Bulletin de la S. M. F.

Jean Aczel

Sur les opérations définies pour nombres réels

Bulletin de la S. M. F., tome 76 (1948), p. 59-64
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1948__76__59_0>

SUR LES OPÉRATIONS DÉFINIES POUR NOMBRES RÉELS;

PAR M. JEAN ACZÉL.

Une fonction de deux variables sera appelée « opération définie dans l'intervalle (a, b) » et nous la désignons par $z = x \circ y$, si pour chaque x et y de l'intervalle (a, b) la valeur $z = x \circ y$ est comprise dans cet intervalle (a, b). Nous démontrerons le théorème suivant (1) :

THÉORÈME. — *Pour qu'il existe une fonction $f(z)$ croissante au sens restreint, continue, définie dans l'intervalle (a, b) et permettant de mettre $x \circ y$ sous la forme $[f^{-1}(x)$ désignant la fonction inverse de $f(z)]$*

$$x \circ y = f^{-1}[f(x) + f(y)], \tag{1}$$

il faut et il suffit que l'opération $x \circ y$ satisfasse aux trois conditions suivantes :

I. *Monotonité (au sens restreint) : $x \circ y < x' \circ y$ pour $x < x'$ (et de même pour $y < y'$);*
II. *Continuité : $\lim (x \circ y) = \lim x \circ \lim y$;*
III. *Associativité : $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = x \circ y \circ z$.*

Comme l'expression dans le deuxième membre de l'égalité (1) est symétrique par rapport à x et y, nous pouvons tirer de notre théorème le corollaire suivant : *chaque opération monotone, continue et associative est aussi commutative.* En vertu de III, l'opération peut être étendue pour un nombre arbitraire de variables et nous tirons de la formule (1) que, dans ce cas,

$$x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = f^{-1}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)].$$

L'intervalle (a, b) peut être ouvert ou semi-ouvert (il peut même s'étendre jusqu'à l'infini, dans ce cas $a = -\infty$ ou $b = +\infty$). Nous verrons cependant qu'un intervalle fermé est en contradiction avec nos suppositions.

Démonstration. — Évidemment les conditions sont nécessaires, car les opérations de forme (1) satisfont à I-III. Nous démontrerons qu'elles suffisent en

(1) Pour des cas spéciaux de ce theorème, *voir* TH. MOTZKIN, *Sur le produit des espaces métriques* (*C. R. du Congrès d'Oslo*, 1936, p. 137); J. ACZÉL, *On mean values and operations defined for two variables* (*D. Kong. Norske Vid. Selsk. Forh.*, 20, 1947, p. 37-40); J. ACZÉL, *On mean values* (*Bull. Am. Math. Soc.*, 54, 1948, p. 392-400). Le cas où les nombres de l'intervalle (a, b) forment un groupe sous l'opération $\circ$ a été traité par E. CARTAN, *Groupes finis et continus et l'analysis situs* (*Mém. Sci. Math.*, 42).

construisant la fonction $f(z)$, ou plutôt son inverse $f^{-1}(x) = \varphi(x)$. Il faudra démontrer que cette fonction est continue, croissante au sens restreint et qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(2) \qquad \varphi(u+v) = \varphi(u) \circ \varphi(v),$$

qu'on obtient à partir de (1) en posant $x = \varphi(u)$, $y = \varphi(v)$.

