BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE SAMUEL

Singularités des variétés algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 79 (1951), p. 121-129

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1951__79__121_0>

SINGULARITÉS DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES ;

PAR M. PIERRE SAMUEL
(Clermont-Ferrand).

Ce travail consiste en l'étude algébrique de quelques invariants des points singuliers des variétés algébriques (et algébroïdes). Il se place dans le cadre de l'étude directe des variétés et courbes à singularités quelconques, avec le point de vue de l'équivalence birationnelle restreinte.

1. L'espace tangent de Zariski. — Nous considérons ici des variétés algébriques et algébroïdes sur un corps de base algébriquement clos K ([3], II et III).

Étant donné un anneau local [1] $\mathfrak{o}$ d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, le groupe quotient $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est canoniquement muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$. Dans le cas où $\mathfrak{o}$ est l'anneau local d'un point P d'une variété (algébrique ou algébroïde) V^d, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est appelé *l'espace tangent de Zariski* à V en P ([6], I). La dimension de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ sur $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ est un invariant par transformations, birationnelles birégulières ou analytiques en P, que nous nous proposons d'étudier. Rappelons ([6], I, 3, p. 9) que, pour que P soit simple sur V^d, il faut et il suffit que la dimension de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ soit égale à la dimension d de l'anneau local $\mathfrak{o}$ (qui est alors un anneau local régulier).

Lorsque V^d est plongée dans un espace linéaire de dimension $d+s$, l'idéal $\mathfrak{m}$ admet un système de $d+s$ générateurs et l'on a $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leqq d+s$. Nous nous proposons de démontrer une sorte de réciproque :

THÉORÈME 1. — *Soient $\mathfrak{o}$ l'anneau local d'un point* P *d'une variété algébroïde* (resp. *algébrique*) V^d, *et $d+s$ la dimension de l'espace tangent de Zariski* $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. *Il existe une projection de* V *sur une variété* W, *plongée dans un espace linéaire de dimension $d+s$* (resp. $d+s$ *pour* $s \geqq 1$ *et* $d+1$ *pour* $s=0$), *et cette projection est analytique* (resp. *birationnelle birégulière*) *en* P.

Nous prendrons pour P l'origine des coordonnées et nous noterons $x_i (i \leqq i \leqq n)$ les fonctions coordonnées sur V. Des éléments $(y_1, \ldots, y_{d+s})$ de $\mathfrak{m}$ dont les classes forment une base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ constituent un système de générateurs de $\mathfrak{m}$ ([6], I, 2, p. 7), et l'on peut prendre pour les y_j des combinaisons linéaires à coefficients dans K des x_i. Dans le cas algébroïde, on a évidemment $\mathfrak{o} = K[[y_1, \ldots, y_{d+s}]]$, ce qui démontre le théorème.

Dans le cas algébrique, nous prendrons pour y_j des combinaisons linéaires des x_i suffisamment générales pour que :

a. $(y_1, \ldots, y_d)$ soit une base de transcendance séparante de $K(x)$ sur K([7], chap. IV, 1, *a*);

b. y_{d+1} soit élément primitif de $K(x)$ sur $K(y_1, \ldots, y_d)$ (*ibid.*, *b*) (d'où l'exception mentionnée lorsque $s = 0$);

c. les x_i soient entiers sur $K[y]$;

d. les y_j engendrent $\mathfrak{m}$.

Alors $(y_1, \ldots, y_{d+s})$ est point générique d'une projection W de V et W est transformée birationnelle de V. Soit $\mathfrak{o}'$ l'anneau local de l'origine sur W. On a $\mathfrak{o}' \subset \mathfrak{o}$, $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}$, $\mathfrak{o}\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{o}$ est un module de type fini sur $\mathfrak{o}'$ (en vertu de *c*), et $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{o}'$ ont même corps des fractions $K(x)$. Pour montrer que la projection de V sur W est birégulière en P, il suffit de montrer que $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}'$. Or, comme $\mathfrak{o}/\mathfrak{m} = \mathfrak{o}'/\mathfrak{m}' = K$, on a

