BULLETIN DE LA S. M. F.

BERNARD D'ORGEVAL

Les plans multiples représentatifs de certaines familles de surfaces algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 74 (1946), p. 87-101
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1946__74__87_0>

LES PLANS MULTIPLES REPRÉSENTATIFS DE CERTAINES FAMILLES DE SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. BERNARD D'ORGEVAL.

Durant l'année 1942, je me suis occupé de certaines généralisations de la méthode de M. Chisini ([1]), permettant la construction de plans multiples représentatifs de surfaces algébriques. Un résumé de ce travail a fait alors l'objet d'une Note aux *Comptes rendus* ([2]); la partie générale et une première application ont paru par ailleurs ([3]); la construction des plans multiples représentatifs des surfaces dont tous les genres sont 1, a été insérée dans ma Thèse ([4]). Dans cette Note, je proposerai la construction de quelques types de plans multiples, qui peuvent avoir quelque intérêt.

1. Rappel de la méthode. — Une surface algébrique F, d'équation

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

de degré n en z, définit un plan n — ple. La fonction à n valeurs,

$$z = z(x, y), \tag{2}$$

déterminée par (1), admet dans le plan (x, y), une ligne de diramation

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{3}$$

([1]) *Cf.* O. CHISINI, *Un theorema d'esistenza dei piani multipli* (*R. C. R. Ac. dei Lincei*, vol XIX, série 6, 1er sem. 1934, pp. 688 et 766) et *Sulla curva di diramazione dei piani multipli* (*R. C. R. Ac. dei Lincei*, vol. XXIII, série 6, 1er sem. 1936, p. 22).

([2]) *Cf.* B. D'ORGEVAL, *Remarques sur la détermination des plans multiples représentant une surface algébrique* (*C. R. A. Sc.*, t. 215, 1942, p. 341).

([3]) *Cf.* B. D'ORGEVAL, *Les plans multiples représentatifs d'une surface algébrique et la méthode de M. Chisini* (*Bull. Ac. R. de Belgique*, 1934, pp. 215 et 653).

([4]) *Cf.* B. D'ORGEVAL, *Sur les surfaces algébriques dont tous les genres sont 1* (*Thèse*, Paris, Gauthier-Villars, 1945).

Cette courbe de diramation possède des caractères : degré N, nombre de points doubles d, nombre de cuspides k, qui sont liés aux caractères de la surface F, p_a genre arithmétique, $\overline{p_1}$ genre linéaire virtuel, n ordre, π genre de la section plane, par les formules (1).

$$(4)\qquad N = 2n + 2\pi - 2;$$

$$(5)\qquad d = 2[6p_a - 2\overline{p_1} + (n+\pi)^2 - 17\pi - 5n + 24];$$

$$(6)\qquad k = 3[\overline{p_1} - 4p_a + 6\pi + n - 11].$$

Mais toute courbe algébrique ne saurait être courbe de diramation d'un plan multiple d'ordre $n > 2$. Pourtant, M. Chisini est arrivé à donner une construction de courbes algébriques qui sont de diramation pour un plan n-ple. Cette méthode, que j'ai généralisée, peut s'exprimer ainsi.

Pour construire une courbe de diramation d'un plan multiple d'ordre n, nous prendrons $(n-1)$ courbes

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots,\ C_{n-1},$$

qui seront à regarder comme courbes doubles. A chaque point d'une de ces courbes est attaché un échange (a, b) entre deux déterminations de la fonction $z(x, y)$ [cet échange pouvant être distinct selon les points de la courbe, que l'on peut supposer reposer sur un plan double formé de deux feuillets a_1 et a_2 : ainsi pour les points de C_i situés sur le feuillet a_1, on aura l'échange (a_1, b), pour les autres (a_2, b), ou le même, lá C_i reposant sur un seul feuillet]. Nous appellerons point P, un point d'intersection de deux courbes C_i et G_j pour lesquels les échanges (a, b) et (c, d) possèdent un élément commun, par exemple $a = c$. Nous appellerons point Q, l'intersection de deux courbes C_i et C_j pour lesquelles les échanges respectifs (a, b) et (c, d) portent sur quatre éléments distincts. On considérera les courbes C_i, comptées deux fois, possédant aux points P une diramation (même si en un point P, C_i et C_j sont tangentes); les autres diramations, s'il en existe, sont indifférentes. La courbe de diramation s'obtiendra

(1) *Cf.* Enriques CAMPEDELLI, *Sulla classificazione delle superficie algebriche particularmente di genere zero* (*R. C. Seminario Matematico di Roma*, 1934).

alors en faisant varier infiniment peu la courbe

$$\bar{\varphi} = C_1^2 C_2^2 - C_{n-1}^2,$$

en sorte que les points P soient limites de 3 cuspides de la courbe φ cherchée (6 si en P, C_i et C_j sont tangentes) et que les points Q soient limites de quatre points doubles.

