que pour deux ensembles finis quelconques de points distincts $x_1, \ldots, x_k \in X$ et $s_1, \ldots, s_k \in S$, le déterminant

$$\text{dét}(K(x_i, s_j)) \neq 0.$$

Cela montre que si $K_1(s, x) = K(x, s)$, alors K est tchebyscheffien sur $X \times S$ si et seulement si K_1 l'est sur $S \times X$. On trouvera des exemples de noyaux tchebyscheffiens dans Pólya-Szegö (vol. II, p. 52). Un autre exemple est $K(x, s) = (x + s)^{-1}$, $X = (0, \infty)$, $S = [0, \infty)$ qui est le noyau de la transformation de Stieltjes (*cf.* Widder [72]).

Corollaire 41 *b*. — *Dans les hypothèses du théorème* 41, *si* K *est tchebyscheffien, le* K-*nome extrémal est unique. Dans les mêmes hypothèses, si* $x \neq x_1, \ldots, x_{k+1}$, *les fonctions extrémales de* $\mathfrak{F}'$, *dont l'existence est affirmée dans le corollaire* 41 *a*, *sont uniques.*

On tire maintenant du principe de déformation le

Corollaire 41 *c*. — *Retenons les hypothèses du théorème* 41. *Supposons d'ailleurs que* K *est tchebyscheffien. Soit* P *le* K-*nome qui donne à* $f(x_{k+1})$ *un minimum pour* $f \in \mathfrak{F}$, *soit* $\mathfrak{B}$ *l'ensemble des entiers i tels que* $P(x_i) = c_i$, *soient* $x'_1 < \ldots < x'_{k+1}$, $x'_i \in X$ *et* $P(x'_i) = c'_i$ *pour* $1 \leqq i \leqq k+1$ *et soit* $\mathfrak{F}'$ *l'ensemble des* $f \in \mathfrak{A}(x'_{k+1})$ *telles que*

$$\left\{\begin{array}{ll} f(x'_i) = c'_i, & (i \in \mathfrak{E} \cap \mathfrak{B}), \\ f(x'_i) \leqq c'_i, & (i \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{B}), \\ f(x'_i) \geqq c'_i, & (i \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{B}). \end{array}\right. \tag{55}$$

Alors le minimum de $f(x'_{k+1})$ *pour* $f \in \mathfrak{F}'$ *est atteint pour* $f = P$.

Corollaire 41 *d*. — *Conservons les hypothèses du corollaire* 41 *a*. *Supposons d'ailleurs que* K *est tchebyscheffien. Soit* P *le* K-*nome pour lequel le maximum de* $\eta f(x_0)$, $\eta = \pm 1$, *pour* $f \in \mathfrak{F}$ *est atteint, où* $x_j < x_0 < x_{j+1}$. *Soient* $\mathfrak{B}$, x'_i, c'_i *comme dans le corollaire* 41 *c et soit* $\mathfrak{F}''$ *l'ensemble des* $f \in \mathfrak{A}(x'_{k+1})$ *qui satisfont aux conditions* (55) *et telles que* $f(x'_{k+1}) \leqq c'_{k+1}$, *et soit* $x'_j < x'_0 < x'_{j+1}$. *Alors, le maximum de* $\eta f(x'_0)$ *pour* $f \in \mathfrak{F}''$ *est atteint pour* $f = P$.

Conservant les notations et hypothèses du théorème 41, si K est tchebyscheffien, nous appelons le K-nome, pour lequel le minimum de $f(x_{k+1})$ est atteint pour $f \in \mathfrak{F}$, la fonction principale (f. p.) de $\mathfrak{F}$. En vertu du corollaire 41 *c*, la f. p. de $\mathfrak{F}$ est indépendante de x_{k+1}.

Corollaire 41 *e*. — *Si* K *est tchebyscheffien, et* $x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1}$ *et* $x_i \in X$ *pour* $1 \leqq i \leqq k+1$, *et* $\mathfrak{F}$ *est la classe des* $f \in \mathfrak{A}(x_{k+1})$ *telles que* $f(x_i) = c_i$, $1 \leqq i \leqq k$, *et si* P *est la f. p. de* $\mathfrak{F}$, *quel que soit* $x'_{k+1} > x_k$ *et* $g \in \mathfrak{A}(x'_{k+1})$, *la fonction* $g - P$ *s'annule k fois au plus dans* X, *à moins qu'elle ne s'annule identiquement.*

La démonstration en est analogue à celle du corollaire 21 *b*.

Corollaire 41 *f*. — *Dans les hypothèses du corollaire* 41 *e, la fonction* P *donne à $f(x)$ pour $f \in \mathfrak{F}$ un minimum lorsque x est dans les intervalles $(x_k, x_{k+1}]$, (x_{k-2}, x_{k-1}), ..., et un maximum lorsque x est dans les intervalles (x_{k-1}, x_k), (x_{k-3}, x_{k-2}), ...*

La démonstration suit celle du corollaire 21 *c*.

Définissons l'*ordre* d'un K-nome P comme le nombre maximum des zéros $\leq x_0$ de $f - P$ pour $f \in \mathfrak{A}(x_0)$, $x_0 \in X$, $f \neq P$ et, comme auparavant, nous désignons l'ordre de P par $\omega(P)$. L'analogue du corollaire 21 *d* est encore valide. Exposons maintenant une méthode pour déterminer l'ordre d'un K-nome dans des conditions convenables.

Nous dirons que K est *cartésien* si, quels que soient les points $s_1, \ldots, s_k$ dans S, où $s_1 < \ldots < s_k$, le système $\{K(x, s_1), \ldots, K(x, s_k)\}$ est cartésien sur X. Les exemples donnés dans Pólya-Szegö (vol. II, p. 52), sont des noyaux cartésiens.

Théorème 42. — *Si* K *est cartésien, et*

$$P(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i K(x, s_i) \qquad (a_i > 0, \ 1 \leq i \leq r),$$

alors $\omega(P) = a + 2b$, où a est le nombre des extrémités de S *et b le nombre des points intérieurs parmi les points $s_1, \ldots, s_r$.*

Démonstration. — Soit $k = a + 2b$, $x_0 \in X$, $g \in \mathfrak{A}(x_0)$. Supposons que $g - P$ s'annule en $x_1, \ldots, x_{k+1}$, où $x_i \in X$ et $x_1 < \ldots < x_{k+1} \leq x_0$. Si $g \neq P$, il y a un point $y \leq x_0$ tel que $g(y) \neq P(y)$. Considérons l'ensemble $\mathfrak{F}$ des $f \in \mathfrak{A}(x_0)$ telles que

$$f(x_i) = g(x_i) \qquad (1 \leq i \leq k+1)$$

et

$$f(y) = g(y).$$

En vertu du théorème 41, $\mathfrak{F}$ contient un K-nome Q. Soient $t_1, \ldots, t_\nu$ les points de S qui rentrent dans les représentations de P et Q comme des K-nomes, où $t_1 < \ldots < t_\nu$. Or $Q - P$ est une combinaison linéaire des $K(x, t_i)$ $(1 \leq i \leq \nu)$, dont les coefficients changent de signe k fois au plus. Alors la fonction $Q - P$ s'annule k fois au plus, à moins qu'elle ne s'annule identiquement. Mais c'est là une absurdité, parce que

$$Q(x_i) - P(x_i) = 0 \qquad (1 \leq i \leq k+1),$$

tandis que

$$Q(y) - P(y) = g(y) - P(y) \neq 0.$$

Il s'ensuit que l'ordre de P est au plus égal à k.