1. Définissons les fonctions $F_n(x) = x \circ x \circ \ldots \circ x$ (n facteurs, $n = 1, 2, 3, \ldots$). La fonction $F_n(x)$ est continue, croissante, et ses valeurs sont comprises dans l'intervalle (a, b). De plus, les deux règles suivantes sont valables (en écrivant $gh(x)$ pour $g[h(x)]$) :

$$F_m(x) \circ F_n(x) = F_{m+n}(x) = F_n(x) \circ F_m(x),$$
$$F_m F_n(x) = F_{mn}(x) = F_n F_m(x).$$

Posons $F_{\frac{p}{q}}(x) = F_q^{-1} F_p(x)$ si cette définition a un sens [c'est-à-dire si la valeur $F_p(x)$ est comprise dans le domaine des valeurs de $F_q(x)$]. Les règles précédentes sont valables pour chaque μ et ν rationnel de cette sorte. Car si nous posons $\mu = \frac{p}{q}$, $\nu = \frac{r}{s}$ on a

$$\begin{aligned} F_{qs} F_\mu F_\nu(x) &= F_{qs} F_{\frac{p}{q}} F_{\frac{r}{s}}(x) = F_s F_q F_q^{-1} F_p F_s^{-1} F_r(x) \\ &= F_p F_r(x) = F_{pr}(x) = F_{qs} F_{qs}^{-1} F_{pr}(x) = F_{qs} F_{\frac{pr}{qs}}(x) = F_{qs} F_{\mu\nu}(x), \end{aligned}$$

et si l'on tient compte de la condition I,

$$(3) \qquad F_\mu F_\nu(x) = F_{\mu\nu}(x) = F_\nu F_\mu(x) \quad (^1).$$

D'autre part, si nous posons $\mu = \frac{m}{q}$, $\nu = \frac{n}{q}$ (²),

$$F_\mu(x) \circ F_\nu(x) = F_m F_q^{-1}(x) \circ F_n F_q^{-1}(x) = F_{m+n} F_q^{-1}(x) = F_{\mu+\nu}(x).$$

$$(4) \qquad F_\mu(x) \circ F_\nu(x) = F_{\mu+\nu}(x) = F_\nu(x) \circ F_\mu(x).$$

2. Considérons $F_2(x) = x \circ x$. Il y a trois cas possibles : $x \circ x > x$, $x \circ x = x$ ou $x \circ x < x$. Si $x \circ x = x$, alors il résulte de I et III que pour chaque y

$$x \circ (x \circ y) = (x \circ x) \circ y = x \circ y,$$

(¹) On voit aisément que si $r = s$, on a

$$F_{\frac{pr}{qr}}(x) = F_{\frac{p}{q}}(x).$$

(²) On utilise la formule $F_{\frac{p}{q}}(x) = F_p F_q^{-1}(x)$, qui est valable lorsque $F_q^{-1}(x)$ a un sens. On a en effet

$$F_{\frac{p}{q}}(x) = F_q^{-1} F_p(x) = F_q^{-1} F_p F_q F_q^{-1}(x) = F_q^{-1} F_q F_p F_q^{-1}(x) = F_p F_q^{-1}(x).$$

Pour le cas où $F_q^{-1}(x)$ n'a pas de sens (c'est-à-dire lorsque x n'est plus comprise dans le domaine des valeurs de $F_q(x)$) *voir* (³).

c'est-à-dire $x \circ y = y$ et de même $y \circ x = y$. De même si $x \circ x > x$ (ou $< x$) alors pour tout y : $x \circ y > y$ (ou $< y$). D'autre part on voit de la même façon que si l'on a pour un y : $x \circ y > y$, ou $= y$, ou $< y$, la même relation a lieu pour chaque y.

3. Il existe au plus un nombre e tel que $e \circ y = y$ (ou $y \circ e = y$). Supposons qu'il y en ait deux : $e < e'$. Dans ce cas $e \circ y = y = e' \circ y$, ce qui est en contradiction avec I. Évidemment $F_m(e) = F_n(e)$. Supposons maintenant ([1]) qu'il existe un nombre A tel que $A \circ A > A$. Évidemment $F_m(A) > F_n(A)$ pour $m > n$. Si l'intervalle de définition est ouvert inférieurement, il faut distinguer deux possibilités :

a. $\lim\limits_{x \to a} x \circ y \geqq y (> a)$. Pour deux nombres $s < t$ arbitraires $\lim\limits_{x \to a} s \circ x < \lim\limits_{x \to a} t \circ x$. Car en appliquant II et III, on a, en effet,

