BULLETIN DE LA S. M. F.

ROBERT CAMPBELL

Contribution à l'étude des solutions de l'équation de Mathieu associée

Bulletin de la S. M. F., tome 78 (1950), p. 185-218
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1950__78__185_0>

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE MATHIEU ASSOCIÉE;

PAR M. ROBERT CAMPBELL.

INTRODUCTION.

L'objet de ce travail est l'étude des solutions périodiques d'une équation qui se rencontre en Physique mathématique et qui se réduit à l'équation de Mathieu pour des valeurs particulières des paramètres. Le résultat le plus intéressant est la mise en lumière de solutions que l'on peut nommer de *forme finie*, en entendant par là que les séries de fonctions simples qui les représentent se réduisent à des sommes d'un nombre fini de termes, et que l'équation caractéristique (ou des valeurs propres) est algébrique, ce qui n'arrive jamais pour l'équation de Mathieu elle-même.

On avait déjà observé un phénomène semblable pour l'équation de Lamé

$$y'' + [h + n(n+1)k^2\, sn^2 x]y = 0$$

et pour l'équation dite *de Hill à trois termes*, quelquefois appelée de Whittaker

$$y'' + [a + b\cos 2x + c\cos 4x]y = 0,$$

qui toutes deux généralisent l'équation de Mathieu et admettent des solutions de forme finie.

L'existence de solutions finies de ce genre pour l'équation de Mathieu associée étudiée ici

$$y'' - 2\nu\, \mathrm{tg}\, x y' + (a + k^2 \sin^2 x)y = 0$$

n'avait pas été mise en évidence jusqu'alors parce que personne, semble-t-il, n'avait songé à choisir l'élément de série qui se prête le mieux aux calculs et à la discussion de cette équation, et qui est le polynome de Gegenbauer $C_n^\nu(\sin x)$.

Ce choix, qui d'ailleurs est le plus simple et le plus logique, a l'avantage de réduire à trois termes les relations de récurrence entre les coefficients A de la série solution $\Sigma A_n^\nu C_n^\nu(\sin x)$ et permet aussitôt, par là-même, de mettre en évidence les solutions de forme finie.

L'étude d'un cas particulier simple et courant constitue le premier Chapitre. Les deuxième et troisième Chapitres traitent du cas général et discutent de l'existence des solutions de forme finie et de la décomposition de l'équation caractéristique.

On sait qu'on utilise aussi, pour étudier les fonctions de Mathieu, des développements en séries, non de fonctions trigonométriques, mais de *fonctions de Bessel*. On a donc cherché ici aussi, pour ces fonctions dites *associées*, si un développement analogue n'était pas possible. Le calcul l'a fourni facilement et l'on a pu découvrir la raison profonde de son existence dans une correspondance algébrique étudiée par Sonine (dans son célèbre Mémoire sur les fonctions de Bessel) et qu'il nomme *corrélation*. Cette correspondance jette la lumière sur des résultats curieux trouvés déjà pour les fonctions de Mathieu ordinaires et pose la question de savoir si ce parallélisme des deux développements, l'un en séries de fonctions sphériques, l'autre en série de fonctions du cylindre circulaire, n'a pas une signification géométrique simple, et s'il ne caractérise pas toute une famille de fonctions. N'existerait-il pas, par exemple, pour les fonctions de Lamé ou de Hill à trois termes, qui présentent des particularités analogues, de tels développements parallèles ? C'est un problème qu'il serait intéressant de résoudre.

En résumé, l'étude de cette équation qui, plus générale que celle de Mathieu, admet des solutions plus particulières (puisque de forme finie) constitue un exemple de ces cas *généraux*, qui, selon l'expression de M. René Garnier, apparaissent néanmoins comme « plus particuliers encore que leurs cas particuliers ».

CHAPITRE I.

SUR UN PROBLÈME DE VALEURS PROPRES.

Dans un grand nombre de problèmes de Physique et même de Chimie (diffraction, vibration d'un haut-parleur circulaire, problème des deux centres en théorie des quanta, questions relatives à la molécule d'hydrogène), on a besoin d'écrire l'équation des ondes [1] dans un espace où les surfaces coordonnées sont des quadriques homofocales de révolution. On peut choisir comme système de telles quadriques soit le faisceau composé d'ellipsoïdes allongés et d'hyperboloïdes à deux nappes, soit celui qui comprend les ellipsoïdes aplatis et les hyperboloïdes réglés. A cause des applications à l'acoustique qui nous intéressent particulièrement, nous avons choisi ici le deuxième système, celui qui contient un ellipsoïde infiniment aplati (qu'on pourra au besoin assimiler à un disque plan).

Mise en équation du problème. — L'espace étant rapporté à ce système de quadriques

$$\begin{aligned} x &= f\operatorname{ch}\eta\cos\xi\cos\varphi,\\ y &= f\operatorname{ch}\eta\cos\xi\sin\varphi,\\ z &= f\operatorname{sh}\eta\sin\xi. \end{aligned}$$

[1] Pour la théorie générale de cette équation, *voir* le *Traité d'Analyse* de Riemann (RIEMANN-WEBER, *Die partiellen Differential Gleichungen der Mathematischen Physik*, t. II, Braunschweig, 1912).

L'équation du son

$$\nabla^2 p \equiv \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -k^2 p$$

s'écrit, après le changement de variables (1) dans le Laplacien

$$(1) \quad \frac{1}{f^2}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\xi}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial\eta^2} - \mathrm{tg}\,\xi\frac{\partial p}{\partial\xi} + \mathrm{th}\,\eta\frac{\partial p}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{\mathrm{ch}^2\eta\cos^2\xi}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}\right] = -k^2 p.$$

Traitons d'abord le problème dans le cas le plus simple, celui où les ondes sont à symétrie cylindrique, c'est-à-dire où p est indépendant de φ

$$(2) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial\xi^2} - \mathrm{tg}\,\xi\frac{\partial p}{\partial\xi} + k^2 f^2 \sin^2\xi\, p + \frac{\partial^2 p}{\partial\eta^2} + \mathrm{th}\,\eta\frac{\partial p}{\partial\eta} + k^2 f^2 \mathrm{sh}^2\eta\, p = 0.$$

Si l'on s'intéresse alors, comme dans les problèmes de potentiel, aux solutions de l'équation (2) qui sont de la forme dite *à variables séparées* : $p = \mathrm{U}(\xi)\,\mathrm{V}(\eta)$, l'équation (2), où les dérivées cessent d'être partielles, s'écrit, après division par p

$$\frac{1}{\mathrm{U}}\left[\frac{d^2\mathrm{U}}{d\xi^2} - \mathrm{tg}\,\xi\frac{d\mathrm{U}}{d\xi} + k^2 f^2 \sin^2\xi\right] + \frac{1}{\mathrm{V}}\left[\frac{d^2\mathrm{V}}{d\eta^2} + \mathrm{th}\,\eta\frac{d\mathrm{V}}{d\eta} + k^2 f^2 \mathrm{sh}^2\eta\right] = 0.$$

de la forme

$$\text{Fonction } \mathrm{F}_1(\xi \text{ seul}) + \text{Fonction } \mathrm{F}_2(\eta \text{ seul}) = 0.$$

Elle n'est possible, puisque ξ et η sont indépendants, que si ces deux fonctions séparément sont des constantes, a et b, telles que $a + b = 0$, c'est-à-dire si les deux équations

$$(3) \quad \frac{d^2\mathrm{U}}{d\xi^2} - \mathrm{tg}\,\xi\frac{d\mathrm{U}}{d\xi} + (a + k^2 f^2 \sin^2\xi)\mathrm{U} = 0,$$

$$(3') \quad \frac{d^2\mathrm{V}}{d\eta^2} + \mathrm{th}\,\eta\frac{d\mathrm{V}}{d\eta} + (-a + k^2 f^2 \sin^2\eta)\mathrm{V} = 0$$

sont satisfaites. On passe d'ailleurs de (3) à (3′) en changeant U en V et ξ en $i\eta$. On pourra donc se contenter d'étudier (3). L'équation (3′) sera dite équation *modifiée* de l'équation (3) par analogie avec un langage, consacré par l'usage aujourd'hui, relatif à l'équation de Bessel.

Le problème consiste maintenant à intégrer l'équation (3) ou du moins à en calculer les solutions, et en particulier à dégager celles de ces solutions qui conviennent à la question posée. Or, on voit tout de suite que la fonction $p(x, y, z)$ doit être donnée sans ambiguïté lorsque x, y, z, le sont; ou encore que $p(\xi, \eta)$ doit être invariante quand ξ augmente de 2π. Donc, *seules* nous intéressent les intégrales de (3) qui sont des *fonctions de période* 2π *de* ξ. Il n'est pas sûr qu'elles existent pour toute valeur de la constante a. La question qui se soulève ici est donc : « Existe-t-il une manière de choisir a pour que (3) possède des intégrales de période 2π ? ».

C'est là un problème de recherche des *valeurs propres* ou *caractéristiques* d'une équation différentielle. Poincaré le pose dans son Ouvrage : *Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste* (t. II) pour l'équation très générale dite de Hill

$$y'' + \mathrm{A}(x)y = 0,$$

$A(x)$ étant une fonction périodique (2π) de x. Avec précision, on écrit $A(x)$ sous la forme $a - 2q\psi(x)$; $\psi(x)$ étant continue partout, deux fois dérivable, et telle que son maximum et son minimum soient tous deux égaux à 1 en valeur absolue. [M. Léon Brillouin dans un article récent (1) a étudié l'équation de Hill dans un cas plus général et avec des méthodes toutes différentes du procédé habituel qui consiste à supposer $A(x)$ fourni par son développement de Fourier]. C'est à propos de ce problème que se sont introduits les déterminants infinis. Dans le cas général, il est très compliqué.

Le cas le plus simple qui puisse se présenter est le cas où $A(x)$ est réduit à un premier terme de son développement trigonométrique, l'équation est alors celle que Mathieu étudia en 1868 dans son Mémoire sur la vibration d'une membrane plane elliptique

$$y'' + (p - 2q\cos 2x)y = 0,$$

qu'on peut écrire aussi

$$y'' + (a + k^2 f^2 \sin^2 x)y = 0.$$

Elle ressemble, en plus simple, à l'équation (3). Les valeurs caractéristiques $a = a(k^2 f^2)$ de l'équation de Mathieu ont fait l'objet de multiples recherches, principalement de la part des mathématiciens anglais; mais il faut citer en France outre les travaux de Poincaré, l'étude récente de M. Vladimir Baranov dans sa Thèse (2) (Montpellier, 1941) qui y applique le calcul matriciel. Les méthodes appliquées à l'équation de Mathieu ont toutes ceci de commun, qu'elles supposent la solution cherchée (de période 2π en x) développée en série de Fourier de x, et qu'elles recherchent la condition d'existence d'un tel développement.

On est ramené à étudier un système d'équations où les inconnues sont les coefficients, en nombre infini bien entendu. Les travaux les plus poussés qui ont été accomplis dans ce sens sont dus à Lindsay Ince, qui a construit des tables de valeurs de a en fonction de la constante physique donnée $k^2 f^2$; et dessiné les courbes correspondantes dans le plan des $(a, k^2 f^2)$; la réussite de la méthode est due à ce que les équations successives sont à *trois termes seulement*. (C'est ce même fait qui est également à la base de la réussite de M. Baranov.)

On peut donc chercher à appliquer à l'équation (3), qui est celle de notre problème, la *même* méthode en posant *a priori* son intégrale périodique cherchée $U(\xi)$ sous forme de série de Fourier.

Étude de l'équation (3). — Toutefois faut-il tout de suite remarquer que cette équation (3) n'est pas du type de Hill puisqu'elle contient un terme du premier ordre, et que, même si l'on fait disparaître celui-ci, le coefficient de y contient alors un terme en $\frac{1}{\sin^2 \xi}$ et ne demeure pas fini.

Néanmoins la méthode qui consiste à déterminer le développement de Fourier a permis à Lindsay Ince de mettre en évidence des solutions périodiques et entières en ξ. Mais les relations de récurrence qu'il obtenait entre les coefficients

(1) *Quarterly applied of Math.*, juillet 1948, p. 167.
(2) *Contribution à l'étude des fonctions de Mathieu normées*, 1941.

étaient à quatre termes, ce qui ne lui a pas permis de généraliser la méthode de calcul qui avait si bien réussi pour l'équation de Mathieu. L'objet du présent travail est de proposer une méthode qui renonce à la série de Fourier mais remédie à l'inconvénient précédent.

Tout d'abord remarquons que l'équation (3) admet pour certaines valeurs des paramètres a et k^2, des intégrales pour lesquelles la singularité $\xi = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi$ n'est qu'apparente.

Pour s'en rendre compte, posons $\sin\xi = z$, l'équation (3) s'écrit alors

$$(z^2 - 1)\frac{d^2 U}{dz^2} + 2z\frac{dU}{dz} - (a + k^2 z^2)U = 0$$

et elle admet pour points singuliers les points (-1) et $(+1)$. Étudions-la dans le cas très simple où k est nul. Au voisinage du point singulier $z = 1$, on peut chercher une solution de la forme (si $z = 1 + t$) :

$$U = t^r + c_1 t^{r+1} + c_2 t^{r+2} + \ldots + c_n t^{r+n} + \ldots.$$

On l'obtient aussitôt par les conditions : $r = 0$ (racine double) et

$$2(n+1)^2 c_{n+1} + [n(n+1) - a]c_n = 0,$$

où l'on voit immédiatement que, si a est choisi égal à $n(n+1)$, n étant entier, la solution est un *polynome* [qui n'est autre, par rapport à z, que le polynome $P_n(z)$ de Legendre].

