BULLETIN DE LA S. M. F.

ÉMILE COTTON

Sur certains rapprochements entre la géométrie des espaces de Riemann et la mécanique rationnelle classique

Bulletin de la S. M. F., tome 76 (1948), p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1948__76__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR CERTAINS RAPPROCHEMENTS ENTRE LA GÉOMÉTRIE DES ESPACES DE RIEMANN ET LA MÉCANIQUE RATIONNELLE CLASSIQUE;

PAR M. ÉMILE COTTON.

A tout système matériel à liaisons holonomes indépendantes du temps correspond un espace de Riemann : On prend pour coordonnées d'un point de cet espace les paramètres de position du système matériel et pour élément linéaire le produit de la force vive par le carré de la différentielle du temps. Cette correspondance entraîne des rapprochements qu'il est naturel d'étudier.

Nous montrons, au début de ce travail, comment les notions si importantes en Géométrie riemannienne de dérivée et de différentielle absolue d'un vecteur peuvent être présentées d'une façon simple par l'emploi de notions élémentaires d'un usage courant en Mécanique rationnelle. En utilisant, dès le début des calculs, des expressions de Pfaff comme M. René Lagrange l'a fait dans sa Thèse, nous obtenons une expression très générale des coefficients figurant dans les formules de dérivation absolue.

Ces formules conduisent immédiatement à la forme donnée aux équations différentielles de la Mécanique par Volterra : En adjoignant aux paramètres de position des variables nouvelles qu'il appelle *caractéristiques*, il substitue aux équations différentielles du second ordre un nombre double d'équations du premier ordre. Les variables canoniques appelées parfois moments conjugués sont un exemple bien connu de telles caractéristiques; un autre exemple est donné par les projections du vecteur rotation instantanée sur les axes principaux d'inertie dans le cas du mouvement d'un solide. Quelques lignes au sujet des mouvements spontanés à caractéristiques indépendantes de Volterra mettent en évidence l'intérêt que présente à leur propos la théorie des groupes finis et continus, et notamment les travaux de M. Vessiot.

Jusqu'ici les liaisons étaient supposées holonomes et indépendantes du temps; nous étendons ensuite les résultats au cas où ces deux restrictions sont écartées.

La notion de courbure géodésique d'une courbe de l'espace de Riemann trouve une application intéressante dans un problème traité tout d'abord par Painlevé, celui de la formation des équations différentielles des trajectoires. Aux champs de vecteurs attachés aux points de l'espace de Riemann correspondent des champs d'états cinétiques qui peuvent être utilisés dans diverses questions de Mécanique; c'est ainsi que les formules classiques d'Hydrodynamique concernant l'emploi des coordonnées curvilignes orthogonales s'établissent simplement par l'emploi de caractéristiques de Volterra.

Il est facile de présenter les questions étudiées ici comme un chapitre de Mécanique servant d'introduction à la théorie des espaces de Riemann; mais nous avons ici, pour plus de brièveté, supposé connus les éléments de cette théorie tels qu'ils sont exposés dans les ouvrages de M. E. Cartan.

Les numéros en caractères gras figurant entre crochets dans le courant du texte renvoient à la Bibliographie suivante :

1. APPELL, Traité de Mécanique rationnelle.

2. CARTAN (E.), La Géométrie des Espaces de Riemann (*Mémorial des Sciences mathématiques*, IX).

3. CARTAN (E.), Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann (*Cahiers Scientifiques*, II).

4. CARTAN (E.), Leçons sur les invariants intégraux.

5. CARTAN (E.), La Théorie des groupes finis et continus (*Cahiers scientifiques*, XVIII).

6. DARBOUX, Leçons sur la Théorie générale des Surfaces.

7. HUSSON, Les trajectoires de la Dynamique (*Mémorial Sc. Math.*, LV).

8. LAGRANGE (R.), Sur le calcul différentiel absolu (*Thèse*, Paris, 1923. *Annales Fac. Sc. Toulouse*).

9. LEVI CIVITA, Nozione di parallelismo in una varieta qualcunque (*Rendiconti Circ. Math. Palermo*, XLII, 1917).

10. LEVI CIVITA E AMALDI, Lezioni di Meccanica razionale.

11. VESSIOT, Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations (*Acta Mathematica*, XXVIII, 1904).

12. VESSIOT, Sur les systèmes d'équations différentielles du premier ordre qui ont des systèmes fondamentaux d'intégrales (*Annales Fac. Sc. Toulouse*, VIII, 1894).

13. VILLAT, Leçons sur les fluides visqueux.

14. VOLTERRA, Sopra una classe di equazioni dinamiche (*Atti della R. Acad. delle Scienze di Torino*, XXXIII, 1897-98).

1. Système matériel et espace de Riemann. — Soit S un système matériel assujetti à des liaisons holonomes et indépendantes du temps. Nous le supposons, pour simplifier, constitué par des points matériels; soit M l'un d'eux, m sa masse. Les liaisons sont représentées paramétriquement par les variables $u^1, u^2, \ldots, u^n$.

A toute position de S correspond un point P d'un espace de Riemann R, les coordonnées de P étant $u^1, \ldots, u^n$ et dont l'élément linéaire

$$ds^2 = \Sigma g_{ij}\, du^i\, du^j = 2\mathrm{T}\, dt^2$$

est le produit de la force vive $2\mathrm{T}$ de S par le carré de la différentielle du temps (¹).

(¹) On peut rapprocher cette interprétation mécanique d'un espace de Riemann de la réalisation géométrique de cet espace par une variété V_n à n dimensions plongée dans un espace euclidien

Nous considérons au début *deux espèces de vecteurs* attachés aux divers points M de S : les mesures des uns sont de dimension nulle par rapport aux masses, et à tout vecteur v de cette première espèce correspondra un vecteur mv de la seconde espèce attaché au même point. (Exemples : vitesses et quantités de mouvement, accélérations et forces).

Un mouvement de S compatible avec les liaisons étant défini par les expressions des paramètres $u^1, \ldots, u^n$ en fonction du temps t, le vecteur vitesse v du point M à l'instant t est la somme géométrique

$$\sum \frac{\partial M}{\partial u^i}(u^i)' \qquad \text{où} \quad (u^i)' = \frac{du^i}{dt}.$$

D'une façon générale, nous dirons qu'*un système de vecteurs est régulier* lorsque le vecteur v de première espèce attaché à tout point M de S est la somme géométrique $\sum \frac{\partial M}{\partial u^i} X^i$, les nombres $X^1, \ldots, X^n$ étant les mêmes pour tous les points de S. On peut regarder $X^1, \ldots, X^n$ comme les composantes contravariantes par rapport au repère naturel [3, p. 92] d'un vecteur $\mathbf{x}$ attaché au point P de R ; *la lettre majuscule V rappellera dans la suite qu'il s'agit d'un être géométrique relatif à l'espace de Riemann*, pour éviter toute confusion avec les vecteurs attachés aux points matériels de S.

Si les X^i sont regardés comme des valeurs numériques de dérivées $\frac{du^i}{dt}$, les vecteurs de première espèce du système régulier sont les vitesses v des points M ; l'ensemble $\mathbf{x}$ de ces vitesses et des quantités de mouvement correspondantes mv sera appelé *état cinétique de S*.

Soient alors $\bar{v}$ des vecteurs quelconques de première espèce attachés aux points M, $m\bar{v}$ les vecteurs correspondants de seconde espèce, σ le système ainsi formé, la puissance de σ pour l'état cinétique $\mathbf{x}$ est par définition la somme des produits scalaires $\mathrm{S}\, m\bar{v}v$; S désigne une addition étendue à tous les points de S.

Deux systèmes de vecteurs de seconde espèce sont dits *équivalents* (*vis-à-vis des liaisons*) s'ils ont des puissances égales entre elles pour tout état cinétique de S.