$$[\lim_{x \to a}(s \circ x)] \circ y = \lim_{x \to a}(s \circ x \circ y) = s \circ \lim_{x \to a}(x \circ y) < t \circ \lim_{x \to a}(x \circ y) = \lim_{x \to a}(t \circ x \circ y) = [\lim_{x \to a}(t \circ x)] \circ y$$

et avec l'aide de I, on obtient l'inégalité exigée. Ainsi la définition de l'opération peut être étendue à a en posant

$$a \circ y = \lim_{x \to a}(x \circ y) \quad \text{et} \quad y \circ a = \lim_{x \to a}(y \circ x),$$

car les conditions I, II, III continuent à être valables. Dans ce qui suit, nous traiterons ce cas comme si l'intervalle donné $(a,\ b)$ était fermé inférieurement *a priori*.

b. $\lim\limits_{x \to a} x \circ y < y$. Dans ce cas $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ s \to a}} x \circ s = a$, d'où $\lim\limits_{x \to a}(x \circ y) = a$ pour tout y. Car, dans le cas contraire, $t = \lim\limits_{x \to a} x \circ y > a$, et

$$t > \lim_{x \to a} x \circ t = \lim_{x \to a}(x \circ \lim_{s \to a} s \circ y) = \lim_{\substack{x \to a \\ s \to a}}(x \circ s \circ y) = \lim_{\substack{x \to a \\ s \to a}}(x \circ s) \circ y = \lim_{z \to a} z \circ y = t.$$

ce qui est absurde. D'après notre supposition, il existe un $A < A \circ A$, et puisque $A > a = \lim\limits_{x \to a} x \circ A$, il existe un nombre e $(a < e < A)$ tel que $e \circ A = A$. Nous avons vu qu'il ne peut exister qu'un seul tel nombre et que $e \circ y = y$ pour tout y. De plus, en vertu de $e > a = \lim\limits_{x = a} x \circ A$ et $e < A = e \circ A$, il existe un α tel que $e = \alpha \circ A (a < \alpha < e)$. Pour un y arbitraire $\alpha \circ y < y$ et $F_m(\alpha) < F_n(\alpha)$ pour $m > n$.

4. Nous pouvons maintenant commencer à définir la fonction $\varphi(x)$. Nous posons $\varphi(1) = A$ avec la restriction que dans le cas d'un intervalle fermé inférieu-

---

([1]) Nous verrons que cette supposition entraîne une discussion complète des cas où l'intervalle de définition est ouvert ou fermé inférieurement. Si nous avions supposé l'existence d'un $\alpha > \alpha \circ \alpha$ nous aurions pu traiter d'une manière analogue les intervalles ouverts ou fermés supérieurement.

rement et $a \circ a > a$ nous choisissons $A = a$. Ensuite nous posons

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = F_{\frac{p}{q}}(A) = F_q^{-1} F_p(A),$$

ce qui a sûrement un sens si $p \geq q$, car

$$F_q(A) \leq F_p(A) \leq F_{kq}(A) = F_q F_k(A) \qquad (kq \geq p).$$

Nous voyons que $\lim\limits_{n \to \infty} F_n(A)$ existe (finie ou $+\infty$), car la suite est croissante, mais la valeur $t = \lim\limits_{n \to +\infty} F_n(A)$ ne peut pas appartenir à l'intervalle (a, b), qui n'est donc pas fermé supérieurement. En effet si t était compris dans (a, b), on aurait

$$t < t \circ A = \lim_{n \to \infty} F_n(A) \circ A = \lim_{n \to \infty} F_{n+1}(A) = t,$$