Si l'on cherche pour la même équation une solution au voisinage du point $z = -1$, on obtient un polynome, en $-1 + z$ à la même condition, et qui est, en z, le *même* polynome de Legendre. Dans ce cas simple, on constate donc que la relation $a = n(n+1)$ fait disparaître à la fois dans la solution correspondante, la singularité $z = 1$ et la singularité $z = -1$.

Cherchons si un résultat analogue peut être obtenu lorsque k n'est pas nul (c'est-à-dire : peut-on choisir a en fonction de k pour que les singularités 1 et -1 puissent disparaître *simultanément*).

La méthode de Fuchs permet là aussi de trouver deux intégrales de l'équation au voisinage de la singularité régulière $z = +1$; soient si $(1 - z) = t$

$$F_1(1-z) = 1 + C_1(k^2)t + \ldots + C_n(k^2)t^n + \ldots,$$
$$F_2(1-z) = 1 + B(k^2)\mathcal{L}t + d_1(k^2)t + \ldots + d_n(k^2)t^n + \ldots,$$
$$[\text{avec } \; t \leqq 2, \quad (|1 - z| \leqq 2)],$$

puisque la racine de la déterminante est double. F_2 peut s'écrire encore sous la forme $F_1 \mathcal{L}t + G(t)$, G étant une série entière. Au voisinage de $z = -1$, on obtient de même deux autres solutions $F_1(1+z)$ et $F_2(1+z)$, (avec $|1+z| \leqq 2$), (l'équation ne changeant pas lorsqu'on y remplace z par $-z$). L'équation étant linéaire, ces quatre solutions sont elles-mêmes liées linéairement; donc

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} F_1(1-z) = \alpha F_1(1+z) + \beta F_2(1+z), \\ F_2(1-z) = \gamma F_1(1+z) + \delta F_2(1+z). \end{cases}$$

En changeant le signe et en répétant les substitutions, ces relations deviennent

$$F_1(1-z) = (\alpha^2 + \beta\gamma)F_1(1-z) + \beta(\alpha+\delta)F_2(1-z),$$
$$F_2(1-z) = \gamma(\alpha+\delta)F_1(1-z) + (\beta\gamma+\delta^2)F_2(1-z),$$

ce qui exige

$$\text{soit}\quad \alpha = \delta, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \alpha^2 = 1;$$
$$\text{soit}\quad \alpha = -\delta, \quad \beta\gamma = 1 - \alpha^2.$$

La première hypothèse est impossible comme le montre Poole ([1]), car elle met en évidence deux solutions indépendantes entières paires (ou impaires), ce qui n'est pas possible. Donc, la substitution (S) s'écrit

$$F_1(1-z) = \alpha F_1(1+z) + \beta F_2(1+z),$$
$$F_2(1-z) = \frac{1-\alpha^2}{\beta} F_1(1+z) - \alpha F_2(1+z).$$

Il suffit alors de prendre $\beta = 0$, $\alpha = \pm 1$ pour obtenir l'égalité

$$F_1(1-z) = \pm F_1(1+z) \qquad (|1 \pm z| \leq 2),$$

impliquant qu'il existe une solution paire ou impaire en z et n'ayant pas de singularité à distance finie, c'est-à-dire entière.

α, que Poincaré appelle invariant dans la substitution (S), se calcule en fonction des coefficients $c_n(k^2)$ et $d_n(k^2)$ des développements de F_1 et F_2 et la condition pour qu'une telle fonction existe s'exprime par l'équation $\alpha(a, k^2) = \pm 1$, ou $\beta(a, k^2) = 0$.

Nous avons développé plus longuement ailleurs ces considérations et leurs applications ([2]).

Notre objet est ici de déterminer par des procédés plus rapides la *solution entière* mise en évidence et les valeurs propres qui lui donnent naissance.

Développement de la solution périodique entière de (3). — La méthode employée suivra d'assez près celle qui réussit pour les fonctions de Mathieu. Or, lorsqu'on étudie les valeurs propres (ou caractéristiques) de l'équation de Mathieu, on commence par envisager le cas très simple où k est nul et où l'équation devenue

$$y'' + ay = 0$$

est celle, banale, du mouvement oscillatoire ordinaire, d'intégrale générale

$$y = C_1 \cos\sqrt{a}x + C_2 \sin\sqrt{a}x.$$

Les solutions de période 2π n'existent donc que si $\sqrt{a}$ est entier et c'est suffisant. Les valeurs caractéristiques sont donc $a = N^2$ et forment une infinité dénombrable. Chacune d'elles donne naissance à une intégrale paire $\cos Nx$ et à une impaire $\sin Nx$.

([1]) *Voir* Poole, *Proc. London Math. Soc.*, mars 1921; *voir* aussi Ince, *Ordinary differential equations* (*Dover*, 1944, p. 356).

([2]) *Voir C. R. Acad. Sci.*, t. 224, 1947, p. 1322; et *Bull. Soc. Math. France*, t. 77, 1949, p. 1.

Pour étudier ensuite le cas général (où $kf = 0$), on suppose alors la solution développée en série de forme

$$\sum_{0}^{\infty}(A_N \cos Nx + B_N \sin Nx),$$

c'est-à-dire sous forme d'une série *où chaque élément précisément est une des intégrales qui avaient lieu dans le cas où k était nul.*

Pour l'équation (3) envisageons le même cas où $kf = 0$; (3) s'écrit alors

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} - \operatorname{tg}\xi \frac{dU}{d\xi} + aU = 0,$$

qui se ramène à l'équation de Legendre en prenant pour variable $\sin\xi$. Cette équation admet donc comme intégrale entière et de période 2π un « polynome de Legendre » à condition que a égale non plus N, mais $N(N+1)$ (N entier). Cette intégrale est alors $P_N(\sin\xi)$.

Pour passer au cas général (où $k \neq 0$) nous allons donc poser la solution développée sous forme d'une série *où chaque élément est une des intégrales qui avaient lieu dans le cas où k était nul*, c'est-à-dire précisément un des polynomes précédents [1]

$$U_N = A_0 P_0(\sin\xi) + A_1 P_1(\sin\xi) + \ldots + A_r P_r(\sin\xi) + \ldots.$$

Cette série est au fond une série trigonométrique où se trouve réalisé un certain groupement des termes, groupement qui s'impose par le simple fait qu'il est réalisé de soi quand $k = 0$. Nous chercherons une intégrale qui se réduise à $P_N(\sin\xi)$ quand $kf = 0$. On sait que Mathieu a appelé $ce_N(x)$ l'intégrale périodique de son équation qui se réduit, pour $k = 0$ à $\cos Nx$.

Appelons par analogie $pe_N(\xi)$ l'intégrale U_N qui se réduit pour $kf = 0$ à $P_N(\sin\xi)$. On aura donc

$$pe_N(\xi) = A_0 + \sum_{1}^{\infty} A_r P_r(\sin\xi) \qquad [\text{avec } pe_N(\xi) = P_N(\sin\xi) \text{ si } k = 0].$$

Dans la suite, on supposera $f = 1$, ce qui ne restreint pas la généralité.

---

(1) Nous avons publié pour la première fois cette méthode, et les généralisations que nous en donnons au Chapitre II, dans les *C. R. Acad. Sci*, t. 222, 1946, p. 269-271. En 1947, M. Bouwkamp a publié dans le *Journal of Mathematics and Physics* une Note *On spheroïdal wave functions of order zero* où il utilise le même procédé à des fins de calcul numérique pour l'industrie, Note qui est elle-même le résumé de sa thèse écrite en langue hollandaise et soutenue à Groningen en 1941 mais demeurée sans diffusion (*Diffraction through a circular aperture*).

M. Bouwkamp signale dans sa bibliographie d'autres Mémoires sur des questions faisant intervenir l'équation précédente et dont certaines utilisent un procédé similaire, toujours à des fins numériques. Citons l'article de S. K. Chakravarty, *Quantization under two centres of force*, Part. I; *The hydrogen molecule ion* (*Phil. Mag.* t. 28, 1939, p. 423) (l'auteur utilise un développement en séries de polynomes de Legendre mais aboutit, à la suite d'un choix défavorable, à des relations de récurrence qui sont à cinq termes, ce qui rend le procédé moins avantageux même que celui de Ince), et celui de Baber et Hassé, *The two centre problem in Wave mechanics* (*Proc. Cam. Phil. Soc.* t. 31, 1935, p. 564), étude mathématiquement plus rigoureuse (elle se soucie par exemple de la convergence des séries obtenues, oú les éléments choisis sont des fonctions de Legendre associées).

Pour calculer les A_r, substituons cette expression dans (3). Il est commode de poser pour cela $\sin\xi = z$; (3) prend la forme

$$(z^2-1)\frac{d^2U}{dz^2}+2z\frac{dU}{dz}-(a+k^2z^2)U=0.$$

Comme $P_r(z)$ est tel que

$$(z^2-1)P_r''+2zP_r'=r(r+1)P_r,$$

on tire de là

$$z^2P_r=\frac{1}{2r+1}\left[\frac{r(r-1)}{2r-1}P_{r-2}+\left\{\frac{r^2}{2r-1}+\frac{(r+1)^2}{2r-3}\right\}P_r+\frac{(r+1)(r+2)}{2r+3}P_{r+2}\right],$$

la substitution donne immédiatement la relation suivante, qui a lieu effectivement entre $3A_r$ seulement, ce qui était le but visé

$$(4)\quad [a-r(r+1)]A_r+k^2\left[\frac{r(r-1)A_{r-2}}{(2r-3)(2r-1)}+\left\{\frac{r^2}{2r-1}+\frac{(r+1)^2}{2r+3}\right\}\frac{A_r}{2r+1}+\frac{(r+1)(r+2)A_{r+2}}{(2r+3)(2r+5)}\right].$$

Notons que les polynomes de Legendre étant des fonctions orthogonales, le développement ainsi obtenu rend les mêmes services et procure les mêmes commodités que celui en série trigonométrique. Comme pour les relations relatives aux coefficients de Fourier de l'équation de Mathieu, les indices sautent de deux en deux; il y a donc deux cas à distinguer :

1° *r prend des valeurs paires.* — Les relations en nombre infini, s'écrivent

$$A_0\left(\frac{k^2}{3}+a\right)+\frac{2k^2}{15}A_2=0,$$

$$A_0\frac{2k^2}{3}+A_2\left[\frac{1}{5}\left(\frac{4}{3}+\frac{9}{7}\right)k^2-2.3+a\right]+A_4\frac{3.4}{7\cdot 9}k^2=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$A_{r-2}E_{r-2}+A_rF_r+A_{r+2}G_{r+2}=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$E_{r-2}=\frac{r(r-1)k^2}{(2r-3)(2r-1)},$$

$$F_r=\frac{k^2}{2r+1}\left[\frac{r^2}{2r-1}+\frac{(r+1)^2}{2r+3}\right],$$

$$G_{r+2}=\frac{(r+1)(r+2)k^2}{(2r+3)(2r+5)}.$$

Si l'on divise par A_r les termes de la dernière équation précédente, elle devient, si α_r désigne le rapport $\frac{A_{r-2}}{A_r}$:

$$\alpha_r=-\frac{F_r}{E_{r-2}}-\frac{G_{r+2}}{\alpha_{r+2}}.$$

De là, le développement de α_r (ou en général de α_r) en fraction continue est immédiat, en partant de la deuxième équation du système. Ce système sera compatible si la valeur ainsi trouvée pour α_r est la *même* que celle qu'on tire de la première équation. Cette condition est celle de l'existence des solutions

$pe_N(\xi)$ [1] car les fractions continues convergent [même rapidement [2]], réciproquement, si le système est compatible, ou pourra *calculer les coefficients* A_r *à un facteur près*.

Comme α_r tend rapidement vers zéro [3], si r tend vers l'infini et que $|P_r(\sin\xi)| < 1$, la série converge.

Condition d'existence de pe_N. — Cette condition qui est une équation transcendante entre les paramètres a et k s'écrit ainsi

$$(5)\qquad \frac{k^2}{3} + a = \frac{u_2}{v_2} - \frac{u_4}{v_4} - \cdots - \frac{u_{2p}}{v_{2p}} - \cdots;$$

$$u_2 = \frac{2k^4}{3^2.15} \quad \text{et} \quad u_r = \frac{r(r-1)k'}{(r-2)(r+1)(2r-3)(2r-1)^2(2r+1)}, \qquad v_r = \frac{F_r + a}{r(r+1)} - 1.$$

2° *r prend les valeurs impaires*. — Étude analogue. La condition entre a et k s'écrit

$$(5')\qquad \frac{1}{2.3}\left(1+\frac{4}{5}\right)k^2 + \frac{a}{1.2} - 1 = \frac{u_3}{v_3} - \frac{u_5}{v_5} - \frac{u_7}{\cdots} - \frac{u_{2p+1}}{v_{2p+1}} - \cdots;$$

où les u_r et v_r ont les mêmes valeurs.

