ERNEST VESSIOT

Sur la réductibilité des équations aux dérivées partielles du 1er ordre, à une inconnue, qui ne la contiennent pas et sont linéaires et homogènes par rapport à ses dérivées

Bulletin de la S. M. F., tome 75 (1947), p. 9-26

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1947__75__9_0>

SUR LA RÉDUCTIBILITÉ DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU 1er ORDRE, A UNE INCONNUE, QUI NE LA CONTIENNENT PAS ET SONT LINÉAIRES ET HOMOGÈNES PAR RAPPORT A SES DÉRIVÉES;

PAR M. ERNEST VESSIOT.

I. — Préliminaires.

1. Je montre, dans le présent travail, comment la théorie générale de la réductibilité que j'ai exposée récemment (¹) peut s'appliquer aux équations de la forme

$$(1)\qquad \frac{\partial z}{\partial t} + \theta_\alpha(t, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

que l'on peut écrire, plus brièvement,

$$(2)\qquad \theta z = 0,$$

en introduisant la transformation infinitésimale

$$(3)\qquad \theta f = \frac{\partial f}{\partial t} + \theta_\alpha(t, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

dont les invariants sont les solutions de (1).

Les diverses équations (1) relatives à une valeur de n donnée constitueront donc les systèmes $\mathfrak{S}$ de la théorie générale. Une *solution complète* d'un tel système $\mathfrak{S}$ sera constituée par n solutions particulières indépendantes quelconques, $z_1, \ldots, z_n$, de son équation (1). Ce sera donc un *système fondamental* quelconque de solutions de cette équation. Toute solution particulière du système $\mathfrak{S}$ considéré sera de la forme

$$(4)\qquad z = \varphi(z_1, \ldots, z_n).$$

On passera donc d'une solution complète $(z_1, \ldots, z_n)$ de $\mathfrak{S}$ à toute autre, $(z'_1, \ldots, z'_n)$ par une transformation ponctuelle

$$(5)\qquad z'_\alpha = \varphi_\alpha(z_1, \ldots, z_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

On appellera solution complète *principale* relative à une valeur particulière quelconque t_0 de t celle qui est définie par les conditions initiales

$$(6)\qquad z_\alpha = x_\alpha \quad \text{pour} \quad t = t_0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

(¹) *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, (3), 63, 1946.

Pour cette solution complète principale, la fonction φ de la formule (4) est donnée par la condition que z se réduira à $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ pour $t = t_0$.

Le système S, *associé* à $\mathfrak{S}$, de la théorie générale sera ici, avec la notation (3),

$$(7) \qquad \Theta z_\alpha = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

En résolvant ces équations par rapport aux θ_α, on obtient le système $\mathfrak{S}$ qui admet une solution complète $(z_1, \ldots, z_n)$ quelconque donnée. On trouve ainsi la formule

$$(8) \qquad \theta f = \frac{\partial(f, z_1, \ldots, z_n)}{\partial(t, x_1, \ldots, x_n)} : \frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

2. Pour les *transformations auxiliaires* $\mathfrak{T}$ de la théorie générale nous pourrons prendre les transformations ponctuelles de l'espace $(t, x_1, \ldots, x_n)$ qui laissent invariante la coordonnée t, et qui, par suite, forment un groupe ayant pour équations générales

$$(9) \qquad t' = t, \quad x'_\alpha = f_\alpha(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

où les f_α sont des fonctions arbitraires de leurs arguments.

Θf devient, en effet, par une telle transformation (9),

$$(10) \qquad \theta f = \frac{\partial f}{\partial t'} + \theta f_\alpha \frac{\partial f}{\partial x'_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

où $t, x_1, \ldots, x_n$ doivent être remplacés dans les Θf_α par leurs expressions en t', $x'_1, \ldots, x'_n$ tirées des équations (9). Et si l'on pose

$$(11) \qquad z_\alpha = Z_\alpha(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad z'_\alpha = Z'_\alpha(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

les Z_α et les Z'_α étant deux systèmes quelconques de n fonctions de $t, x_1, \ldots, x_n$ indépendantes relativement à $x_1, \ldots, x_n$, il existe une transformation (9), et une seule, qui change z_α en z'_α (pour $\alpha = 1, 2, \ldots, n$), à savoir celle qui est définie par les équations

$$(12) \qquad t' = t, \quad Z'_\alpha(t', x'_1, \ldots, x'_n) = Z_\alpha(t, x_1 \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

La famille ($\mathfrak{S}$) considérée constitue donc une *classe* vis-à-vis du groupe (9) et celui-ci opère *suivant un mode simplement transitif* sur le champ des solutions complètes de tous les systèmes de cette classe. Ce qui est conforme aux hypothèses fondamentales de la théorie générale.

3. Soit maintenant $\mathfrak{S}$ un quelconque des systèmes de la classe considérée, et soit

$$(13) \qquad u_\alpha = U_\alpha(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

les éléments de l'une quelconque de ses solutions complètes, $(u_1, \ldots, u_n)$, arbitrairement choisie. Chacune des *auto-transformations* de $\mathfrak{S}$ sera déterminée par la condition de changer $(u_1, \ldots, u_n)$ en une solution complète de $\mathfrak{S}$, et les éléments de celle-ci seront de la forme

$$(14)\qquad u'_\alpha = \varphi_\alpha(u_1, \ldots, u_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions arbitraires (indépendantes) de leurs arguments. Elle sera donc définie, en application des formules (12), par les équations

$$(15)\qquad t' = t, \qquad \varphi_\alpha[U_1(t', x'_1, \ldots, x'_n), \ldots, U_n(t', x'_1, \ldots, x'_n)] = U_\alpha(t, x_1, \ldots, x_n)$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

De plus, cette auto-transformation, changeant u_α en $u'_\alpha = \varphi_\alpha(u_1, \ldots, u_n)$, pour $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, changera toute solution z de $\mathfrak{S}$,

$$(16)\qquad z = \psi(u_1, \ldots, u_n).$$

en la solution z' donnée par la formule ([2])

$$(16\ bis)\qquad z' = \psi[\varphi_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, \varphi_n(u_1, \ldots, u_n)].$$

De sorte que le système de ces deux équations (16) et (16 *bis*) fournit, pour chaque choix de $(u_1, \ldots, u_n)$, par l'intermédiaire de la fonction arbitraire ψ, [définie par (16) si l'on se donne z], une représentation analytique du groupe des *permutations* que les auto-transformations de $\mathfrak{S}$ effectuent sur les solutions de $\mathfrak{S}$, considérées comme des objets distincts.

Et le groupe des permutations qu'elles effectuent sur les solutions complètes de $\mathfrak{S}$ sera représenté, de même, analytiquement, par le double système d'équations

$$(17)\qquad z_\alpha = \psi_\alpha(u_1, \ldots, u_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$
$$(17\ bis)\qquad z'_\alpha = \psi_\alpha[\varphi_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, \varphi_n(u_1, \ldots, u_n)] \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

qui fait passer de la solution complète $(z_1, \ldots, z_n)$ à sa transformée $(z'_1, \ldots, z'_n)$. Chaque auto-transformation est définie par un choix des fonctions φ_α; le système (17) définit les ψ_α quand $(z_1, \ldots, z_n)$ est donnée; et le système (17 *bis*) donne alors $(z'_1, \ldots, z'_n)$.

4. Pour ***réduit*** de la classe ($\mathfrak{S}$) considérée nous prendrons le système $\mathfrak{S}_0$ de la classe pour lequel $x_1, \ldots, x_n$ sont des solutions : nous désignerons par $\mathcal{F}_0$ la solution complète $(x_1, \ldots, x_n)$ dont elles sont les éléments. L'équation de ce réduit $\mathfrak{S}_0$ sera $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, ou $\Theta_0 z = 0$ avec la notation $\Theta_0 f = \frac{\partial f}{\partial t}$.