On peut écrire la puissance de σ :

$$\mathrm{S}\, m\bar{v}\, v = \mathrm{S}\, \Sigma\, m\bar{v} \frac{\partial M}{\partial u^i} X^i \qquad \text{ou} \qquad \Sigma\, \bar{X}_i X^i$$

à $n+\nu$ dimensions. Si toutes les masses admettent une commune mesure, on la prend comme unité, les m sont alors des nombres entiers. Regardant un point M de masse m comme la superposition de m points de masses égales à l'unité que les liaisons obligeraient à coïncider, on est ramené au cas où tous les points de S auraient pour masse l'unité. Soient alors $x_1 = \xi_1$, $y_1 = \xi_2$, $z_1 = \xi_3$, $\ldots$, $z_l = \xi_{3l}$ les coordonnées rectangulaires de ces points, on a évidemment

$$ds^2 = \sum d\xi_i^2, \qquad \nu = 3l - n.$$

Inversement un ds^2 défini positif étant donné on peut, d'après un théorème de Schlæfli [2, p. 52], le regarder comme l'élément linéaire d'une variété V_n à n dimensions incluse dans un espace euclidien à $n+\nu$ dimensions et admettre que $n+\nu = 3l$, l entier (en ajoutant au besoin une ou deux coordonnées nulles). Si $\xi_1, \ldots, \xi_{3l}$ sont les coordonnées rectangulaires d'un point P de cette variété, on lui associe dans l'espace euclidien à trois dimensions les points M_i, $x_i = \xi_{3i-2}$, $y_i = \xi_{3i-1}$, $z_i = \xi_{3i}$, de masses égales à l'unité.

en posant

$$\overline{X}_i = S\, m\bar{v}\frac{\partial M}{\partial u^i} \quad \text{et} \quad \overline{X}^j = \Sigma_i g^{ij}\overline{X}_i,$$

g^{ij} désigne le coefficient de g_{ij} dans le déterminant dont les éléments sont g_{ij} divisé par ce déterminant.

Les $\overline{X}_i$ et les $\overline{X}^j$ sont les composantes covariantes et contravariantes d'un Vecteur $\mathbf{x}$. Par suite, *à tout système de vecteurs mv correspond ainsi un système régulier et un seul.* On sait que la notion d'équivalence et le calcul des composantes $\overline{X}_i$ ou $\overline{X}^j$ interviennent en Statique, en Dynamique et dans la théorie des percussions.

2. Dérivation et différentiation absolues d'un vecteur. — Supposons qu'un Vecteur $\mathbf{x}$ et son point d'application P soient fonctions d'une nouvelle variable τ : les coordonnées de P sont fonctions connues de τ ainsi que les composantes X^i de $\mathbf{x}$. La variation en fonction de τ des points M de S et des vecteurs v, mv, du système régulier correspondant à $\mathbf{x}$ est par cela même connue.

Les dérivées géométriques $\frac{dv}{d\tau}$, $m\frac{dv}{d\tau}$ de ces vecteurs ne forment pas en général un système régulier, mais il existe un système régulier équivalent à cet ensemble et auquel correspond un vecteur $\mathbf{y}$; par définition $\mathbf{y}$ sera la *dérivée absolue du Vecteur* $\mathbf{x}$ *par rapport à* τ. Le produit de $\mathbf{y}$ par $d\tau$ sera la *différentielle absolue du Vecteur* $\mathbf{x}$. L'équivalence de cette définition et de la définition habituelle résultant de l'identité des formules qui les traduisent sera bientôt mise en évidence.

Pour obtenir de suite les formules générales qui nous seront utiles, *nous ferons intervenir dans nos calculs non pas les dérivées* $\frac{du^i}{d\tau}$, *mais n formes linéaires indépendantes p^i de ces dérivées telles que les caractéristiques de Volterra* (1).

Nous poserons $p^i\, d\tau = \omega^i$, les ω^i [ou $\omega^i(d)$] étant n expressions de Pfaff linéairement indépendantes :

$$\omega^i = \Sigma\Gamma^i_r\, du^r \tag{1}$$

dont les coefficients Γ^i_r sont fonctions des variables $u^1, \ldots, u^n$; nous les supposons d'un même degré d'homogénéité par rapport aux masses.

(1) Volterra, dans deux mémoires [14] a donné et étudié une forme générale des équations de la Dynamique des systèmes assujettis à des liaisons (holonomes ou non) bilatérales et indépendantes du temps. Il définit l'état cinétique d'un tel système par ν nouvelles variables $p^1, \ldots, p^\nu$ qu'il appelle les *caractéristiques* (ν degré de liberté du système); les composantes de la vitesse de tout point M du système sont de même des formes linéaires des caractéristiques. Les composantes d'un déplacement virtuel sont de même des formes linéaires de ν variables infiniment petites $\delta w^1, \ldots, \delta w^\nu$ les *caractéristiques du déplacement virtuel du système.* Volterra ne fait pas usage d'une représentation paramétrique de celles des liaisons qui sont holonomes; mais il est facile de voir qu'en utilisant une telle représentation les p^i et les δw^i sont bien de la forme $\frac{\omega^i(d)}{dt}$ et $\omega^i(\delta)$, les ω^i étant, comme ci-dessus, des expressions de Pfaff.

Appell [1, tome II, Ch. XXIV] utilise parfois des variables analogues dans des exemples de la forme simple qu'il a donnée aux équations de la Dynamique des Systèmes à liaisons non holonomes. *Voir* aussi Levi Civita et Amaldi [10, tome II_1, Ch. V]. Les liaisons considérées par ces trois Auteurs peuvent dépendre du temps.

Les composantes (souvent désignées par p, q, r) de la rotation instantanée d'un solide mobile autour d'un point sont un exemple simple de caractéristiques de Volterra. L'emploi d'expressions de Pfaff est courant dans les questions de Géométrie et de Calcul différentiel absolu [**2**, **3**, **8**].

Aux expressions de Pfaff ω^i on *associe*, par l'identité $df = \Sigma A_i f \omega^i$, n formes linéaires $A_i f$ des dérivées partielles de la fonction $f(u^1, \ldots, u^n)$; de telles formes sont appelées *symboles de transformations infinitésimales;* nous dirons plus brièvement *symboles de Lie.*

Soient

$$du^r = \Sigma \eta_i^r \omega^i \tag{2}$$

les formules obtenues en résolvant les relations (1) par rapport aux différentielles, on a

$$A_i f = \Sigma \eta_i^r \frac{\partial f}{\partial u^r}, \qquad \frac{\partial f}{\partial u^r} = \Sigma \Gamma_r^i A_i f. \tag{3}$$

Les coordonnées x, y, z de tout point M de S rapporté aux axes rectangulaires Ox, Oy, Oz sont fonctions de $u^1, \ldots, u^n$; soit $A_i M$ le vecteur d'origine M ayant pour projections $A_i x$, $A_i y$, $A_i z$. L'opération $A_j f$ appliquée à ces projections donne un nouveau vecteur dont l'origine sera M et que nous désignons par $A_j A_i M$; il est, en général, distinct de $A_i A_j M$. Posons

$$(A_j A_i) f = A_j A_i f - A_i A_j f = \Sigma_s c_{jis} A_s f, \tag{4}$$

les c_{jis} sont, en général, des fonctions de $u^1, u^2, \ldots, u^n$ et $c_{jis} + c_{ijs} = 0$. Ce sont encore les coefficients des covariants bilinéaires des n expressions de Pfaff considérés comme formes linéaires des binomes $\omega^i(d)\omega^j(\delta) - \omega^i(\delta)\omega^j(d)$ [**5**].

Nous utiliserons de même pour le Vecteur à dériver $\mathbf{x}$ de nouvelles composantes contravariantes

$$x^i = \Sigma \Gamma_r^i X^r,$$

et les anciennes composantes covariantes X_i subissent une transformation correspondante, donnant les nouvelles composantes covariantes x_k telles que l'on ait

$$\Sigma x_k p^k = \Sigma X_j \frac{du^j}{d\tau},$$

quelles que soient les valeurs des dérivées $\frac{du^1}{d\tau}, \ldots, \frac{du^n}{d\tau}$.