Chacune de ces deux équations représente une courbe dans le plan des $(x = a, y = k^2)$. Chacune des courbes se compose d'une infinité dénombrable de branches pour lesquelles, si k ne prend que des valeurs réelles, les points $r(r+1)$ sont des points d'arrêt.

Ince [4], a indiqué, dans un cas analogue, comment construire ces courbes en calculant les coordonnées de leurs points. Les premières de celles-ci ont été construites également et les tables des valeurs caractéristiques établies pour quelques valeurs de k $(k < 20)$.

Si l'on désigne par $T(a, f^2) = 0$ l'équation transcendante qui détermine les valeurs propres (équation caractéristique) et qu'on construise la courbe qui la représente dans le plan des (a, k^2), on obtient une infinité de branches, qui ressemblent à des demi-droites issues des points d'abscisses $N(N+1)$ de l'axe des a, mais qui, pour k infiniment grand admettent des branches paraboliques, très voisines d'ailleurs de celles des fonctions de Mathieu ordinaires.

Au point d'arrêt $[N(N+1), 0]$ d'une ce ces branches, l'intégrale entière en $\sin\xi$ obtenue est un polynome de Legendre. Soit B_N la branche de courbe issue de ce point. Chaque point M de cette branche B_N donne naissance à une intégrale entière $pe_N(\xi)$ développée sous la forme

$$pe_N(\xi) = A_0 + \sum_1^\infty A_r P_r(\sin\xi).$$

---

(1) *Cf.* Ince, *Proc. Royal Soc. of Edinburgh*, 1923.

(2) *Voir*, par exemple, Perron, *Kettenbrüche*.

(3) La démonstration est la même que pour les fonctions de Mathieu : *voir*, par exemple, Mac Lachlan, *Theory of Mathieu functions*, p. 37.

(4) *Proc. Royal Soc. of Edinburgh*, 1931-1932.

Tous les A_r sont des fonctions de k qui se calculent de proche en proche par le système de récurrence précédent, et qui s'annulent pour $k = 0$, sauf A_N qui devient égal à une constante numérique.

On démontre, comme dans le cas des fonctions de Mathieu, que deux fonctions $pe_n(\xi)$ et $pe_{n'}(\xi)$ satisfont à des relations d'orthogonalité

$$\int_{-\pi}^{+\pi} pe_n(\xi) pe_{n'}(\xi) \cos\xi \, d\xi = \delta_n^{n'},$$

$\delta_n^{n'}$ étant nul si $n' \neq n$ et non nul si $n' = n$. On peut donc normaliser ces fonctions, les A_r étant définies à un facteur près. Il suffit de calculer

$$\int_{-\pi}^{+\pi} pe_n^2(\xi) \cos\xi \, d\xi,$$

qui vaut, par exemple si n est pair

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sum_0^{\infty} A_{2r}^2 P_{2r}^2(\sin\xi) \cos\xi \, d\xi = \sum_0^{\infty} \frac{A_{2r+1}^2}{2r+1},$$

quantité qui, pour que la fonction soit normalisée, devra être égale à 1.

M. Humbert [1] avait introduit dans cette théorie non la fonction $pe_n(\xi)$, mais $ce_n^{\frac{1}{2}}(\xi) = \sqrt{\cos\xi}\, pe_n(\xi)$ qui est solution de l'équation de Mathieu associée où l'on a fait disparaître le terme du premier ordre. La relation d'orthogonalité est de ce fait un peu plus simple, le facteur $\cos\xi$ ayant disparu, néanmoins nous avons préféré ici garder la fonction pe_n qui a, sur la fonction de M. Humbert, l'avantage de ne pas comporter de singularités.

Intégrale générale de l'équation (3) pour les valeurs caractéristiques. — Si a et k^2 sont liés par l'une ou l'autre des relations (5) ou (5') on a une première intégrale $pe_n(\xi)$ qui est périodique. Il s'agit d'en avoir une autre, pour que l'équation soit intégrée. Cette autre n'est pas périodique sans quoi on l'aurait trouvée. D'ailleurs, si on la cherche par la méthode élémentaire en posant

$$\overline{\mathfrak{U}}_N = U_N f + W_N,$$

on trouve sans difficulté

$$\overline{\mathfrak{U}}_N = \frac{1}{2} \mathcal{L} \left| \frac{1+\sin\xi}{1-\sin\xi} \right| U_N + W_N,$$

U_N étant $pe_N(\xi)$ la première intégrale et W_N une autre fonction périodique, entière en $\sin\xi$.

Cette intégrale $\overline{\mathfrak{U}}_N$ se réduit d'ailleurs, quand $k^2 = 0$, à la deuxième intégrale de l'équation de Legendre $Q_N(\sin\xi)$. Pour cette raison, nous proposerons de la désigner par $qe_N(\xi)$ et l'on cherchera selon le même processus à la développer en série des éléments $Q_N(\sin\xi)$.

---

(1) *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 1921-1922.

Soit donc

$$qe_N(\xi)=\sum_0^\infty B_r Q_r(\sin\xi)$$

ou

$$qe_N(\xi)=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left|\frac{1+\sin\xi}{1-\sin\xi}\right|\left[\sum_0^\infty B_r P_r(\sin\xi)\right]+\sum_0^\infty B_r W_r.$$

Or $\sum\limits_0^\infty B_r P_r$ est la première solution, donc $B_r=A_r$ à un facteur près. La deuxième solution s'écrit donc

$$qe_N(\xi)=\sum_0^\infty A_r Q_r(\sin\xi).$$

Cette série converge absolument, comme l'autre, car d'une part

$$\frac{A_{r+2}}{A_r}\sim\frac{1}{r^2},$$

de plus

$$|W_r|=\left[P_{r-1}P_0+\frac{1}{2}P_{r-2}P_1+\ldots+\frac{1}{r}P_0P_{-1}\right]<\sum_1^r\frac{1}{r}<\operatorname{Log} r,$$

donc

$$\left|\frac{W_{r+2}}{W_r}\right|\to 1.$$

Intégration de l'équation (3) **dite modifiée.** — Les valeurs de a étant calculées par l'équation caractéristique (5) ou (5′), il reste à intégrer l'équation *modifiée*. Ses solutions seront désignées par $peh_N(\eta)$ et $qeh_N(\eta)$.

Les développements de ces solutions en séries respectives de $P_N(i\,\mathrm{sh}\,\eta)$ et $Q_N(i\,\mathrm{sh}\,\eta)$ sont immédiats et convergent comme le montrent aussitôt les expressions asymptotiques de $P_N(i\,\mathrm{sh}\,\eta)$ et $Q_N(i\,\mathrm{sh}\,\eta)$ (1).

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS DE MATHIEU ASSOCIÉES.

Le problème d'acoustique précédent, envisagé dans le cas simple de la symétrie circulaire, nous a conduits à la considération de fonctions périodiques orthogonales et normables. C'est à ces fonctions envisagées maintenant dans le cas général, que nous allons nous intéresser pour elles-mêmes, et en nous dégageant peu à peu de leur signification physique.

Revenons donc à l'équation des ondes $\nabla^2 p+k^2 p=0$, écrite dans le système de coordonnées précédent

$$\rho=f\,\mathrm{ch}\,\eta\cos\xi,$$
$$z=f\,\mathrm{sh}\,\eta\sin\xi;$$

(1) *Voir* par exemple, Hobson, *Spherical Harmonics*, p. 305.

cherchons-en cette fois des solutions à variables séparées en ξ et η, mais dépendant de φ, c'est-à-dire de la forme

$$p = \mathrm{U}(\xi)\,\mathrm{V}(\eta)\cos m\varphi.$$

On suppose tout de suite que m est entier pour que les solutions présentent encore une signification physique simple. On obtient alors pour U et V des équations différentielles linéaires qu'on peut simplifier tout de suite de manière à faire disparaître dans le coefficicient de U (ou de V) le terme en $\frac{1}{\cos^2\xi}$ $\left(\text{ou en } \frac{1}{\text{ch}^2\eta}\right)$, ce qui revient à chercher tout de suite une solution de la forme

$$p = \cos^m\xi\,\text{ch}^m\eta\,\mathrm{U}(\xi)\,\mathrm{V}(\eta)\cos m\varphi.$$

Les équations différentielles en U et V s'écrivent alors

$$(\mathrm{E}_p)\qquad \frac{d^2\mathrm{U}}{d\xi^2} - (2m+1)\,\text{tg}\,\xi\,\frac{d\mathrm{U}}{d\xi} + (\quad a + k^2\sin^2\xi)\,\mathrm{U} = 0,$$

$$(\mathrm{H}_r)\qquad \frac{d^2\mathrm{V}}{d\eta^2} + (2m+1)\,\text{th}\,\eta\,\frac{d\mathrm{V}}{d\eta} + (-a + k^2\,\text{sh}^2\eta)\,\mathrm{V} = 0.$$

que nous appellerons dans la suite respectivement (E_p) et (H_r) pour rappeler que la première provient de l'équation du son sur un ellipsoïde *plat* et l'autre sur un hyperboloïde *réglé*.

Tout d'abord, remarquons que (E_p) est l'équation que M. Humbert a appelée (à un changement de fonction très simple près) l'équation de Mathieu associée (parce qu'elle joue par rapport à l'équation de Mathieu ordinaire un rôle analogue à celui de l'équation de Legendre associée par rapport à l'équation de Legendre).

Cherchons à l'étudier comme celle du Chapitre I. Pour cela, regardons ce qu'elle devient quand on fait $k = 0$. Elle s'écrit alors

$$(\mathrm{G})\qquad \frac{d^2\mathrm{U}}{d\xi^2} - (2m+1)\,\text{tg}\,\xi\,\frac{d\mathrm{U}}{d\xi} + a\mathrm{U} = 0.$$

Cette équation, connue, est dite de *Gegenbauer* (¹). Comme celle de Legendre, elle admet des solutions polynomiales en $\sin\xi$, si a est choisi égal à $n(n+2m+1)$. Ce sont des polynomes habituellement désignés par $\mathrm{C}_n^{m+\frac{1}{2}}$, et qui sont liés simplement, si m est entier, aux fonctions de Legendre associées.

Si l'on pose comme Gegenbauer

$$m + \frac{1}{2} = \nu, \qquad \sin\xi = z,$$

un tel polynome s'écrit

$$\mathrm{C}_n^\nu(z) = \frac{\Gamma(n+\nu)2^n}{\Gamma(\nu)\Gamma(n+1)}\left[z^n - \frac{n(n-1)}{1(n+\nu-1)}\,\frac{z^{n-2}}{2^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2(n+\nu-1)(n+\nu-2)}\,\frac{z^{n-4}}{2^4} + \ldots\right].$$

(¹) *Wiener Sitzungsberichte*, t. 70, 1874, p. 434-443; t. 75, 1877, p. 391-396; t. 97, 1888, p. 295-316; t. 102, 1893, p. 242.

Pour résoudre le problème des valeurs propres de l'équation, cherchons-en donc, comme au Chapitre I, une solution sous la forme de série de tels polynomes (où nous remarquons que, puisque m est supposé entier, ν est pour l'instant toujours égal à la moitié d'un impair)

$$U_N^\nu(\xi) = A_0 C_0^\nu(\sin\xi) + A_1^\nu C_1^\nu(\sin\xi) + \ldots + A_r^\nu C_r^\nu(\sin\xi) + \ldots.$$

Appelons ici $pe_N^\nu(\xi)$ l'intégrale U_N^ν qui se réduit pour $k = 0$ à $C_N^\nu(\sin\xi)$; on aura

$$pe_n^\nu(\xi, k) = A_0^\nu + \sum_1^\infty A_r^\nu C_r^\nu(\sin\xi),$$

avec cette condition que

$$pe_N^\nu(\xi, 0) = \lambda_N^\nu C_N^\nu(\sin\xi) \qquad (\lambda_N^\nu \text{ facteur numérique}).$$

Pour calculer les A_r^ν, on substitue donc cette expression dans (E_p). On s'appuie sur les formules connues

$$C_N^{\nu+1}(z) + C_{N-2}^{\nu+1}(z) - 2z\,C_{N-1}^{\nu+1}(z) = C_N^\nu(z);$$
$$N C_N^\nu(z) - 2(N+\nu-1)z\,C_{N-1}^\nu(z) + (N+\nu-2)C_{N-2}^\nu(z) = 0.$$

Les premiers polynomes étant eux-mêmes liés par

$$C_1^\nu = 2\nu z\,C_0^\nu,$$
$$C_2^\nu = (\nu+1)z\,C_1^\nu = 2\nu(\nu+1)z^2 C_0^\nu + \nu C_0^\nu$$

et C_0^ν étant une constante qu'on peut prendre égale à 1.