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{o}' + \mathfrak{m} = \mathfrak{o}' + \mathfrak{o}\mathfrak{m}' = \mathfrak{o}' + (\mathfrak{o}' + \mathfrak{o}\mathfrak{m}')\mathfrak{m}' = \mathfrak{o}' + \mathfrak{o}\mathfrak{m}'^2,$$

et, par récurrence, $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}' + \mathfrak{m}'^n$ pour tout n. On a alors, $\mathfrak{a}'$ désignant un idéal de $\mathfrak{o}'$, $\mathfrak{o}\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}' + \mathfrak{o}\mathfrak{m}'^n\mathfrak{a}'$, d'où $\mathfrak{o}\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{o}' \subset \mathfrak{a}' + (\mathfrak{m}'^n \cap \mathfrak{o}')$. Comme $\mathfrak{o}'$ est un sous-espace de $\mathfrak{o}$ [1], ceci implique $\mathfrak{o}\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{o}' = \mathfrak{a}'$. Si z est élément de $\mathfrak{o}$, on a $z = \frac{y'}{x'}$ $(x', y' \in \mathfrak{o}')$, d'où $y' \in \mathfrak{o}x' \cap \mathfrak{o}' = \mathfrak{o}'x'$; ainsi $z \in \mathfrak{o}'$, puisque $\mathfrak{o}$ est anneau d'intégrité et $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}'$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Lorsque* $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = d + 1$, *l'anneau* $\mathfrak{o}$ *est celui d'un point sur une hypersurface.*

Remarques. — 1° Le théorème 1 montre que $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ est un « invariant d'immersion » du point singulier P;

2° Le cas d'exception $(s = 0)$ a lieu pour un point simple d'une variété algébrique non rationnelle;

3° Soit P un point de V^d où l'espace tangent de Zariski soit de dimension $d+1$. Si P est normal, il en est de même de sa projection P′ sur l'hypersurface W et aucune variété singulière de dimension $d-1$ de W ne passe pas P′; par conséquent, les projetantes qui sont sécantes doubles de V coupent V suivant un ensemble algébrique dont la dimension en P est $\leq d-2$. Réciproquement, si cette condition est vérifiée et si l'ensemble singulier de V est de dimension $\leq d-2$ en P, l'ensemble singulier de W est de dimension $\leq d-2$ en P′; comme W est une hypersurface, tout idéal principal de $\mathfrak{o}'$ est équidimensionnel ([4], th. 21); donc P′ est un point normal de W et P est un point normal de V.

Voici enfin une caractérisation des anneaux locaux de points d'hypersurfaces. Nous appelons *exposant* d'un idéal $\mathfrak{q}$ primaire pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ d'un anneau local $\mathfrak{o}$ le plus petit entier s tel que $\mathfrak{m}^s \subset \mathfrak{q}$.

Théorème 2. — *Soit $\mathfrak{o}$ un anneau local de dimension d. Pour que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ soit un espace vectoriel de dimension d ou $d+1$, il faut et il suffit qu'il existe un idéal $\mathfrak{q}$ engendré par un système de paramètres et dont la longueur soit égale à l'exposant.*

Soit $\mathfrak{q}$ un idéal de longueur s; les idéaux $\mathfrak{m}^j+\mathfrak{q}$ $(1\leqq j\leqq s)$ sont tous distincts, sinon $\mathfrak{m}^j+\mathfrak{q}=\mathfrak{m}^{j+1}+\mathfrak{q}$ avec $j<s$, d'où

$$\mathfrak{m}^j\subset\mathfrak{m}^{j+1}+\mathfrak{q}\subset\mathfrak{m}(\mathfrak{m}^{j+1}+\mathfrak{q})+\mathfrak{q}=\mathfrak{m}^{j+2}+\mathfrak{q}$$

et, par récurrence, $\mathfrak{m}^j\subset\mathfrak{m}^{j+n}+\mathfrak{q}$; pour $j+n=s$, on en tire $\mathfrak{m}^j\subset\mathfrak{q}$, contrairement à la définition de s. Ainsi, en général, l'exposant de $\mathfrak{q}$ est inférieur à sa longueur; et il n'y a égalité que si tous les quotients $(\mathfrak{m}^j+\mathfrak{q})/(\mathfrak{m}^{j+1}+\mathfrak{q})$ $(0\leqq j\leqq s-1)$ sont de dimension 1 sur $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$.