L'une quelconque, $\mathcal{R}$, des ***transformations réductrices*** d'un système $\mathfrak{S}$ quelconque de la classe sera définie par la donnée de la solution complète $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{S}$ que cette transformation $\mathcal{R}$ change en $\mathcal{F}_0$. Si l'on désigne par

$$(18)\qquad z_\alpha = Z_\alpha(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

([2]) Soit, en effet, θ l'auto-transformation considérée : on aura

$$u'_\alpha = \theta(u_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$
$$z' = \theta(z),$$

et, par conséquent,

$$z' = \theta[\psi(u_1, \ldots, u_n)] = \psi[\theta(u_1), \ldots, \theta(u_n)] = \psi(u'_1, \ldots, u'_n).$$

les éléments de cette solution complète $\mathcal{F}$, la formule (12) donnera pour $\mathcal{R}$ les équations (associées à $t' = t$),

$$x'_\alpha = Z_\alpha(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

$\mathcal{F}$, c'est-à-dire, avec les notations ci-dessus ($Z_1, \ldots, Z_n$), sera dite, la *solution complète génératrice* de $\mathcal{R}$; ou plus brièvement, sa *génératrice*.

Remarquons que, pour une valeur initiale t_0 de t la transformation (19) se réduit à la transformation initiale

$$x'_\alpha = \zeta_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

si les Z_α sont définies par les conditions initiales (qui pourront être arbitraires),

$$Z_\alpha = \zeta_\alpha \quad \text{pour} \quad t = t_0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{21}$$

Elle se réduira, en particulier, à la transformation identique

$$x'_\alpha = x_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

si ($Z_1, \ldots, Z_n$) est la solution complète *principale*, relative à $t = t_0$.

Remarquons encore que θf se change en $\theta_0 f$ par toute transformation (19) dans laquelle ($Z_1, \ldots, Z_n$) est solution complète de $\mathcal{S}$, et que, réciproquement, cette propriété suffit à caractériser les transformations réductrices de $\mathcal{S}$.

5. Considérons maintenant, en même temps qu'un système $\mathcal{S}$ de la classe, son associé S, et un sous-système Σ de celui-ci.

Σ sera, comme S, un système d'équations aux dérivées partielles, dans lequel les fonctions inconnues seront $z_1, \ldots, z_n$, et les variables indépendantes seront t, $x_1, \ldots, x_n$. On pourra le supposer constitué par les équations (7) de S, et par une ou plusieurs équations complémentaires, indépendantes entre elles, dont nous désignerons l'ensemble par Ω. Le sous-système Σ, mis sous cette forme, sera désigné par (S, Ω). Nous supposerons qu'on aura fait disparaître de Ω, au moyen des équations (7) et de celles qu'on en peut déduire par dérivations successives, toutes les dérivées partielles des z_α qui comporteraient une ou plusieurs dérivations par rapport à t. Ω sera ainsi un système d'équations aux dérivées partielles, relatif aux inconnues $z_1, \ldots, z_n$ et aux variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, dans lequel t ne figurera que comme un paramètre. Mais les solutions de Ω en $z_1, \ldots, z_n$, seront des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$ et t.

Celles d'entre elles qui seront des solutions de Σ satisferont à S, et, par conséquent, seront invariantes par θf. Il en résulte qu'elles satisferont au système $\theta\Omega$ obtenu en appliquant à Ω la transformation infinitésimale θf. Ce qui se fera conformément à la théorie des invariants différentiels de Sophus Lie, en *prolongeant* θf relativement aux dérivées partielles des z_α, traitées comme des variables non transformées.

Si $\theta\Omega$ est une conséquence de Ω (au sens algébrique du mot), Ω sera invariant vis-à-vis de θf. Nous dirons alors que (S, Ω) est, pour Σ, une forme *normale*, et que Ω en est le *noyau*.

Si $\theta\Omega$ n'est pas une conséquence algébrique de Ω, on obtiendra un système Σ_1 ayant les mêmes solutions que Σ en adjoignant à Ω, dans celui-ci, le système $\theta\Omega$.

Et ce système Σ_1, *différentiellement équivalent* à Σ, se mettra sous la forme (S, Ω_1), Ω_1 étant un ensemble d'équations, indépendantes entre elles, *algébriquement* équivalent à l'ensemble de Ω et $\Theta\Omega$.

On pourra alors raisonner sur Σ_1 comme on l'a fait sur Σ, et passer de Σ_1 à un système $\Sigma_2 = (S, \Omega_2)$ (qui lui sera différentiellement équivalent), si Ω_1 n'admet pas Θf. Et ainsi de suite.

Soit Ω_p le $p^{\text{ième}}$ des systèmes $\Omega_1, \Omega_2, \ldots,$ que l'on obtiendra ainsi, de proche en proche, à partir de Ω. Il y aura une valeur de p pour laquelle il admettra Θf, ce qui arrêtera les opérations. Car Ω_p est un système différentiel, du même ordre que Ω, qui comprend au moins $p+1$ équations indépendantes, et toute solution de Σ est aussi solution de Ω_p. Si donc p pouvait croître indéfiniment, il y aurait des fonctions $z_1, \ldots, z_n$ de $t, x_1, \ldots, x_n$ qui satisferaient à une infinité d'équations aux dérivées partielles indépendantes, d'un même ordre différentiel, ce qui est impossible.

Soit donc $p = K$ la valeur de p pour laquelle Ω_p admet Θf. Le système (S, Ω_K), étant différentiellement équivalent à Σ, pourra être considéré comme une *forme normale* de Σ, et il importe de remarquer que si (S, Ω) est rationnel, il en sera de même pour cette forme normale de Σ. Rien n'empêche donc de supposer que, dans la suite, la forme (S, Ω) sous laquelle sera donné tout sous-système Σ de S soit d'emblée, pour lui, une forme normale. C'est ce que nous conviendrons de faire.

6. Appliquons maintenant à S, associé du système $\mathfrak{S}$ de la classe considéré, et à son sous-système Σ, donné par sa forme normale (S, Ω), une transformation réductrice $\mathcal{R}$ quelconque de $\mathfrak{S}$, représentée par des équations de la forme (19), dans laquelle $(Z_1, \ldots, Z_n)$ est une solution complète quelconque de $\mathfrak{S}$. Cette transformation change $\mathfrak{S}$ en le réduit $\mathfrak{S}_0$ de la classe, ayant pour équation l'équation, donnée au n° 4,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Theta_0 z = 0 \qquad \text{avec} \quad \Theta_0 f = \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{23}$$

Elle changera donc S en le système

$$\frac{\partial z_\alpha}{\partial t} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Theta_0 z_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{24}$$

qui sera *le réduit* S_0 de la classe (S). Soit ω le réduit qu'elle donnera pour Ω : il en résultera pour Σ le réduit $\sigma = (S, \omega)$, qui sera sous forme normale, car $\mathcal{R}$ changeant Θf en $\Theta_0 f$, ω admettra $\Theta_0 f$, comme Ω admet Θf par hypothèse. Or le prolongement de $\Theta_0 f = \frac{\partial f}{\partial t}$ à considérer se réduira au terme $\frac{\partial f}{\partial t}$: de sorte que dire que ω admet $\Theta_0 f$, c'est dire que ω ne dépend pas, en fait, du paramètre t, et qu'il est, par conséquent, équivalent au système ω_0 qu'on obtiendrait en donnant à t, dans ω, une valeur numérique t_0, arbitrairement choisie.