La deuxième relation appliquée deux fois, permet de tirer

$$z^2 C_r^\nu = \frac{1}{l_r^\nu}\left[R_{r+2} C_{r+2}^\nu + S_r C_r^\nu + T_{r-2} C_{r-2}^\nu\right],$$

avec

$$l_r = 4(r+\nu)(r+\nu-1)(r+\nu-2),$$
$$R_{r+2} = (r+1)(r+\nu-1)(r+2),$$
$$S_r = (r+1)(r+\nu-1)(r+2\nu) + r(r+\nu+1)(r+2\nu-1),$$
$$T_{r-2} = (r+2\nu-1)(r+\nu+1)(r+\nu-2).$$

La relation entre les A_r^ν s'écrit donc

$$(6) \qquad [a - r(r+2\nu)]A_r^\nu + k^2\left[\frac{R_r}{l_{r-2}} A_{r-2}^\nu + \frac{S_r}{l_r} A_r^\nu + \frac{T_r}{l_{r+2}} A_{r+2}^\nu\right] = 0.$$

Notons que cette relation doit se réduire si $\nu = \frac{1}{2}$ à la relation (4) trouvée au Chapitre I. C'est ce qu'on vérifie de suite.

Équation caractéristique. — Il y a naturellement lieu de distinguer encore ici si r prend des valeurs paires ou des valeurs impaires.

1° *r prend des valeurs paires.* — Les relations s'écrivent

$$A_0 \quad \left[a + \frac{k^2}{2(\nu+1)}\right] + A_2 \frac{\nu(2\nu+1)}{2(\nu+1)(\nu+2)} k^2 = 0,$$

$$A_0 \quad \frac{1}{2\nu(\nu+1)} + A_2\left[\frac{3}{2}\frac{(1+\nu)}{(\nu+2)(\nu+3)} + \frac{(2\nu+1)}{2(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{a-4(1+\nu)}{k^2}\right] + A_4 \frac{(\nu+1)(2\nu+3)}{2(\nu+3)(\nu+4)} = 0,$$

....;

$$A_{n-2}\frac{n(n-1)}{4(n+\nu-2)(n+\nu-1)}$$
$$+ A_n\left[\frac{(n+1)(n+2\nu)}{4(n+\nu)(n+\nu+1)} + \frac{n(n+2\nu-1)}{4(n+\nu)(n+\nu-1)} + \frac{a-n(n+2\nu)}{k^2}\right]$$
$$+ A_{n+2}\frac{(n+2\nu)(n+2\nu+1)}{4(n+\nu+1)(n+\nu+2)} = 0,$$

....

L'équation caractéristique s'écrit

$$a + \frac{k^2}{2(\nu+1)}$$
$$= \cfrac{\cfrac{(2\nu+1)k^4}{4(\nu+1)(\nu+2)}}{\frac{1}{8}\left[5 - \frac{1}{\nu+1} - \frac{6}{\nu+3}\right]\frac{k^2}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{a}{4(1+\nu)} - 1 - \cfrac{u_4^\nu}{v_4^\nu - \ldots - \cfrac{u_{2p}^\nu}{v_{2p}^\nu - \ldots}}},$$

avec

$$u_r^\nu = \frac{T_{r-2}R_r k^4}{\lambda_{r-2}^\nu \lambda_r^\nu r(r-2)(r+2\nu-2)(r+2\nu)},$$

$$v_r^\nu = \frac{\frac{S_r}{\lambda_r^\nu} + a}{r(r+2\nu)} - 1.$$

On forme de même l'équation si r prend les valeurs impaires.

Il y a lieu de discuter le système d'équations précédentes dont les coefficients ne sont pas toujours définis, ou peuvent donner lieu à des circonstances particulières.

Discussion. — *a*. La relation fournissant $z^2 C_r^\nu$ en fonction linéaire de C_{r-2}^ν, C_r^ν, C_{r+2}^ν est toujours valable sauf si $n+\nu$ peut être nul, ce qui, ici, ne peut se produire puisque ν est la moitié d'un impair.

b. Reste à considérer si l'on peut toujours former l'équation caractéristique. Il n'y a de difficulté que si certains coefficients deviennent nuls.

Il peut arriver que le coefficient de A_{r+2}^ν soit nul, ce qui peut se faire si $\lambda = -2\nu$ ou $-2\nu-1$, c'est-à-dire si 2ν est un entier négatif. Comme nous n'envisageons pas, pour l'instant le cas où ν lui-même est entier, il n'y a lieu de se soucier que du cas où ν est la moitié d'un impair négatif.

Si $P = -2\nu$ (P entier impair).

La relation de récurrence en A_{r-2}^ν, A_r^ν, A_{r+2}^ν se réduit à celle-ci

$$A_{P-2}\frac{P(P-1)}{4(P+\nu-2)(P+\nu-1)} + A_P\left[\frac{(P+1)(P+2\nu)}{4(P+\nu)(P+\nu+1)} + \frac{P(P+2\nu-1)}{4(P+\nu)(P+\nu-1)} + \frac{a-P(P+2\nu)}{k^2}\right] = 0,$$

où

$$r = P = -2\nu.$$

On peut y satisfaire de deux manières :

a. $A_P = 0$. — Le coefficient de A_{P-2} étant alors différent de zéro, on en déduit que $A_{P-2} = 0$; et comme deux coefficients consécutifs sont ainsi nuls, tous les précédents le sont, donc, $A_1 = A_3 = \ldots = A_P = 0$.

La relation suivante s'écrit, puisque A_P est nul,

$$(7) \quad A_{P+2}\left[\frac{2(P+3)}{(P+4)(P+6)} + \frac{1}{P+4} + \frac{a-2(P+2)}{k^2}\right] + A_{P+4}\frac{2.3}{(P+6)(P+8)} = 0,$$

et les autres s'écrivent ensuite normalement.

Le système part donc d'ici et tous les coefficients précédents sont nuls. L'équation caractéristique s'écrit en tirant le rapport $\frac{A_{P+2}}{A_{P+4}}$ des équations suivantes (qu'on n'a pas écrites) et en l'égalant à la valeur fournie par (7).

Elle est transcendante et la courbe se compose d'une infinité de branches issues des points $a = n(n-P)$ de l'axe des a $(n > P)$. La solution correspondante s'écrit $\sum_{p+2}^{\infty} A_r^\nu C_r^\nu$. Étude analogue si $P = -2\nu - 1$.

b. $A_P \neq 0$. — Dans ce cas, la relation pour $n = P$ s'écrit

$$A_{P-2}\frac{P(P-1)}{(P-4)(P-2)} + A_P\left[-\frac{1}{P-2} + \frac{a}{k^2}\right] = 0,$$

la première des équations du système ne contenant également que deux termes, la condition de compatibilité du système s'obtient en annulant un déterminant *fini* (ou par une équation à fraction continue finie). Cette condition étant réalisée, le système des équations suivantes $(r > P)$ comprend une infinité d'équations et détermine A_{P+2}, A_{P+4}, ... en fonction de A_P choisi $\neq$ de 0. La solution est donc ici de la forme $\sum_0^{\infty} A_n^\nu C_n^\nu$, mais l'équation caractéristique est *algébrique* de degré $\frac{1}{2} - \nu$.

Cette discussion met donc en évidence des cas où la courbe caractéristique se décompose en une infinité de branches transcendantes et *en nombre fini de branches algébriques* (correspondant aux plus petites valeurs de l'indice n des fonctions pe_n^ν obtenues). Ce cas n'arrive jamais pour les fonctions de Mathieu ordinaires.

Exemples. — I. $\nu = -\frac{1}{2}$. — La première équation du système se réduit à $A_0(a + k^2) = 0$.

1° $A_0 = 0$. — On écrit alors la deuxième, la troisième etc., on a une équation caractéristique avec une fraction continue infinie et une infinité de racines.

2° $A_0 \neq 0$. — Il faut alors $a + k^2 = 0$.

Dans le plan des (a, k^2, f) cette courbe est la deuxième bissectrice des axes des coordonnées.

II. $\nu = -\frac{3}{2}$. — Les deux premières équations sont

$$A_0\left[\frac{a}{k^2} - 1\right] - 6A_2 = 0,$$

$$A_0\frac{2}{3} + A_2\left(3 + \frac{a+2}{k^2}\right) = 0.$$

En supposant $A_2 \neq 0$ pour obtenir le cas de l'équation algébrique, celle-ci s'écrit (si $k^2 = q$).

$$(a+q)^2 + 2(a - q) = 0,$$

équation d'une parabole de direction asymptotique parallèle à la deuxième bissectrice et passant par les points $a = 0$, $a = -2$. (Comme $q = k^2$, seuls sont à retenir les arcs $q > 0$ de cette parabole.)

III. Prenons enfin $\nu = -\frac{5}{2}$, nous avons une cubique

$$(a+q)^3 + \frac{20}{3}aq - 6q^2 + 10a^2 + 24a - 8q = 0.$$

On vérifie que les trois branches de la cubique précédente sont paraboliques et admettent pour direction asymptotique commune celle de la deuxième bissectrice des axes (a, q).

Ce résultat est en accord avec celui qui a été établi par Ince [1] relativement aux branches infinies de l'équation caractéristique des fonctions de Mathieu. Le calcul de Ince se généralise facilement au cas où ν est quelconque, mais fini [2].

Le résultat obtenu est alors celui-ci :

Si k est très grand, le développement asymptotique de la valeur propre de a s'écrit (pour une fonction pe_m^ν),

$$a = -k^2 + (2m+1)k - \frac{1}{4}\left[m^2 + (m+1)^2 + \frac{1}{4}\nu(1-\nu)\right] + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

Les courbes ont une direction asymptotique commune, celle de la deuxième bissectrice, elles n'ont pas d'asymptotes.

Convergences des solutions ainsi calculées. — De la relation (6), divisée par A_r^ν, on tire

$$\left[a - r(r+2\nu) + k^2\frac{S_r}{\lambda_r}\right] + k^2\left[\frac{R_r}{\lambda_{r-2}}\frac{1}{\varphi_{r-2}} + \frac{T_r}{\lambda_{r+2}}\varphi_r\right] = 0, \qquad \text{où} \quad \varphi_r = \frac{A_{r+2}^\nu}{A_r^\nu}.$$

On montre, comme dans le cas des fonctions de Mathieu, et de celles du Chapitre I, que ce rapport tend vers zéro quand r tend vers l'infini. (5) montre alors que, pour k fini, $\varphi_{r-2} \sim \frac{k^2}{4r^2}$ quand $r \to \infty$, ce qui prouve que la convergence

(1) INCE, *Proc. London Math. Soc.*, 1923.

(2) Si ν est lui-même infiniment grand, on a à étudier les nappes de la surface caractéristique. *Voir C. R. Acad. Sci.*, 225, 1947, p. 371-373.

de cette série est comparable à celle de la série $\frac{k^2p}{4^p(p\,!)^2}$, où p vaut $\frac{r}{2}$ (dans le cas où r est pair). Reste à considérer le rappport $\frac{C_{r+2}^{\nu}(\sin\xi)}{C_r^{\nu}(\sin\xi)}$.

Pour l'étudier, repassons aux fonctions de Legendre,

$$\frac{C_{r+2}^{\nu}}{C_r^{\nu}} = \frac{P_{r+\nu-\frac{3}{2}}^{\nu-\frac{1}{2}}}{P_{r+\nu-\frac{1}{2}}^{\nu-\frac{1}{2}}};$$

Le rapport $\frac{C_{r+2}^{\nu}}{C_r^{\nu}}$ tend donc vers 1 pour r croissant indéfiniment et la série $A_r^{\nu} C_r^{\nu}$ converge finalement comme la série A_r^{ν} (1).

Normalisation. — Ce procédé donne seulement les A_r^{ν} à un facteur près. Pour déterminer ce facteur, nous ferons appel au fait que les fonctions ainsi définies peuvent être normalisées, et *doivent* l'être pour être utilisables. On se sert pour cela de la propriété connue de *quasi-orthogonalité* des polynomes de Gegenbauer

$$\int_0^{\pi} C_{n_1}^{\nu}(\sin\xi)\, C_{n_2}^{\nu}(\sin\xi)\cos^{2\nu}\xi\, d\xi = \delta_{n_1}^{n_2}.$$

On en tire pour les fonctions pe_n^{ν}, la propriété

$$\int_0^{\pi} pe_{n_1}(\xi)\, pe_{n_2}(\xi)\cos^{2\nu}\xi\, d\xi = \delta_{n_1}^{n_2},$$

ce qui permet d'écrire l'équation de normalisation sous la forme

$$\frac{\pi}{2^{2\nu-1}\Gamma^2(\nu)}\sum_1^{\infty}\frac{\Gamma(n+2\nu)}{(n+\nu)\Gamma(n+1)}A_n^2 = 1.$$

Intégrale générale pour les valeurs caractéristiques. — 1° On peut déjà calculer une deuxième intégrale de l'équation par la méthode d'Euler, comme on le fait pour les fonctions de Mathieu ordinaires.

2° On peut encore procéder en cherchant la deuxième intégrale sous la forme

$$y = uf + w,$$

f étant la première solution pe_n^{ν} à condition de choisir alors u pour que

$$\frac{u''}{u'} = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{2\sin\xi}{\cos^2\xi}, \qquad \text{où} \quad u' = C\cos^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\xi,$$

w est fournie par la même équation que f, mais avec un deuxième membre qui est

$$\cos^{1-2\nu}\xi\,\frac{df}{d(\sin\xi)}.$$

(1) Hobson, *Spherical Harmonics*, p, 303.

On peut alors faire le changement de fonction

$$w = \cos^{1-2\nu}\xi \times \lambda.$$

L'équation qui fournit λ est alors celle qui donne $pe^{1-\nu}_{n+2\nu-1}(\xi)$, mais avec le deuxième membre $\dfrac{df}{d(\sin)\xi}$.