ce qui est absurde. S'il y a dans (a, b) des nombres plus petits que A (c'est-à-dire dans les cas $a \circ a = a$ et $\lim\limits_{x \to a} x \circ y \leq y$), alors il existe un nombre e tel que $e \circ e = e$ (dans le premier cas poser $e = a$, dans le deuxième *voir* 3 b). Nous définissons $\varphi(0) = e$ et ainsi $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = F_{\frac{p}{q}}(A) = F_q^{-1} F_p(A)$ est défini pour $p < q$, car $F_q(e) = F_p(e) < F_p(A) < F_q(A)$. Si $x \circ y$ est encore défini pour des nombres moindres que e, alors nécessairement $\lim x \circ y < y$ (cas 3 b) et en posant $\varphi(-1) = \alpha$ $(\alpha \circ A = e)$ et $\varphi\left(-\frac{p}{q}\right) = F_{\frac{p}{q}}(\alpha) = F_q^{-1} F_p(\alpha)$, cette définition a toujours un sens. En outre $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(-n) = \alpha$. Nous avons

$$\varphi(-s) \circ \varphi(r) = F_s(\alpha) \circ F_r(A) = \begin{cases} e = \varphi(r - s) & \text{si } r = s, \\ F_{r-s}(A) = \varphi(r - s) & \text{si } r > s, \\ F_{s-r}(\alpha) = \varphi(r - s) & \text{si } r < s, \end{cases}$$

c'est-à-dire

(5) $$\varphi(s) \circ \varphi(r) = \varphi(s - r). \text{ [1]}.$$

---

[1] Démontrons (4) pour $x = a$, c'est-à-dire

(4') $$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) \circ \varphi\left(\frac{r}{q}\right) = \varphi\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{q}\right) \qquad (p > q,\ r > q)$$

dans le cas où $F_q^{-1}(x)$ n'est pas défini. Soit $s > q$, $u > q$, on a

$$\varphi\left(\frac{su}{q}\right) = F_q^{-1} F_{su}(a) = F_q^{-1} F_s F_u(a) = F_s F_q^{-1} F_u(a).$$

Par conséquent

$$\varphi(s) \circ \varphi\left(\frac{s}{q}\right) = F_s(a) \circ F_q^{-1} F_s(a) = F_{q+1} F_q^{-1} F_s(a) = \varphi\left(\frac{(q+1)s}{q}\right) = \varphi\left(\frac{s(q+1)}{q}\right) = F_s F_q^{-1} F_{q+1}(a),$$

et de même

$$\varphi\left(\frac{s}{q}\right) \circ \varphi(s) = F_s F_q^{-1} F_{q+1}(a).$$

5. Nous venons de définir $\varphi(x)$ pour toutes valeurs rationnelles, ou rationnelles positives, ou rationnelles > 1. [On a $a = \lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x)$, ou $a = \varphi(0)$, ou $a = \varphi(1)$; $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$]. On voit aisément que pour ces valeurs $\varphi(x)$ est une fonction croissante, car $F_n(A)$ croît et $F_n(\alpha)$ diminue avec n. En vertu de (4) et (5), la fonction $\varphi(x)$ satisfait à l'équation fonctionnelle (2) pour u et v rationnels. Si nous démontrons que $\varphi(x)$ est une fonction continue, il en résulte que sa définition peut être étendue aussi aux valeurs irrationnelles, de telle façon que cette fonction satisfasse à (2) partout dans l'intervalle.

6. L'ensemble des nombres rationnels, pour lesquels $\varphi(x)$ va en croissant, étant partout dense dans l'intervalle où nous voulons définir $\varphi(x)$, elle a une valeur limite à droite et à gauche de chaque point de cet intervalle. Ces deux