Supposons alors qu'il existe un idéal $\mathfrak{q}$ engendré par un système de paramètres et la longueur soit égale à l'exposant s. Si $s=1$, on a $\mathfrak{m}=\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}$ est régulier. Sinon, $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2+\mathfrak{q})$ est de dimension 1 et il existe $a\in\mathfrak{m}$ tel que $\mathfrak{m}=\mathfrak{q}+\mathfrak{o}a+\mathfrak{m}^2$; on en déduit $\mathfrak{m}=\mathfrak{q}+\mathfrak{o}a+\mathfrak{m}^n$ pour tout n et $\mathfrak{m}=\mathfrak{q}+\mathfrak{o}a$; ceci montre que $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)\leqq d+1$.

Si, réciproquement, $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)=d$, $\mathfrak{o}$ est régulier et l'on prend $\mathfrak{q}=\mathfrak{m}$. Si $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)=d+1$, d éléments $(x_1, \ldots, x_d)$ de $\mathfrak{m}$ dont les classes mod $\mathfrak{m}^2$ sont linéairement indépendantes forment un système de paramètres; soit $\mathfrak{q}$ l'idéal engendré par celui-ci et soit $a\in\mathfrak{m}$ tel que les classes de $(x_1, \ldots, x_d, a)$ forment une base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Alors $\mathfrak{m}=\mathfrak{q}+\mathfrak{o}a$. L'exposant s de $\mathfrak{q}$ est le plus petit entier n tel que $a^n\in\mathfrak{q}$. Comme $\mathfrak{m}^j+\mathfrak{q}=\mathfrak{o}a^j+\mathfrak{m}^{j+1}+\mathfrak{q}$, les modules $(\mathfrak{m}^j+\mathfrak{q})/(\mathfrak{m}^{j+1}+\mathfrak{q})$ sont tous de dimension 1 pour $s<q$, ce qui démontre que la longueur de $\mathfrak{q}$ est égale à son exposant.

2. **Adjointes des courbes planes, et conducteurs.** — Soit (C) une courbe plane à singularités quelconques et d'équation $F(X, Y)=0$. Soit $A=K[x, y]$ l'anneau de coordonnées de (C). On suppose y entier et séparable sur $K[x]$. Soit A′ la clôture intégrale de l'anneau A. Rappelons les résultats suivants :

1° Il existe un *conducteur* non nul $\mathfrak{f}$ de A dans A′. C'est l'ensemble des $z\in A$ tels que $zA'\subset A$; $\mathfrak{f}$ est un idéal de A et A′; c'est le plus grand idéal de A′ contenu dans A.

2° L'anneau A′ est un anneau de Dedekind. Ses valuations v_α correspondent aux places de (C) dont l'origine est à distance finie. Tout idéal non nul $\mathfrak{b}$ de A′ est défini par la donnée d'un système (n_α) d'entiers positifs (nuls sauf un nombre fini) : $z\in\mathfrak{b}$ équivalant à « pour tout α, $v_\alpha(z)\geqq n_\alpha$ ». En ordonnant l'ensemble des systèmes (n_α) de la façon ordinaire, le conducteur $\mathfrak{f}$ est défini par le *plus petit système* (n_α) tel que $v_\alpha(z)\geqq n_\alpha$ entraîne $z\in A$.

3° (« Théorème d'approximation ».) Étant donné n valuations distinctes v_i de A′, n éléments x_i de A′ et n entiers $m_i\geqq 0$, il existe $x\in A'$ tel que $v_i(x-x_i)=m_i$ pour tout i.

Nous supposerons connue la théorie des corps de fonctions algébriques d'une variable (*cf.* [3]).

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Pour que* $\omega = \frac{R(x, y)\,dx}{F'_y}$ *soit une différentielle partout finie à distance finie, il faut et il suffit que* $R(x, y)$ *soit élément du conducteur* $\mathfrak{f}$ *de l'anneau de coordonnées* A.