3° Enfin, on peut utiliser un développement où chaque élément est une fonction $H^\nu_n(\sin\xi)$ de Gegenbauer [fonction qui généralise la fonction $Q_n(\sin\xi)$ de Legendre au même titre que le polynome C^ν_n généralise le polynome P_n]. Ces fonctions sont peu utilisées, mais M. Humbert en a donné une expression plus simple que celle de Gegenbauer, dans son Mémoire [1]. La convergence du développement se démontre comme au Chapitre I.

Intégration de l'équation modifiée. — On sait qu'il suffit de changer ξ en $i\eta$ et a en $-a$ pour passer de l'équation (E_p) à (H_r), dite modifiée. Les développements en série de polynomes C^ν_n deviennent donc des développements en série de $C^\nu_n(i\,\mathrm{sh}\,\eta)$. Pour n très grand on montre, comme dans le cas de $\nu = \frac{1}{2}$ que le rapport d'un terme au précédent tend vers zéro puisque

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m+1)}\,|P^m_n(i\,\mathrm{sh}\,\eta)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\,\frac{\mathrm{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta + i\left(\frac{\pi}{4} - m\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,\eta}}.$$

Remarque sur l'identité de certaines solutions. — Si l'on fait, dans l'équation (E_p) le changement $U = \cos^{\nu-}\xi \times \overline{\mathfrak{U}}$, elle devient :

$$(E^N_p) \qquad \frac{d^2\overline{\mathfrak{U}}}{d\xi^2} + \left[a + \nu^2 + \frac{\nu(1-\nu)}{\cos^2\xi} + k^2 \sin_2\xi\right]\overline{\mathfrak{U}} \equiv 0,$$

forme sans terme du premier ordre, où le coefficient de $\overline{\mathfrak{U}}$ montre que le changement de ν en $1-\nu$ ne modifie pas l'équation. Le changement $y = \cos^{1-2\nu}\xi\, Y$ dans l'équation étudiée (E_p) doit donc donner une équation du même type. C'est ce qu'on vérifie facilement. Pour préciser, si dans l'équation de Gegenbauer on fait le changement de fonction précédent, on obtient encore l'équation de Gegenbauer, à cela près que ν y est remplacé par $1-\nu$ et n par $n + 2\nu - 1$.

Si l'on repasse à l'équation de Mathieu associée, on vérifie, et M. Humbert le signale dans son premier Mémoire, que

$$pe^\nu_n(\xi) = \cos^{1-2\nu}\xi\, pe^{1-\nu}_{n+2\nu-1}(\xi),$$

cela montre qu'on obtient donc d'autres fonctions du type pe, mais qui viennent s'appliquer sur les précédentes en changeant ν en $1-\nu$.

Les cas de décomposition des courbes caractéristiques signalés dans la discussion et qui ne se produisaient apparemment que pour ν négatif peuvent donc se

(1) *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 1918.

produire aussi à l'occasion de ν positif. Il suffit, de changer, dans les différents cas particuliers déjà trouvés, ν en $1-\nu$ et n en $n+2\nu-1$.

On vérifie sans peine que, par exemple, les cas $\nu=\frac{3}{2}$, $\nu=\frac{5}{2}$, $\nu=\frac{7}{2}$ donnent lieu aux mêmes décompositions (même droite, même conique, même cubique) que ceux déjà trouvés ci-dessus.

Cas où m n'est plus entier. — On peut être amené à étudier l'équation précédente dans le cas où m n'est plus entier, de la même façon qu'on a à le faire pour les fonctions de Legendre associées. On ne suppose plus alors forcément que les paramètres sont entiers, ni même réels (1). L'étude générale sera abordée au Chapitre III; ici, nous supposons encore n entier réel, parce que, dans ce cas, l'équation de Gegenbauer en z admet encore, quel que soit ν, une solution polynomiale $C_n^\nu(z)$, que l'on peut continuer à utiliser comme élément de série pour les solutions cherchées.

La méthode de recherche et de calcul de la solution est tout à fait la même. Quand il intervient une expression comme $\cos^\nu\xi$, on convient avec Ince (2) qu'elle désigne *la branche principale* de la fonction, c'est-à-dire celle qui est réelle et positive pour $-\frac{\pi}{2}<\xi<+\frac{\pi}{2}$.

Ici, dans la discussion du système récurrent, aucun cas particulier n'apparaît et l'équation caractéristique ne comporte pas de décomposition. Elle est donc transcendante.

Reste toujours le cas où ν est un entier négatif, qui sera traité complètement au Chapitre III. Remarquons ici seulement que la méthode présentée précédemment ne s'applique plus dans ce cas, car il est impossible de calculer $z^2C_n^\nu$ en fonction linéaire des C_r^ν (le coefficient de $z^2C_n^\nu$ s'annulant).

Ce cas exceptionnel n'est pas surprenant, si l'on se rappelle que les polynomes de Gegenbauer sont les coefficients de h^n dans le développement de $(1-2hz+h^2)^{-\nu}$.

Il est clair que si ν est un entier négatif, ce développement est fini et les C_n^ν sont tous nuls pour $n>-2\nu$.

Dans ce cas, le développement $\sum\limits_0^\infty A_n^\nu C_n^\nu$ de pe_n^ν, s'il était valable, se réduirait à un polynome. On vérifie qu'il n'en est rien.

On peut d'ailleurs, pour ν entier négatif et pour $n>-2\nu$ définir d'autres polylomes P_n^ν qui satisfont à l'équation, mais ne sont plus définissables par $(1-2hz+h^2)^{-\nu}$.

L'expression de ces polynomes est connue (*voir* ci-dessous) et ils vérifient naturellement la même équation de récurrence. On peut se demander s'ils ne seraient pas définissables à partir d'une fonction génératrice autre que $(1-2hz+h^2)^{-\nu}$.

M. Pierre Humbert m'a communiqué à ce propos qu'il avait été lui-même conduit à se poser cette question (au sujet des fonctions superharmoniques dans le plan).

(1) Hobson, *Spherical Harmonics.*, p. 179.
(2) Ince, *Proc. London. Math. Soc.*, 1923.

Et il a constaté que les polynomes C_n^ν pour $\nu > -2\nu$ pouvaient être définis à partir de la fonction

$$(1-2hz+h^2)^{-\nu}\operatorname{Log}(1-2hz+h^2)$$

si l'on développe cette fonction sous la forme

$$\sum_1^\infty h^n P_n^\mu(z) \qquad (\mu=-\nu>0)$$

et si l'on dérive par rapport à h, on obtient

$$2\mu(1-2hz+h^2)^{\mu-1}(h-z)\operatorname{Log}(1-2hz+h^2)$$
$$+2(h-z)(1-2hz+h^2)^{\mu-1}=\sum_1^\infty nh^{n-1}P_n^\mu(z).$$

et en multipliant par $1-2hz+h^2$,

$$2\mu(h-z)\sum_1^\infty h^n P_n^\mu(z)+2(h-z)(1-2hz+h^2)^{\mu-1}=\sum_1^\infty nh^{n-1}P_n^\mu(z).$$

Le deuxième terme étant un polynome de degré $2\mu-1$ n'a pas d'influence sur les termes en h de degré supérieur, En fait, pour $n>2\mu$ on obtient pour les P_n^μ une formule de récurrence qui est justement celle des $C_n^\nu(\nu=-\mu)$.

On peut donc les calculer de proche en proche, Sonine dans son article sur les fonctions de Bessel ([1]) donne d'ailleurs les expressions distinctes de ces deux catégories C_n^ν et P_n^μ de polynomes. C_n^ν a été écrit ci-dessus, et si $n>2(1-\nu)$

$$P_n^\nu=\frac{(n+\nu-1)!}{n!}(2z)^n-\frac{(n+\nu-2)!}{1!(n-2)!}(2z)^{n-2}+\ldots+\frac{\left(\frac{n}{2}+\nu-1\right)!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}.$$

Remarque sur certaines notations employées antérieurement. — Ce sont les solutions $ce_n^\nu(\xi)=\cos^\nu\xi\, pe_n^\nu(\xi)$, de l'équation (E_p^N) que M. Humbert a appelées *fonctions de Mathieu associées.*

Si l'on fait $\nu=0$ la relation de récurrence des pe_n^ν doit se réduire à celles des coefficients de Fourier de l'équation de Mathieu ordinaire. C'est ce qu'on vérifie de même facilement en remarquant que

$$C_n^0(\cos\theta)=\frac{1}{n}\cos n\theta.$$

(Il importe de faire attention que l'équation caractéristique qu'on trouve par cette méthode n'est pas exactement celle que donne Ince, le a habituel de l'équation de Mathieu étant associé à $-2q\cos 2\xi$ et non à $k^2\sin^2\xi$ comme ici.)

Par ailleurs, M. Pierre Humbert, qui considère les fonctions pe_n^ν développées en séries trigonométriques, ou en séries de fonctions de Mathieu ordinaires, désigne par $ce_n^\nu(\xi)$, la fonction qui se réduit pour $\nu=0$ à $ce_n(\xi)$. Ici, nous dési-

---

([1]) *Math. Annalen.*, 1871, p. 1-78.

gnons par la même notation la fonction qui se réduit pour $k=0$ à $C_n^{\nu}(\sin\xi)$. Ces définitions ne sont pas identiques, car si l'on fait tendre ν vers zéro dans $C_n^{\nu}(\sin\xi)$ on trouve $\frac{1}{n}\cos n\xi$ (si n est pair) et $\frac{1}{n}\sin n\xi$ (si n est impair). Mais cette distinction du début disparaît lorsqu'on a pratiqué les normalisations, car alors la fonction de M. Humbert et la nôtre sont définies à des facteurs constants près, et ces facteurs seront différents, selon qu'on norme la série trigonométrique ou la série des C_n^{ν}, alors la valeur obtenue pour $ce_n^{\nu}(\xi)$ est toujours la même et telle que

$$\int_0^{\pi} [ce_n^{\nu}(\xi)]^2\, d\xi = 1,$$

ce qui rend d'accord toutes les définitions.

Définition des fonctions $se_n^{\nu}(\xi)$. — On voit sur sa forme même que l'équation ne change pas si l'on change ν en $1-\nu$, c'est dire qu'associée à la solution

$$ce_n^{\nu}(\xi) = \cos^{\nu}\xi\, pe_n^{\nu}(\xi),$$

de valeur caractéristique $A = A(k, \nu)$, existe une autre solution de l'équation, soit

$$ce_{n'}^{1-\nu}(\xi) = \cos^{1-\nu}\xi\, pe_{n'}^{1-\nu}(\xi),$$

de valeur carattéristique $A = A(k, 1-\nu)$.

Si $k=0$, A se réduit à $(n+\nu)^2$, $\bar{A}$ à $(n'+1-\nu)^2$.

Supposons pe_n^{ν} paire en $\sin\xi$ [soit $pe_{2n}^{\nu}(\xi)$], son A_{2n} est de la forme

$$(2n+\nu)^2 + B_{2n}(\nu, k^2),$$

B_{2n} étant une fonction entière de ν et de k^2.

Si ν tend vers zéro, l'équation $[E_p^N]$ tend vers celle de Mathieu et la fonction $pe_{2n}^{\nu}(\xi)$ vers $pe_{2n}^{0}(\xi) = ce_{2n}(\xi)$ qui se trouve ainsi toute développée en séries de $\cos 2r\xi$.

L'autre solution $pe_{2n'}^{1}(\xi)$ se trouve ainsi développée en séries de polynomes $C_{2r}^{1}(\sin\xi)$ qui sont les polynomes solutions de l'équation

$$y'' - 2\operatorname{tg}\xi\, y' + 2r(2r+2)y = 0,$$

d'où l'on déduit aussitôt que la fonction $\cos\xi\, C_{2r}^{1}(\sin\xi)$, elle, est solution de

$$y'' + (2r+1)^2 y = 0.$$

La fonction $\cos\xi\, pe_{2n'}^{1}(\xi)$ n'est autre qu'une fonction de Mathieu ordinaire de type impair, $se_{2n'+1}(\xi)$.

On peut ainsi introduire une nouvelle notation qui généralise directement celle des fonctions de Mathieu ordinaires; Ince a posé

$$ce_n^{1-\nu}(\xi) = se_{n+1}^{\nu}(\xi).$$

Ainsi, lorsque K tend vers zéro, une fonction du type *de Mathieu associée* qui se réduit à une fonction se_n^{ν} s'appelle elle-même se_n^{ν}. Mais, en réalité, il n'y a pas ici de distinction radicale, comme pour les fonctions de Mathieu ordinaires, entre les fonctions de type ce_n^{ν} et celle de type se_n^{ν}. Cela tient à la présence du paramètre continu ν qui réalise la jonction entre une famille et l'autre. Nous ne nous préoccuperons donc pas à l'avenir des fonctions se_n^ν qu'on obtiendra elles-mêmes à partir des pe_n^ν à condition de donner à ν toutes les valeurs.

Avec plus de précision encore, si nous faisons dans l'équation (E_p) non normale, le changement de fonction $y = \cos^{1-2\nu}\xi\, Y$ déjà utilisé précédemment, l'équation en Y est de même forme, avec des constantes différentes : ν est changé en $1-\nu$, et n en $n+2\nu-1$ la quantité $n(n+2\nu)$ devient ainsi $(n+1)(n+2\nu-1)$.