Nous devons montrer maintenant que l'ordre de P n'est pas inférieur à k. Soit $s_1 < \ldots < s_r$ et posons $t_i = \frac{(s_i + s_{i+1})}{2}$ $(i = 1, \ldots, r-1)$ et si s_1 ou s_r est intérieur à S, choisissons un point t_0 ou t_r dans S tel que $t_0 < s_1$ ou $t_r > s_r$. Le système $\{K(x, t_0), K(x, s_1), K(x, t_1), \ldots, K(x, s_r), K(x, t_r)\}$ est cartésien sur X et l'ordre de P comme combinaison linéaire de ceux-ci est exactement égal à k, en vertu du théorème 23, de sorte qu'il y a un k-nome $Q = \Sigma b_i K(x, s_i) + \Sigma c_i K(x, t_i)$ aux coefficients non négatifs tel que $Q - P$ s'annule k fois sans s'annuler identiquement.

Il est facile maintenant de démontrer les analogues des théorèmes 24, 25 et 27 et leurs corollaires. L'énoncé de l'analogue du théorème 28 est assez compliqué, parce que la détermination des paramètres qui y interviennent dépend, en général, de certaines équations transcendantes qui sont difficiles à résoudre explicitement. Le cas $K(x, s) = e^{xs}$, $S = [0, \infty)$, $X = (-\infty, 0]$, donne presque tous les résultats essentiels de Bernstein [8] sur les fonctions absolument monotones dans l'intervalle $(-\infty, 0]$. Nous n'entrons pas ici dans les détails, parce que le lecteur lui-même pourra dès maintenant faire le nécessaire sans difficulté. Le corollaire curieux qui suit peut posséder quelque intérêt.

Théorème 43. — *Soit $0 \geqq x_0 > x_1 > \ldots$ une suite telle que Σx_n^{-1} diverge, et soient c_0, c_1 et c_2 des constantes données. Alors, pour qu'il existe des constantes $c_3, \ldots,$ telles que*

$$[c_{i_0}, c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}] \geqq 0,$$

quels que soient les entiers non négatifs $i_0, \ldots, i_n$, où

$$[c_n] = c_n,$$
$$[c_{i_0}, \ldots, c_{i_n}] = \frac{[c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}] - [c_{i_0}, \ldots, c_{i_{n-1}}]}{x_{i_n} - x_{i_0}},$$

il faut et il suffit que $c_0 \geqq c_1 \geqq c_2 \geqq 0$ et

$$[\log c_0, \log c_1, \log c_2] \geqq 0$$

(*cf.* Feller [21], Widder [72]).

Les méthodes exposées ci-dessus s'appliquent aussi si X et S sont des ensembles linéaires plus compliqués. De cette façon, nous pouvons discuter des généralisations de l'inégalité de trois lignes (*cf.* Dœtsch [20]) aux problèmes analogues pour les moyennes quadratiques des fonctions presque périodiques dans des bandes, dont les spectres sont contenus dans un ensemble donné d'avance.

Un de nos collègues, J. A. Honig [78], est en train d'étudier l'application de cette théorie à quelques problèmes de la Chimie Physique (*cf.* Sips [81]), où intervient la transformation de Stieltjes.

Nous espérons revenir sur ces questions et aux autres applications de nos méthodes dans un autre travail.

APPENDICE.

Quelques remarques sur les théorèmes de trois et de quatre cercles.

Dans cet appendice, nous voudrons faire quelques observations concernant les rapports entre le théorème classique de trois cercles de Hadamard et les théorèmes de trois et de quatre cercles démontrés ici (les théorèmes 27 et 28), et nous voudrons aussi éclairer quelques théorèmes analogues.

Il y a plusieurs méthodes pour mesurer la grandeur d'une fonction analytique sur un cercle. Les plus importantes en sont les moyennes intégrales

$$M_p(r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\theta})|^p \, d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (0 < p < \infty),$$

le maximum du module

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = M_\infty(r) = \lim_{p \to \infty} M_p(r),$$

et la moyenne logarithmique de Nevanlinna, que nous ne discutons pas ici. Si f est analytique sur $|z| = r$, alors $M_p(r)$ est croissante comme fonction de p (*cf.* Hardy, Littlewood et Pólya [32]). Si f est analytique dans $|z| \leqq R$, ces moyennes sont des fonctions croissantes de r. Cela s'ensuit de la subharmonicité de $\log |f(z)|$ (*Cf.* F. Riesz [54]). Si f est analytique et $|f|$ est uniforme dans la couronne $R_1 \leqq |z| \leqq R_2$, alors $\log M_p(r)$ est une fonction convexe de $\log r$ (Hadamard [28], Hardy [31]). L'inégalité ainsi obtenue ne peut pas être améliorée et la fonction extrémale est de la forme cz^λ, où λ est un nombre réel déterminé par les valeurs données de $M_p(R_1)$ et $M_p(R_2)$. Si l'on restreint f de manière à être uniforme dans la couronne, on peut, en général, améliorer cette inégalité. Dans le cas $p = \infty$, la fonction extrémale peut s'exprimer par le moyen des fonctions θ et elle a été déterminée par Teichmüller [64], Robinson [55] et, implicitement, par Heins [33]. Dans le cas $p = 2$, la fonction extrémale est une onction rationnelle simple qu'a déterminé Carlson [14]. Son résultat est une légère modification du théorème 27. Le problème n'est pas résolu pour d'autres valeurs de p.

Si f est analytique dans $|z| \leqq R$ et si les valeurs de $M_p(r_1)$ et $M_p(r_2)$ sont données, où $0 \leqq r_1 < r_2 \leqq R$, il est, en général, assez difficile de déterminer la plus grande valeur possible de $M_p(r)$ pour $r_1 < r < r_2$. Dans le cas $p = \infty$, Heins [34] a discuté ce problème et a obtenu des résultats très intéressants et très importants. L'inégalité de Carlson [14] (notre théorème 27) résoud le cas $p = 2$. On n'a guère abordé le problème pour d'autres valeurs de p.