Le vecteur v d'origine M est la somme géométrique $\Sigma A_i M x^i$, d'où l'on déduit l'égalité géométrique

$$m\frac{dv}{d\tau} = \Sigma m A_i M \frac{dx^i}{d\tau} + \Sigma m x^i \frac{d}{d\tau} A_i M = \Sigma m A_i M \frac{dx^i}{d\tau} + \Sigma m A_h A_i M x^i p^h, \qquad p^h = \frac{\omega^h}{d\tau}.$$

Le produit scalaire de ce vecteur de seconde espèce par la vitesse w de M dans un mouvement quelconque compatible avec les liaisons $\Sigma A_j M \bar{p}^j$ où les expressions $\bar{p}^j = \frac{\omega^j}{dt}$ seront considérées comme des fonctions arbitraires du temps t donne la puissance du vecteur $m\frac{dv}{d\tau}$. Par une addition S étendue à tous les points M de S, on obtient la puissance de $\mathbf{x}$ et les coefficients des expressions $\bar{p}^j$ sont, dans le nouveau système, les composantes covariantes y_j du Vecteur $\mathbf{y}$ dérivée absolue de $\mathbf{x}$ par rapport à τ :

$$(5) \qquad y_j = \mathrm{S}\,\Sigma\, m\,\mathrm{A}_j\mathrm{M}\,\mathrm{A}_i\mathrm{M}\,\frac{dx^i}{d\tau} + \mathrm{S}\,\Sigma\, m\,\mathrm{A}_j\mathrm{M}\,\mathrm{A}_h\mathrm{A}_i\mathrm{M}\,x^i p^h.$$

L'élément linéaire de l'espace R est la somme

$$ds^2 = 2\,\mathrm{T}\,dt^2 = \mathrm{S}\,mw^2\,dt^2 = \mathrm{S}(\Sigma\, m\,\mathrm{A}_r\mathrm{M}\,\omega^r\,\Sigma\,\mathrm{A}_s\mathrm{M}\,\omega^s) = \Sigma\,\mathrm{G}_{rs}\,\omega^r\omega^s;$$

les coefficients $\mathrm{G}_{rs} = \mathrm{G}_{sr}$ sont les sommes de produits scalaires $\mathrm{S}m\mathrm{A}_r\mathrm{MA}_s\mathrm{M}$.

Le premier terme du second membre de (5) est donc $\Sigma\mathrm{G}_{ij}\dfrac{dx^i}{d\tau}$; nous allons calculer le coefficient γ_{hji} de $x^i p^h$.

On calcule les expressions $\mathrm{A}_j\mathrm{MA}_h\mathrm{A}_i\mathrm{M}$ en utilisant d'une part les relations obtenues en effectuant les permutations circulaires des indices h, i, j dans la formule

$$\mathrm{A}_h(\mathrm{A}_i\mathrm{M}\,\mathrm{A}_j\mathrm{M}) = \mathrm{A}_h\mathrm{A}_i\mathrm{M}\,\mathrm{A}_j\mathrm{M} + \mathrm{A}_i\mathrm{M}\,\mathrm{A}_h\mathrm{A}_j\mathrm{M},$$

et, d'autre part, celles qui proviennent de

$$\Sigma\, c_{his}\,\mathrm{A}_s\mathrm{M}\,\mathrm{A}_j\mathrm{M} = \mathrm{A}_j\mathrm{M}\,\mathrm{A}_h\mathrm{A}_i\mathrm{M} - \mathrm{A}_j\mathrm{M}\,\mathrm{A}_i\mathrm{A}_h\mathrm{M}$$

par l'emploi des mêmes permutations circulaires.

On obtient ainsi (en tenant compte des identités $c_{ijs} + c_{jis} = 0$),

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{A}_j\mathrm{MA}_h\mathrm{A}_i\mathrm{M} = {} & \mathrm{A}_h(\mathrm{A}_i\mathrm{M}\,\mathrm{A}_j\mathrm{M}) + \mathrm{A}_i(\mathrm{A}_h\mathrm{M}\,\mathrm{A}_j\mathrm{M}) - \mathrm{A}_j(\mathrm{A}_h\mathrm{M}\,\mathrm{A}_i\mathrm{M}) \\ & + \Sigma(c_{his}\mathrm{A}_s\mathrm{M}\,\mathrm{A}_j\mathrm{M} + c_{jis}\mathrm{A}_s\mathrm{M}\,\mathrm{A}_h\mathrm{M} + c_{jhs}\mathrm{A}_s\mathrm{M}\,\mathrm{A}_i\mathrm{M}), \end{aligned}$$

par multiplication par m et addition étendue à tous les points de S, on a finalement

$$(6) \qquad \begin{aligned} \gamma_{hji} = \mathrm{S}_m\mathrm{A}_j\mathrm{MA}_h\mathrm{A}_i\mathrm{M} = {} & \frac{1}{2}[\mathrm{A}_h\mathrm{G}_{ij} + \mathrm{A}_i\mathrm{G}_{hj} - \mathrm{A}_j\mathrm{G}_{hi}] \\ & + \frac{1}{2}\Sigma[c_{his}\mathrm{G}_{sj} + c_{jis}\mathrm{G}_{sh} + c_{jhs}\mathrm{G}_{si}]. \end{aligned}$$

Signalons en passant les formules

$$(7) \qquad \gamma_{hji} - \gamma_{ijh} = \Sigma\, c_{his}\mathrm{G}_{sj},$$

$$(7') \qquad \gamma_{hji} + \gamma_{hij} = \mathrm{A}_h\mathrm{G}_{ij}.$$

Nous avons donc

$$(8) \qquad y_j = \Sigma\,\mathrm{G}_{ij}\frac{dx^i}{d\tau} + \Sigma\gamma_{hji}x^i p^h.$$

Le second membre est une forme linéaire des dérivées $\dfrac{dx^i}{d\tau}$ et $\dfrac{du^k}{d\tau}$; en multipliant par $d\tau$ on a la *formule de différentiation absolue*

$$(9) \qquad y_j\,d\tau = \mathrm{D}x_j = \Sigma\,\mathrm{G}_{ij}\,dx^i + \Sigma\gamma_{hji}x^i\omega^h.$$

3. Cas particuliers. — 1° *Quand on prend* $\omega^1 = du^1, \ldots, \omega^n = du^n$, *on a* $\mathrm{A}_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial u^1}, \ldots, \mathrm{A}_n f = \dfrac{\partial f}{\partial u^n}$, **toutes les expressions c_{jis} sont nulles et les coeffi-**

cients $G_{rs} = g_{rs}$. L'expression (6) s'écrit $\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^h} + \frac{\partial g_{hj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{hi}}{\partial u^j}\right]$, c'est le symbole de Christoffel de première espèce $\left[\begin{smallmatrix} hi \\ j \end{smallmatrix}\right]$ que M. Cartan désigne par Γ_{hji}; il est maintenant, d'après (7), égal à Γ_{ijk}; les composantes covariantes de la différentielle absolue sont alors

$$\text{(10)} \qquad DX_j = \Sigma g_{ij}\, dX^i + \Sigma \Gamma_{hji} X^i\, du^h;$$

on en déduit les composantes contravariantes

$$\text{(11)} \qquad DX^j = dX_j - \Sigma \Gamma^k_{jh} X_k\, du^h, \qquad \Gamma^k_{jh} = \Sigma g^{ik} \Gamma_{jih},$$

où les expressions $\Gamma^k_{jh} = \left\{\begin{smallmatrix} jh \\ k \end{smallmatrix}\right\}$ sont les symboles de Christoffel de seconde espèce [2, p. 11]. *L'équivalence entre la définition classique de la différentiation absolue et celle que nous avons donnée est donc établie par l'identité des formules qui les traduisent.*

2° *Lorsque les coefficients* G_{ij} *sont constants,* la formule (6) se simplifie, le premier terme du second membre étant nul. On peut obtenir qu'il en soit ainsi ainsi par un choix convenable des ω^i, il est même possible de les prendre de façon que $G_{rs} = 0$ lorsque $r \neq s$. Dans ces conditions, on a

$$\text{(6')} \qquad \gamma_{hji} = \frac{1}{2}(c_{hij} G_{jj} + c_{jih} G_{hh} + c_{jhi} G_{ii}].$$

3° De plus, *si les* ω^i *sont tels que les* G_{ii} *soient tous égaux à l'unité et* $G_{rs} = 0$ *pour* $r \neq s$

$$ds^2 = \Sigma(\omega^i)^2,$$

il vient

$$\text{(6'')} \qquad \gamma_{hji} = \frac{1}{2}(c_{hij} + c_{jih} + c_{jhi}),$$

formule équivalente à celle que M. René Lagrange donne dans sa Thèse [8] de plus $\gamma_{hji} + \gamma_{hij} = 0$.

La formule de dérivation (8) s'écrit aussi

$$\text{(8')} \qquad y_j = \frac{dx^j}{d\tau} + \Sigma \varpi_{ji} x^i, \qquad \varpi_{ji} = \Sigma \gamma_{hji} p^h, \qquad \varpi_{ji} + \varpi_{ij} = 0, \qquad \varpi_{jj} = 0,$$

la formule (8') est analogue à celle qui donne, dans la cinématique classique, les projections sur des axes rectangulaires mobiles de la dérivée par rapport au temps τ d'un vecteur variant de lui-même avec τ. Cette analogie explique l'expression de transport par équipollence ou parallélisme utilisée à propos d'une notion importante due à Lévi-Civita [9].