Les solutions de l'équation de Mathieu associée dont le paramètre a se réduit, pour K^2 nul, à $(n+1)(n+2\nu-1)$, sont donc, d'après la définition ci-dessus du type qu'on a convenu d'appeler se_n^ν.

Remarque sur le paramètre n. — Sur l'équation normale, on voit que le paramètre n n'intervient que par l'expression $(n+\nu)^2$. Cette quantité pourrait être prise comme nouveau paramètre (qui serait à certains égards peut-être plus commode). Cette remarque sera retrouvée et exploitée au Chapitre III.

D'autre part, le coefficient de y dans cette équation normale étant

$$(n+\nu)^2 + \frac{\nu(1-\nu)}{\cos^2\xi} + k^2 \sin^2\xi.$$

Le changement de ν en $1-\nu$, de n en $-n-1$ n'y modifie rien. Si l'on revient à la première forme (non normale), l'expression $n(n+2\nu)$ devient avec le changement précédent $(n+1)(n+2\nu-1)$.

Cela revient à dire que, quel que soit n entier, positif ou négatif, il y a toujours à l'équation de Gegenbauer une solution qui est un polynome, et c'est ce qui nous importe pour le calcul des pe_n^ν.

Comme nous donnons à ν toutes les valeurs réelles, il n'y a pas d'inconvénient à supposer alors n positif.

Courbes caractéristiques. — Nous figurons l'allure des courbes caractéristiques dans le cas où ν n'est pas loin de zéro, et où celles-ci sont voisines de celles de

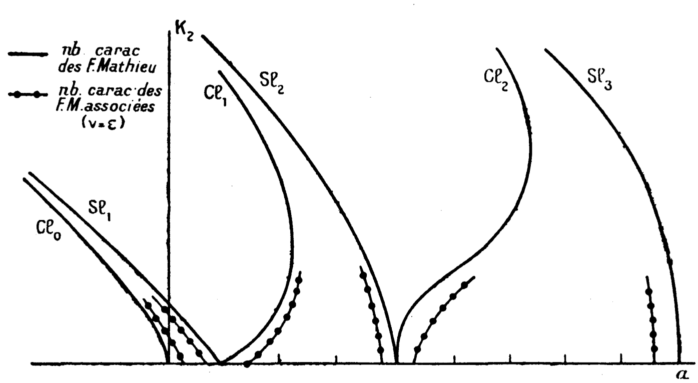

Fig. 1.

Mathieu. On a vu ci-dessus que, quel que soit ν fini et réel, elles avaient comme direction asymptotique commune la deuxième bissectrice des axes; jamais d'asymptotes, mais des *paraboles* asymptotes.

Pour terminer, rappelons que les fonctions que nous avons dans ce paragraphe appelées ce_n^ν sont celles de l'ellipsoïde plat; celles que M. Humbert avait désignées par les mêmes lettres dans son Mémoire plusieurs fois cité étaient celles de l'ellipsoïde long. On passe facilement d'une de ces fonctions à une autre, qui lui correspond soit sur l'ellipsoïde, soit sur l'hyperboloïde par des changements simples $\left(\xi \text{ en } \xi + \frac{\pi}{2}, f \text{ en } if, \eta \text{ en } \eta + \frac{i\pi}{2}\right)$. Ces modifications ont déjà été maintes fois signalées (*cf.* Mac Lachlan, *loc. cit.*).

CHAPITRE III.

FONCTIONS D'INDICE QUELCONQUE RÉEL.

Nous avons défini et calculé au Chapitre précédent les solutions de l'équation de Mathieu associée qui se réduisent pour $k = 0$ aux polynomes de Gegenbauer C_n^ν.

La méthode employée consistait à développer ces fonctions en séries $\sum_0^\infty A_n^\nu C_n^\nu$ et se basait sur le fait que les C_n^ν sont liés par des relations de récurrence homogènes à trois termes.

Mais, l'équation de Gegenbauer admet encore, *lorsque n n'est plus entier*, des solutions liées encore par les mêmes formules de récurrence; ces solutions ne sont plus des polynomes. Par exemple l'une d'elles a pour expression (on remplace n par λ pour rappeler qu'il n'est plus entier)

$$G_\lambda^\nu = (1 - z^2)^{\frac{1}{2} - \nu} \int_C (t - z)^{-\lambda - 1} (1 - t^2)^{\lambda + \nu - \frac{1}{2}} dt \qquad (z = \sin\xi).$$

Le contour (C) étant celui qu'on emploie pour la définition des fonctions de Legendre associées, c'est-à-dire soit C_1 soit C_2.

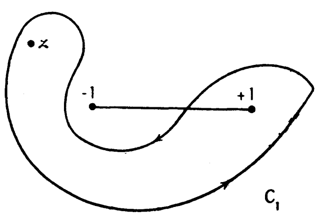

Fig. 2.

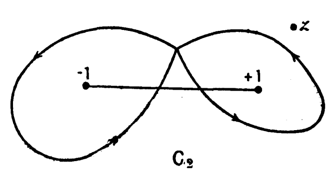

Fig. 3.

On obtient donc ainsi tout de suite deux solutions distinctes de l'équation (l'une correspond à la fonction P_n^m de Legendre, l'autre à Q_n^m).

La solution G_λ^ν vérifie l'équation de Gegenbauer, où a vaut $\lambda(\lambda + 2\nu)$. Si l'on pose donc par définition

$$pe_\lambda^\nu(\xi) = \sum_p A_p G_{\lambda+p}^\nu(\sin\xi),$$

les équations obtenues pour la détermination des A_r sont les mêmes que pour λ entier, à cela près que les relations de récurrence ne sont plus singulières pour les valeurs o et 1 de l'indice (puisque l'indice n'est pas entier). La sommation précédente est donc à effectuer ici de $-\infty$ à $+\infty$.

Si λ est rationnel, soit $\frac{r}{s}$, toutes les fonctions $G^{\nu}_{\lambda+p}(\sin\xi)$ admettant la période $2s\pi$ en ξ, il en est de même de la fonction $pe^{\nu}_{\lambda}(\xi)$. On peut donc la normer dans un intervalle d'amplitude $2s\pi$.

Si dans l'expression de ces fonctions $pe^{\nu}_{\frac{r}{s}}(\xi)$, de période $2s\pi$, on fait le changement $\sin\xi = z$, on obtient des fonctions de z qui admettent les points -1 et $+1$ comme singularités effectives. Avec précision une telle fonction reprend sa valeur primitive après $2s$ lacets entourant le segment -1, $+1$. Par le procédé allégué au Chapitre I on pourrait déterminer là aussi la relation entre a et k pour qu'une intégrale de l'équation de Mathieu associée soit de période $2s\pi$ en ξ. Nous avons également effectué ailleurs (1) ce calcul et donné aux solutions correspondantes des formes intéressantes.

Nous ne développons ici que la méthode qui généralise immédiatement celle du Chapitre II. Nous convenons d'appeler encore *équation caractéristique* des fonctions de période $2s\pi$ la relation entre a et k qui donne naissance à ces fonctions.

Cas de n quelconque. — Soit $n = \lambda$, on posera

$$pe^{\nu}_{\lambda}(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{\nu}_{\lambda+p}\, G^{\nu}_{\lambda+p}(\sin\xi),$$

on aura d'ailleurs aussitôt une seconde intégrale

$$qe^{\nu}_{\lambda}(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{\nu}_{\lambda+p}\, \overline{G}_{\lambda+p}(\sin\xi),$$

en prenant pour $\overline{G}$ dans l'intégrale définie ci-dessus, au lieu du contour C des fonctions P^m_n, le contour C des Q^m_n.

Les relations de récurrence entre les $A^{\nu}_{\lambda+p}$ s'écrivent simplement en remplaçant n par $\lambda + p$, ou, à un changement de notation près, par λ.

L'équation *caractéristique* s'écrit en portant ces deux valeurs dans la deuxième. Ces fractions continues sont convergentes (même étude que dans le cas simple de l'Introduction) Cette équation caractéristique s'écrit de façon compliquée. Écrivons-la seulement dans le *cas simple où* $\nu = \frac{1}{2}$. (Les fonctions G^{ν}_{λ} sont alors celles

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 224, 1947, p. 1322; *Voir* aussi, *Bull. Soc. Math. France*, fasc. II, 1948.

de Legendre, c'est le cas du Chapitre I, on a alors

$$\Phi_\lambda^\infty = \cfrac{\dfrac{(2\lambda+1)k^2}{4\lambda(\lambda+1)(2\lambda+5)}}{1-\dfrac{a+\sigma^\nu_{\lambda+2}}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda+\frac{5}{2}\right)}} - \cfrac{u_{\lambda+4}}{1-\dfrac{a+\sigma^\nu_{\lambda+4}}{\left(\lambda+\frac{7}{2}\right)\left(\lambda+\frac{9}{2}\right)}} - \cdots$$

$$- \cfrac{u_{\lambda+2p}}{1-\dfrac{a+\sigma^\nu_{\lambda+2p}}{\left(\lambda+2p-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda+2p+\frac{1}{2}\right)}} - \cdots\cdot$$

$$\Psi^\lambda_{-\infty} = \frac{\left(\lambda-\frac{5}{2}\right)\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)}{\tau^\nu_\lambda} - \cfrac{w_{\lambda-2}}{1-\dfrac{a+\sigma^\nu_{\lambda-4}}{\left(\lambda-\frac{9}{2}\right)\left(\lambda-\frac{7}{2}\right)}} - \cfrac{w_{\lambda-4}}{\cdots}$$

$$- \cfrac{w_{\lambda-2p}}{1-\dfrac{a+\sigma^\nu_{\lambda-2p}}{\left(\lambda-2p-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-2p+\frac{1}{2}\right)}} - \cfrac{\cdots}{\cdots},$$

où

$$u_\lambda = \frac{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\left(\frac{k}{2}\right)^4}{(2\lambda-5)(2\lambda+1)(\lambda-1)^2\lambda(\lambda-2)},$$

$$w_\lambda = \frac{(2\lambda-5)^2(2\lambda-7)\lambda(\lambda-1)\left(\frac{k}{2}\right)^2}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)(2\lambda-9)(\lambda-2)(\lambda-3)^2(\lambda-4)}.$$

Revenons au cas général de ν quelconque. Il y a lieu de faire une discussion du système comme au Chapitre II. Tout d'abord si $\lambda+\nu$ *est entier*, les relations n'ont pas de sens, *nous réservons ce cas.*

Ensuite, comme λ n'est pas entier, seul le coefficient du troisième terme de la relation peut s'anuler (si $\lambda+\nu$ est entier $\lesseqgtr 0$; $\lambda+\nu$ n'étant pas entier, ce cas ne peut se produire si ν est entier). Il existe alors une valeur de l'indice variable entier p qui annule ce troisième terme; soit λ_0 l'indice tel que $A^\nu_{\lambda_0+2}$ ait son coefficient nul, la relation s'écrit alors

$$A_{\lambda_0-2}\frac{\lambda_0(\lambda_0-1)}{4(\lambda_0+\nu-2)(\lambda_0+\nu-1)}$$
$$+A_{\lambda_0}\left[\frac{(\lambda_0+1)(\lambda_0+2\nu)}{4(\lambda_0+\nu)(\lambda_0+\nu+1)}+\frac{\lambda_0(\lambda_0+2\nu-1)}{4(\lambda_0+\nu)(\lambda_0+\nu-1)}+\frac{a-\lambda_0(\lambda_0+2\nu)}{k^2}\right]=0.$$

on peut choisir :

1° $A_{\lambda_0}=0$. Alors, A_{λ_0-2}, A_{λ_0-4}, $\ldots$, A_{λ_0-2p} sont nuls. La relation suivante contient seulement A_{λ_0-2} et A_{λ_0-4}. Les suivantes sont complètes. On obtient ainsi l'équation caractéristique, elle ne contient qu'une seule fraction continue. La solution est de la forme

$$\sum_{p=2}^{\infty} A^\nu_{\lambda_0+p}\,G^\nu_{\lambda_0+p}.$$

2° $A_{\lambda_0} \neq 0$. — Les relations *précédentes* sont complètes, et déterminent l'équation caractéristique, qui contient ainsi une seule fraction continue infinie, mais qui est celle formée avec les relations dont les indices vont vers $-\infty$.

D'ailleurs, les A_{λ_0+2}, A_{λ_0+4}, $\ldots$, A_{λ_0+2p} *ne sont pas nuls*. Chaque relation permettant de les tirer tous en $f(A_{\lambda_0})$, la solution est donc de la forme

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A^{\nu}_{\lambda_0+p}\, G^{\nu}_{\lambda_0+p}.$$

Interprétation géométrique de ces discussions. — Depuis le début, on n'a constaté de décomposition de l'équation caractéristique ou de réduction de la série solution à un nombre fini de termes, que dans les cas où l'un des deux nombres λ, $\lambda+2\nu$, ou les deux à la fois, étaient des entiers. Or, le produit $\lambda(\lambda+2\nu)$ est le coefficient de y dans l'équation de Gegenbauer. L'équation $a=\lambda(\lambda+2\nu)$ est une parabole dans le plan des (λ, ν); son sommet est donné par $\lambda+\nu=0$.