Le théorème 28 donne une inégalité de quatre cercles pour $p = 2$ et notre méthode générale nous permet d'obtenir la forme générale d'un théorème de k cercles pour la moyenne quadratique et de déterminer la fonction extrémale explicitement pour $k = 4$, 5 et 6. Dans un travail pas encore paru, Garabedian [25] a traité le cas où $p = \infty$, $k = 4$, lorsque le rayon du plus petit cercle est égal à zéro. Il a trouvé des phénomènes nouveaux, mais il paraît que les méthodes de Heins sont toujours applicables en ce cas. On en sait très peu à l'égard du cas général.

On est amené à se demander comment $M_p(r)$ varie lorsque les nombres p et r varient simultanément. L'inégalité

$$M_\infty(r) \leqq M_p(R) R \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|R e^{i\theta} - r|^q} \right\}^{\frac{1}{q}},$$

pour $0 \leqq r < R$, où $1 \leqq p \leqq \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, est une conséquence triviale de l'inégalité de Hölder. L'inégalité

$$M_\infty(r) \leqq \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} M_2(R) \qquad (0 \leqq r < R) \tag{56}$$

est la meilleure possible et résulte immédiatement de l'inégalité de Schwarz. Ces inégalités valent dans la supposition que f est analytique pour $|z| \leqq R$. D'autres résultats de ce genre sont dus à Kakeya [39].

Si f est analytique dans $|z| \leqq R$ et $0 \leqq R_1 \leqq R_2 < R_3 = R$, et les valeurs de $M_2(R_1)$ et $M_2(R_3)$ sont données, on peut chercher la plus grande valeur possible de $M_\infty(R_2)$. Ce problème est un cas particulier d'un problème plus général dans l'espace de Hilbert, que nous allons traiter maintenant. Nous nous servons des notations et des désignations usuelles (*cf.*, par exemple, Murray [49]).

Soit A une transformation bornée, non négative et hermitienne dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, soit $f_0 \in \mathfrak{H}$, et soit τ une constante donnée. Cherchons la plus grande valeur possible de $|(f, f_0)|$ lorsque l'élément f parcourt l'ensemble de ceux qui satisfont aux conditions

$$\|f\| = 1, \qquad (Af, f) = \tau. \tag{57}$$

Pour résoudre ce problème, nous avons besoin de la forme suivante de l'inégalité de Schwarz.

Lemme 44. — *Si* B *est une transformation hermitienne non négative sur* $\mathfrak{H}$, *alors*

$$|(Bf, g)| \leqq \sqrt{(Bf, f)(Bg, g)}.$$

Soit maintenant $C = \|A\|$, de sorte que $0 \leqq (Af, f) \leqq C\|f\|^2$, quel que soit $f \in \mathfrak{H}$. Alors pour $x > C$, la transformation $xI - A$ est positive définie, de sorte que si $g_0 = (xI - A)^{-1} f_0$, on a

$$\begin{aligned} |(f, f_0)| = |((xI - A)g_0, f)| &\leqq \sqrt{((xI - A)g_0, g_0)((xI - A)f, f)} \\ &\leqq \sqrt{(f_0, g_0)(x - \tau)} = \sqrt{F(x)(x - \tau)}, \end{aligned} \tag{58}$$

où

$$F(x) = (f_0, g_0) = (g_0, f_0) = ((xI - A)^{-1} f_0, f_0).$$

De même, si $x < 0$, la transformation $A - xI$ est positive, et nous obtenons la même inégalité.

Si l'on choisit x de façon que la valeur de $F(x)(x - \tau)$ soit aussi petite que possible, alors

$$h(x) = x + \frac{F(x)}{F'(x)} = \tau.$$

Étudions donc cette fonction h. On a

$$h'(x) = 2 - \frac{F(x)\,F''(x)}{F'(x)^2}.$$

Mais

$$F'(x) = -((xI - A)^{-2} f_0, f_0)$$

et

$$F''(x) = 2((xI - A)^{-3} f_0, f_0).$$

de sorte que

$$F'(x)^2 = ((xI - A)^{-1}f_0, (xI - A)^{-1}f_0)^2 \leqq ((xI - A)^{-1}f_0, f_0)((xI - A)^{-2}f_0, (xI - A)^{-1}f_0$$

$$\leqq \frac{1}{2} F(x) F''(x).$$

en vertu du lemme et du fait que $xI - A$ est définie pour $x > C$ ou $x < 0$. Il résulte que $h' < 0$ et h est décroissante en dehors de l'intervalle $[0, C]$ (¹).

Or, A possède la représentation intégrale

$$A = \int_0^C \lambda \, dE(\lambda),$$

où $E(\lambda)$ est une résolution de l'identité, de sorte que $F(x)$ est la transformée de Stieltjes

$$F(x) = \int_0^C \frac{1}{x - \lambda} d\alpha(\lambda).$$

où

$$\alpha(\lambda) = (E(\lambda)f_0, f_0)$$

(*cf.* Hilbert [37], Murray [49]). La fonction α est non décroissante et $\alpha(0) = 0$, $\alpha(C) = \|f_0\|^2$. En général, $F(x)$ tend vers l'infini lorsque $x \to C^+$ ou 0^-. Par exemple, si $\alpha(C) - \alpha(C^-) > 0$ ou si

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\frac{C}{2}}^{C-\varepsilon} \frac{1}{C - \lambda} d\alpha(\lambda) = +\infty,$$

alors $F(x) \to \infty$ lorsque $x \to C^+$.

Mais on a

$$F(x)^2 = |((xI - A)^{-1}f_0, f_0)^2| \leqq \|(xI - A)^{-1}f_0\|^2 \|f_0\|^2 \leqq \|f_0\|^2 |F'(x)|$$
$$= - \|f_0\|^2 F'(x).$$

d'où il résulte que

$$-\frac{\|f_0\|^2}{|F(x)|} \leqq \frac{|F(x)|}{F'(x)} < 0.$$

ce qui montre que si $|F(x)| \to \infty$ lorsque $x \to C^+$ ou 0^-, alors $\frac{F(x)}{F'(x)} \to 0$.

On voit ainsi que si

(59) $$\lim_{x \to C^+} F(x) = \lim_{x \to 0^-} |F(x)| = +\infty,$$

alors h décroît de C à τ_0 dans $[C, +\infty]$ et de τ_0 à 0 dans $[-\infty, 0]$, où

$$\tau_0 = \lim_{x \to \infty} h(x) = \frac{(Af_0, f_0)}{\|f_0\|^2}.$$

(¹) Nous supposons que f_0 n'est pas une fonction propre de A. Si $Af_0 = \lambda f_0$ alors

$$F(x) = (x - \lambda)^{-1} \|f_0\|^2,$$

et le maximum de $|(f, f_0)|$ est égal à $\min\left(\frac{\tau}{\lambda}, \frac{(C - \tau)}{(C - \lambda)}\right)$, c'est-à-dire $\frac{\tau}{\lambda}$ si $0 \leqq \tau \leqq \lambda$ et $\frac{(C - \tau)}{(C - \lambda)}$ si $\lambda < \tau \leqq C$.