THÉORÈME 3 *bis*. — *Soit* P *un point de* (C), *correspondant à l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de l'anneau de coordonnées* A. *Pour que* $\omega = \frac{R(x, y)\,dx}{F'_y}$ *soit finie en* P, *il faut et il suffit que* $R(x, y)$ *soit élément du conducteur* $\mathfrak{f}_P$ *de l'anneau local* $\mathfrak{o} = A_{\mathfrak{m}}$ *de* P.

Nous déduirons le résultat local du résultat global.

Il est clair que l'ensemble $\mathfrak{d}$ des $R \in K(x, y)$ tels que ω soit finie partout à distance finie est défini par des inégalités $v_\alpha(R) \geqq s_\alpha$ (les s_α étant des entiers, positifs ou négatifs *a priori* et nuls sauf un nombre fini). Il résulte de ([3], chap. VI, § 3, th. 8) que $\mathfrak{d} \subset A$. Comme $\mathfrak{d}A' \subset \mathfrak{d}$, ceci montre que $\mathfrak{d}$ est contenu dans le conducteur $\mathfrak{f}$ de A et que les s_α sont tous $\geqq 0$.

Supposons réciproquement $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{f}$. Il existe alors $R_1(x, y) \in \mathfrak{f}$ tel que $v_\alpha(R_1) < s_\alpha$ pour au moins un indice α, soit $\alpha = 0$. Or, d'après le théorème d'approximation, il existe $z \in A'$ tel que $v_0(z) = s_0 - 1 - v_0(R_1)$ et que $v_\alpha(z) \geqq s_\alpha - v_\alpha(R_1)$ pour $\alpha \neq 0$. Alors, puisque $R_1 \in \mathfrak{f}$, $R = zR_1$ est élément de A. Et la différentielle $\omega = \frac{R\,dx}{F'_y}$ a un pôle d'ordre 1 à la place $\mathfrak{p}_0$ correspondant à v_0 et est finie en toute place finie de $K(x, y)$. Considérons alors la différentielle

$$\mathrm{Tr}_{\frac{K(x,y)}{K(x)}}\left(\frac{R\,dx}{F'_y}\right) = \left(\mathrm{Tr}_{\frac{K(x,y)}{K(x)}}\left(\frac{R}{F'_y}\right)\right)dx$$

([3], chap. VI, § 2 et 3). Soit $\mathfrak{p}$ la place de $K(x)$ qui se trouve au-dessous de $\mathfrak{p}_0$ et soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ les places de $K(x, y)$, autres que $\mathfrak{p}_0$ et qui se trouvent au-dessus de $\mathfrak{p}$. Nous allons utiliser le théorème 1 de [3], chapitre VI, paragraphe 2, relatif aux résidus de traces de différentielles et prendre les traces sur K des deux membres; comme ω est finie en $\mathfrak{p}_i$ pour $i \neq 0$, le second membre se réduit au terme relatif à $\mathfrak{p}_0$; en vertu de la définition des résidus ([3], chap. III, § 5), on obtient $(\mathrm{Tr}\,\omega)^{\mathfrak{p}}(1) = \omega^{\mathfrak{p}_0}(1)$. Comme ω a un pôle d'ordre 1 en $\mathfrak{p}_0$, on peut, par multiplication de ω par un élément convenable de A' qui soit inversible en $\mathfrak{p}_0$, supposer que l'on a $\omega^{\mathfrak{p}_0}(1) \neq 0$. Alors $\mathrm{Tr}(\omega) = \left(\mathrm{Tr}\left(\frac{R}{F'_y}\right)\right)dx$ a un pôle en $\mathfrak{p}$. Mais, comme $R \in K[x, y]$, on a $\mathrm{Tr}\left(\frac{R}{F'_y}\right) \in K[x]$ ([3], chap. VI, § 3, lemme 2 au th. 8), ce qui implique contradiction. Le théorème 3 est donc démontré.

Le théorème local 3 *bis* s'en déduit en remarquant ceci :

a. l'appartenance de $R(x, y)$ au conducteur $\mathfrak{f}_P$ s'exprime par des conditions valuatives relatives aux valuations d'origine P;

b. le conducteur $\mathfrak{f}$ de A est l'intersection des $\mathfrak{f}_P$, P parcourant l'ensemble des points à distance finie de (C) (en effet A est l'intersection des A_m).