4° *Supposons les* G_{ij} *constants et admettons de plus que les symboles* $A_i f$ *soient ceux des transformations infinitésimales d'un groupe fini et continu* L *simplement transitif: les* ω^i *sont ce que M. Cartan* [5] *appelle les composantes relatives d'un groupe à n paramètres*, alors les c_{jis} sont les constantes de structure du groupe; les expressions γ_{hji}, γ^h_{li} sont aussi constantes.

Si par exemple S est un solide mobile autour d'un point fixe O, en prenant les axes principaux d'inertie relatifs à ce point comme axes OX, OY, OZ liés à S en désignant par G_{11}, G_{22}, G_{33} les moments d'inertie correspondants (A, B, C avec les notations habituelles) et appelant ϖ^1, ϖ^2, ϖ^3 les composantes suivant ces axes de la rotation instantanée (généralement désignées par p, q, r), on a

$$2T = G_{11}(\varpi^1)^2 + G_{22}(\varpi^2)^2 + G_{33}(\varpi^3)^2, \qquad ds^2 = G_{11}(\omega^1)^2 + G_{22}(\omega^2)^2 + G_{33}(\omega^3)^2.$$

On exprime facilement ω^1, ω^2, ω^3 en fonction des angles d'Euler ψ, θ, φ et de leurs différentielles, on en déduit les expressions $A_1 f$, $A_2 f$, $A_3 f$ et leurs crochets ce qui donne

$$c_{231} = 1, \quad c_{321} = -1, \quad c_{312} = 1, \quad c_{132} = -1, \quad c_{123} = 1, \quad c_{213} = -1,$$

tous les autres c étant nuls.

Les formules (9) s'écrivent maintenant

$$(12) \qquad Dx_1 = G_{11}\,dx_1 + \frac{1}{2}(G_{11} - G_{22} + G_{33})x^3\omega^2 - \frac{1}{2}(G_{11} + G_{22} - G_{33})x^2\omega^3, \; \ldots.$$

4. **Équations du mouvement.** — *Nous supposons maintenant que la variable* τ *du* n° 2 *est le temps* t *et que les vecteurs* v *sont les vitesses des points* M *de* S *dans le mouvement défini par la donnée des* u^i *comme fonctions de* t. On a

$$\frac{du^i}{dt} = X^i, \qquad \frac{\omega^i}{dt} = x^i = p^i,$$

les vecteurs $\frac{dv}{dt}$, $m\frac{dv}{dt}$ sont les accélérations et les forces d'inertie changées de sens.

Nous appelons avec Levi-Civita et Amaldi *forces actives* les forces autres que les forces de liaison; ne les supposant pas nécessairement connues dans la suite, nous n'utilisons pas ici la dénomination fréquente *forces données*.

Nous supposons maintenant les liaisons sans frottement; d'après le principe de d'Alembert le travail élémentaire des forces opposées aux forces d'inertie est égal à celui des forces actives. Les formules (8) conduisent alors à la *forme générale des équations du mouvement utilisant les caractéristiques de Volterra*

$$(13) \qquad \Sigma G_{ij}\frac{dp^i}{dt} + \Sigma\gamma_{hji}p^i p^h = P_j, \qquad p^i = \frac{\omega^i}{dt},$$

nous désignons par Λ_j les premiers membres de ces équations. Les seconds membres P_j s'obtiennent en donnant au travail virtuel des forces actives, pour un déplacement infiniment petit de S compatible avec les liaisons, caractérisé par les différentielles δu^i ou les expressions de Pfaff $\omega^i(\delta)$ la forme $\Sigma P_j\omega^j(\delta)$; on peut dire aussi que P_j est la puissance des forces actives pour un mouvement virtuel où $p^j = 1$, toutes les autres caractéristiques p^i étant nulles.

En prenant $\omega^1 = du^1, \ldots, \omega^n = du_n$, *on a les équations de Lagrange écrites en groupant les termes contenant les dérivées du même ordre* et où les coefficients $\Gamma_{hji} = \Gamma_{ijh}$ sont les symboles de Christoffel de première espèce

$$(14) \qquad \Sigma g_{ij}\frac{d^2u^i}{dt^2} + \Sigma\Gamma_{hji}\frac{du^i}{dt}\frac{du^h}{dt} = Q_j,$$

le travail virtuel des forces actives est $\Sigma Q_j \delta u^j$. Nous désignons par λ_j les premiers membres de ces équations.

Les équations (13) sont évidemment des combinaisons linéaires des équations de Lagrange, il est facile d'en obtenir les coefficients. Écrivant de deux façons différentes le travail virtuel des forces opposées aux forces d'inertie

$$\Sigma \Lambda_j \omega^j(\delta) = \Sigma \lambda_r \delta u^r,$$

on a

$$\Lambda_j = \Sigma \eta_j^r \lambda_r.$$

Le mouvement d'un solide autour d'un point fixe O donne un cas particulier intéressant des équations (13), on déduit en effet de la formule de dérivation absolue correspondant aux formules (12) les équations d'Euler

$$G_{11}\frac{dp^1}{dt} + (G_{33} - G_{22})p^2 p^3 = P_1, \ \ldots. \tag{15}$$

A toute décomposition en carrés de la force vive et de l'élément linéaire

$$2T = \Sigma(p^i)^2, \qquad ds^2 = \Sigma(\omega^i)^2 \tag{16}$$

correspond la forme suivante des équations (13)

$$\frac{dp^j}{dt} + \Sigma\gamma_{hji}p^i p^h = P_j, \qquad \gamma_{hji} = \frac{1}{2}[c_{hij} + c_{jih} + c_{jhi}], \tag{17}$$

ou d'après (7'), on a

$$\gamma_{hji} + \gamma_{hij} = 0.$$

Cette forme générale des équations du mouvement est identique à l'une de celles que donne Volterra dans son premier Mémoire [14]; notre calcul des coefficients γ ne fait intervenir que les fonctions c_{hij} figurant dans le développement des crochets $(A_h A_i)f$.

5. Mouvements spontanés à caractéristiques indépendantes. — Supposons l'élément linéaire de la forme (16) et admettons de plus que les coefficients γ_{hji} soient constants ou plutôt que les sommes $\gamma_{hji} + \gamma_{ijh}$ le soient, les équations (17) présentent une analogie manifeste avec les équations d'Euler. Si de plus les forces actives sont équivalentes à zéro, les P_j sont nuls, *nous avons une extension du cas d'Euler et de Poinsot dans la Dynamique du corps solide.* Les équations (17) qui s'écrivent alors

$$\frac{dp^j}{dt} + \Sigma\gamma_{hji}p^i p^h = 0, \tag{18}$$

constituent un système du premier ordre qui peut s'intégrer séparément; ceci fait, on achève de déterminer le mouvement par l'intégration du système

$$\frac{\omega^i}{dt} = p^i. \tag{19}$$

Volterra appelle *mouvements spontanés* ceux qui correspondent à des *forces actives nulles* et *mouvements spontanés à caractéristiques indépendantes ceux pour lesquels le système analogue à* (18) *étant à coefficients constants* peut être intégré séparément.

L'emploi des groupes continus permet de construire des éléments linéaires ds^2 et par suite des systèmes S à liaisons holonomes remplissant ces conditions. On part d'un groupe simplement transitif L, ou, ce qui revient au même, du groupe des paramètres L d'un groupe quelconque A. Les composantes relatives du déplacement du repère mobile de A ou, en d'autres termes, les expressions de Pfaff associées aux symboles des transformations infinitésimales de L donnent les expressions de Pfaff ω^i. On prend alors pour élément linéaire une forme quadratique à coefficients G_{ij} constants définie positive de ces expressions de Pfaff.

Les c_{hij} sont les constantes de structure de L, les γ_{hji} donnés par les formules (6) sont aussi constants et le système (17) où $P_j = 0$ est bien séparément intégrable.