Si (59) a lieu, $0 < \tau < C$ et $\tau \neq \tau_0$, alors il y a un point unique x hors de l'intervalle $[0, C]$ tel que $h(x) = \tau$ et nous concluons que

$$|(f, f_0)| \leq (F(x)(x-\tau))^{\frac{1}{2}} = \frac{|F(x)|}{\sqrt{-F'(x)}}.$$

Si $f = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, alors

$$\|f\| = 1 \quad \text{et} \quad (Af, f) = \frac{(Ag_0, g_0)}{\|g_0\|^2}.$$

Mais

$$F(x) = ((xI - A)g_0, g_0) = x\|g_0\|^2 - (Ag_0, g_0)$$

et

$$F'(x) = -((xI - A)^{-2} f_0, f_0) = -((xI - A)^{-1} g_0, (xI - A) g_0)$$
$$= -(g_0, g_0) = -\|g_0\|^2,$$

de sorte que

$$\tau = x + \frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{(Ag_0, g_0)}{\|g^0\|^2} = (Af, f)$$

et

$$(f, f_0) = \frac{(g_0, f_0)}{\|g_0\|} = \frac{F(x)}{\sqrt{-F'(x)}}.$$

Nous avons ainsi démontré le

Théorème 45. — *Soit* A *une transformation bornée non négative hermitienne, soit* $\|A\| = C$. *Soit* $f_0 \in \mathfrak{H}$, $0 < \tau < C$, $\tau \neq \tau_0 = \frac{(Af_0, f_0)}{\|f_0\|^2}$. *Supposons que* f_0 *n'est pas une fonction propre de* A. *Si* (59) *a lieu, et* $\|f\| = 1$, $(Af, f) = \tau$, *alors*

$$|(f, f_0)| \leq \frac{|F(x)|}{\sqrt{-F'(x)}},$$

où

$$F(x) = ((xI - A)^{-1} f_0, f_0),$$

et x *est la racine unique de l'équation*

$$x + \frac{F(x)}{F'(x)} = \tau \tag{60}$$

qui se trouve en dehors de l'intervalle $[0, C]$. *L'égalité est atteinte seulement pour*

$$f = e^{i\theta} \frac{g_0}{\|g_0\|}, \quad \text{où} \quad g_0 = (xI - A)^{-1} f_0.$$

Si $\tau = \tau_0$, *on ne peut pas améliorer l'inégalité triviale*

$$|(f, f_0)| \leq \|f_0\|,$$

où l'égalité vaut pour $f = e^{i\theta} \frac{f_0}{\|f_0\|}$ (1).

Si l'on représente les éléments de $\mathfrak{H}$ comme des suites $f = (f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}, \ldots)$,

(1) Le cas où f_0 est une fonction propre de A est traité p. 201.

avec $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |f^{(n)}|^2$ et si l'on prend $Af = (f^{(1)}, 2^{-2}f^{(2)}, \ldots, n^{-2}f^{(n)}, \ldots)$, tandis que f_0 est choisi comme $\left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$, alors $F(x)$ est essentiellement $\cot x$ et un calcul facile conduit à l'inégalité de Carlson [13] :

Corollaire 45*a*.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}\right|^4 < \pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^2}\right).$$

On ne peut pas remplacer la constante π^2 par une constante plus petite.

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction analytique dans $|z| < 1$ telle que

$$\|f\|^2 = M_2(1)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty,$$

Soit $A_r f = f(r^2 z)$, $0 < r < 1$, de sorte que $C = \|A\| = 1$. Alors

$$(A_r f, f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = M_2(r).$$

Soit $f_0 = (1 - \rho z)^{-1}$, où $r \leqq \rho < 1$. Le problème général se réduit à celui de trouver la plus grande valeur possible de $f(\rho)$, étant donné $M_2(1) = 1$, $M_2(r) = \sqrt{\tau}$.

Nous sommes donc conduits à étudier les fonctions

$$F(x) = ((xI - A_r)^{-1} f_0, f_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{2n}}{x - r^{2n}}$$

et

$$h(x) = x + \frac{F(x)}{F'(x)}.$$

Or

$$F(r^{2N}x) = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2N} \sum_{n=-N}^{\infty} \frac{\rho^{2n}}{x - r^{2n}} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2N} F_N(x),$$

et

$$F'(r^{2N}x) = \left(\frac{\rho}{r^2}\right)^{2N} F'_N(x).$$

Si $r < \rho < 1$, alors

$$G(x) = \lim_{N \to \infty} F_N(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho^{2n}}{x - r^{2n}}$$

existe. On a

$$\begin{aligned} F(x)F'_1(x) - F_1(x)F'(x) &= -\frac{\rho^{-2}F(x)}{(x - r^{-2})^2} - \frac{\rho^{-2}F'(x)}{(x - r^{-2})} \\ &= -\frac{r^2}{\rho^2(r^2 x - 1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{2n}(1 - r^{2n+2})}{(x - r^{2n})^2} < 0, \end{aligned}$$

de sorte que

$$r^2 h(x) - h(r^2 x) = \frac{r^2(F(x)F'_1(x) - F'(x)F_1(x))}{F'(x)F'_1(x)} < 0$$

et

$$h(x) < \frac{h(r^2 x)}{r^2}.$$

Il s'ensuit que

$$h(x) < \frac{h(r^{2N}x)}{r^{2N}} < \lim_{k \to \infty} \frac{h(r^{2k}x)}{r^{2k}} = x + \frac{G(x)}{G'(x)} = H(x).$$

Soit $0 < \tau < h(-1)$ et soit $x = -y$ la racine de (60), de sorte que $0 < y < 1$. Soit N l'entier tel que

$$1 \leqq y r^{-2N} = Y < r^{-2}.$$

Alors

$$r^{2N} h(-r^{-2}) \leqq r^{2N} h(-Y) \leqq \tau = h(-r^{2N}Y) < r^{2N} H(-Y) < r^{2N} H(-1)$$

et

$$\frac{\log\tau - \log h(-r^{-2})}{2\log r} \leqq N \leqq \frac{\log\tau - \log H(-1)}{2\log r}.$$