Remarques. — 1° Il résulte de ceci que $A/\mathfrak{f}$ (resp. $A'/\mathfrak{f}$) est isomorphe au composé direct des $\mathfrak{o}(P)/\mathfrak{f}_P$ (resp. $\mathfrak{o}(P)'/\mathfrak{f}_P$), $\mathfrak{o}(P)$ désignant l'anneau local de P, et $\mathfrak{o}(P)'$ sa clôture intégrale. Notons que ces anneaux ne sont non triviaux que si P est point singulier de (C).

2° Le théorème 3 reste valable pour tout anneau de coordonnées $K[x, y]$ tel que K soit infini et $K(x, y)$ séparable sur K. En effet, un changement linéaire de variables permettra de prendre pour x une variable séparante et pour y un élément entier sur $K[x]$ et, comme $\frac{dx}{F'_y} = -\frac{dy}{F'_x}$, l'expression $\frac{dx}{F'_y}$ est, à un facteur constant près, indépendante du choix des variables x et y.

Exemples. — 1° Considérons la courbe de représentation paramétrique $(x = t^a, y = t^b)$, a et b étant des entiers étrangers et a non multiple de la caractéristique p. L'origine est le seul point singulier à distance finie; elle est centre d'une seule place, où t est uniformisante. En cette place dx est d'ordre $a - 1$, F'_y d'ordre $(a - 1)b$ (puisque $Y^a - X^b = 0$ est l'équation de (C)). Donc, dans A', le conducteur $\mathfrak{f}$ est engendré par $t^{(a-1)(b-1)}$. On peut vérifier directement ceci en remarquant que tout entier $\geqq (a - 1)(b - 1)$ est de la forme $ma + nb$ avec m et n positifs, mais que $(a - 1)(b - 1) - 1$ n'est pas de cette forme.

2° Soit P un point r-uple à tangentes distinctes de (C). Nous supposerons P à l'origine. Alors P est origine de r valuations v_i et, avec des axes convenables, x est uniformisante locale pour chacune d'elles; donc dx est d'ordre zéro en v_i. L'équation F(X, Y) de (C) est produit de r séries formelles S_i; $(S_i)'_y$ est pour v_i d'ordre zéro, et $S_j(x, y)$ est d'ordre 1 pour $j \neq i$; la formule de la dérivée d'un produit montre alors que $v_i(F'_y) = r - 1$ pour tout i. Par conséquent, l'anneau $\mathfrak{o}(P)'/\mathfrak{f}_P$ est de dimension $r(r - 1)$ sur K.

3° En particulier, en un point double ordinaire, $\mathfrak{f}_P$ est l'idéal maximal de $\mathfrak{o}(P)$. Il est engendré par F'_x et F'_y. Donc, si (C) n'a d'autres singularités que des points doubles ordinaires, le conducteur $\mathfrak{f}$ est l'idéal (F'_x, F'_y) de A.

Si (s_α) est le système d'entiers qui définit le conducteur $\mathfrak{f}$, le diviseur $\mathfrak{d} = \sum_\alpha s_\alpha P_\alpha$ sur (C) est appelé le *diviseur des points doubles* de (C). Un diviseur U du plan projectif d'équation homogène $G(X, Y, Z) = 0$ est appelé un *adjoint* de (C) si $G(x, y, 1) \in \mathfrak{f}$; autrement dit, le cycle intersection U.C est supérieur au diviseur $\mathfrak{d}$ des points doubles; si U est une courbe, on dit que c'est une courbe adjointe de (C).

Théorème 4 (« Satz des Doppelpunktdivisor »). — *Si* U *et* V *sont des diviseurs du plan projectif d'équations* G(X, Y, Z) *et* H(X, Y, Z) *tels que* $V.C = D + U.C$, *on a* $H(X, Y, 1) \in (F(X, Y), G(X, Y, 1))$.