Mais t n'intervenant dans le calcul de $\omega = \mathcal{R}\Omega$ que comme un paramètre, le système ω_0 ainsi obtenu ne différera pas du système $\mathcal{R}_0\Omega_0$ résultant de l'application de la transformation $\mathcal{R}_0$, déduite de $\mathcal{R}$ en y faisant $t = t_0$, au système Ω_0, obtenu en faisant $t = t_0$ dans Ω. Quant à $\mathcal{R}_0$, elle sera donnée, d'après le n° 4, par les formules (20), où les ζ_α sont les expressions initiales, pour $t = t_0$, des éléments Z_α de $(Z_1, \ldots, Z_n)$, solution complète de $\mathfrak{S}$ génératrice de $\mathcal{R}$. Si, en particulier, cette génératrice est la solution complète principale de $\mathfrak{S}$, relative à $t = t_0$, $\mathcal{R}_0$ est la transformation identique (22), et le réduit ω de Ω, relatif à $\mathcal{R}$ s'obtient simplement en faisant $t = t_0$ dans Ω et y changeant les lettres x_α en x'_α. Si l'on fait abstraction de ce changement de notations pour les variables indépendantes, on peut dire que l'on a alors $\omega = \Omega_0$.

7. Considérons maintenant les *systèmes adjoints* du sous-système Σ de S envisagé, tels qu'ils ont été définis dans la théorie générale. Les solutions de l'un quelconque d'entre eux, Δ, sont les génératrices $(Z_1, \ldots, Z_n)$ des transformations réductrices $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{S}$ qui changent Σ en l'un de ses réduits σ; et il est déterminé par la donnée de l'une quelconque de ces génératrices.

Soit Δ_0 celui de ces adjoints qui a pour solution la solution complète principale de $\mathfrak{S}$ relative à une valeur numérique t_0 de t quelconque. Nous savons d'après le n° 6 que le réduit ω de Ω donné par la transformation $\mathcal{R}$ qui a cette solution principale pour génératrice s'obtient en faisant $t = t_0$ dans Ω. Soit Ω_0 le système ainsi obtenu. Nous obtiendrons Δ_0 en exprimant que la transformation (19) change Ω en Ω_0, celui-ci étant supposé écrit avec les lettres $x'_1, \ldots, x'_n$, au lieu des lettres $x_1, \ldots, x_n$. Il reviendra au même d'exprimer que l'on passe de Ω_0, ainsi écrit, à Ω par le changement de variables indépendantes (19), les fonctions inconnues $z_1, \ldots, z_n$ n'étant pas changées. Le calcul, qui relève de la théorie classique des changements de variables, en Calcul différentiel, donnera un système d'équations aux dérivées partielles, relatif aux fonctions inconnues $Z_1, \ldots, Z_n$, et aux variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ où t figurera seulement comme paramètre; et il suffira de lui adjoindre les équations $\Theta Z_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$, pour avoir Δ_0. Il est essentiel de remarquer que ce calcul ne fait intervenir que des opérations rationnelles. Si donc Σ et t_0 sont rationnels, il en est de même pour l'adjoint Δ_0 de Σ.

8. L'analyse des numéros précédents prouve que, pour la classe ($\mathfrak{S}$) de systèmes différentiels considérée, les solutions complètes principales, relatives à des valeurs rationnelles t_0 de t, sont, pour tout système $\mathfrak{S}$, rationnel, de la classe, au sens de la théorie générale, des *solutions complètes distinguées.*

Il en sera de même, plus généralement, de toute solution complète $\mathcal{F}$ d'un système $\mathfrak{S}$ de la classe dont les éléments se réduiront, pour une valeur t_0 de t rationnelle, à des fonctions $\zeta_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$, appartenant aussi au domaine de rationalité $\mathcal{D}$ considéré. En effet, la transformation $\mathcal{R}_0$ à laquelle se réduira, pour $t = t_0$, la transformation réductrice $\mathcal{R}$ ayant cette solution complète $\mathcal{F}$ pour génératrice aura des équations (20) rationnelles dans $\mathcal{D}$; et il en sera, par suite, de même pour le réduit ω de Ω, relatif à $\mathcal{R}$, puisqu'on peut l'obtenir, d'après le n° 6, en effectuant cette transformation $\mathcal{R}_0$ dans Ω_0, lequel, étant déduit de Ω en y faisant $t = t_0$, sera rationnel dans $\mathcal{D}$ si $\Sigma = (S, \Omega)$ appartient à ce domaine. Or, pour obtenir l'adjoint Δ de Σ relatif à $\mathcal{F}$, il ne restera plus qu'à exprimer que l'on obtient ce réduit ω en appliquant à Ω la transformation réductrice générale (19) : et un raisonnement tout pareil à celui du n° 7 prouvera que ce calcul est rationnel. L'adjoint Δ obtenu sera donc bien rationnel dans $\mathcal{D}$, en même temps que Σ, conformément à la définition des solutions complètes distinguées.

II. — Groupe spécifique et groupes de rationalité.

9. Les équations (1) relatives à une même valeur de n, arbitrairement donnée, constituent une famille ($\mathfrak{S}$) de systèmes différentiels $\mathfrak{S}$ à laquelle notre théorie générale de la réductibilité est entièrement applicable. Nous avons montré, en effet, dans les numéros précédents, qu'elle satisfait à toutes les hypothèses sur lesquelles cette théorie est fondée.

C'est ainsi que nous avons vu d'abord, au n° 1, que chacun de ces systèmes $\mathfrak{S}$ possède des *solutions complètes*, qui sont tous les systèmes de n solutions particulières de l'équation (1) indépendantes par rapport à $x_1, \ldots, x_n$; et que tout système de n fonctions de t, $x_1, \ldots, x_n$, indépendantes par rapport à $x_1, \ldots, x_n$, est une solution complète de l'un de ces systèmes $\mathfrak{S}$ et d'un seul.

Nous avons montré, de plus, comment on déduit de l'équation (1) de tout système $\mathfrak{S}$ le système S, dit *associé* à $\mathfrak{S}$, dont les solutions sont les diverses solutions complètes de $\mathfrak{S}$. Conformément à la théorie générale, l'équation (1) sera dite *réductible*, dans un domaine de rationalité $\mathcal{D}$ (où elle est rationnelle), si l'un des sous-systèmes Σ de cet associé S est rationnel dans $\mathcal{D}$.

Passant ensuite à la seconde hypothèse fondamentale sur laquelle repose la théorie générale, nous avons vu, au n° 2, que la famille ($\mathfrak{S}$) en question forme une *classe* par rapport au groupe des transformations ponctuelles de l'espace (t, $x_1, \ldots, x_n$) pour lesquelles t est un invariant (*transformations auxiliaires* de la théorie générale); et nous avons constaté que ce groupe est *simplement transitif* vis-à-vis de l'ensemble de toutes les solutions complètes de tous les systèmes $\mathfrak{S}$ de cette classe ($\mathfrak{S}$).

De là résultent, comme dans la théorie générale, pour chaque système de la classe, c'est-à-dire ici pour chaque équation (1), l'existence et les propriétés de ses *auto-transformations*, ainsi que de ses *transformations réductrices* (relatives au *réduit* choisi dans la classe) et des solutions complètes *génératrices* de celles-ci. Nous en avons donné, aux n^{os} 3 et 4, les équations générales.

Les hypothèses fondamentales sur lesquelles repose notre théorie générale de la réductibilité se trouvant ainsi vérifiées pour les familles ($\mathfrak{S}$) de systèmes $\mathfrak{S}$ considérées, toute la partie de cette théorie qui en découle immédiatement, c'est-à-dire celle qui comprend l'étude des sous-systèmes des systèmes associés et de leurs *réduits*, ainsi que la définition et les propriétés de leurs *adjoints*, est valable pour elles *ipso facto*.

Nous l'avons complétée, aux n^{os} 5 et 6, en établissant pour les sous-systèmes Σ des associés S de ces systèmes $\mathfrak{S}$, des propriétés spéciales, d'où nous avons déduit, aux n^{os} 7 et 8, que chacun de ces systèmes $\mathfrak{S}$ possède, dans tout domaine de rationalité $\mathcal{D}$ où son équation (1) est rationnelle, des solutions complètes *distinguées*. Parmi celles-ci figurent, en particulier, les solutions complètes *principales* de (1) relatives à des valeurs particulières de t rationnelles dans $\mathcal{D}$.