Soit

$$L(x) = -\frac{F(x)^2}{F'(x)}.$$

Alors $L'(x) = -F(x)\,h'(x) < 0$ pour $x < 0$, de sorte que L est décroissante pour $x < 0$. On a

$$L(r^{2N}x) = -\rho^{2N}\frac{F_N(x)^2}{F'_N(x)}$$

et

$$L(r^2 x) - \rho^2 L(x) = \rho^2\left(\frac{F(x)^2}{F'(x)} - \frac{F_1(x)^2}{F'_1(x)}\right)$$
$$= \frac{\rho^2\{F(FF'_1 - F_1F') + F'F'_1(F - F_1)\}}{F'F'_1} > 0 \qquad \text{si } x < 0.$$

Par conséquent, si $x < 0$,

$$L(x) < \frac{L(r^{2N}x)}{\rho^{2N}} < \lim_{k \to \infty} \frac{L(r^{2k}x)}{\rho^{2k}} = -\frac{G(x)^2}{G'(x)}.$$

En particulier,

$$\rho^{2N}L(-1) \leqq \rho^{2N}L(-Y) < L(-r^{2N}Y) < -\rho^{2N}\frac{G(-Y)^2}{G'(-Y)} < -\rho^{2N}\frac{G(-r^{-2})^2}{G'(-r^{-2})}$$

et

$$L(-1)\left(\frac{\tau}{H(-1)}\right)^{\frac{\log\rho}{\log r}} < L(x) = L(-r^{2N}Y) \leqq -\frac{G(-r^{-2})^2}{G'(-r^{-2})}\left(\frac{\tau}{h(-r^{-2})}\right)^{\frac{\log\rho}{\log r}}$$

Nous avons démontré le

Corollaire 45 *b*. — *Si f est analytique dans $|z| < 1$ et $0 < r < \rho < 1$, alors*

$$M_\infty(\rho) \leqq K(r, \rho)\, M_2(r)^{\frac{\log\rho}{\log r}} M_2(1)^{\frac{\log\left(\frac{r}{\rho}\right)}{\log r}},$$

où $K(r, \rho)$ *ne dépend que de r et ρ. Si $M_2(r) < \sqrt{h(-1)}\, M_2(1)$, alors la meilleure valeur de* K *satisfait à l'inégalité*

$$L(-1)\,H(-1)^{-\frac{\log\rho}{\log r}} \leqq K(r, \rho)^2 \leqq -\frac{G(-r^{-2})^2}{G'(-r^{-2})}\, h(-r^{-2})^{\frac{\log\rho}{\log r}}.$$

Si les valeurs de $M_2(r)$ et $M_2(1)$ *sont données, la fonction pour laquelle la plus grande valeur de* $M_\infty(\rho)$ *est atteinte à la forme*

$$f(z) = C\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho^n}{x - r^{2n}}\right)z^n,$$

où C *est une constante et* x *est déterminé par* (60).

De la même façon, on peut obtenir une inégalité de la forme

$$M_\infty(r) \leqq K_1(r)M_2(r)\left\{1 + \log\frac{M_2(1)}{M_2(r)}\right\},$$

où $K_1(r)$ *ne dépend que de* r. *On ne peut pas améliorer cette inégalité lorsque les valeurs de* $M_2(r)$ *et* $M_2(1)$ *sont données, sauf pour la valeur de la constante* $K_1(r)$.

Au moyen de ce corollaire et de l'inégalité (56) ci-dessus, on peut déduire des théorèmes de k cercles pour le cas $p = \infty$ du cas $p = 2$. Les inégalités ainsi obtenues ne sont pas les meilleures possibles, mais elles donnent des bornes dont l'ordre de magnitude est à peu près correcte.

Comme nous l'avons déjà remarqué, la fonction extrémale dans le théorème de trois cercles de Hadamard est de la forme $f(z) = Cz^\lambda$, où C et λ sont déterminés par les valeurs données de $M_\infty(R_1)$ et $M_\infty(R_2)$. Si l'on fixe la valeur de $M_\infty(R_1)$, on peut assigner à $M_\infty(R_2)$ des valeurs aussi grandes que l'on veut pour que λ soit un entier positif et alors cette fonction est aussi la fonction extrémale pour le cas où f est supposée analytique dans tout le cercle $|z| \leqq R_2$. Il y a donc des valeurs arbitrairement grandes de $M_\infty(R_2)$ telles que la fonction extrémale pour le dernier problème ne s'annule qu'à l'origine. Le théorème suivant montre qu'à cet égard on rencontre un phénomène tout nouveau dans le théorème de quatre cercles.

THÉORÈME 46. — *Soit* $0 < r_1 < r_2 < r_3 < 1$ *et* $0 < \beta < 2\pi$ *et soit* α_0 *le maximum sur* $|z| = r_3$ *de la fonction* $v(z)$ *qui est harmonique dans le domaine* $r_2 < |z| < 1$, $\frac{\beta}{2} < \arg z < 2\pi - \frac{\beta}{2}$, *et qui est égal à* 1 *pour* $|z| = 1$ *et s'annule sur le reste de la frontière. Supposons que* f *est analytique dans* $|z| \leqq 1$ *et que*

$$(61)\qquad 0 < a \leqq M_\infty(r_1), \qquad M_\infty(r_2) \leqq b, \qquad M_\infty(r_3) \geqq M_\infty(1)^\alpha,$$

où $\alpha > \alpha_0$. *Alors il existe deux constantes* K *et* Ω, *qui ne dépendent que des paramètres* a, b, r_1, r_2, r_3, α *et* β, *telles que si* $M_\infty(1) \geqq K$, *la fonction* f *possède au moins* $\Omega \log M_\infty(1)$ *zéros dans chaque secteur* $\gamma \leqq \arg z \leqq \gamma + \beta$ *d'ouverture* β *avec le sommet à l'origine.*

Pour la démonstration, nous avons besoin de quelques lemmes, dont le premier est essentiellement connu.

LEMME 46 *a*. — *Si* f *est analytique et* $|f(z)| \leqq M$ *dans* $|z| \leqq R$ *et si* $|f(z_0)| \geqq a > 0$, *où* $|z_0| = r < R$, *alors*

$$|f(z)| \geqq \frac{a}{2} \qquad \text{pour} \qquad |z - z_0| \leqq \frac{a(R-r)}{4M}.$$

Démonstration. — Posons $g(z) = \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. On a donc

$$|g(z)| \leqq \frac{2M}{R-r} \qquad \text{pour} \quad |z| = R$$

et alors aussi pour $|z| \leqq R$. Il en résulte que

$$|f(z)-f(z_0)| \leqq \frac{2M|z-z_0|}{R-r} \leqq \frac{a}{2} \qquad \text{si} \quad |z-z_0| \leqq \frac{a(R-r)}{4M}.$$

LEMME 46 *b*. — *Supposons que f est analytique et $\mathfrak{R}(f(z)) = u(z) \geqq 0$ dans $|z| \leqq 1$ et $\mathfrak{I}(f(0)) = 0$, et que $|u(z)-1| \leqq \varepsilon \leqq 1$ pour $|z| \leqq r < 1$. Alors*

$$|f(z)-1| \leqq C_1(r, \rho)\, \varepsilon^{C_2(r, \rho)}$$

pour $|z| \leqq \rho$, $r < \rho < 1$, où C_1 et C_2 ne dépendent que de r et ρ.