En effet, pour toute place $\mathfrak{p}_\alpha$ à distance finie, on a

$$v_\alpha\left(\frac{H(x, y, 1)}{G(x, y, 1)}\right) \geq s_\alpha.$$

Donc

$$\frac{H(x, y, 1)}{G(x, y, 1)} \in \mathfrak{f} \subset K[x, y].$$

Considérons maintenant un polynome homogène $G(X, Y, Z)$, équation du diviseur plan U. Nous nous proposons d'étudier le diviseur de la différentielle $\omega = \frac{G(x, y, 1)dx}{F'_y}$ sur (C). Soient m et n les degrés de F et G. Nous supposerons que la droite de l'infini ne contient pas de point multiple de (C) et n'est pas tangente à (C) et que le point à l'infini de OY n'est pas sur (C). Alors le diviseur $\mathfrak{d}(\omega)$ de la différentielle ω est donné par

$$(1) \qquad \mathfrak{d}(\omega) = \sum_{\mathfrak{p}_\alpha \text{ fini}} v_\alpha(G(x, y, 1) - s_\alpha)\mathfrak{p}_\alpha + \sum_{\mathfrak{q} \text{ infini}} (m - 3 - n + i(\mathfrak{q}; U.C))\mathfrak{q}.$$

où $i(\mathfrak{q}; U.C)$ est la multiplicité d'intersection de U et C en le point à l'infini $\mathfrak{q}$.

La formule (1) est claire en ce qui concerne les places à distance finie P_α. En un point à l'infini $\mathfrak{q}$, x^{-1} est uniformisante locale, puisque $\mathfrak{q}$ est simple et non situé sur OY; donc dx est d'ordre -2. Comme F'_y est de degré $m-1$ et comme la droite de l'infini n'est pas tangente à (C), on vérifie aisément (en prenant x^{-1} et yx^{-1} pour nouvelles variables) que F'_y est d'ordre $-(m-1)$ en $\mathfrak{q}$. Enfin l'ordre de $G(x, y, 1)$ en $\mathfrak{q}$ est $-n + i(\mathfrak{q}; U.C)$, comme on le voit encore avec les variables x^{-1} et xy^{-1}. Ceci démontre la formule (1).

Nous allons déduire diverses conséquences de cette formule :

a. Degré du diviseur d'une différentielle. — Comme

$$v_\alpha(G(x, y, 1)) = i(\mathfrak{p}_\alpha; U.C),$$

le degré $d(\mathfrak{d}(\omega))$ est égal à

$$d(U.C) - \dim_K(A'/\mathfrak{f}) - m(n - (m-3)) = m(m-3) - \dim_K(A'/\mathfrak{f}),$$

puisque $d(U.C) = mn$ d'après le théorème de Bézout. Donc, si g désigne le genre de (C), on a

$$(2) \qquad 2g - 2 = m(m-3) - \dim_K(A'/\mathfrak{f}).$$

b. Nombre de différentielles ayant des pôles donnés à l'infini. — Soient r un entier, et $\mathfrak{b}$ le diviseur $-\sum_{\mathfrak{q} \text{ infini}} (r - m + 3)\mathfrak{q}$. Pour qu'une différentielle ω soit multiple de $\mathfrak{b}$, il faut d'abord qu'elle soit finie à distance finie, donc de la forme $\frac{R(x, y)\,dx}{F'_y}$ avec $R(x, y) \in \mathfrak{f}$. Si R est un polynome de degré n, équation d'un diviseur U, il faut et il suffit alors que, pour tout $\mathfrak{q}$ à l'infini, l'on ait $n - i(\mathfrak{q}; U.C) \leq r$. Si tous les $i(\mathfrak{q}; U.C)$ sont > 0 la forme de plus haut degré de $R(X, Y)$ est multiple de celle de $F(X, Y)$ et, en retranchant de R un multiple convenable de F, on abaisse le degré de R. Par applications répétées on voit que l'on a $R(x, y) = S(x, y)$, où S est de degré $\leq r$. En notant E_r le sous-espace vectoriel de $K[x, y]$ engendré par les monomes de degré $\leq r$, on voit que la dimension $i(\mathfrak{d})$ de l'espace des différentielles multiples de $\mathfrak{d}$ est égale à celle de $E_r \cap \mathfrak{f}$.