10. L'existence de ces solutions distinguées permet d'appliquer aux équations (1) les conclusions finales de la théorie générale relatives à la manière de caractériser le mode spécial de réductibilité propre à chacun des systèmes réductibles d'une même classe.

On associera donc, à cet effet, à chaque équation (1) un certain groupe γ de transformations qui sera dit son *groupe spécifique*. Ce sera le groupe formé par toutes celles des *transformations auxiliaires*, c'est-à-dire des transformations ponctuelles en $t, x_1, \ldots, x_n$ pour lesquelles t est un invariant, qui laissent invariants le système S *associé* à cette équation et tous les sous-systèmes Σ de ce système S qui sont, comme lui, rationnels dans le domaine de rationalité $\mathcal{D}$ considéré. Toute transformation de γ changera chacune des solutions complètes de (1) en une autre qui lui sera dite *conjuguée*, de sorte que ces solutions complètes se répartiront en *familles de solutions complètes conjuguées deux à deux*, et qu'il en sera de même pour les solutions de tout sous-système Σ de S rationnel dans $\mathcal{D}$.

Une solution complète de (1) sera dite *primitive* s'il existe un sous-système Σ de S, rationnel dans $\mathcal{D}$, dont les solutions soient cette solution complète et ses conjuguées. Telles sont les solutions complètes *distinguées* de (1). Les conjuguées d'une solution complète primitive sont, elles aussi, primitives. Les solutions complètes primitives se répartissent donc en familles de solutions complètes deux à deux conjuguées.

Les solutions complètes de l'une quelconque de ces familles seront données par un sous-système π de S, rationnel dans $\mathcal{D}$. Celui-ci sera un *système automorphe* ayant le groupe spécifique γ pour *groupe d'automorphie*, puisque ses solutions se déduiront les unes des autres par les transformations de ce groupe.

Chacun de ces systèmes π pourra être pris comme *système résolvant* de l'équation (1) et les opérations à effectuer pour en obtenir une solution seront déterminées par la structure de son groupe d'automorphie γ. C'est donc, en définitive, *la structure du groupe spécifique* de chaque équation (1) qui caractérise son mode spécial de réductibilité.

11. Comme dans la théorie générale et par les mêmes raisonnements on peut déduire des résultats précédents la généralisation du théorème classique sur lequel Galois avait fondé sa théorie des équations algébriques.

Pour se placer au point de vue de Galois on considérera, au lieu des sous-systèmes Σ de l'associé S de l'équation (1) donnée, les *fonctions rationnelles des solutions complètes* de cette équation. Voici ce que nous entendons par ce terme : soient $z_1, \ldots, z_n$ des fonctions indéterminées des variables indépendantes $t, x_1, \ldots, x_n$, et désignons par $R(z_1, \ldots, z_n)$ une fonction rationnelle (au sens élémentaire du mot) de $z_1, \ldots, z_n$ et de leurs dérivées partielles (jusqu'à un ordre quelconque), dont les coefficients seront supposés appartenir au domaine de rationalité $\mathcal{D}$ donné. Soit, d'autre part, $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une solution complète quelconque de l'équation (1). Nous dirons que $R(u_1, \ldots, u_n)$ est une fonction rationnelle de $\mathcal{F}$.

Nous dirons, de plus que $R(\mathcal{F})$ *admet* une auto-transformation θ de (1) si l'on a identiquement $R(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}'$ étant la transformée de $\mathcal{F}$ par θ, c'est-à-dire si $R(\mathcal{F}')$ est la même fonction de $t, x_1, \ldots, x_n$ que $R(\mathcal{F})$.

Cela posé, voici l'énoncé de la généralisation du théorème fondamental de Galois que nous avons annoncée :

Pour qu'une fonction rationnelle d'une solution complète $\mathcal{F}$ *d'une équation* (1) *soit rationnelle dans un domaine de rationalité* $\mathcal{O}$ *donné, il faut qu'elle admette toutes les transformations du groupe spécifique de cette équation relatif à* $\mathcal{O}$. *Cela suffit si* $\mathcal{F}$ *est une solution complète primitive de* (1).

Désignons, en effet, par $\mathfrak{Z}$ le système des fonctions indéterminées $z_1, \ldots, z_n$, et par $R(\mathfrak{Z})$ la fonction rationnelle considérée; et posons $R(\mathcal{F}) = \rho$. Si ρ est rationnelle dans $\mathcal{O}$, il en est de même pour l'équation $R(\mathfrak{Z}) = \rho$, et celle-ci, ayant pour solution $\mathcal{F}$, aura aussi pour solution toute conjuguée $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$. On aura donc $R(\mathcal{F}') = \rho$ et, par suite, $R(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F})$: ce qui est la première partie du théorème.

Réciproquement, si $R(\mathcal{F})$ admet toutes les transformations du groupe spécifique de (1), l'équation $R(\mathfrak{Z}) = \rho$ admettra pour solutions $\mathcal{F}$ et ses conjuguées, et sera dès lors, si $\mathcal{F}$ est primitive, une conséquence du sous-système π de S dont les solutions sont $\mathcal{F}$ et ses conjuguées : lequel sera rationnel dans $\mathcal{O}$. D'où il résulte que ρ, c'est-à-dire $R(\mathcal{F})$ sera elle-même rationnelle dans $\mathcal{O}$. Ce qui démontre la seconde partie de notre théorème.

12. Soit maintenant Γ le groupe des *permutations* que les transformations du groupe spécifique γ d'une équation (1) effectuent sur l'ensemble des solutions de cette équation, considérées comme des objets distincts. Comme il n'y a qu'une auto-transformation de (1) qui change une de ses solutions complètes, $\mathcal{F}$, donnée en une autre, $\mathcal{F}'$ donnée également, chacune des permutations de Γ ne sera produite que par une des transformations de γ. Il sera donc loisible de remplacer, dans l'énoncé du théorème fondamental du numéro précédent, auquel nous donnerons le nom de *Théorème de Galois*, le groupe spécifique γ par ce groupe Γ, que nous appellerons le *groupe de Galois* de l'équation. Remarquons que, d'après ce qui précède, Γ est holoédriquement isomorphe à γ; de sorte que la structure du groupe de Galois d'une équation (1) caractérise son mode de réductibilité aussi bien que celle de son groupe spécifique.

Ce qui vient d'être dit du groupe de Galois, relativement à son introduction dans l'énoncé du théorème de Galois aussi bien qu'en ce qui concerne le rôle de sa structure, s'applique, du reste, textuellement au groupe formé par les permutations que les transformations du groupe spécifique effectuent sur l'ensemble des solutions complètes de l'équation (1). Nous lui donnerons le nom de *groupe de réductibilité* de l'équation.

13. Les couples de formules (16), (16 *bis*) et (17), (17 *bis*) du n° 3, qui définissent les permutations effectuées par une auto-transformation de l'équation (1) dans l'ensemble des solutions de cette équation et dans l'ensemble de ses solutions complètes, donnent une représentation analytique du groupe de Galois et du groupe de réductibilité de cette équation respectivement. Les fonctions

$$u_\alpha = U_\alpha(t, x_1, \ldots, x_n)$$

étant, par hypothèse, les éléments d'une solution complète, arbitrairement choisie, de l'équation, il n'y aura qu'à supposer que $[\varphi_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, \varphi_n(u_1, \ldots, u_n)]$ est l'une quelconque des conjuguées de cette solution complète particulière. Je dis que, s'il en est ainsi, les équations

$$z'_\alpha = \varphi_\alpha(z_1, \ldots, z_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{25}$$

seront les équations générales d'un groupe $\mathcal{G}$, holoédriquement isomorphe au groupe spécifique γ.