Prenons par exemple le groupe des paramètres du groupe des substitutions linéaires $x' = ax + b$;

$$\omega^1 = \frac{da}{a}, \qquad \omega^2 = \frac{db}{a}; \qquad ds^2 = \frac{da^2 + db^2}{a^2}, \qquad c_{122} = -c_{212} = 1$$

tous les autres c sont nuls; on a facilement $\gamma_{212} = -\gamma_{122} = 1$ et les équations (18) sont ici

$$\frac{dp^1}{dt} + (p^2)^2 = 0 \qquad \frac{dp^2}{dt} - p^1 p^2 = 0;$$

elles sont bien de la forme indiquée par Volterra [14, p. 543] et correspondent à $\alpha = 0$, $\beta = 1$. L'élément linéaire $\dfrac{da^2 + db^2}{a^2}$ est celui d'une surface à courbure totale constante égale à -1 telle qu'une surface pseudosphérique [6, tome I, p. 80]; on peut prendre pour S un point mobile sur une telle surface.

Les équations du mouvement d'un solide autour d'un point fixe quand aucune force active n'intervient (cas d'Euler et de Poinsot) correspondent de la même façon au cas où A est le groupe des rotations autour de O, L le premier groupe des paramètres de A, l'élément linéaire est $ds^2 = G_{11}(\omega^1)^2 + G_{22}(\omega^2)^2 + G_{33}(\omega^3)^2$ et admet les transformations du groupe L.

Les mouvements spontanés à caractéristiques indépendantes d'un système S construit comme nous venons de l'indiquer en partant d'un groupe simplement transitif L à n variables sont déterminés par un système (E) de $2n$ équations différentielles du premier ordre. On voit facilement que (E) admet les transformations du groupe L. *On peut en ramener l'intégration suivant une théorie générale de Lie et de M. Vessiot* [11, p. 308] *à celles d'un système résolvant* (*tel que le système* 18) *et d'un système de Lie formé par les équations* (19). En résolvant ces dernières équations par rapport aux dérivées, on a d'après les formules (2)

$$\frac{du^r}{dt} = \Sigma \gamma_i^r p^i:$$

c'est bien la forme d'un système de Lie correspondant au groupe L dont les transformations infinitésimales sont données par les formules (3). M. Vessiot a donné une théorie de l'intégration des systèmes de Lie [12]. M. Volterra dans ses deux mémoires a étudié celle des systèmes résolvants. Pour le cas d'Euler et de Poinsot, le système de Lie s'intègre par une quadrature [1, Ch. XX].

6. Systèmes à liaisons non holonomes. — Nous avons supposé jusqu'ici les liaisons holonomes alors que Volterra ne fait pas cette hypothèse. Nous allons montrer maintenant que *les équations* (13) *et l'emploi des caractéristiques se prêtent à la détermination du mouvement d'un système S où des liaisons non holonomes sans frottement et indépendantes du temps s'ajoutent aux liaisons holonomes seules considérées jusqu'ici.* Conservons la représentation paramétrique de ces dernières, nous choisissons les formes ω^i de façon que les liaisons nouvelles soient traduites par les équations

$$(20) \qquad \omega^{l+1}=0, \qquad \ldots, \qquad \omega^{l+q}=0, \qquad l+q=n;$$

seules peuvent être différentes de zéro les caractéristiques p^i pour lesquelles $i \leqq l$.

On peut appliquer les équations (13) au mouvement du système S dont la liberté est ainsi réduite en adjoignant aux forces actives antérieures les réactions correspondant aux liaisons ajoutées. Soit $\Sigma \mathrm{P}_j^* \omega_j(\delta)$ le travail virtuel de ces réactions additionnelles; nous devrions remplacer, dans les équations (13), P_j par $\mathrm{P}_j+\mathrm{P}_j^*$. Mais, puisque nous supposons les nouvelles liaisons sans frottement, nous admettons que le travail virtuel des réactions est nul quand les équations (20) sont vérifiées; en d'autres termes $\mathrm{P}_1^*, \ldots, \mathrm{P}_l^*$ sont nuls et en définitive les équations du mouvement du système sont

$$(21) \qquad \Sigma \mathrm{G}_{ij}\frac{dp^i}{dt}+\Sigma \gamma_{hji}p^i p^h=\mathrm{P}_j, \qquad p^i=\frac{\omega^i}{dt} \qquad (h, i, j=1, 2 \ldots l),$$

on notera que les G_{ij} coefficients des termes en $\frac{dp^i}{dt}$ ne font intervenir que les valeurs de i et j au plus égales à l; et que, par contre, d'après les formules (6), le calcul des coefficients γ_{hji} des termes en $p^i p^h$ fait intervenir les coefficients G_{sj} où s peut être supérieur à l.

Cette méthode appliquée au problème classique de la bille de billard roulant et pivotant sans glisser sur un plan horizontal redonne les résultats connus.

Montrons qu'*un choix convenable de* $\omega^1, \ldots, \omega^n$ *permet d'avoir encore* $ds^2=\Sigma(\omega^i)^2$. Les ω étant d'abord pris seulement de façon que les liaisons additionnelles, qui peuvent être holonomes ou non, soient données par les équations (20) considérons dans $ds^2=\Sigma \mathrm{G}_{ij}\omega^i\omega^j$ le groupe $\overline{ds}^2$ des termes où les indices prennent les valeurs 1, 2, ..., l. En remplaçant $\omega^1, \ldots, \omega^l$ par l formes linéaires de ces mêmes expressions, formes dont les coefficients peuvent dépendre de $u^1, u^2, \ldots, u^n$, on réduit $\overline{ds}^2$ à la somme des carrés de ces nouvelles formes. On peut donc supposer $\omega^1, \ldots, \omega^l$ choisis de façon que $\overline{ds}^2=(\omega^1)^2+\ldots+(\omega^l)^2$; admettons qu'il en soit ainsi et écrivons

$$ds^2=(\omega^1)^2+\ldots+(\omega^l)^2+2\omega^1\varpi^1+\ldots+2\omega^l\varpi^l+d\sigma^2,$$

$\varpi^1, \ldots, \varpi^l$ sont des formes linéaires et $d\sigma^2$ une forme quadratique de $\omega^{l+1}, \ldots, \omega^n$ (les coefficients de ces diverses formes peuvent dépendre de toutes les variables u); nous posons

$$ds^2 = (\omega^1 + \varpi^1)^2 + \ldots + (\omega^l + \varpi^l)^2 + \overline{d\sigma}^2; \qquad \overline{d\sigma}^2 = d\sigma^2 - (\varpi^1)^2 - \ldots - (\varpi^l)^2;$$

cela nous permet d'admettre qu'un choix convenable de $\omega^1, \ldots, \omega^l$ donne $ds^2 = (\omega^1)^2 + \ldots + (\omega^l)^2 + \overline{d\sigma}^2$, mais en remplaçant $\omega^{l+1}, \ldots, \omega^n$ par des combinaisons linéaires convenables et s'appuyant sur la loi d'inertie des formes quadratiques, on peut obtenir que $\overline{d\sigma}^2$ soit aussi la somme de carrés de $n - l$ formes linéaires, ce qui démontre la proposition énoncée.

Avec le nouveau choix de $\omega^1, \ldots, \omega^n$, les liaisons additionnelles sont encore traduites par des équations de la forme (20), et les équations (21) s'écrivent

$$(22) \qquad \Lambda_j = \frac{dp^j}{dt} + \Sigma\gamma_{hji}p^ip^h = \mathrm{P}_j \qquad (i, j, h = 1, 2, \ldots, l).$$

Cette remarque sera utile plus loin.

7. **Liaisons dépendant du temps.** — On donne aux équations du mouvement une forme analogue aux précédentes lorsque les liaisons dépendent du temps, mais une modification importante intervient alors.

Supposons d'abord les *liaisons holonomes*. Les coordonnées de chaque point M du système S sont fonctions des paramètres $u^1, \ldots, u^n$ et du temps t; nous adjoindrons un paramètre u^{n+1} que nous prendrons égal à t et nous ferons correspondre à la position de S et à l'instant t le point P de coordonnées curvilignes $u^1, \ldots, u^{n+1}$ de l'espace Riemannien R d'élément linéaire

$$d\mathrm{S}^2 = 2\mathrm{T}\,dt^2 = \Sigma g_{ij}\,du^i du^j.$$

Les vecteurs v et mv attachés au point M de S peuvent maintenant dépendre du temps; par exemple, pour la vitesse de M dans un mouvement compatible avec les liaisons, v est la somme géométrique $\Sigma\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u^i}\mathrm{X}^i$ qui comprend d'abord les termes considérés antérieurement pour lesquels $i \leqq n$, $\mathrm{X}^i = \frac{du^i}{dt}$ et ensuite le terme

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u^{n+1}}\mathrm{X}^{n+1} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial t}.$$

Nous considérons encore le système de Vecteurs v et mv comme régulier si v est la somme géométrique $\Sigma\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u^i}\mathrm{X}^i$; $\mathrm{X}^1, \ldots, \mathrm{X}^{n+1}$ définissent un Vecteur $\mathbf{x}$ attaché au point P de R; si les v doivent être considérés comme des vitesses $\mathrm{X}^{n+1} = 1$. Les notions de puissance, d'équivalence vis-à-vis des liaisons (dépendant de t), la définition et le calcul des composantes covariantes de $\mathbf{x}$ s'étendent aux cas actuels de même que la définition et le calcul de la dérivée absolue par rapport au paramètre τ et de la différentielle absolue d'un Vecteur.