2. Surfaces sections d'une hypersurface par une hyperquadrique de S^4. — Considérons dans l'espace S^4, une hypersurface d'ordre n, et sa section F_{2n}, par une hyperquadrique de S^4. Sur cette surface de S^4, on peut choisir deux points et projeter à partir de ceux-ci. Si l'on fait tendre ces deux points jusqu'à être d'ordre $n-1$, on obtient un plan double, avec courbe de diramation d'ordre $2n$. C'est le procédé de M. Chisini, pour une surface de S^3, sans singularité. Il nous conduit à la courbe de diramation décomposée du type

$$\underset{(1,2)}{C_1} - \underset{(2,3)}{C_2} \ldots \underset{(n-1,n)}{C_{n-1}} - \underset{(n,n+1)}{C_n} - \underset{(n+1,n+2)}{C_{n-1}} \ldots \underset{(2n-2,2n-1)}{C_2} - \underset{(2n-1,2n)}{C_1}$$

une C_i représentant une courbe de degré i.

Vérifions que cette courbe vérifie bien les formules du 1. Les sections planes de la F_{2n}, sont de genre

$$(1) \qquad (2n-1)(n-1) - \frac{2(n)(n-1)}{2} = (n-1)^2,$$

la F_{2n}, pouvant se représenter par une F_{2n} de S^3 dotée d'une conique n — ple γ_2.

Montrons que l'on a

$$(2) \qquad p_a = R(n) = \frac{2n^3 - 9n^2 + 13n - 6}{6},$$

formule vraie pour $n = 1, 2, 3$. Supposons-la vraie pour $n-3$. Soit une surface du 4^e ordre F_4, à point triple, passant par la conique γ_2. Elle se représente sur un plan par le système des

$$C_4(12A),$$

les douze points-base A_i étant sur une cubique elliptique γ_3, et les six premiers $A_1, A_2, \ldots, A_6$ sur une conique γ_2.

Le nombre des adjointes d'ordre $2n-4$ de la $F_{2n}(\gamma_2^n)$ égale celui des surfaces d'ordre $2n-6$ passant $(n-3)$ fois par γ_2. Mais parmi ces surfaces, il y en a m indécomposées et m' décomposées en la F_4 et une F_{2n-10} passant $(n-4)$ fois par γ_2. Donc

$$(3) \qquad m' = R(n-3).$$

Mais les surfaces non décomposées vont découper sur F_4 un système linéaire de courbes de genre $m-1$, d'où

$$(4) \qquad R(n) = m + R(n-3).$$

Les sections de F_4, par les F_{2n-6} passant $(n-3)$ fois par γ_2, se représentent par des

$$C_{6n-18}(6A^{2n-6}, 6A^{n-3}),$$

d'où

$$m-1 = (6n-19)(3n-10) - 3(2n-7)(2n-6) - 3(n-3)(n-4),$$

$$(5) \qquad m-1 = 3n^2 - 18n + 28,$$

d'où

$$p_a = R(n) = \frac{2n^3 - 27n^2 + 121n - 180}{6} + 3n^2 - 18n + 2$$
$$= \frac{2n^3 - 9n^2 + 13n - 6}{6}.$$

Le genre linéaire, est celui des sections par les surfaces d'ordre $n-3$, c'est-à-dire

$$(6) \qquad \overline{p_1} = 2n^3 - 12n^2 + 18n + 1.$$

On en tire les caractères de la courbe de diramation

$$(7) \qquad N = 4n + 2(n-1)^2 - 2 = 2n^2 = 2\left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\right];$$

$$(8) \qquad \begin{cases} k = 2n^3 - 2n, \\ d = 2(n^4 - 2n^3 + n), \end{cases}$$

qui sont bien ceux de notre plan n-ple, chaque intersection de deux courbes consécutives comptant pour 3 cuspides, et de deux autres courbes pour quatre points doubles.

Remarquons qu'une telle surface F_{2n} peut dégénérer en deux surfaces d'ordre n, appartenant à un S^3. Ces deux surfaces se coupent alors selon une courbe générale d'ordre n, section plane commune aux deux surfaces. Ceci suggère l'idée d'obtenir la décomposition de la ligne de diramation d'une surface à partir de la décomposition de celle-ci en deux autres surfaces.