Par hypothèse, en effet, à chaque transformation (25) de l'ensemble considéré correspondra une transformation θ, et une seule, du groupe spécifique γ, telle que l'on ait

$$\varphi_\alpha(u_1, \ldots, u_n) = \theta(u_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{26}$$

Pour une seconde transformation du même ensemble,

$$z'_\alpha = \varphi'_\alpha(z_1, \ldots, z_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{27}$$

on aura de même

$$\varphi'_\alpha(u_1, \ldots, u_n) = \theta'(u_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{28}$$

θ' étant une seconde transformation de γ.

Cela posé, appliquons cette transformation θ' aux deux membres de chacune des équations (26). Il viendra dans le premier membre, en tenant compte de (28),

$$\theta'[\varphi_\alpha(u_1, \ldots, u_n)] = \varphi_\alpha[\theta'(u_1), \ldots, \theta'(u_n)] = \varphi_\alpha[\varphi'_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, \varphi'_n(u_1, \ldots, u_n)], \tag{29}$$

c'est-à-dire $\varphi''_\alpha(u_1, \ldots, u_n)$, en désignant par

$$z' = \varphi''_\alpha(z_1, \ldots, z_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{30}$$

le produit de la transformation (27) par la transformation (25). Dans le second membre on aura, en désignant par θ'' le produit de θ par θ', les expressions $\theta''(u_\alpha)$. On obtient donc, en définitive,

$$\varphi''_\alpha(u_1, \ldots, u_n) = \theta''(u_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{31}$$

ce qui prouve que la transformation (30) appartient à l'ensemble considéré et y correspond à θ''.

Soit, d'autre part,

$$z_\alpha = \bar{\varphi}_\alpha(z'_1, \ldots, z'_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{32}$$

l'inverse de la transformation (25). L'hypothèse (26) pourra s'écrire

$$u_\alpha = \bar{\varphi}_\alpha[\theta(u_1), \ldots, \theta(u_n)] \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{33}$$

ce qui équivaut à

$$u_\alpha = \theta[\bar{\varphi}_\alpha(u_1, \ldots, u_n)] \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{34}$$

et par conséquent, à

$$\bar{\varphi}_\alpha(u_1, \ldots, u_n) = \theta(u_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{35}$$

Ce qui exprime que l'inverse de toute transformation de l'ensemble de transformations (25) considéré appartient à cet ensemble. Comme il contient manifestement la transformation identique, qui correspond à celle de γ, nous pouvons conclure que cet ensemble est bien un groupe, puisque nous avons constaté qu'il contient le produit de deux quelconques de ses transformations.

Soient enfin φ et φ' deux transformations quelconques de ce groupe $\mathcal{G}$, et θ et θ' les transformations de γ qui leur correspondent. Nous avons vu que le produit $\varphi\varphi'$ correspond à $\theta'\theta$. Il correspond donc à $\overline{\theta\theta'}$ si l'on considère φ et φ' comme correspondant respectivement à θ et θ', ce qui prouve l'isomorphisme de $\mathcal{G}$ avec γ.

On remarquera que les démonstrations précédentes reposent en partie, comme le faisaient déjà, implicitement, les formules (16 *bis*) et (17 *bis*) du n° 3, sur la *permutabilité* qui existe entre les transformations ponctuelles de l'espace à n dimensions et les transformations auxiliaires (9) introduites au n° 2 quand on les effectue, respectivement, sur un point $(z_1, \ldots, z_n)$ dont les coordonnées $z_1, \ldots, z_n$ sont des fonctions des variables indépendantes $t, x_1, \ldots, x_n$, et, dans ces fonctions, sur ces variables indépendantes. Elle interviendra encore dans la suite.

14. La conclusion du numéro précédent est qu'à chaque solution complète de toute équation (1) est attaché, pour chaque domaine de rationalité $\mathcal{O}$, un groupe ponctuel $\mathcal{G}$ dont chaque transformation

$$z'_\alpha = \varphi_\alpha(z_1, \ldots, z_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{36}$$

correspond à une transformation θ, et à une seule, du groupe spécifique γ de cette équation par les relations

$$\varphi_\alpha(u_1, \ldots, u_n) = \theta(u_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n); \tag{37}$$

ce qui revient à dire que les diverses solutions complètes $(u'_1, \ldots, u'_n)$ définies, pour les diverses transformations (36) de ce groupe, par les formules

$$u'_\alpha = \varphi_\alpha(u_1, \ldots, u_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{38}$$

sont les diverses conjuguées de $(u_1, \ldots, u_n)$.

Une solution complète $(v_1, \ldots, v_n)$ de (1) autre que $(u_1, \ldots, u_n)$ sera liée à celle-ci par des équations de la forme

$$v_\alpha = \psi_\alpha(u_1, \ldots, u_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{39}$$

la transformation ponctuelle

$$z'_\alpha = \psi_\alpha(z_1, \ldots, z_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{40}$$

pouvant être quelconque.

On tirera donc de (39)

$$\theta(v_\alpha) = \theta[\psi_\alpha(u_1, \ldots, u_n)] = \psi_\alpha[\theta(u_1), \ldots, \theta(u_n)] \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{41}$$

d'où, à cause de (37),

$$\theta(v_\alpha) = \psi_\alpha\big(\varphi_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, \varphi_n(u_1, \ldots, u_n)\big), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{42}$$

Désignons, pour abréger, par φ et ψ les transformations (36) et (40), et par $\bar{\psi}$ l'inverse de ψ. Soit, alors,

$$z'_\alpha = \chi_\alpha(z_1, \ldots, z_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{43}$$

la transformation $\psi\varphi\bar{\psi}$. Les équations (42) deviendront, en y remplaçant $u_1, \ldots, u_n$ par leurs expressions tirées de (39),

$$\chi(v_1, \ldots, v_n) = \theta(v_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{44}$$

Ce qui prouve que le groupe ponctuel $\mathcal{G}'$ qui est attaché à $(v_1, \ldots, v_n)$ comme $\mathcal{G}$ l'est à $(u_1, \ldots, u_n)$ est le transformé de $\mathcal{G}$ par la transformation ψ.

$\mathcal{G}'$ se confondra donc avec $\mathcal{G}$, en particulier, si ψ est une des transformations de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire si $(v_1, \ldots, v_n)$ est l'une des conjuguées de $(u_1, \ldots, u_n)$.

15. Revenons maintenant au *théorème de Galois*. L'énoncé qui en a été donné au n° **11** peut être interprété, avec les notations de ce numéro, en disant que si une fonction rationnelle $R(\mathcal{F})$ est rationnelle dans $\mathcal{O}$, on a $R(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F})$ pour toute conjuguée $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$, et que la réciproque est vraie si $\mathcal{F}$ est primitive.

Il résulte, d'autre part, du n° **13** qu'à chaque solution complète $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ correspond un groupe ponctuel $\mathcal{G}$ de l'espace à n dimensions, et un seul, tel que les points $(u'_1, \ldots, u'_n)$ relatifs aux diverses conjuguées $\mathcal{F}' = (u'_1, \ldots, u'_n)$ de $\mathcal{F}$ soient les transformés du point $(u_1, \ldots, u_n)$, relatif à $\mathcal{F}$ par les diverses transformations

$$z'_\alpha = \varphi_\alpha(z_1, \ldots, z_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{45}$$

de ce groupe. On passera donc d'une fonction rationnelle $R(\mathcal{F})$ à $R(\mathcal{F}')$ en effectuant la transformation (45) sur $(u_1, \ldots, u_n)$ dans $R(u_1, \ldots, u_n)$, $u_1, \ldots, u_n$ étant considérées comme des fonctions des variables indépendantes, non transformées, $t, x_1, \ldots, x_n$.