Nous utiliserons encore des expressions de Pfaff ω^i, $(i = 1, \ldots, n+1)$ et les caractéristiques $p^1, \ldots, p^{n+1}$ correspondantes, mais ω^{n+1} sera toujours du^{n+1} ou dt à un facteur près.

Nous avons maintenant $n+1$ symboles de Lie au lieu de n; la formule de dérivation absolue (8) reste valable.

Mais pour passer aux équations du mouvement de S sous l'action de forces actives, il faut se rappeler la différence essentielle qu'il y a entre les mouvements compatibles avec les liaisons dépendant du temps jusqu'ici considérées et les *mouvements virtuels compatibles avec les liaisons existant à l'instant t*. Pour ces derniers, u^{n+1} doit être regardé comme une constante, donc pour le calcul du travail élémentaire des forces ordinaires et des forces d'inertie $\delta u^{n+1}=0$, $\omega^{n+1}(\delta)=0$; en d'autres termes, on forme les équations (13) pour $j=1, 2, \ldots, n$, de plus l'hypothèse de l'absence de frottement fait que les seconds membres P de ces n équations se calculent avec les seules forces actives.

On vérifie d'ailleurs facilement, en prenant $\omega^1=du^1, \ldots, \omega^n=du^n$, que les équations de Lagrange ordonnées par rapport aux dérivées secondes et premières $(u^i)'=\dfrac{du^i}{dt}$, $(u^i)''=\dfrac{d^2u^i}{dt^2}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ sont identiques aux équations de la forme (14) où les coefficients Γ_{hji} sont, pour $j\leq n$, les symboles de Christoffel relatifs à l'élément linéaire à $n+1$ variables dS^2.

En second lieu, *quand les liaisons dépendent du temps et qu'il s'en trouve de non holonomes;* on prend comme plus haut $n+1$ variables u^i (paramètres de position et temps) et l'élément linéaire

$$dS^2=2\,T\,dt^2=\Sigma\, G_{ij}\,\omega^i\omega^j,$$

en choisissant, comme plus haut, les expressions de Pfaff de façon que les liaisons additionnelles (non holonomes en général) soient données par $\omega^{l+1}=0$, $\omega^n=0$ et que ω^{n+1} ne contienne que la différentielle dt.

Pour un déplacement virtuel compatible avec les liaisons existant à l'instant t, seuls $\omega^1(\delta), \ldots, \omega^l(\delta)$ peuvent être différents de zéro; on prendra donc les l équations (22) correspondant à $j=1, 2, \ldots, l$ et on leur adjoindra les q équations $p^{l+1}=0, \ldots, p^n=0$. Les coefficients γ_{hji} des l premières équations font intervenir les coefficients de dS^2 forme quadratique des $n+1$ expressions $\omega^1, \ldots, \omega^{n+1}$. *L'emploi des caratéristiques de Volterra est ainsi applicable dans tous les cas où les liaisons sont bilatérales et sans frottement.*

8. Courbure géodésique d'une courbe de l'espace de Riemann. — Supposons de nouveau les liaisons holonomes et indépendantes du temps, transformons les équations (14) en prenant comme variable auxiliaire l'arc s de la courbe C décrite dans R par le point P caractérisant la position de S à l'instant t. Nous obtenons ainsi

$$(23)\quad L_j\frac{d^2s}{dt^2}+M_j\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=Q_j,\ L_j=\Sigma\, g_{ij}\frac{du^i}{ds},\qquad M_{ij}=\Sigma\, g_{ij}\frac{d^2u^i}{ds^2}+\Sigma\,\Gamma_{hji}\frac{du^i}{ds}\,\frac{du^h}{ds}.$$

Le Vecteur de composantes L_j est le Vecteur unitaire $\mathbf{u}$ tangent à C; le Vecteur $\mathbf{c}$ de composantes M_j est le *Vecteur courbure géodésique de C.*

De même, quand on utilise les caractéristiques de Volterra les équations (13) donnent

$$(24)\quad L_j\frac{d^2s}{dt^2}+M_j\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=Q_j\qquad L_j=\Sigma\, G_{ij}\varpi^i,\qquad M_j=\Sigma\, G_{ij}\frac{d\varpi_i}{ds}+\Sigma\,\gamma_{hji}\varpi_i\varpi_h,\ \varpi_h=\frac{\omega^h}{ds}.$$

Les expressions L_j, M_j sont respectivement les composantes des Vecteurs **u** et **c**. En particulier, si les ω^i sont tels que $ds^2 = \Sigma(\omega_i)^2$ les dernières formules (24) deviennent

$$L_j = \varpi^j = \varpi_j, \qquad M_j = \frac{d\varpi^j}{ds} + \Sigma \gamma_{hjl} \varpi^l \varpi^h.$$

On établit facilement la relation $\Sigma L_j M_j = 0$, *le Vecteur courbure géodésique* est normal à C.

On a ainsi des *équations analogues aux équations intrinsèques du mouvement d'un point dans l'espace ordinaire :* Appelons *Force* le Vecteur **f** de composantes covariantes Q_j (ou Q_j) ayant pour origine le point P de R de paramètres $u^1, \ldots, u^n$; Force tangentielle le Vecteur $\mathbf{f}_t$ projection de **f** sur la tangente à C en P, Force normale $\mathbf{f}_\nu$ le Vecteur différence géométrique $\mathbf{f} - \mathbf{f}_t$. Les formules vectorielles mettant en évidence l'analogie sont

$$(25) \qquad \mathbf{f}_t = \mathbf{u}\frac{d^2 s}{dt^2} \qquad \mathbf{f}_\nu = \mathbf{c}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

On les applique à la formation des *équations différentielles des trajectoires des mouvements de S sous l'action de Forces connues* (il s'agit des courbes C décrites par P dans l'espace de Riemann). Painlevé a posé et résolu ce problème; *voir* le bon exposé de la question par M. Husson [7].

La différence géométrique $\mathbf{f} - \mathbf{f}_t$ donne $\mathbf{f}_\nu$; $\frac{d^2 s}{dt^2}$ se calcule à l'aide du théorème des forces vives, qui donne pour les équations (14)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d^2 s}{dt^2} = \Sigma\, Q_i \frac{du^i}{dt}, \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = \Sigma\, Q_i \frac{du^i}{ds}$$

et les composantes covariantes de $\mathbf{f}_\nu$

$$(26) \qquad N_j = Q_j - L_j \Sigma\, Q_i \frac{du^i}{ds}$$

par suite

$$(27) \qquad \frac{N_1}{M_1} = \frac{N_2}{M_2} = \ldots = \frac{N_n}{M_n}$$

la valeur commune de ces rapports est $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ ou $2T$. Le nombre des relations (27) indépendantes est $n - 2$, car les numérateurs et les dénominateurs des rapports sont les composantes de Vecteurs situés tous deux dans le $n - 1$ plan normal à C.

Supposons que les Forces **f** *appartiennent à un champ conservatif*, c'est-à-dire que leurs composantes Q_i soient les dérivées d'une fonction $U(u^1, \ldots, u^n)$. L'intégrale première des forces vives permet de compléter les équations (27); on a ainsi, h étant une constante, les équations cherchées

$$(28) \qquad \frac{N_1}{M_1} = \ldots = \frac{N_n}{M_n} = 2(U + h).$$

S'il n'y a pas champ conservatif, on ajoute aux $n - 2$ équations (26) une équation $\frac{d}{ds}\frac{N_l}{M_l} = 2\frac{dT}{ds}$.

S'il n'y a pas de forces actives, les trajectoires (géodésiques) sont données par les équations $M_i = 0$.

On forme aussi bien les équations différentielles des trajectoires en utilisant les caractéristiques de Volterra ou plutôt les expressions $\frac{\omega^i}{ds} = \varpi^i$, en remplaçant M_j et N_j respectivement par M_j et $N_j = Q_j - L_j \Sigma Q_i \varpi^i$; si $\Sigma Q_i \omega^i$, est une différentielle totale exacte, les Forces **f** appartiennent à un champ conservatif.