Démonstration. — Si $\rho < \sigma < 1$, on a

$$|f(z)| \leqq (1+\varepsilon)\frac{1+\sigma}{1-\sigma} < \frac{4}{1-\sigma} \qquad \text{pour} \quad |z| \leqq \sigma$$

(Pólya-Szegö [51], vol. I, p. 140, prob. 287). On a aussi

$$|\mathfrak{R}(f(z)-f(0))| \leqq |(u(z)-1)-(u(0)-1)| \leqq 2\varepsilon \qquad \text{pour} \quad |z| \leqq r.$$

Alors

$$\begin{aligned} |f(z)-1| &\leqq |f(z)-f(0)| + |f(0)-1| \\ &\leqq 2\varepsilon\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\log 3 + 1\right) = C\varepsilon \qquad \text{pour} \quad |z| \leqq \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|f(z)-1| \leqq (C\varepsilon)^A\left(1+\frac{4}{1-\sigma}\right)^B \qquad \text{pour} \quad |z| \leqq \rho,$$

où

$$A = \frac{\log\left(\dfrac{\sigma}{\rho}\right)}{\log\left(\dfrac{2\sigma}{\rho}\right)} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{\log\left(\dfrac{2\rho}{r}\right)}{\log\left(\dfrac{2\sigma}{r}\right)}$$

en vertu du théorème de trois cercles de Hadamard. On peut poser

$$\sigma = \frac{1+\rho}{2}.$$

LEMME 46 *c*. — *Supposons que f est analytique et $\mathfrak{R}(f(z)) = u(z) \geqq 0$ dans le domaine D borné et simplement connexe, que $\mathfrak{I}(f(z_0)) = 0$ et que*

$$|u(z)-1| \leqq \varepsilon \leqq 1 \qquad \text{pour} \quad |z-z_0| \leqq r.$$

Supposons que la distance du point z_0 de la frontière de D est au moins égale à $R > r$, et soit $h > 0$. Alors, il y a des constantes positives C_1 et C_2 qui ne dépendent que de D, r, R et h, telles que

$$|f(z)-1| \leqq C_1\, \varepsilon^{C_2}$$

en chaque point z dont la distance de la frontière de D est au moins égale à h.

On peut déduire ce lemme du précédent par la représentation conforme du domaine D sur le cercle-unité.

Nous sommes prêts maintenant à démontrer le théorème. Supposons qu'il ne soit pas exact. Alors il y aurait une suite de fonctions $f_n(z)$ analytiques dans $|z|\leqq 1$ qui satisfont aux conditions (61), telles que

$$M_\infty(1) = M_\infty(1, f_n) \to \infty \qquad \text{et} \qquad N_n = o(\log M_\infty(1, f_n)),$$

où N_n est le nombre des zéros de f_n dans le secteur $|\arg z| \leqq \frac{\beta}{2}$. Choisissons r_4, r_5, r_6 et β_1 tels que $0 < \beta_1 < \beta$, $r_3 < r_4 < 1$, $r_1 < r_5 < r_6 < r_2$ et tels que r_4, r_5 et β_1 sont suffisamment proches des nombres 1, r_2 et β, respectivement, que le nombre α_1, qui leur correspond comme α_0 correspond à ceux-ci, est encore inférieur à α. Soient $z_1, \ldots, z_\nu$ les zéros de f_n dans le domaine E, de la forme d'un trou de serrure, qui consiste du cercle $|z| \leqq r_6$ et du secteur $|z \leqq |r_7 = \frac{1+r_4}{2}$, $|\arg z| \leqq \frac{\beta_2}{2}$, où $\beta_2 = \frac{\beta + \beta_1}{2}$. Posons

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{\nu} \left(\frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z} \right)$$

et

$$g_n(z) = \log \frac{f_n(z)}{P_n(z)},$$

où l'on choisit la détermination du logarithme de façon que $-\pi \leqq \mathfrak{I}(g_n(z_0)) < \pi$ en quelque point z_0 sur $|z| = r_1$, où $|f_n(z_0)| \geqq a$ et enfin

$$h_n(z) = 1 - \frac{g_n(z) - i\mathfrak{I}(g_n(z_0))}{\pi + \log M_\infty(1, f_n)}.$$

Or $\mathfrak{R}(g_n(z)) \leqq \log M_\infty(1, f_n)$ pour $|z| \leqq 1$ (Pólya-Szegö[51], vol. I, p. 142), de sorte que $\mathfrak{R}(h_n(z)) \geqq 0$ pour $|z| \leqq 1$. D'ailleurs, si $|z_0| = r_1$, $|f_n(z_0)| \geqq a$, alors

$$b \geqq |f_n(z)| \geqq \frac{a}{2} \qquad \text{pour} \quad |z - z_0| \leqq \frac{a(r_7 - r_1)}{4b}.$$

Il s'ensuit que $|z_k - z_0| \geqq \frac{a(r_7 - r_1)}{4b}$, et

$$1 \geqq |P_n(z)| \geqq c^\nu, \qquad c = \frac{a(r_7 - r_1)}{8b(1 - r_7)} \qquad \text{pour} \qquad |z - z_0| \leqq \frac{a(r_7 - r_1)}{8b}.$$

On a donc

$$|\mathfrak{R}(g_n(z))| \leqq \max\left(\log b - \nu \log c, \log \frac{a}{2} \right),$$

et alors

$$|\mathfrak{R}(h_n(z)) - 1| \leqq \varepsilon_n \to 0 \qquad \text{pour} \quad |z - z_0| \leqq \frac{a(r_7 - r_1)}{8b}.$$

Par conséquent,

$$|h_n(z) - 1| \leqq C_1 \varepsilon_n^{C_2} = \delta_n$$

dans le domaine fermé E_1 qui consiste du cercle $|z| \leq r_5$ et du secteur $|z| \leq r_4$, $|\arg z| \leq \frac{\beta_1}{2}$, en vertu du lemme **46** *c*. On conclut que

$$\mathfrak{R}(g_n(z)) \leq \delta_n(\pi + \log M_\infty(1, f_n))$$

dans E_1. Si α_1 est le maximum sur $|z| = r_3$ de la fonction $v_1(z)$ qui est harmonique dans $r_5 < |z| < r_4$, $\frac{\beta_1}{2} < \arg z < 2\pi - \frac{\beta_1}{2}$ et égale à 1 sur $|z| = r_4$ et égale à zéro sur le reste de la frontière, alors

$$\mathfrak{R}(g_n(z)) \leq (\alpha_1 + (1 - \alpha_1)\delta_n) \log M_\infty(1, f_n) + (1 - \alpha_1)\delta_n \pi \qquad \text{pour} \quad |z| = r_3.$$

(Ostrowski [49], Nevanlinna [48]). Mais si l'on choisit z sur $|z| = r_3$ de façon que $|f_n(z)| = M_\infty(r_3, f_n)$, on a

$$\alpha \leq \frac{\log |f_n(z)|}{\log M_\infty(1, f_n)} \leq \frac{\mathfrak{R}(g_n(z))}{\log M_\infty(1, f_n)} \leq \alpha_1 + o(1).$$

D'après la manière employée pour choisir les nombres r_4, r_5 et β_1, on a $\alpha_1 < \alpha$, de sorte que nous sommes arrivés à une contradiction. Le théorème est donc démontré.