Si $\lambda+\nu$ est entier, c'est-à-dire s'annule pour une certaine valeur de λ, les relations de récurrence entre trois fonctions successives de Gegenbauer n'existent plus et la méthode employée ne s'applique plus. Mais l'interprétation géométrique précédente incite alors à rapporter la parabole à son axe, en posant $\lambda+\nu=N$.

La relation entre les A_N devient alors

$$\begin{aligned} &A_{N-\nu-2}\frac{(N-\nu)(N-\nu-1)}{4(N-2)(N-1)} \\ &\quad + A_{N-\nu}\left[\frac{(N-\nu+1)(N+\nu)}{4N(N+1)} + \frac{(N-\nu)(N+\nu-1)}{4N(N-1)} + \frac{a-(N^2-\nu^2)}{k^2}\right] \\ &\quad\quad + A_{N-2+\nu}\frac{(N+\nu)(N+\nu+1)}{4(N+1)(N+2)} = 0. \end{aligned}$$

On constate immédiatement que, sous cette nouvelle forme, elle est invariante par le changement de N en $-$N. Comme N est ici un nombre quelconque non forcément entier, on peut le considérer comme un paramètre continu et étudier ce que devient, à la limite, la relation précédente lorsque N tend vers zéro. Il faut, pour cela revenir à l'origine de ce système récurrent, c'est-à-dire à la *relation fondamentale* des G^{ν}_{N}. Cette relation s'écrit, avec N comme variable, et en posant $G^{\nu}_{N}=G(N)$

$$(1)\qquad (N-\nu+1)\,G(N+1)+(N+\nu-1)\,G(N-1)=2z\,NG(N).$$

En développant les fonctions $G(N)$ au voisinage de $N=0$ (N infiniment petit) par la formule de Mac Laurin, cette égalité devient

$$(2)\qquad \begin{aligned} &(N+1-\nu)[G(1)+NG'(1)+\ldots]+(N+\nu-1)[G(-1)+NG'(-1)+\ldots] \\ &\quad = 2zN[G(0)+NG'(0)+\ldots] \end{aligned}$$

(ces dérivées étant prises par rapport à N).

Prenant $G(1)=G(-1)$ [c'est possible si l'on prend une intégrale de l'équation de Gegenbauer telle que $G(N)=G(-N)$], (par exemple, si n est entier, un polynome C^{ν}_{N}), le coefficient de N dans l'identité (2) fournit l'équation

$$(3)\qquad 2G(1)+(1-\nu)[G'(1)+G'(-1)]=2z\,G(0),$$

relation limite qui n'a donc plus lieu entre trois fonctions G_N^ν successives, mais entre ces G_N^ν et *leurs dérivées par rapport à* N.

Ces dérivées sont, elles, des fonctions transcendantes, même lorsque G_N^ν se réduit au polynome C_n^ν.

On peut encore modifier la relation (3) en l'écrivant

$$G(1)+(1-\nu)\frac{G'(1)+G'(-1)}{2}=z\left[G(0)+(1-\nu)\frac{G'(0)+G'(-0)}{2}\right],$$

à condition que $\nu \neq 1$ et que $\frac{dG}{dN}$ soit une quantité définie pour $N=0$ (1). Sous cette forme, c'est là une relation de récurrence simple entre deux termes successifs de la fonction

$$L(N)=G(N)+(1-\nu)\frac{G'(N)+G'(-N)}{2},$$

et qui s'écrit

$$L(1)=zL(0),$$

d'où l'on tire

$$z^2L(0)=zL(1)=\frac{1}{2}[\nu L(0)+(2-\nu)L(2)].$$

Reste à se demander si L(N) satisfait effectivement à la relation générale (1) des G(N), on le vérifie aussitôt en dérivant cette relation par rapport à N

$$(\ N+1)+G(\ N-1)-2zG(\ N)\quad+\quad(N+1-\nu)G'(\ N+1)+(N-1+\nu)G'(\ N-1)-2zNG'(\ N)$$
$$(-N+1)+G(-N-1)-2zG(-N)\quad+\quad(N-1+\nu)G'(-N+1)+(N+1-\nu)G'(-N-1)-2zNG'(-N)$$

retranchant, les termes en G sont nuls, car lorsqu'on fait N entier

$$G(N)=G(-N).$$

après soustraction et groupement des termes en G, exprime que la fonction (où N est entier)

$$G'(N)-G'(-N)$$

satisfait à la relation générale, donc L(N) aussi. C. Q. F. D.

L'expression z^2L_N est une fonction linéaire de $L_{N-2}, L_N, \ldots, L_{N+2}$ sauf quand N devient égal à $\nu-1$ ou $\nu-2$, (cas où z^2L_N ne contient plus L_{N+2}). On rappelle que

$$z^2L_N=\frac{(N-\nu+1)(N-\nu+2)}{4N(N+1)}L_{N+2}+\frac{(N+\nu-2)(N+\nu-1)}{4N(N-1)}L_{N-2}$$
$$+\left[\frac{(N+\nu)(N-\nu+1)}{N(N+1)}+\frac{(N+\nu-1)(N-\nu)}{N(N-1)}\right]\frac{L_N}{4}.$$

Notons qu'on peut écrire L(N) sous la forme

$$L(N)=\frac{1}{2}\left[G(N)+G(-N)+(1-\nu)\left\{G'_n(N)-G'_n(-N)\right\}\right],$$

c'est-à-dire

$$L(N)=\frac{1}{2}[E(N)+E(-N)],$$

(1) HOBSON (*Spherical Harmonics*, p. 189) démontre que z et ν étant donnés, la fonction G(N) est alors une fonction analytique de N.

avec

$$E(N) = G(N) + (1 - \nu) G'_n$$

ou

$$E(N) = C_n^\nu + (1-\nu)\frac{d}{dn} C_n^\nu \quad \text{(puisque } \nu \text{ est fixe).}$$

Discussion. — *Existence d'une solution de forme finie.* — Soit $\Sigma B_N^\nu L_N^\nu$ la solution à déterminer :

1° Supposons d'abord n et ν entiers. On peut former les relations entre les B_N. Elles sont les mêmes que celles des A_N sauf les deux premières

$$B_0\left[\frac{\nu}{2} + \frac{a-\nu^2}{K^2}\right] + B_2\frac{\nu(\nu+1)}{8} = 0,$$

$$B_0\left[1 - \frac{\nu}{2}\right] + B_2\left[\frac{(3-\nu)(2+\nu)}{24} + \frac{(2-\nu)(1+\nu)}{8} + \frac{a+4-\nu^2}{k^2}\right] + B_4\frac{(\nu+2)(\nu+3)}{48} = 0,$$

. . . . ,

N peut croître négativement ou positivement puisque $L_N^\nu = L_{-N}^\nu$ (symétrie correspondant à celle de la parabole). Supposons par exemple que N croisse positivement.

A. ν *positif.* — Il existe une valeur de N soit P telle que B_{P-2} ait son coefficient nul. On peut alors choisir

a. $B = 0$ et alors tous les B d'indice supérieur à P sont nuls. La solution est une combinaison linéaire *finie* des $L_N^\nu (N < P)$.

Cette solution finie a lieu lorsqu'une certaine relation existe entre a et k, relation qu'on détermine comme d'habitude et qui, ici est ***algébrique***, puisque issue d'un déterminant fini.

Il serait impropre d'appeler encore *équation caractéristique* une telle relation (nous dirons *pseudo-caractéristique*); elle donne lieu à une solution qui, bien qu'elle soit de forme finie, n'est pas entière en $\sin\xi$, ni périodique en ξ, la fonction E_n^ν contenant des quantités telles que $\frac{d}{dn}(C_n^\nu)$ qui sont des fonctions transcendantes contenant des logarithmes. L'intérêt de ces solutions, qu'on ne peut non plus appeler *fonctions de Mathieu associées* (nous dirons *pseudo-fonctions*), est qu'elles se présentent sous forme de combinaisons linéaires finies de transcendantes connues, circonstance qui ne se produit jamais pour l'équation de Mathieu ordinaire.

La solution qu'on vient de trouver est donc une pseudo-fonction de Mathieu d'ordre P, l'équation pseudo-caractéristique est algébrique.

b. $B_0 = 0$. Les B_i jusqu'à $i = P - 2$ inclusivement sont déterminés en fonction de B_i. Les B_i pour $i > P$ sont liés par le système d'équation en nombre infini dont la condition de compatibilité est transcendante; la solution est de la forme $\sum_{P}^{\infty} B_i L_i^\nu$. Telle quelle, elle est une pseudo-fonction de Mathieu associée;

mais une remarque faite ci-dessus permet de trouver dans ce cas une fonction de Mathieu associée proprement dite. En effet, comme seules les fonctions L_N^ν d'indice supérieur à P interviennent, on peut aussi bien chercher cette solution avec de vrais polynomes de Gegenbauer, où n et ν sont entiers, et que nous avons appelés ci-dessus de *seconde catégorie* (P_n^μ). Or, ceux-là sont liés par la relation de récurrence habituelle. Dans le développement précédent, on peut donc remplacer L_N^ν par $P_{N+\nu}^\nu$ et B_N par A_N. On a alors des courbes *caractéristiques* et les pe_n^ν correspondantes (dans ce cas $n+\nu$ ne s'annule pas effectivement).

B. ν ***négatif***. — C'est le coefficient des $B_{N-\nu+2}$ qui s'annule pour $N = P$. Si alors $B_{P-\nu} = 0$, tous les précédents sont nuls. Les premiers termes n'intervenant pas, on peut encore remplacer les L_N^ν par les $P_{n+\nu}^\nu$, on a de *vraies fonctions* de Mathieu associées. L'équation caractéristique est transcendante.

Si $B_{P-\nu} \neq 0$, les premières équations, en nombre fini, constituent un système dont la compatibilité fournit l'équation pseudo-caractéristique qui est algébrique; les dernières, en nombre infini, fournissent tous les autres B_i, en fonction de $B_{P-\nu}$. La solution ici est de la forme $\Sigma B_i L_i$. Elle est une *pseudo-fonction* de Mathieu associée.

Exemple de pseudo-fonction. — Prenons $\nu = 4$ et cherchons la pseudo-solution de rang pair. Elle s'écrit

$$y = A_0 L_0 + A_2 L_2.$$

Le système déterminant A_1 et A_2 est, si $k^2 f^2 = q$

$$(a - 16 - 2q) A_0 + \frac{5}{2} q A_2 = 0,$$

$$-q A_0 + \left(a - 12 - \frac{3}{2} q\right) A_2 = 0.$$

L'équation entre a et q qui conditionne l'existence de la solution est celle d'une conique

$$2(a - 16)(a - 12) + aq - q^2 = 0,$$

cette conique n'étant qu'une pseudo-courbe caractéristique, le théorème de Ince ne s'applique pas, c'est ce qui explique qu'on a, non une parabole mais une hyperbole.

Pseudo-fonction de forme non finie. — Nous venons de voir que si λ est entier ainsi que ν, il apparaît une solution de forme finie. Mais $\lambda + \nu$ peut être entier sans que λ le soit. Dans ce cas, le sommet de la parabole est encore un point *singulier* pour nos relations récurrentes. Il n'y a pas de solution de la forme $\Sigma A_n^\nu C_n^\nu$, il faut donc chercher un développement $\Sigma B_N^\nu L_N^\nu$. Les différents coefficients des relations de récurrence ne s'annulent alors jamais, il n'y a donc pas de solution de forme finie, la solution obtenue est une *pseudo-fonction* de Mathieu, mais d'*ordre infini* (série de fonctions connues, mais elles-mêmes déjà transcendantes).

Développements en séries de fonctions de Bessel. — On sait que les fonctions de Mathieu ordinaires ont été développées en séries de fonctions de Bessel sous des formes telles que

$$ce_n(\xi) = \sum_0^\infty \lambda_r I_r(k \cos\xi),$$

les coefficients étant donnés par le *même* système récurrent que ceux du développement en séries de Fourier (fait très remarquable ayant retenu l'attention des mathématiciens anglais) (*Cf.* Goldstein, *Trans. Cam. Phil. Soc.*, t. 23, 1923 à 1928, p. 303.)

Nous proposons ici une méthode qui fournit aussi un développement des fonctions $pe_n^\nu(\xi)$ en séries de fonctions de Bessel. Les relations de récurrence obtenues pour les coefficients ont une certaine analogie avec celles qui fournissent les coefficients du développement en série de fonctions de Gegenbauer.

Cette analogie est tout à fait éclairée par une formule que Sonine a donnée dans son célèbre Mémoire sur les fonctions de Bessel, et qui relie celles-ci aux polynomes C_n^ν.

On en déduit, comme un cas particulier, le théorème de Goldstein dont nous venons de parler relatif aux coefficients des séries de Bessel et de Fourier des fonctions de Mathieu ordinaires.

Tous les résultats obtenus dans la discussion précédente se retrouvent, les pseudo-fonctions de Mathieu associées apparaissent alors comme des formes linéaires (finies ou non) de fonctions de Hankel.