On retrouve d'une façon simple l'*extension des théorèmes de Meusnier et d'Euler à la Géométrie riemannienne* en observant que pour tout mouvement de S où la force vive est constamment égale à l'unité $\mathbf{f}_t = 0$ et la Force normale **f** donne le Vecteur courbure géodésique de la courbe C.

Supposons que cette courbe C appartienne à une variété V_l de l'espace R, ou, plus généralement, que les coordonnées de ses points vérifient $n - l$ équations complémentaires de Pfaff. Nous avons vu plus haut qu'on pouvait prendre les expressions ω^i de façon que l'élément linéaire de R et les équations complémentaires de Pfaff soient

$$ds^2 = \Sigma(\omega^i)^2 \qquad \omega^{l+1} = 0, \; \ldots, \; \omega^n = 0.$$

On se donne les u^i en fonction de s vérifiant les équations suivantes $\left(\text{où } \varpi_i = \frac{d\omega_i}{ds}\right)$

$$\varpi^{l+1} = 0, \; \ldots, \; \varpi^n = 0, \qquad (\varpi')^2 + \ldots + (\varpi^l)^2 = 1,$$

les composantes $\overline{Q}_1, \ldots, \overline{Q}_n$ du vecteur courbure géodésique de C sont données par les équations

$$\frac{d\varpi^j}{ds} + \Sigma\gamma_{hji}\varpi^h\varpi^i = \overline{Q}_j \qquad (h, i, j = 1, 2, \ldots, l). \tag{29}$$

$$\Sigma\gamma_{h\alpha i}\varpi^h\varpi^i = \overline{Q}_\alpha \qquad (h, i = 1, 2, \ldots, l, \alpha = l+1, \ldots : n). \tag{30}$$

Les formules (30) dont on trouvera l'interprétation géométrique dans un ouvrage de M. Cartan [2, p. 45] expriment analytiquement l'extension de ces théorèmes.

9. Champs d'états cinétiques. — Un champ de Vecteurs est défini quand on fait correspondre un Vecteur à tout point P de R en d'autres termes quand on se donne n fonctions X_l des paramètres $u', \ldots, u^r$, et qu'on les regarde comme composantes covariantes d'un Vecteur. Interprétons en mécanique ces Vecteurs comme des états cinétiques d'un système matériel S, nous aurons un *champ d'états cinétiques*.

M. Cartan (2, p. 12) utilise dans la Géométrie des Espaces de Riemann à n dimensions n champs de Vecteurs unitaires permettant l'emploi des expressions de Pfaff; on peut donc considérer que n champs d'états cinétiques de base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ permettent de définir un état cinétique **e** d'un système matériel S: la vitesse de tout point M de S dans l'état **e** est la somme géométrique des vecteurs obtenus en multipliant le vecteur vitesse de M dans l'état cinétique $\mathbf{e}_i$ par la caractéristique de Volterra p^i. Si les puissances respectives des états cinétiques de base pris deux à deux sont nulles, la force vive de S est la somme $\Sigma G_{ii}(p^i)^2$; si de plus pour chacun des états cinétiques de base la force vive de S est égale à l'unité, elle sera pour un état cinétique quelconque $\Sigma(p^i)^2$.

Supposons les liaisons holonomes indépendantes du temps, à tout champ d'états cinétiques correspond un champ riemannien de Forces. Il est commode, pour le trouver, d'utiliser les variables canoniques $p_i = \frac{\partial T}{\partial (u^i)'}$ (avec la notation habituelle). Elles sont les composantes covariantes d'un Vecteur donnant les vitesses [on pourrait aussi les considérer comme composantes contravariantes en prenant $\omega^i = \Sigma g_{ij}\, du^j$]. Nous supposons donc les p_i fonctions connues de $u^1, \ldots, u^n$. Le calcul des γ ne fait intervenir que les composantes de $2T$ et leurs dérivées premières; un calcul classique (1, tome II, Chap. XXV) donne aux équations du mouvement la forme

$$(31) \qquad \frac{dp_j}{dt} = Q_j - \frac{\partial K}{\partial u^j}, \qquad \frac{du^i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_i},$$

où $K = \Sigma p_i p^i - T = T$, puisque les liaisons sont indépendantes du temps, est exprimé en fonction de $u', \ldots, u^n$.

Cherchons quelles Forces correspondent à des mouvements où ces états cinétiques sont réalisés. On a

$$\frac{dp_j}{dt} = \sum \frac{\partial p_j}{\partial u^h}\frac{du^h}{dt} = \sum \frac{\partial K}{\partial p_h}\frac{dp_j}{du^h};$$

$$Q_j = \frac{\partial K}{\partial u_j} + \sum \frac{\partial K}{\partial p_h}\frac{\partial p_j}{\partial u^h} = \frac{\partial K}{\partial u^j} + \sum \frac{\partial K}{\partial p_h}\frac{dp_h}{du^j} + \sum \frac{\partial K}{\partial p_h}\left(\frac{\partial p_j}{\partial u^h} - \frac{\partial p_h}{\partial u^j}\right),$$

en désignant par K la fonction de $u^1, \ldots, u^n$, obtenue en remplaçant dans K les p_i par leurs expressions en $u', \ldots, u^n$, nous trouvons

$$Q_j = \frac{\partial K}{\partial u_j} + \sum \frac{\partial K}{\partial p_h}\left(\frac{\partial p_j}{\partial u^h} - \frac{\partial p_h}{\partial u^j}\right).$$

Un champ riemannien de forces correspond ainsi au champ d'états cinétiques; de plus, *si celui-ci est conservatif*, c'est-à-dire si $\Sigma' p_j\, du^j$ est la différentielle d'une fonction $\theta(u^1, \ldots, u^n)$, *le champ de forces l'est aussi* [6, Livre V, Chap. VIII], soit $\Sigma Q_j du^j = U(u^1, \ldots, u^n)$, le théorème des forces vives donne :

$$(32) \qquad 2T = \Delta\theta = 2(U + h).$$

La notion importante de *Vecteurs parallèles* (*ou plutôt équipollents*) introduite par Levi-Civita en Géométrie riemannienne s'applique tout d'abord à deux vecteurs ayant pour origine deux points infiniment voisins, elle s'étend ensuite à deux points quelconques reliés par une courbe C de l'espace R. Toutefois, pour certains espaces R et pour certaines familles de Vecteurs, le résultat du transport par équipollence peut être indépendant du chemin suivi, et il peut arriver de plus que par tout point de R passe au moins un Vecteur de la famille. Ce cas se présente lorsque le système d'équations linéaires aux différentielles totales

$$(33) \qquad dp_i - \Sigma \Gamma^k_{ir}\, p_k\, du^r = 0,$$

admet des solutions (il n'est pas cependant nécessaire qu'il soit complètement intégrable). Supposons qu'il en soit ainsi, ou, comme nous le dirons, qu'il existe au moins un champ de Vecteurs équipollents entre eux donné par des fonctions $p_1, \ldots, p_n$ de $u^1, \ldots, u^n$. Rappelons d'autre part que pour un mouvement uniforme du point représentatif P sur une géodésique quelconque de l'espace R, les Vecteurs donnant les vitesses de composantes contravariantes $(u^i)'$ se correspondent par équipollence le long de la géodésique correspondante. Le transport par équipollence conservant les produits scalaires et les mesures, on aura

$$\Sigma p_i (u^i)' = \text{constante}, \tag{34}$$

$$\Sigma g^{ij} p_i p_j = \text{constante}. \tag{35}$$

L'équation (34) met en évidence une intégrale première des équations des géodésiques linéaire par rapport aux vitesses paramétriques $(u^i)'$. De plus, puisque les p_i vérifient les équations (33) et que $\Gamma^k_{ir} = \Gamma^k_{ri}$,

$$\frac{\partial p_i}{\partial u^r} = \Sigma \Gamma^k_{ir} p_k = \Sigma \Gamma^k_{ri} p_k = \frac{\partial p_r}{\partial u^i},$$

ce qui montre que $\Sigma p_i \, du^i$ est la différentielle d'une fonction $\theta(u', \ldots, u^n)$: d'après (35) $\Delta\theta$ est une constante. *Un champ de Vecteurs équipollents entre eux donne donc un champ conservatif d'états cinétiques pour lesquels la force vive est constante.* En multipliant les p_i par un même nombre, on peut obtenir que cette constante soit égale à l'unité. Choisissons les variables indépendantes de façon que $u^1 = \theta$ et que de plus $g_{1i} = 0$ pour $i > 1$ (un théorème de Beltrami [6, tome II, p. 506] montre la possibilité d'un tel choix. On a ainsi $g^{11} = 1$, $g^{1i} = 0$ pour $i > 1$, le vecteur dérivant de $\theta = u^1$ a pour composantes covariantes $p_1 = 0$, $p_i = 0$ pour $i > 1$; les équations (33) montrent que tous les symboles Γ^1_{ir} sont nuls; les Γ_{i1r} le sont aussi et l'on a

$$\Gamma_{i1r} = \frac{\partial g_{r1}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u^r} - \frac{\partial g_{ir}}{\partial u^1} = \frac{\partial g_{ir}}{\partial u^1} = 0.$$