Remarquons que

$$\alpha_0 < \frac{\log\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{\log\left(\frac{1}{r_2}\right)},$$

ce que l'on montre facilement en considérant la fonction harmonique $\dfrac{\log\left(\frac{r}{r_2}\right)}{\log\left(\frac{1}{r_2}\right)}$.

Soit maintenant $g(M)$ la plus grande valeur de $M_\infty(r_3)$ lorsque f parcourt les fonctions analytiques dans $|z| < 1$ qui satisfont aux conditions $M_\infty(r_1) \geq a > 0$, $M_\infty(r_2) \leq b$, $M_\infty(1) \leq M$. Alors $g(M)$ est non décroissante. Si l'on considère les polynomes

$$Q_n(z) = A + B z^n,$$

où A et B sont déterminés par les conditions $Q_n(r_1) = a$, $Q_n(r_2) = b$ et n est tellement grand que $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n > \frac{b}{a}$, on trouve que

$$\frac{\log g(M)}{\log M} \to \frac{\log\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{\log\left(\frac{1}{r_2}\right)}$$

lorsque M tend vers l'infini. Il en résulte que la fonction extrémale f_M telle que $M_\infty(r_3) = g(M)$ satisfait aux hypothèses du théorème **46** si M est suffisamment grand.

Dans le Mémoire [58], on trouvera une esquisse d'une autre démonstration du théorème **46** qui donne des estimations des quantités K et Ω.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. ALAOGLU, *Weak topologies of normed linear spaces* (*Ann. Math.*, 41, 1940, p. 252-267).

[2] A. D. ALEXANDROFF, *Additive set-functions in abstract spaces* (*Rec. Math.*, nouv. série, 8, (50), 1940, p. 307-348; t. 9 (51), 1941, p. 563-628; t. 13 (55), 1943, p. 169-238.

[3] P. ALEXANDROFF et H. HOPF, *Topologie I*, Berlin, J. Springer, 1935.

[4] R. BAIRE, *Leçons sur les fonctions discontinues*, Paris, Gauthier-Villars, 1904.

[5] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, Warsaw, 1932.

[6] T. BANG, *Une inégalité de Kolmogoroff et les fonctions presque périodiques* (*Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd.*, t. 19, n° 4, 1941, p. 28).

[7] S. BERNSTEIN, *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle*, Paris, Gauthier-Villars, 1926.

[8] S. BERNSTEIN, *Sur les fonctions absolument monotones* (*Acta Math.*, t. 52, 1928, p. 1-66).

[9] T. BONNESEN et W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, J. Springer, Berlin, 1934.

[10] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique* (*Actual. Sc. et Ind.*, Paris, Hermann, 1939-1946).

[11] C. CARATHÉODORY, *Über den Variabilitätsbereich der Fourier' schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen* (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 32, 1911, p. 193-217).

[12] C. CARATHÉODORY et L. FEJÉR, *Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landauschen Satz* (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 32, 1911, p. 218-239).

[13] F. CARLSON, *Une inégalité* (*Arkiv Mat.*, t. 25 B, n° 1, 1935, p. 5).

[14] F. CARLSON, *Sur le module maximum d'une fonction analytique* (*Ibid.*, t. 26 A, n° 9, 1938).

[15] H. CARTAN, *Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives* (*Actual. Sc. et Ind.*, n° 867, Paris, Hermann, 1940).

[16] J. A. CLARKSON, *Uniformly convex spaces* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 40, 1936, p. 396-414).

[17] E. F. COLLINGWOOD, *On three circles theorems* (I) (*J. London Math. Soc.*, t. 7, 1932, p. 162-166).

[18] M. M. DAY, *Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 47, 1941, p. 313-317).

[19] J. DEKKER, *Constructibility and the axiom of choice* (in preparation).

[20] G. DOETSCH, *Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden* (*Math. Zeit.*, t. 8, 1920, p. 237-240).

[21] W. FELLER, *Completely monotone functions and sequences* (*Duke Math. J.*, t. 5, 1939, p. 661-674).

[22] G. FICHTENHOLZ et KANTOROVITCH, *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées* (*Studia Math.*, t. 5, 1934, p. 69-98).

[23] M. FRÉCHET, *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (*Rend. Circ. Palermo*, t. 22, 1906, p. 1-74).

[24] M. FRÉCHET, *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

[25] P. R. GARABEDIAN, *Problems concerning the Schwarz lemma and the Pick-Nevanlina theory of interpolation* (in preparation).

[26] K. GÖDEL, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandte System I* (*Monats. Math. Phys.*, t. 38, 1931, p. 317-358).

[27] A. GORNY, *Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle* (*Acta Math.*, t. 71, 1939, p. 317-358).

[28] J. HADAMARD, *Sur les fonctions entières* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 24, 1939, p. 186-187).

[29] J. HADAMARD, *Sur le module maximun d'une fonction et de ses dérivées* (*Soc. Math. de France, C. R.*, 1914).

[30] H. HAHN, *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen* (*J. Reine Angew. Math.*, t. 157, 1927, p. 214-229).

[31] G. H. HARDY, *The mean value of the modulus of an analytic function* (*Proc. London Math. Soc.*, 2ᵉ série, t. 14, 1915, p. 269-277).

[32] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. PÓLYA, *Inequalities*, Cambridge, 1934.

[33] M. H. HEINS, *Extremal problems for functions analytic and single-valued in a doubly connected domain* (*Amer. J. Math.*, t. 62, 1940, p. 91-106).

[34] M. H. HEINS, *On a problem of Walsh concerning the Hadamard three circles theorem* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 55, 1944, p. 349-372).

[35] E. HELLY, *Über lineare Funktionaloperationen* (*Sitzungsber. Naturwis. Kl. Königl. Akad. Wiss.*, t. 121, 1921, p. 265-297).

[36] E. HELLY, *Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten* (*J. ber. Deutschen Math. Verein*, t. 32, 1923, p. 175-176).