Le *théorème de Galois* pourra prendre, par suite, la forme que voici :

Pour toute équation (1) *et pour chaque domaine de rationalité* $\mathcal{O}$, *est attaché à chaque solution complète* $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ *un groupe ponctuel* $\mathcal{G}$ *de l'espace à n dimensions qui jouit de la double propriété suivante : si une fonction rationnelle de* $\mathcal{F}$, $R(u_1, \ldots, u_n)$, *est rationnelle dans* $\mathcal{O}$, *elle admet toutes les transformations de* $\mathcal{G}$, *effectuées sur* $(u_1, \ldots, u_n)$ *en traitant* $t, x_1, \ldots, x_n$ *comme des variables non transformées; la réciproque est vraie si* $(u_1, \ldots, u_n)$ *est une solution complète primitive de* (1).

Le groupe $\mathcal{G}$ sera dit, pour cette raison, *groupe de rationalité* [3] de (1) relatif à $\mathcal{F}$.

---

[3] C'est le nom devenu classique, donné du *groupe de Galois* d'une équation algébrique et aux groupes analogues par M. J. Drach. On sait que c'est à lui que l'on doit la notion générale de *réductibilité*, et qu'il en a déduit, dans sa thèse (Fac. Sc. de Paris, 1898), sous le nom d'*intégration logique*, une théorie destinée à jouer, pour l'intégration des équations (1) et pour celles qui s'y rattachent, un rôle analogue à celui que la *théorie de Galois* joue pour la résolution des équations algébriques. En raison des objections que l'on pouvait faire à l'analyse de M. Drach et à

Comme on l'a vu au n° 14, les groupes de rationalité relatifs aux diverses solutions complètes sont *semblables* entre eux, et le groupe de rationalité est le même pour une solution complète et pour ses conjuguées.

16. Il nous reste à chercher quelles sont les propriétés des groupes de rationalité d'une équation (1) vis-à-vis des sous-systèmes de son associé S rationnels dans le domaine de rationalité $\mathcal{O}$ donné. Soit, comme précédemment, $\mathcal{G}$ l'un de ces groupes et $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ l'une des solutions complètes de (1) auxquelles il se rapporte; et supposons d'abord que $\mathcal{F}$ soit primitive. Soit alors Π le sous-système de S, rationnel dans $\mathcal{O}$, dont les solutions sont $\mathcal{F}$ et ses conjuguées, $\mathcal{G}$ est le groupe de rationalité relatif à l'une quelconque de ces solutions complètes. Si donc l'on effectuait dans Π, sur les variables dépendantes $z_1, \ldots, z_n$ l'une quelconque des transformations (45) de $\mathcal{G}$, chacune des solutions de Π, étant transformée en l'une de ses conjuguées, ne cesserait pas d'être une solution de Π. L'ensemble des solutions de Π resterait donc le même, et Π serait transformé en un système équivalent. C'est dire que chacune des transformations de $\mathcal{G}$ laisse Π invariant.

Réciproquement, si une transformation de la forme (45) laisse Π invariant; elle transforme $\mathcal{F}$, solution de Π, en une solution de Π, c'est-à-dire en l'une des conjuguées de $\mathcal{F}$. Elle fait donc partie de $\mathcal{G}$.

Nous concluons donc que Π est un *système automorphe*, au sens strict que j'avais donné à ce terme dans mes premiers travaux sur la réductibilité des équations (1), c'est-à-dire automorphe vis-à-vis des variables dépendantes $z_1, \ldots, z_n$; et que son *groupe d'automorphie*, qui est, en fait, le plus grand groupe ponctuel de l'espace $(z_1, \ldots, z_n)$ qui laisse ce système invariant, est ici le groupe de rationalité $\mathcal{G}$ de l'équation (1) relatif à l'une quelconque des solutions de ce système. Nous avions dit, au n° 10, en élargissant le sens du terme, que Π est automorphe par rapport aux variables indépendantes $t, x_1, \ldots, x_n$, et il a alors pour groupe d'automorphie le groupe spécifique γ de l'équation (1). Il est donc doublement automorphe et sa résolution dépendra d'opérations qui auront pour but la réduction progressive de l'un ou l'autre de ses deux groupes d'automorphie, et qui seront les mêmes dans les deux hypothèses et réduiront les deux groupes simultanément, d'une manière isomorphique, puisqu'ils ont la même structure.

---

ses conclusions, je repris, en 1902 par une méthode personnelle, cette extension des idées de Galois, et mis au point, pour les équations (1), la notion de *groupe de rationalité* et les théorèmes fondamentaux qui s'y rapportent (Voir le rapport sur le Grand Prix des Sciences mathématiques de 1902 dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris, et mon mémoire des *Annales de l'É. N. S.* de 1904).

Je suis revenu plus tard (*Ann. E. N. S.*, (3), t. 29, 1912) sur cette question de la réductibilité des équations (1) (et, généralement, des systèmes complets de telles équations) en la considérant et la traitant comme un problème de la théorie des groupes de transformations, ce qui m'a conduit à introduire les notions de *transformations réductrices* et de *groupe spécifique*, qui jouent un rôle fondamental dans ma Théorie générale de la réductibilité dont le présent travail constitue une application importante.

Pour les *systèmes différentiels automorphes* (définition et intégration), on pourra se reporter à mon mémoire des *Acta mathematica* de 1904, dont les résultats ont été utilisés ici, et le seront encore, en ce qui concerne l'intégration des *systèmes résolvants*.

17. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que la solution complète, $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$, arbitrairement choisie parmi celles auxquelles se rapportait le groupe de rationalité $\mathcal{G}$ considéré, était une solution complète primitive de l'équation (1).

Nous avons à examiner maintenant l'hypothèse contraire. Soient, à cet effet, $\mathcal{F}' = (v_1, \ldots, v_n)$ une solution complète primitive quelconque, et

$$(46) \qquad z'_\alpha = \psi_\alpha(z_1, \ldots, z_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

la transformation ponctuelle de l'espace à n dimensions qui change $\mathcal{F}'$ en $\mathcal{F}$. Comme elle est permutable avec les transformations du groupe spécifique γ de l'équation (1), elle changera les conjuguées de $\mathcal{F}'$ en celles de $\mathcal{F}$. Elle transformera donc le sous-système Π' de l'associé S de l'équation (1), rationnel dans le domaine de rationalité $\mathcal{O}$ donné, dont les solutions sont $\mathcal{F}'$ et ses conjuguées, en un autre sous-système Π de S, dont les solutions seront $\mathcal{F}$ et ses conjuguées. Celui-ci ne sera pas rationnel dans $\mathcal{O}$, puisque $\mathcal{F}$ et ses conjuguées ne sont pas, ici, primitives; mais nous constatons que $\mathcal{F}$ et ses conjuguées, quoique non primitives, sont encore les solutions d'un sous-système Π de S; et l'on pourra démontrer, exactement comme on l'a fait au numéro précédent, que ce sous-système Π est automorphe par rapport aux variables dépendantes $z_1, \ldots, z_n$, avec le groupe de rationalité $\mathcal{G}$, relatif à $\mathcal{F}$ et ses conjuguées, pour groupe d'automorphie.

Il est, du reste, automorphe également par rapport aux variables indépendantes $t, x_1, \ldots, x_m$, avec le groupe spécifique γ pour groupe d'automorphie, puisque toute transformation de γ, changeant, par définition, chaque solution complète de (1) en une de ses conjuguées, ne fait que permuter entre elles les solutions de Π.

Ainsi chacune des familles de solutions complètes, deux à deux conjuguées, entre lesquelles se répartissent les solutions complètes de l'équation (1), est constituée par les solutions d'un sous-système Π de l'associé S de (1), qui est automorphe de deux manières : par rapport aux variables dépendantes, et par rapport aux variables indépendantes. Les groupes d'automorphie du système Π sont, respectivement, le groupe de rationalité $\mathcal{G}$ relatif à la famille de solutions complètes considérée, et le groupe spécifique γ de l'équation (1).

Cela est vrai, que la famille considérée soit composée, ou non, de solutions complètes primitives. Mais Π est rationnel dans $\mathcal{O}$ dans le premier cas, par définition, et non dans le second.