Par suite $ds^2 = (du^1)^2 + ds_1^2$; *dans l'élément linéaire ds_1^2 figurent seulement $u^2, \ldots, u^n$ et leurs différentielles.*

On vérifie facilement ensuite que l'existence de l solutions distinctes du système (33) permet de ramener ds^2 à la forme

$$ds^2 = (du^1)^2 + \ldots + (du^l)^2 + ds_l^2, \tag{36}$$

ds_l^2 ne dépend que de $u^{l+1}, \ldots, u^r$. Si $l = n$, R est euclidien; il en est de même si $l = n - 1$, car ds^2_{n-1} ne dépendant que de u_n, un changement de cette variable permet d'avoir $g_{nn} = 1$. Si ds^2 a la forme (36) avec $l < n - 1$, on peut dire que *R est parfaitement euclidien.*

De tels espaces avaient déjà été étudiés en Géométrie [2, p. 53]. En Mécanique, des exemples simples sont donnés par les systèmes matériels S assujettis à des liaisons telles que le centre de gravité de S se meuve librement soit dans tout l'espace où se trouve S, soit sur une surface développable, soit enfin sur une courbe.

10. Emploi des caractéristiques de Volterra en hydrodynamique. — Des simplifications notables se présentent dans les questions étudiées plus haut (nos 1 à 4) quand le système se réduit à un seul point matériel M de masse égale à l'unité et qui n'est assujetti à aucune liaison, cas particulier dont nous allons voir l'intérêt. La représentation paramétrique de l'espace euclidien ordinaire où nous considérons le point M, faite au moyen des variables u^1, u^2, u^3, est toujours indépendante du temps.

Puisque $m = 1$, les vecteurs correspondants v et mv de première et de seconde espèces peuvent être regardés comme coïncidants. Comme il n'y a pas de liaison, deux vecteurs équivalents d'origine M sont nécessairement confondus et tout vecteur attaché à M est régulier. La régularisation du no 2 est ainsi toute faite et la dérivée et la différentielle absolues d'un vecteur coïncident avec la dérivée et la différentielle ordinaires.

Un champ d'états cinétiques (no 9) est maintenant un champ de vecteurs vitesse dans l'espace habituel. Un tel champ — comme l'avait observé Darboux — est en quelque sorte réalisé par le mouvement d'un fluide, le point M étant maintenant imaginé. Ce rapprochement rend naturel l'emploi des équations de Lagrange ou des caractéristiques de Volterra en Hydrodynamique.

Montrons à ce propos comment les formules du no 2 donnent rapidement des formules classiques relatives aux coordonnées curvilignes orthogonales [13, chap. I].

Les expressions ω^1, ω^2, ω^3 sont choisies de façon que les caractéristiques correspondantes de Volterra donnent les projections d'un vecteur sur les tangentes aux trois lignes coordonnées; ces tangentes formant un trièdre trirectangle, les composantes covariantes X_i et contravariantes X^i sont identiques. On a

$$\omega^1 = \frac{du^1}{h_1}, \quad \omega^2 = \frac{du^2}{h_2}, \quad \omega^3 = \frac{du^3}{h_3},$$

(h_1, h_2, h_3 sont fonctions de u^1, u^2, u^3) et $ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2$.

Les symboles de Lie associés aux expressions ω^2 sont évidemment $A_i f = h_i \dfrac{\partial f}{\partial u_i}$. Leurs crochets donnent

$$c_{ijj} = \frac{A_i h_j}{h_j}, \quad c_{iji} = -\frac{A_j h_i}{h_i}, \quad c_{ijs} = 0 \qquad \text{pour} \quad s \neq i \quad \text{et} \quad s \neq j,$$

On a donc (6''), pour $j = 1$

$$\gamma_{211} = \frac{A_1 h_2}{h_2}, \quad \gamma_{313} = \frac{A_1 h_3}{h_3}, \quad \gamma_{113} = -\frac{A_3 h_1}{h_1}, \quad \gamma_{112} = -\frac{A_2 h_1}{h_1},$$

toutes les autres expressions γ_{hli} étant nulles. La formule (8) donne comme première composante (celle qui correspond à la tangente MT_1 à la ligne $u^2 =$ const., $u^3 =$ const., tangente orientée dans le sens u^1 croissant) de la dérivée absolue par rapport à τ du vecteur v dont nous désignons les composantes par $X^i = X_i = p^i$

$$\left(\frac{Dv}{D\tau}\right)^1 = \left(\frac{Dv}{D\tau}\right)_1 = \frac{dp^1}{d\tau} + \frac{A_1 h_2}{h_2} p^2 \frac{\omega^2}{d\tau} + \frac{A_1 h_3}{h_3} p^3 \frac{\omega^3}{d\tau} - \frac{A_3 h_1}{h_1} p^3 \frac{\omega^1}{d\tau} - \frac{A_2 h_1}{h_1} p^2 \frac{\omega^1}{d\tau},$$

les autres composantes $\left(\dfrac{Dv}{D\tau}\right)_i$ se déduisent de celle-là par permutations circulaires des indices 1, 2, 3.

Si v est la vitesse en M à l'instant t d'un fluide dont le mouvement peut n'être pas permanent, p^1, p^2, p^3 sont fonctions de u_1, u_2, u_3 et du temps t; elles deviennent fonctions de τ si l'on fait décrire à M une courbe donnée par les expressions de u^1, u^2, u^3 en fonction de τ; nous supposons d'abord τ indépendant de t. Alors

$$\frac{dp^i}{d\tau} = A_1 p^i \frac{\omega^1}{d\tau} + A_2 p^i \frac{\omega^2}{d\tau} + A_3 p^i \frac{\omega^3}{d\tau}. \tag{27}$$

On a ainsi les projections $\left(\frac{Dv}{D\tau}\right)_i$ sur les tangentes MT_i aux lignes coordonnées du vecteur dérivée de v par rapport à τ

$$\left(\frac{Dv}{D\tau}\right)_i = a_{i1}\frac{\omega^1}{d\tau} + a_{i2}\frac{\omega^2}{d\tau} + a_{i3}\frac{\omega^3}{d\tau}.$$

$$a_{11} = A_1 p^1 - \frac{A_2 h_1}{h_1} p^2 - \frac{A_3 h_1}{h_1} p^3, \qquad a_{12} = A_2 p^1 + \frac{A_1 h_2}{h_2} p^2, \qquad a_{13} = A_3 p^1 + \frac{A_1 h_3}{h_3} p^3,$$

les autres a_{ij} se déduisent des précédents par permutations circulaires des indices 1, 2, 3. Remarquons que a_{ij} est la projection sur MT_i du vecteur dérivée de v suivant la direction MT_j, alors $\frac{\omega^j}{d\tau} = 1$, tous les autres ω étant nuls.

Les neuf expressions a_{ij} sont les composantes d'un tenseur à deux indices. Par contraction, il donne la divergence de v; on peut le considérer comme la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique, ce dernier est le tourbillon.

Enfin pour le calcul de l'accélération, dérivée du vecteur v par rapport à t, on prend $\tau = t$, mais comme p^1, p^2, p^3 sont dans le cas général d'un mouvement non permanent fonctions de u^1, u^2, u^3, t, on ajoute aux seconds membres des formules (37) les termes $\frac{\partial p^i}{\partial t}$ et les projections cherchées sont

$$j_i = \frac{\partial p^i}{\partial t} + a_{i1} p^1 + a_{i2} p^2 + a_{i3} p^3.$$

(Manuscrit reçu le 1er mars 1947.)