BULLETIN DE LA S. M. F.

N. SALTYKOW

Systèmes d'équations aux différentielles totales complètement et non complètement intégrables

Bulletin de la S. M. F., tome 75 (1947), p. 27-30
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1947__75__27_0>

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES COMPLÈTEMENT ET NON COMPLÈTEMENT INTÉGRABLES;

PAR M. N. SALTYKOW.

I. — Introduction.

On lit dans les deux éditions, première et seconde, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, par E Goursat, les exemples de Valyi et de Bourlet cités à titre de systèmes non complètement intégrables (n° 5, p. 133, deuxième édition). Voulant, un jour, présenter lesdites équations comme exemples des systèmes non complètement intégrables, je me suis aperçu que l'assertion des auteurs mentionnés n'était pas exacte.

E. Goursat, informé sur ce rapport et approuvant la constatation faite, m'écrivait « que voulez-vous, j'avais confiance en mes élèves. »

Il est fort probable que Valyi et Bourlet, traitant les exemples en question, avaient rencontré, en intégrant les équations considérées, des difficultés qu'ils n'ont pas su surmonter. D'où sont venues leurs conclusions insuffisantes.

Pour combler cette lacune, qui a duré plus d'un demi-siècle, on va exposer ici succinctement l'intégration des systèmes en question.

II. — Système de Valyi.

Considérons le système

$$\left\{\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy,\\ dp &= q\,dx + s\,dy,\\ dq &= s\,dx + p\,dy,\\ ds &= p\,dx + q\,dy. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

On en tire immédiatement deux intégrales évidentes

$$z - s = C_1, \qquad e^{-x-y}(p + q + s) = C_2, \tag{2}$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires. Cela étant, le système (1) se réduit à l'intégration d'un système jacobien des deux équations linéaires aux dérivés partielles d'une seule fonction inconnue :

$$\left\{\begin{aligned} Y^1(\varphi) &\equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + (C_1 + C_2 e^{x+y} - z - p)\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0,\\ Y^2(\varphi) &\equiv \frac{\partial\varphi}{\partial y} + (C_1 + C_2 e^{x+y} - z - p)\frac{\partial\varphi}{\partial z} + (z - C_1)\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

On calculera sans difficulté, tout d'abord, les deux intègrales de la première équation (3), en intégrant un système des deux équations différentielles ordinaires linéaires aux coefficients constants. Celles-ci admettent la forme suivante

$$(4)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = P \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x + Q \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} x, \\ \varphi_2 = Q \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x - P \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} x, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$P = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\sqrt{3}} (C_1 + C_2 e^{x+y} - z - 2p),$$

$$Q = e^{\frac{1}{2}x} \left(z - C_1 - \frac{1}{3} C_2 e^{x+y} \right).$$

Transformons, à présent, la seconde équation (3), en y introduisant, au lieu de z et p, comme nouvelles variables, les intégrales φ_1 et φ_2 (4). L'équation transformée devient, Ψ désignant la nouvelle fonction inconnue,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{1}{2} (\varphi_1 + \sqrt{3}\varphi_2) \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_1} + \frac{1}{2} (\sqrt{3}\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_2} = 0.$$

L'intégration de cette dernière équation produit les deux intégrales du système (3), en intégrant un système des deux équations différentielles ordinaires linéaires aux coefficients constants. Revenant aux anciennes variables, on obtient les deux dernières intégrales du système de Valyi (1) sous la forme suivante

$$e^{\frac{1}{2}(x+y)} \left[(q-p) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} (x-y) + (2s - p - q) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} (x-y) \right] = C_3,$$

$$e^{\frac{1}{2}(x+y)} \left[(2s - p - q) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} (x-y) - (q-p) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} (x-y) \right] = C_4,$$

C_3 et C_4 désignant deux nouvelles constantes arbitraires.

III. — Système de Bourlet.

Considérons le système

$$(1)\qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ dp = r\,dx + \left(az^2 + \dfrac{pq}{z} \right) dy, \\ dq = \left(az^2 + \dfrac{pq}{z} \right) dx + r\,dy, \\ dr = \left(3aqz + \dfrac{pr}{z} \right) dx + \left(3apz + \dfrac{qr}{z} \right) dy. \end{cases}$$

La quatrième équation (1), grâce à la première, devient

$$(2)\qquad d\left(\frac{r}{z} \right) = 3a(q\,dx + p\,dy).$$

Quant à la seconde et troisième équation (1), en vertu de la première, elles produisent la relation

$$d(pq) = r(q\,dx + p\,dy) + \left(az^2 + \frac{pq}{z}\right)dz.$$

Il en résulte que grâce à la relation (2), l'équation intégrale du système (1)

$$(3)\qquad pq = \frac{1}{6a}\frac{r^2}{z} + \frac{1}{2}az^3 + C_1 z,$$

C_1 désignant une constante arbitraire.

Pour avoir la seconde intégrale, formons, au moyen de la première équation (1), la relation suivante

$$(4)\qquad p\,dp + q\,dq = r\,dz + \left(az^2 + \frac{pz}{z}\right)(q\,dx + p\,dy).$$

Or, on a, en vertu de l'équation (3),

$$\frac{pq}{z} + az^2 = \frac{1}{6a}\left(\frac{r}{z}\right)^2 + \frac{3}{2}az^2 + C_1.$$

En vertu de cette dernière équation et de la relation (2), l'équation (4) devient

$$p\,dp + q\,dq = r\,dz + \frac{1}{3a}\left[\frac{1}{6a}\left(\frac{r}{z}\right)^2 + \frac{3}{2}az^2 + C_1\right]d\left(\frac{r}{z}\right)$$

et se présente sous la forme d'une dérivée exacte. L'intégration de cette dernière produit la seconde équation intégrale du système étudié (1)

$$(5)\qquad p^2 + q^2 = rz + \frac{1}{27a^2}\left(\frac{r}{z}\right)^3 + \frac{2C_1}{3a}\frac{r}{z} + C_2,$$

C_2 étant une constante arbitraire.

On tire aisément des deux équations (3) et (5) les formules suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} p + q = \sqrt{\Phi(u)}, \\ p - q = \sqrt{\Phi(v)}, \end{cases}$$

où le symbole de Φ signifie la fonction

$$\Phi(\ldots) \equiv (\ldots)^3 + \frac{2C_1}{a^{\frac{1}{3}}}(\ldots) + C_2,$$

en posant

$$u = \frac{1}{3a^{\frac{2}{3}}}\frac{r}{z} + a^{\frac{1}{3}}z,$$

$$v = \frac{1}{3a^{\frac{2}{3}}}\frac{r}{z} - a^{\frac{1}{3}}z.$$

substituant les expressions de p et de q tirés des équations (6): la première équation (1) et la deuxième produisent deux nouvelles équations

$$du = a^{\frac{1}{3}}\sqrt{\Phi(u)}\,d(x+y),$$
$$dv = a^{\frac{1}{3}}\sqrt{\Phi(v)}\,d(y-x).$$

Les variables y étant séparées, on obtient deux dernières équations intégrales du système (1)

$$x+y = a^{-\frac{1}{3}}\int\frac{du}{\sqrt{\Phi(u)}} + C_3,$$
$$y-x = a^{-\frac{1}{3}}\int\frac{dv}{\sqrt{\Phi(v)}} + C_4,$$

C_3 et C_4 désignant les nouvelles constantes arbitraires.

(Manuscrit reçu le 12 mai 1946.)