[37] D. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* IV, (*Gött. Nachr.*, 1906, p. 157-227).

[38] S. KAKEYA, *On the positive harmonic functions* (*Tôhoku Science Rep.*, t. 5, 1916, p. 263-273).

[39] S. KAKEYA, *Upper and lower limits of some quantities regarding analytic functions* (*Tôhoku Science Rep.*, t. 6, 1917, p. 153-168; *Japan. Phys.-Math. Soc. Proc.*, 3e série, t. 6, 1924, p. 91-98).

[40] A. KOLMOGOROFF, *On inequalities between upper bounds of consecutive derivatives of an arbitrary function defined on an infinite interval* (*Uchenye Zapiski Moskov. Gos. Univ. Matematika*, t. 30, 1939, p. 3-16).

[41] M. KREIN et D. MILMAN, *On extreme points of regular comvex sets* (*Studia Math.*, t. 9, 1940, p. 133-138).

[42] M. KREIN et D. ŠMULIAN, *On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space* (*Ann. Math.*, t. 41, 1940, p. 556-583).

[43] F. LANNÉR, *On convex bodies with at least one point in common* (*Kungl. Fysiografiska Sällskapets Lund Förhandlingar*, t. 13, 5, 1943, p. 41-50).

[44] S. LEFSCHETZ, *Algebraic Topology*, New-York, 1930 (*Amer. Math. Soc. Colloquium Publications*, n° 27).

[45] S. MAZUR, *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen* (*Studia Math.*, t. 4, 1933, p. 70-84).

[46] D. MILMAN, *On some criteria for the regularity of spaces of the type* (B) *C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, t. 20 (nouv. série), 1938, p. 243-246).

[47] F. J. MURRAY, *Linear transformations in Hilbert space*, Princeton, 1941.

[48] F. et R. NEVANLINNA, *Uber die Eigenschaften einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie* (*Acta Soc. Sc. Fenn.*, t. 50, n° 5, 1922).

[49] A. OSTROWSKI, *Über allgemeine Konvergenzsätze der komplexen Funktionentheorie* (*J. ber. Deutschen Math. Verein.*, t. 32, 1923, p. 185-194).

[50] B. J. PETTIS, *A proof that every uniformly convex space is reflexive* (*Duke Math. J.*, t. 5, 1939, p. 249-253).

[51] G. PÓLYA et G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aux der Analysis*, Berlin, J. Springer, 1925.

[52] K. REIDEMEISTER, *Topologie der Polyeder*, Leipzig, Akad. Verlag., 1938.

[53] D. RESCH, *Analogues of Harnack's theorems for the heat equation* (in preparation).

[54] F. RIESZ, *Sur les valeurs moyennes des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques* (*Acta Univ. Szeged*, t. 1, 1922, p. 3-8).

[55] R. M. ROBINSON, *Analytic functions in circular rings* (*Duke Math. J.*, t. 10, 1943, p. 341-353).

[56] R. M. ROBINSON, *Hadamard's three circles theorem* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 50, 1944. p. 795-802).

[57] A. RODOV, *Relations between upper bounds of derivatives of functions of a real variable* (*Bull. Acad. Sc., U. R. S. S.*, série Math., t. 10, 1946, p. 257-270).

[58] P. C. ROSENBLOOM, *Mass distributions and their potentials* (*Proc.* 11th *Scand. Math. Congress*, Trondheim, Norway, 1949).

[59] P. C. ROSENBLOOM, *Elements of Mathematical logic*, New-York, Dover Publications, 1950. (to appear shortly).

[60] V. ŠMULIAN et V. GANTMAKHER, *Sur les espaces linéaires dont la sphère unitaire est faiblement compacte* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, t. 17 (nouv. série), 1937, p. 91-94).

[61] M. H. STONE, *Theory of representations for Boolean algebras* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 40, 1936, p. 37-111).

[62] A. TARSKI, *Une contribution à la théorie de la mesure* (*Fund. Math.*, t. 15, 1930, p. 42-50).

[63] A. TARSKI, *Grundzüge des Systemenkalküls* (*Fund. Math.*, t. 25, 1935, p. 503-526; *ibid.*, t. 26, 1919 p. 283-301).

[64] O. TEICHMÜLLER, *Eine Verschärfung des Dreikreisesatzes* (*Deutsche Math.*, t. 4, 1939, p. 16-22).

[65] G. O. THORIN, *Convexity theorems*, Meddelanden från Lunds Universitets Matematiska Seminarium, Thesis, 1948.

[66] S. Ulam, *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre* (*Fund. Math.*, t. 16, 1930, p. 140-150).

[67] C. de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*, Paris, Gauthier-Villars, 1934.

[68] A. Wald, *Limits of a distributon function determined by absolute moments and inequalities satisfied by absolute moments* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 36, 1939, p. 280-306).

[69] D. W. Westekn, *Inequalities of the Markoff and Bernstein type for integral norms* (*Kuke Math, J.*, t. 15, 1948, p. 839-869).

[70] H. Weyl, *Elementare Theorie der konvexen Polyeder* (*Comment. Math. Helv.*, t. 7, 1935, p. 290-306).

[71] H. Weyl, *Invariants* (*Duke Math. J.*, t. 5, 1939, p. 489-502).

[72] D. V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton, 1941.

[73] D. V. Widder, *Positive températures on an infnite rod.* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 55, 1944, p. 85-95).

[74] K. Yosida et M. Fukamiya, *On regularly convex sets.* (*Proc. Imp. Acad. Tokyo*, t. 17, 1941, p. 49-52).

[75] E. Beckenbach, W. Gustin et H. Shniad, O*n the mean modulus of an analytic function* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 55, 1949, p. 184-190).

[76] A. Haar, *Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen* (*Math. Ann.*, t. 78, 1917, p. 294-311).

[77] A. Haar, *Über lineare Ungleichungen* (*Acta Szeged*, t. 2, 1924, p. 1-14).

[78] J. M. Honig et P. C. Rosenbloom, *Application of interpolatory theory to adsorption isotherm data* (A paraître dans le *J. Chem. Phys.*).

[79] S. Karlin et L. S. Shapley, *Geometry of reduced moment spaces* (*Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.* t. 35, 1949, p. 673-677).

[80] H. A. Rademacher et I. J. Shœnberg, *Helly's theorems on convex domains and Tchebycheff's approximation problem* (*Canad. J. Math.*, t. 2, 1950, p. 245-256).

[81] R. Sips, *On the structure of a catalyst surface* (*J. Chem. Phys.*, t. 16, 1948, p. 490; t. 18, 1950, p. 1024).

[82] N. Dunford, *Proc. of Symposium Spectral Theory and Differential Problems*, Oklahoma A. and M. College, 1951.