Supposons, en particulier, avoir une surface décomposée sous la forme $\varphi_n \psi_m$. Projetons du point à l'infini de l'axe des z. La courbe de diramation sera

$$\varphi_n \psi_m = 0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \psi_m + \varphi_n \frac{\partial \psi_m}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

Cette courbe se décompose en

$$\left\{\begin{array}{ll} \varphi_m = 0, & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial z} = 0, \\ \psi_m = 0, & \dfrac{\partial \psi_n}{\partial z} = 0, \\ \varphi_n = \psi_m = 0 & \text{(deux fois)}, \end{array}\right. \tag{11}$$

l'ordre de la courbe de diramation étant

$$(m+n)(m+n-1) = m(m-1) + n(n-1) + 2mn. \tag{12}$$

Dans le cas où la surface F_{m+n} possède une courbe double d'ordre q, on doit admettre que φ_n et ψ_m passent par cette courbe, et l'on ne regarde pour section de φ_n et ψ_m que l'intersection variable.

On construira donc le plan représentatif d'une telle F_{m+n}, en associant les plans multiples représentatifs de φ_n et ψ_m, les derniers feuillets étant reliés par une courbe projection de la C_{m+n} d'intersection, ainsi

$$\left(\underset{\varphi_n}{\underset{1,2}{C_1} - \underset{(n-1,\,n)}{C_{n-1}}}\right) - \underset{(n,\,n+1)}{C_{mn}} - \left(\underset{\psi_m}{\underset{n+1,\,n+2}{C_{m+1}} - \underset{(n+m-1,\,n+m)}{C_1}}\right)$$

Exemple : *Surface du 4^e^ ordre à droite double.* — Cette F_4 peut se décomposer en deux quadriques, dont la section variable est une cubique gauche, qui se projette selon une cubique C_3 à point double. Ceci donne le type

$$\underset{(1,\,2)}{C_1} - \underset{(2,\,3)}{C_3} - \underset{(3,\,4)}{C_1}$$

le point double de la C_3 donnera naissance à 4 points doubles de la courbe de diramation, ce qui nous donne bien les caractères $d = 8$, $k = 18$.

Ce type est réalisable par une cubique rationnelle comptée deux fois, et deux coniques tritangentes à la cubique.

Cette décomposition d'une surface nous montre de plus que la courbe intersection des deux surfaces φ_n et ψ_m rencontre les lignes de diramation de ces surfaces en des points limites de trois cuspides de la courbe de diramation de F. En effet, la courbe de diramation est donnée par

$$(13) \qquad \varphi = 0, \qquad \varphi'_z = 0,$$

les cuspides par

$$(14) \qquad \varphi = 0, \qquad \varphi'_z = 0, \qquad \varphi''_{z^2} = 0,$$

en nombre

$$(m+n)(m+n-1)(m+n-2).$$

Si alors

$$\varphi = \varphi_n \psi_m,$$

on a

$$(15) \qquad \varphi_n \psi_m = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \psi_m + \varphi_n \frac{\partial \psi_m}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} \psi_m + 2 \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \frac{\partial \psi_m}{\partial z} + \varphi_n \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial z^2} = 0.$$

Les cuspides sont donc donnés par les points communs à

$$(16) \qquad \begin{cases} \varphi = 0, & \varphi' = 0, & \varphi'' = 0, \\ \varphi = 0, & \psi' = 0, & \psi'' = 0, \\ \varphi = 0, & \psi = 0, & \varphi' = 0, \\ \varphi = 0, & \psi = 0, & \psi' = 0, \end{cases}$$

et l'on a

$$m(m+1)(m+2) + n(n+1)(n+2) + \alpha . mn(m+n-2)$$
$$= (m+n)(m+n-1)(m+n-2),$$

d'où $\alpha = 3$.

Un calcul analogue montre que le fait est général, quelle que soit la décomposition adoptée, pour une surface possédant une courbe double.

Remarque. — Ces derniers résultats nous montrent que l'on peut obtenir pour la même surface plusieurs représentations de Chisini. On ne peut donc conclure de la diversité de deux types réduits de Chisini, la diversité des surfaces représentées.

Exemples : 1° *Surface du* 4^e *ordre* ($d = 12$, $k = 24$) :

$$\underset{(1,2)}{C_1} - \underset{(2,3)}{C_2} \qquad - \underset{(3,4)}{C_3}$$

$$\underset{(1,2)}{C_1} - \underset{(2,3)}{C_4}(2A^2) - \underset{(3,4)}{C_1}.$$

Dans le deuxième type, les $(C_1)^2$ sont à remplacer par des coniques quadritangentes à la C_4.