L'équation de Mathieu associée, écrite sous la forme

$$(E_\nu) \qquad \frac{d^2U}{d\xi^2} - 2\nu \operatorname{tg}\xi \frac{dU}{d\xi} + (a + k^2 f^2 \sin^2\xi)U = 0,$$

devient par le changement de variable $fk \sin\xi = \mu$

$$(\varepsilon) \qquad (\mu^2 - k^2 f^2)\frac{d^2U}{d\mu^2} + (2\nu + 1)\mu \frac{dU}{d\mu} - (a + \mu^2)U = 0.$$

Or l'équation de Bessel modifiée, après le changement de fonction $I_p = z^\alpha Y_p$, s'écrit, elle,

$$(B') \qquad z^2 \frac{d^2Y_p}{dz^2} + (2\alpha + 1)z \frac{dY_p}{dz} - (z^2 + p^2 - \alpha^2)Y_p = 0.$$

Soit donc $U(\mu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_j Y_j$ une solution de (ε). Comme

$$\mu^2 Y_j'' + (2\nu + 1)\mu Y_j' - \mu^2 Y_j = (j^2 - \nu^2)Y_j,$$

d'après (B'), l'équation (ε) prend la forme

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} [(j^2 - \nu^2)Y_j + aY_j] = f^2 k^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} Y_j'' = f^2 k^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} [A_j Y_{j+2} + B_j Y_j + C_j Y_{j-2}].$$

où

$$A_j = \frac{1}{4}\left(1+\frac{\nu}{j}\right)\left(1+\frac{\nu}{j+1}\right); \qquad C_j = \frac{1}{4}\left(1-\frac{\nu}{j}\right)\left(1-\frac{\nu}{j-1}\right),$$
$$B_j = \frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{\nu}{j}\right)\left(1-\frac{\nu}{j+1}\right)+\left(1-\frac{\nu}{j}\right)\left(1+\frac{\nu}{j-1}\right)\right].$$

On écrit que le coefficient de Y_j est nul; en substituant dans (ε) la solution formelle $\sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_j Y_j$ on obtient

$$\gamma_j[j^2-\nu^2-a] = f^2 k^2 [A_j\gamma_{j-2} + B_j\gamma_j + C_j\gamma_{j+2}].$$

Les γ_j sont donnés par des relations de récurrence à trois termes; on les traite comme on l'a déjà fait. Dans le cas général, l'indice j est illimité dans les deux sens, et l'on tire l'équation caractéristique comme au début du chapitre. En général, elle contient deux fractions continues infinies.

Si l'on compare la relation précédente en j, entre les Y, avec la relation, en N entre les C_n^ν, on y constate aussitôt que les coefficients de l'une se déduisent de ceux de l'autre par la transformation de ν en $1-\nu$. L'équation caractéristique obtenue ici est donc bien la même. Les A_n^ν sont des multiples des $\alpha_r^{1-\nu}$. Si $\nu = \frac{1}{2}$, A_r^ν et α_r^ν sont égaux à un facteur près, c'est ce qu'on retrouvera autrement plus loin.

On vient de voir que $a = p^2 - \nu^2$ si $k = 0$. On voit donc tout de suite que l'indice j d'ici équivaut à l'indice N des fonctions de Gegenbauer. Si l'on repasse à l'indice n employé au début, on constate que la fonction Y_j est justement celle que Sonine appelle H_n (¹) lorsque n est entier. Comme dans le cas du développement $\Sigma A_n^\nu C_n^\nu$ les relations de récurrence s'arrêtent pour $n=0$ (ou $n=1$). Et les fonctions $pe_n^\nu(\xi)$ admettent un développement simplement infini de forme $\sum_0^\infty \gamma_{j-\nu} H_{j-\nu}$ dont les indices sautent de deux en deux. Ces deux développements $\sum_0^\infty A_n^\nu C_n^\nu$ et $\sum_0^\infty \gamma_{j-\nu} H_{j-\nu}$ ne sont d'ailleurs pas sans rapport, et l'on peut déduire l'un de l'autre très simplement.

Sonine donne en effet la formule

$$e^{\alpha z} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_0^\infty (n+\nu) C_n^\nu(z) \alpha^{-\nu} I_{n+\nu}(\alpha).$$

Si l'on fait intervenir ici l'équation intégrale de M. P. Humbert qu'on peut écrire (comme on le montre facilement)

$$pe_n^\nu(\xi) = \lambda_n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{k\sin\theta\sin\xi}\, pe_n^\nu(\theta) \cos^{2\nu}\theta\, d\theta,$$

(¹) *Math. Annalen*, t. 16, 1880, p. 1-79.

en posant $\sin\theta = z$, en supposant $pe_n^\nu(\theta)$ développé sous la forme $\sum_0^\infty A_r^\nu C_r^\nu(\sin\theta)$ et en écrivant $e^{\alpha z}$ sous la forme de Sonine, il vient

$$pe_n^\nu(\xi) = 2^\nu\Gamma(\nu)\lambda_n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left[\sum_0^\infty A_r^\nu C_r^\nu(\sin\theta)\right]$$
$$\times \left[\sum_0^\infty (q+\nu)\, C_q^\nu(\sin\theta)\right] (k\sin\xi)^{-\nu} I_{q+\nu}(k\sin\xi)\cos^{2\nu}\theta\, d\theta$$

ou, en appliquant l'orthogonalité des C_r^ν :

$$pe_n^\nu(\xi) = \frac{2^\nu\nu\lambda_n\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma(2\nu-1)} \sum_0^\infty \frac{\Gamma(2\nu+r-1)}{\Gamma(r)} A_r^\nu Y_r$$

qui est bien de la forme $\Sigma\alpha_r Y_r$, les α_r étant liés au A_r^ν par la relation simple

$$\alpha_r^\nu = C\,\frac{\Gamma(2\nu+r-1)}{\Gamma(r)} A_r^\nu.$$

La constante C est indépendante de r.

Si $\nu = \frac{1}{2}$ alors $\alpha_r^\nu = \alpha_r^{1-\nu}$ et, effectivement, on retrouve que $\alpha_r^{\frac{1}{2}} = CA_r^{\frac{1}{2}}$. Si $\nu = 0$ (fonctions de Mathieu) $\alpha_r^\nu = \frac{1}{r}A_r^\nu$, c'est-à-dire que, comme alors C_r^ν vaut $\frac{1}{r}\cos r\theta$, les coefficients du développement d'une fonction de Mathieu ordinaire en séries de fonctions de Bessel sont proportionnels à ceux de son développement de Fourier. Goldstein avait remarqué cette propriété [1].

Si j est entier, on tombe sur les cas où les formules sont défaillantes. En effet, p pouvant devenir nul, on ne pourra plus tirer Y'_p en fonction de Y_{p-1} et Y_{p+1}. Mais en supposant que p est un paramètre continu, on peut procéder comme précédemment par un passage à la limite. Si $p = \varepsilon$ on peut développer Y'_p (dérivée prise par rapport à z), Y_p étant à part cela considéré comme fonction de p :

$$2Y'_p = \left(1-\frac{\nu}{\varepsilon}\right)\left[Y(-1) + \varepsilon\left(\frac{dY}{dp}\right)_{p=-1} + \ldots\right] + \left(1+\frac{\nu}{\varepsilon}\right)\left[Y(1) + \varepsilon\left(\frac{dY}{dp}\right)_{p=1} + \ldots\right],$$

or, $y(1) = y(-1)$ d'après une propriété classique de I_p.

On tire

$$2Y'_0 = 2Y(1) + \nu\left[\left(\frac{dY}{dp}\right)_{p=1} - \left(\frac{dY}{dp}\right)_{p=-1}\right],$$

qu'on peut écrire, d'après l'artifice déjà employé et si $\nu \neq 0$ (ou $\neq 1$)

$$2Y'_0 + \nu[A'(+0) - A'(-0)] = 2Y_1 + \nu[A(1) - A(-1)]$$

si A désigne $\frac{dY}{dp}$. Si l'on pose maintenant

$$M(p) = Y(p) + \frac{\nu}{2}[A(p) - A(-p)]$$

(1) *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, t. 23, 1923-1928, p. 303.

la relation obtenue s'écrit

$$M'_{z}(o) = M(1), \qquad M''_{z^2}(o) = M'_{z}(1).$$

Et comme la fonction $M(p)$ vérifie (il est facile de s'en assurer) la relation (B') des Y_p, on en déduit

$$M''_{z^2}(o) = M'_{z}(1) = \frac{1-\nu}{2} M(o) + \frac{1+\nu}{2} M(2),$$

$M(p)$ est une fonction bien connue puisque

$$A(p) - A(-p) = z^{-\nu}\left[\frac{dI_p}{dp} - \frac{dI_{-p}}{dp}\right] = z^{-\nu}\overline{K}_p,$$

$\overline{K}$ étant la fonction de Hankel modifiée. En posant alors $z^{-\nu}\overline{K}_p = Z_p$ comme on a posé $z^{-\nu}I_p = Y_p$, $M(p)$ s'écrit $Y_p + \frac{\nu}{2}Z_p$.

Elle satisfait à l'équation de récurrence des Y_p et l'on peut ainsi développer des intégrales de E_p sous forme de combinaisons linéaires de $M(p)$.

Remarquons pour terminer que la corrélation (au sens de Sonine) qui existe entre C_n^ν et $I_{n+\nu}$ existe donc probablement (du moins sous une forme dont il faudrait préciser la généralisation) entre $\frac{dC_n^\nu}{dn}$ et $\overline{K}_{n+\nu}$, et, plus largement, entre $\frac{d^r C_n^\nu}{dn^r}$ et $\overline{K}^r_{n+\nu}$, $\overline{K}^r_{n+\nu}$ étant la fonction obtenue en appliquant r fois à $\overline{K}_{n+\nu}$ la transformation qui le déduit de L_n^ν.

BIBLIOGRAPHIE.

Baranov (V.) :

Contribution à l'étude des fonctions de Mathieu normées (*Thèse*, Montpellier, 1941).

Bouwkamp (C. J.) :

On spheroidal wave function of order zero (*Journ. Math. Phys.*, 1947).

Brillouin (L.) :

Sur l'équation de Hill (*Quarterly applied of Math.*, juillet 1948, p. 167).

Campbell (R.) :

Sur une généralisation des fonctions de Mathieu normées (*C. R. Acad. Sc.*, t. 222, 1946, p. 269).

Recherches d'équations intégrales et de la valeur asymptote des fonctions de Mathieu associées (*C. R. Acad. Sc.*, t. 222, 1946, p. 1069).

Sur les solutions de période 2sπ de l'équation de Mathieu associée (*C. R. Acad. Sc.*, t. 223, 1946, p. 123).

Sur une forme des fonctions de Mathieu (et de Mathieu associées) de période 2sπ (*C. R. Acad. Sc.* t. 226, 1947, p. 1322).

Comportement asymptotique des fonctions de Mathieu associées pour des paramètres infiniment grands (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 371).

Sur les développements en séries de Bessel des fonctions de Mathieu associées de période 2sπ (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1948, p. 300).

Sur une catégorie remarquable de solutions de l'équation de Mathieu associée (*C. R. Acad Sc.*, t. 226, 1948, p. 2114).

GEGENBAUER :

Wiener Sitzungsberichte, t. 70, 1874, p. 434; t. 75, 1877, p. 391; t 97, 1888, p. 295; t. 102, 1893, p. 242.

GOLDSTEIN (S.) :

Mathieu functions (*Trans. Cam. Phil. Soc.*, t. 23, 1923, p. 303).
Second solution of Mathieu équation (*Proc. Cam. Phil. Soc.*, t. 24, 1928, p. 224).

HOBSON (E. W.) :

Spheroidal and ellipsoïdal Harmonics (Cambridge, 1931).

HUMBERT :

Potentiels et prépotentiels (*Cahiers scientifiques*, Paris, 1936).
Fonctions de Mathieu, de Lamé (*Mémorial Sc. Math.*, fasc. 10, 1932).
Mathieu Functions of higher order (*Proc. Ed. Math.* Soc., t. 40, 1922. p. 27).

INCE (L.):

Associated Mathieu functions (*Proc. Ed. Math. Soc.*, t. 41, 1923, p 94).
Linear differential equation with periodic coefficients (*Proc. London. Math. Soc.*, t. 23, 1923, p. 56).
Charactéristic numbers of Mathieu équation (*Proc. Roy. Soc. Edimburg*, t. 46, 1925, p. 20; t. 46, 1926, p. 316; t. 47, 1927, p. 294).
Tables of the elliptic cylinder functions (*Proc. Roy. Soc. Edinburg*, t. 52, 1932, p. 355).
Mathieu functions of stable type (*Phil. Mag.*, t. 6, 1928, p. 547).
Mathieu's equations with large parameters (*Journ. London Math. Soc.*, t. 2, 1926, p. 46).
Relations between the elliptic cylinder functions (*Proc. Roy. Soc. wof. Ed.*, t.59, 1939, p. 176).

MAC LACHLAN :

Theory and application of Mathieu functions, Oxford, 1947.

MATHIEU (E.) :

Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique (*Journ. Math.*, t. 13, 1868, p. 137).

PERRON (O.) :

Die Lehre von den Kettenbrüche, Leipzig, 1929.

POINCARÉ (H.) :

Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste, t. 2.
Sur les systèmes linéaires (*Acta Math.*, t. 8, 1886, p. 295).

SONINE :

Sur les fonctions du cylindre circulaire (*Math. Ann.*, t. 16, p. 1).