Or, pour r assez grand, on a $E_r + \mathfrak{f} = A$, puisque F est de codimension finie dans A. Alors

$$\begin{aligned}\dim_K(E_r \cap \mathfrak{f}) &= \dim_K(E_r) - \dim_K(E_r/(E_r \cap \mathfrak{f}))\\ &= \dim_K(E_r) - \dim_K((E_r + \mathfrak{f})/\mathfrak{f}) = \dim_K(E_r) - \dim_K(A/\mathfrak{f}).\end{aligned}$$

La dimension de E_r se calcule aisément : elle vaut

$$\frac{1}{2}((r+1)(r+2) - (r-m+1)(r-m+2)) = mr + 1 - \frac{1}{2}(m+1)(m+2) \quad (\text{pour } r \geq m).$$

D'où

$$i(\mathfrak{d}) = mr + 1 - \frac{1}{2}(m+1)(m+2) - \dim_K(A/\mathfrak{f}).$$

Appliquons alors le théorème de Riemann-Roch

$$l(\mathfrak{d}^{-1}) = d(\mathfrak{d}) - g + 1 + i(\mathfrak{d}).$$

On a

$$l(\mathfrak{d}^{-1}) = 0 \qquad \text{et} \qquad d(\mathfrak{d}) = m(m+3) - mr.$$

Et l'on en tire

$$g = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \dim_K(A/\mathfrak{f}). \tag{3}$$

La comparaison des formules (2) et (3) montre que l'on a

$$\dim_K(A'/\mathfrak{f}) = 2\dim_K(A/\mathfrak{f}), \tag{4}$$

lorsque la droite de l'infini est « en position générale ».

Remarque. — La première partie de b montre aussi que le nombre g de différentielles de première espèce est égal à $\dim_K(E_{m-3} \cap \mathfrak{f})$, c'est-à-dire à $\dim_K(E_{m-3}) - \dim_K(A/\mathfrak{f}) + \dim_K(A/(E_{m-3} + \mathfrak{f}))$. Comme

$$\dim_K(E_{m-3}) = \frac{1}{2}(m-1)(m-2),$$

la comparaison avec (3) montre que l'on a $A = E_{m-3} + \mathfrak{f}$.

Nous allons maintenant étendre quelque peu la relation (4).

Théorème 5. — *Soient* $A = K[x, y]$ *l'anneau de coordonnées d'une courbe plane* (C), $\mathfrak{o}$ *l'anneau local d'un point* P *de* (C), A' *et* $\mathfrak{o}'$ *les clôtures intégrales de* A *et* $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{f}$ *et* $\mathfrak{v}$ *les conducteurs de* A *et* $\mathfrak{o}$. *On a*

$$\dim_K(A'/\mathfrak{f}) = 2\dim_K(A/\mathfrak{f}) \qquad \text{et} \qquad \dim_K(\mathfrak{o}'/\mathfrak{v}) = 2\dim_K(\mathfrak{o}/\mathfrak{v}).$$

La formule globale a été démontrée lorsque la droite de l'infini est en position générale. La formule locale a été vérifiée lorsque P est un point double ordinaire (exemple 3). La remarque 1° au théorème 3 montre que la formule globale se déduit des formules locales et que la formule locale pour P se déduit de la formule globale et des formules locales supposées établies pour les autres points de (C).

Soit alors P un point quelconque d'une courbe plane (C). On peut mettre la droite de l'infini en position générale sans modifier l'anneau local $\mathfrak{o}$ de P. Notons alors $v_i (1 \leqq i \leqq n)$ les valuations du corps des fonctions rationnelles sur (C) dont les origines sont les points singuliers de (C) autres que P. Soit $K[x, y]$ l'anneau de coordonnées de (C), A′ sa clôture intégrale. Prenons des uniformisantes t_i pour les v_i et n éléments distincts a_i de K. Pour toute valuation w_j d'origine P, soit s_j l'entier tel que le conducteur de $\mathfrak{o}$ soit défini par le système d'entiers (s_j). Le théorème d'approximation fournit alors un élément $z \in A'$ tel que $v_i(z - a_i - t_i) \geqq 2$ pour tout i et que $w_j(z) \geqq s_j$ pour tout j. Alors $z \in \mathfrak{o}$ et la courbe gauche (C′) de point générique (x, y, z) n'a d'autre singularité que l'unique point P′ dont la projection est P et P′ a même anneau local $\mathfrak{o}$ que P.