---

En utilisant ces relations on obtient

$$\varphi(p) \circ \varphi\left(\frac{p}{q}\right) \circ \varphi\left(\frac{r}{p}\right) \circ \varphi(r) = F_p F_q^{-1} F_{q+1}(a) \circ F_r F_q^{-1} F_{q+1}(a)$$
$$= F_{p+r} F_q^{-1} F_{q+1}(a) = \varphi\left(\frac{p+r}{q}\right) \circ \varphi(p+r) = \varphi\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{q}\right) \circ \varphi(p) \circ \varphi(r),$$

et de même

$$\varphi(p) \circ \varphi\left(\frac{p}{q}\right) \circ \varphi\left(\frac{r}{q}\right) \circ \varphi(r) = \varphi(p) \circ \varphi(r) \circ \varphi\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{q}\right).$$

En simplifiant, ce qui est légitime en vertu de la monotonité, les dernières relations donnent

$$(\alpha) \qquad \varphi\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{q}\right) \circ \varphi(p) = \varphi(p) \circ \varphi\left(\frac{p}{q}\right) \circ \varphi\left(\frac{r}{q}\right) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right) \circ \varphi(p) \circ \varphi\left(\frac{r}{q}\right),$$

$$(\beta) \qquad \varphi(r) \circ \varphi\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{q}\right) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right) \circ \varphi\left(\frac{r}{q}\right) \circ \varphi(r) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right) \circ \varphi(r) \circ \varphi\left(\frac{r}{q}\right).$$

Posons dans (α) $p = s$, $r = nq$:

$$\varphi\left(\frac{s}{q} + n\right) \circ \varphi(s) = \varphi\left(\frac{s}{q}\right) \circ \varphi(s) \circ \varphi(n) = \varphi\left(\frac{s}{q}\right) \circ \varphi(n) \circ \varphi(s),$$

donc en simplifiant

$$(\gamma) \qquad \varphi\left(\frac{s}{q} + n\right) = \varphi\left(\frac{s}{q}\right) \circ \varphi(n).$$

Posons dans (β) $p = nq$, $r = s$:

$$\varphi(s) \circ \varphi\left(n + \frac{s}{q}\right) = \varphi(n) \circ \varphi(s) \circ \varphi\left(\frac{s}{q}\right) = \varphi(s) \circ \varphi(n) \circ \varphi\left(\frac{s}{q}\right);$$

donc en simplifiant

$$(\delta) \qquad \varphi\left(\frac{s}{q} + n\right) = \varphi(n) \circ \varphi\left(\frac{s}{q}\right).$$

(γ) et (δ) impliquent

$$(\varepsilon) \qquad \varphi\left(\frac{s}{q}\right) \circ \varphi(n) = \varphi(n) \circ \varphi\left(\frac{s}{q}\right).$$

En vertu de (ε), la relation (α) s'écrit

$$\varphi\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{q}\right) \circ \varphi(p) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right) \circ \varphi\left(\frac{r}{q}\right) \circ \varphi(p).$$

En simplifiant par $\varphi(p)$ on obtient (4′).

valeurs doivent être égales. Car si $s = \varphi(x-0) < \varphi(x+0) = t$, alors de $s \circ s < s \circ t < t \circ t$, il résulterait qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$(s \circ s) + \varepsilon < s \circ t < (t \circ t) - \varepsilon.$$

En vertu de la condition II, il existe un $\delta < 0$ tel que pour $|s - s'| < \delta$ et $|t - t'| < \delta$, $s \circ t - \varepsilon < s' \circ t' < s \circ t + \varepsilon$. Choisissons les valeurs s' et t' telles que $s' = \varphi(u)$, $t' = \varphi(v)$, où u et v sont des valeurs rationnelles et $\frac{u+v}{2} > x$. Dans ce cas

$$F_2\left[\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] = \varphi(u+v) = \varphi(u) \circ \varphi(v) = s' \circ t' < s \circ t + \varepsilon < t \circ t = F_2[\varphi(x+0)]$$

en contradiction avec le fait que $\varphi(x)$ est une fonction monotone. Ainsi nous avons démontré la continuité de $\varphi(x)$ et notre théorème est démontré.

(Manuscrit remis le 23 novembre 1947.)