Il importe de remarquer que le groupe spécifique γ est groupe d'automorphie pour tous les systèmes Π, tandis qu'un groupe de rationalité $\mathcal{G}$ n'est groupe d'automorphie pour un système Π que s'il est *relatif* aux solutions complètes qui sont les solutions de celui-ci. Et, *en général*, les groupes de rationalité relatifs à deux familles différentes de solutions complètes conjuguées sont différents.

III. — Théorie directe des groupes de rationalité.

18. La notion de groupe de rationalité se trouve subordonnée, dans l'analyse des numéros précédents, à celle de groupe spécifique. Mais l'on peut aussi introduire les groupes de rationalité directement, sans faire intervenir le groupe spécifique. C'est ce que nous allons faire, pour terminer, en utilisant les principes de notre théorie générale relatifs aux transformations réductrices et aux adjoints des sous-systèmes des systèmes associés aux équations (1).

La nouvelle théorie de la réductibilité des équations (1) que l'on obtiendra ainsi est particulièrement simple.

Notre point de départ sera ce fait bien connu que le système S associé à une équation (1) est automorphe par rapport aux variables dépendantes $z_1, \ldots, z_n$, le groupe d'automorphie étant le groupe ponctuel général G de l'espace $(z_1, \ldots, z_n)$. Les transformations de ce groupe sont dites les *transformations fondamentales* de S, et seront désignées par la lettre T.

Nous remarquerons d'abord que, pour toute équation (1), il y a une transformation T du groupe G, et une seule, qui change une solution complète $\mathcal{F}_0$ de (1), arbitrairement choisie, en une autre, $\mathcal{F}$, donnée; et qu'il y a, d'autre part, une auto-transformation de (1), et une seule, soit A, qui satisfait à la même condition. Cela permet d'établir, entre G et le groupe H des auto-transformations de (1), une correspondance holoédriquement isomorphique. Nous prendrons à cet effet, comme homologue d'une transformation quelconque T de G l'inverse B de la transformation A de H pour laquelle on a

$$\text{(47)} \qquad A(\mathcal{F}_0) = T(\mathcal{F}_0).$$

Soit donc T′ une seconde transformation quelconque de G, B′ son homologue dans H, et A′ l'inverse de B′ : de sorte que l'on aura

$$\text{(48)} \qquad A'(\mathcal{F}_0) = T'(\mathcal{F}_0).$$

Il nous faut vérifier que, pour $T'' = T'T$ et $A'' = AA'$, on a aussi

$$\text{(49)} \qquad A''(\mathcal{F}_0) = T''(\mathcal{F}_0);$$

car A″ est l'inverse de $B'' = B'B$. Or cela résulte de la suite d'égalités

$$\text{(50)} \qquad A[A'(\mathcal{F}_0)] = A[T'(\mathcal{F}_0)] = T'[A(\mathcal{F}_0)] = T'[T(\mathcal{F}_0)],$$

qui sont des conséquences des hypothèses (47) et (48), et de la permutabilité, déjà signalée et utilisée plusieurs fois, de toute transformation (45) de G avec toute transformation auxiliaire (9). [*Cf.* n° **13**, *in fine.*]

L'isomorphisme de la correspondance considérée est ainsi établi. Nous la désignerons par $\mathcal{J}_0$, pour rappeler qu'elle dépend de la solution complète $\mathcal{F}_0$ qui a servi à la définir.

Soit, maintenant, Σ un sous-système quelconque de l'associé S de l'équation (1) considérée, et Δ_0 l'un quelconque de ses adjoints. Nous savons, par la théorie générale, que Δ_0 est automorphe relativement aux variables indépendantes $t, x_1, \ldots, x_n$, et que son groupe d'automorphie est le sous-groupe H_0 de H formé par les auto-transformations de (1) qui laissent invariant le système Σ. Cela équivaut à dire que, si $\mathcal{F}_0$ est l'une quelconque de ses solutions, l'ensemble de celles-ci est donné par la formule

$$\text{(51)} \qquad \mathcal{F} = A_0(\mathcal{F}_0),$$

dans laquelle A_0 désigne la transformation générale de H_0. Or, si l'on appelle T_0 l'homologue de l'inverse de A_0 dans la correspondance isomorphique $\mathcal{J}_0$ définie par $\mathcal{F}_0$, on aura $A_0(\mathcal{F}_0) = T_0(\mathcal{F}_0)$, et la solution générale (51) de Δ_0 prendra la forme

$$(52) \qquad \mathcal{F} = T_0(\mathcal{F}_0);$$

et comme T_0 sera la transformation générale du sous-groupe G_0 de G homologue de H_0, cette formule exprimera que ce sous-groupe G_0 est groupe d'automorphie de Δ_0 par rapport aux variables dépendantes $z_1, \ldots, z_n$.

Nous concluons donc que tout adjoint Δ_0 d'un sous-système Σ de S est automorphe par rapport aux variables dépendantes (comme il l'est par rapport aux variables indépendantes) et a pour groupe d'automorphie, à ce point de vue, un sous-groupe G_0 du groupe ponctuel général G isomorphe holoédrique du groupe H_0 formé par les auto-transformations de l'équation (1) qui laissent Σ invariant.

Remarquons que, si l'on transforme Δ_0 par l'une quelconque des transformations ponctuelles T, le système obtenu aura, d'après (51) pour sa solution générale $\mathcal{F}'$

$$(53) \qquad \mathcal{F}' = T(\mathcal{F}) = T[A_0(\mathcal{F}_0)] = A_0[T(\mathcal{F}_0)],$$

ou, en désignant par $\mathcal{F}'_0$ la transformée $\mathcal{F}'_0 = T(\mathcal{F}_0)$ de $\mathcal{F}_0$,

$$(54) \qquad \mathcal{F}' = A_0(\mathcal{F}'_0).$$

Ce système ne sera donc pas autre chose, d'après la formule (51), que l'adjoint Δ'_0 de Δ dont l'une des solutions est $\mathcal{F}'_0$.

Les divers adjoints d'un sous-système Σ de S sont donc les transformés les uns des autres par les diverses transformations ponctuelles T, et il en est de même, par suite, pour leurs groupes d'automorphie relatifs aux variables dépendantes.

19. Après les préliminaires du numéro précédent, nous reprenons l'analyse de la réductibilité d'une équation (1) dans un domaine de rationalité $\mathcal{O}$ donné. Nous désignerons ici par $\mathcal{F}_0$ la solution complète principale de cette équation relative à une valeur t_0 de t arbitrairement choisie dans $\mathcal{O}$. Soit Π_0 celui des sous-systèmes de l'associé S de (1) rationnels dans $\mathcal{O}$ qui est un sous-système de tous les autres ([1]). Il est à lui-même son adjoint relatif à $\mathcal{F}_0$ (c'est-à-dire admettant $\mathcal{F}_0$ pour solution); car sans cela cet adjoint, qui serait rationnel dans $\mathcal{O}$, comme Π_0, parce que $\mathcal{F}_0$ est, comme nous le savons [n° 8], une solution complète distinguée de (1), serait, contrairement à l'hypothèse faite sur Π_0, un sous-système de Π_0 rationnel dans $\mathcal{O}$ et admettant $\mathcal{F}_0$ comme solution.

Tous les adjoints de Π_0, y compris Π_0 lui-même, seront, comme l'est généralement tout système adjoint, automorphes par rapport aux variables dépendantes. Les diverses solutions de l'un quelconque d'entre eux seront dites des solutions complètes de (1) *conjuguées* deux à deux, parce que deux quelconques d'elles sont homologues vis-à-vis du groupe d'automorphie de ce système. L'ensemble des solutions complètes de (1) se trouve ainsi réparti en familles de solutions

([1]) L'existence d'un tel système résulte d'un théorème de notre théorie générale de la réductibilité.

complètes deux à deux conjuguées. Nous allons prouver qu'un sous-système de S rationnel dans $\mathcal{O}$ ne peut admettre comme solution, une solution complète particulière de (1) sans admettre aussi toutes les conjuguées.