En prenant pour P un point simple, ceci donne un procédé de réduction des singularités de (C), la courbe non singulière obtenue étant une courbe de l'espace à trois dimensions.

En prenant dans l'espace un centre de projection et un plan de projection assez généraux, on projette (C′) en une courbe plane (C″) de telle sorte que :

a. la projection soit régulière en P′;

b. (C″) n'ait, en dehors de la projection P″ de P′, que des points doubles ordinaires;

c. la droite de l'infini de (C″) soit en position générale.

Alors la formule globale du théorème 5 est vraie pour (C″), et les formules locales pour les points de (C″) autres que P″. Donc la formule locale est vraie pour l'anneau local de P″, qui n'est autre que celui de P. Ceci démontre le théorème 5.

Remarques. — 1° Le théorème montre que le théorème 5 est vrai pour un anneau local $\mathfrak{o}$ d'un point quelconque d'une courbe quelconque, à condition que l'espace tangent de Zariski $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ soit de dimension 2.

2° Lorsque $\mathfrak{o}$ est un anneau local de dimension 1 dont la clôture intégrale $\mathfrak{o}'$ est l'anneau d'une valuation discrète v (par exemple l'anneau local d'un point d'une courbe (C) où (C) est analytiquement irréductible), on a $\dim_K(\mathfrak{o}'/\mathfrak{v}) \geqq 2 \dim(\mathfrak{o}/\mathfrak{v})$, $\mathfrak{v}$ désignant le conducteur de $\mathfrak{o}$ et K un sous-corps de $\mathfrak{o}$ sur lequel $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ est fini. Nous dirons qu'un entier n est « présent dans $\mathfrak{o}$ » lorsqu'il existe un élément de $\mathfrak{o}$ d'ordre n pour v. Alors, le conducteur $\mathfrak{v}$ est défini par $v(x) \geqq s$, où s est le plus petit entier n tel que tout entier $m \geqq n$ soit présent dans $\mathfrak{o}$. On a alors $\dim_K(\mathfrak{o}/\mathfrak{v}) = s \dim_K(\mathfrak{o}/\mathfrak{m})$. D'autre part, si q désigne le nombre des entiers $< s$ qui sont présents dans $\mathfrak{o}$, on a $\dim_K(\mathfrak{o}/\mathfrak{v}) = q \dim_K(\mathfrak{o}/\mathfrak{m})$. Et l'on a $2q \leqq s$, puisque les entiers n et $s - 1 - n$ ne peuvent être tous deux présents dans $\mathfrak{o}$, sinon $s - 1$ serait présent dans $\mathfrak{o}$.

Les exemples de $K[[t^3, t^7, t^{11}]]$ (où $s = 9$ et $q = 4$) et de $K[[t^4, t^7, t^{10}]]$ (où $s = 14$ et $q = 7$) montrent que, si $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) > 2$, on peut avoir aussi bien l'égalité que l'inégalité stricte.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CHEVALLEY, *On the theory of local rings* (*Ann. Math.*, 44, 1943, p. 698-708).

[2] CHEVALLEY, *Intersections of algebraic and algebroïd varieties* (*Trans. Am. Math. Soc.*, 57, 1945, p. 1-85).

[3] CHEVALLEY, *Algebraic functions of one variable* (*Math. Surveys*, n° 5, 1951).

[4] COHEN, *On the structure and ideal theory of complete local rings* (*Trans. Am. Math. Soc.*, 59, 1946, p. 54-106).

[5] KRULL, *Ideal theorie* (*Ergebnissé*, vol. IV, 3, Berlin, 1935).

[6] ZARISKI, *The concept of a simple point* ... (*Trans. Am. Math. Soc.*, 62, 1947, p. 1-52).

[7] SAMUEL, *La notion de multiplicité*... (*J. Math. pures et appl.*, 0, 1951, p. 000).

(Manuscrit reçu le 4 mai 1951.)

Ajouté en épreuves. — Des résultats contenant notre théorème 5 ont été trouvés indépendemment par MM. K. Kodaira et M. Rosenlicht.