Soient, en effet, $\mathcal{F}$ la solution complète considérée, et π l'adjoint de Π_0 relatif à $\mathcal{F}$; soient, d'autre part, Σ le sous-système de S en question, et Δ_0 et Δ ses adjoints relatifs respectivement, à $\mathcal{F}_0$ et à $\mathcal{F}$; soit, enfin, T la transformation ponctuelle fondamentale de S qui change $\mathcal{F}_0$ en $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{F}_0$ est une solution complète de (1) distinguée, Δ_0 est rationnel dans $\mathcal{O}$, puisque Σ l'est par hypothèse; et, dès lors, Δ_0 admet toutes les solutions de Π_0. Or, T change Δ_0 en Δ, et Π_0 en Π. Donc Δ admettra toutes les solutions de Π, puisque Δ_0 admet toutes celles de Π_0; et, comme Σ admet toutes les solutions de Δ, il admettra toutes celles de Π : c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

A l'exception de Π_0, qui est, par définition, rationnel et irréductible dans $\mathcal{O}$, chacun des systèmes Π considérés peut, *a priori*, être, ou non, rationnel dans $\mathcal{O}$. Mais, d'après le théorème précédent, s'il y est rationnel, il y sera aussi irréductible. Ses solutions seront dites, dans ce cas, des solutions complètes de (1) *primitives*.

Il sera naturel, d'après ce qui précède, de prendre Π_0 comme *système résolvant* de l'équation (1). Soit $\mathcal{G}_0$ son groupe d'automorphie (relatif aux variables dépendantes); les opérations à faire pour intégrer Π_0 seront déterminées par la structure de $\mathcal{G}_0$. Elles auront pour but, en effet, de réduire progressivement $\mathcal{G}_0$ à la seule transformation identique par l'adjonction à $\mathcal{O}$ des fonctions de $t, x_1, \dots x_n$ qui en seront les résultats. C'est donc la structure de $\mathcal{G}_0$ qui caractérise ici le mode spécial de réductibilité de l'équation (1) considérée, pour le domaine de rationalité $\mathcal{O}$ donné.

Ce que nous venons de dire pour Π_0 est vrai pour tout adjoint Π de Π_0 qui est rationnel dans $\mathcal{O}$. L'intégration d'un tel système Π est, du reste, un problème équivalent à celle de Π_0; car les structures de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{G}_0$, groupes d'automorphie de Π et de Π_0 sont les mêmes, ces deux groupes étant deux groupes ponctuels *semblables*; et ce sont elles qui déterminent, respectivement, la suite et la nature des opérations à effectuer pour réaliser l'une et l'autre de ces intégrations.

20. L'étude faite au n° 19 précédent est analogue à celle du n° 10. Plaçons-nous maintenant, comme au n° 11, au point de vue de Galois, soit $\mathcal{F}$ une solution complète quelconque de l'équation (1) considérée. Pour chaque domaine de rationalité $\mathcal{O}$, le groupe d'automorphie $\mathcal{G}$ de l'adjoint Π de Π_0 dont $\mathcal{F}$ est une solution sera dit le *groupe de rationalité* de (1) relatif à $\mathcal{F}$. Nous allons justifier cette définition en démontrant que $\mathcal{G}$ possède, vis-à-vis des fonctions rationnelles de $\mathcal{F}$, telles qu'elles ont été définies au n° 11, la double propriété qui constitue ce que nous appelons le *théorème de Galois*, à savoir

Pour qu'une fonction rationnelle de $\mathcal{F}$ soit rationnelle dans $\mathcal{O}$, il faut qu'elle admette toutes les transformations de $\mathcal{G}$; cela suffit si $\mathcal{F}$ est une solution complète primitive de (1).

La démonstration se fera comme celle du théorème analogue du n° 11. Soit $R(Z)$ une fonction rationnelle quelconque d'une solution complète indéterminée,

$Z = (z_1, \ldots, z_n)$, de l'équation (1); et désignons par ρ la fonction de t, $x_1, \ldots, x_n$ à laquelle se réduit $R(\mathcal{F})$, tous calculs faits. Toute transformation T de $\mathcal{G}$ change $\mathcal{F}$ en une conjuguée $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$, et change, par suite, $R(\mathcal{F})$ en $R(\mathcal{F}')$. Or, si $R(\mathcal{F}) = \rho$ est rationnelle dans $\mathcal{O}$, il en est de même pour l'équation $R(Z) = \rho$ et celle-ci, ayant $\mathcal{F}$ pour solution, aura aussi pour solution la conjuguée $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$. On aura donc $R(\mathcal{F}') = \rho$, et, par conséquent, $R(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F})$; ce qui exprime la première partie du théorème.

Réciproquement, si $R(\mathcal{F})$ admet toutes les transformations T de $\mathcal{G}$, on aura, pour toutes les conjuguées $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$, $R(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F})$, car ces diverses transformations changent $\mathcal{F}$ en ses diverses conjuguées. L'équation $R(Z) = \rho$ admettra donc toutes les solutions de l'adjoint Π de Π_0 dont les solutions sont $\mathcal{F}$ et ses conjuguées : elle sera donc une conséquence de ce système Π, qui sera, par ailleurs, rationnel dans $\mathcal{O}$ si $\mathcal{F}$ est une solution complète primitive de l'équation (1). Dans ce cas, les équations en ρ qui exprimeraient qu'il en est ainsi constitueraient donc un système d'équations algébriques, rationnelles dans $\mathcal{O}$, ayant pour unique solution $\rho = R(\mathcal{F})$. On en conclut que celle-ci serait, elle aussi, rationnelle dans $\mathcal{O}$: ce qui démontre la seconde partie du théorème.

21. Vérifions, pour conclure ce travail, que les notions que nous venons d'introduire dans la théorie directe des groupes de rationalité esquissée dans les paragraphes précédents (nos **18**, **19**, **20**) sont bien les mêmes que celles que nous avions définies, sous les mêmes noms, dans les numéros antérieurs.

Reportons-nous, à cet effet, au n° **19**. Les systèmes Π_0 et Π, qui y sont considérés, étant les divers adjoints du premier, sont automorphes par rapport aux variables indépendantes t, $x_1, \ldots, x_n$ et ont le même groupe d'automorphie. Il résulte de la définition de Π_0, conformément à notre théorie générale de la réductibilité, que ce groupe est le groupe spécifique γ de l'équation (1) considérée ([5]).

On en conclut que les systèmes Π du n° **19** ne diffèrent pas de ceux qui ont pour solutions les diverses familles de solutions complètes conjuguées telles qu'elles avaient été définies au n° **10**. Les deux espèces de familles de solutions complètes envisagées, étant composées des solutions des mêmes systèmes Π, sont donc identiques. Il en est de même pour les solutions complètes primitives, qui sont les solutions de ceux de ces systèmes Π qui sont rationnels dans $\mathcal{O}$, et pour les groupes de rationalité, qui sont les groupes d'automorphie de ces mêmes systèmes Π relatifs aux variables dépendantes. Les concordances à vérifier se trouvent ainsi mises en évidence.

(Manuscrit reçu le 25 décembre 1946.)

([5]) On peut le voir ici directement. Soit, en effet, θ une transformation quelconque du groupe d'automorphie η de Π_0 relatif à t, $x_1, \ldots, x_n$, et soit Σ un sous-système quelconque de S rationnel dans $\mathcal{O}$. On a vu au n° 19 que les solutions de Σ se répartissent en familles de solutions complètes conjuguées (au sens de ce numéro), et θ laisse invariante chacune de ces familles. Donc θ laisse invariant Σ. Le groupe spécifique de (1) contient donc η; et comme toutes ses transformations doivent laisser Π_0 invariant (puisque Π_0 est rationnel), il se confond avec η. C'est ce qu'il fallait démontrer.