2° *Surface du* 5^e *ordre* ($d = 60$, $k = 60$) :

$$\underset{(1,2)}{C_1} - \underset{(2,3)}{C_2} - \underset{(3,4)}{C_3} \qquad - \underset{(4,5)}{C_4}.$$

$$\underset{(1,2)}{C_1} - \underset{(2,3)}{C_2} - \underset{(3,4)}{C_6}(6A^2) - \underset{(5,5)}{C_1}.$$

3° *Surface du* 6^e *ordre* ($d = 180$, $k = 120$) :

$$\underset{(1,2)}{C_1} - \underset{(2,3)}{C_2} - \underset{(3,4)}{C_3} - \underset{(4,5)}{C_4} - \underset{(5,6)}{C_5}$$

$$\underset{(1,2)}{C_1} - \underset{(2,3)}{C_8} - \underset{(3,4)}{C_3} - \underset{(4,5)}{C_2} - \underset{(5,6)}{C_1} \qquad (C_8 \text{ de genre } 9,\ 12A^2)$$

$$\underset{(1,2)}{C_1} - \underset{(2,3)}{C_2} - \underset{(3,4)}{C_9} - \underset{(4,5)}{C_2} - \underset{(5,6)}{C_1} \qquad (C_9 \text{ de genre } 10,\ 18A^2).$$

3. **Essai de reconstruction de surfaces à partir d'un type de Chisini.** — Rappelons que M. Chisini avait montré que si la surface générale de S^3, d'ordre m, possédait un point multiple d'ordre h, sa projection à partir de ce point donne naissance à un plan multiple, dont la courbe de diramation peut se décomposer, faisant d'abord apparaître une courbe double d'ordre $(h+1)$.

Nous allons partir de cette remarque, pour reconstituer les surfaces correspondant aux plans quadruples du type

$$\begin{array}{ccc} \underset{(1,2)}{C_\alpha} & - & \underset{(2,3)}{C_\alpha} \\ & \diagdown\;\diagup & \\ & \underset{(2,4)}{C_\alpha} & \end{array}$$

Ces plans multiples ont les caractères

$$(1)\qquad \begin{cases} n = 4, \\ N = 2n + 2\pi - 2 = 6\alpha, \qquad \pi = 3(\alpha - 1), \\ d = 0, \qquad k = 9\alpha^2. \end{cases}$$

Les formules rappelées plus haut donnent pour ces surfaces

$$(2)\qquad p_a = \frac{3(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{2};$$

$$(3)\qquad \overline{p_1} = 9(\alpha - 2)^2 + 1.$$

Je dis qu'un tel plan quadruple représente une surface F de S^5, d'ordre $(3\alpha + 1)$, dotée de trois points d'ordre $\alpha - 1$. Si l'on impose aux trois points multiples, de devenir α-ples, le genre de la section hyperplane diminue de

$$3\left[\frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} - \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{2}\right] = 3(\alpha - 1).$$

Les courbes y passant forment un réseau de courbes rationnelles d'ordre 1. La surface F a donc été rationalisée par le passage de trois points d'ordre $(\alpha - 1)$ à l'ordre α. On a donc bien

$$(4)\quad p_a = 3\left[\frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{6} - \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)}{6}\right] = \frac{3(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{2}.$$

Ce genre est bien celui de notre plan quadruple. Vérifions l'identité des genres linéaires. Une section générale d'une surface de S^5 d'ordre $(3\alpha + 1)$ a pour genre

$$(5)\qquad p = 3(\alpha - 1) + \frac{3(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{2} = \frac{3\alpha(\alpha - 1)}{2}.$$

Si nous projetons la surface sur un S^3, à partir de deux points d'ordre $\alpha - 1$, on a une surface d'ordre $\alpha + 3$, dotée d'un point d'ordre $\alpha - 1$, et dont les sections ont le genre

$$(6)\qquad 3(\alpha - 1) + \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{2} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 4)}{2}.$$

La surface projection a une courbe double d'ordre

$$(7)\qquad \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2) - (\alpha + 4)(\alpha - 1)}{2} = 3.$$

La cubique double est rationnelle, selon la formule qui donne le genre numérique

$$(8)\quad \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{6}-\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{6}-3(\alpha-1)-1+p=\frac{3(\alpha-1)(\alpha-2)}{2},$$

$$p=0.$$

La courbe canonique est la section de la surface d'ordre $(\alpha+3)$ par l'adjointe d'ordre $\alpha-1$, en dehors de la courbe double, passant $(\alpha-3)$ fois au point multiple. C'est une courbe d'ordre

$$(9)\quad (\alpha-1)(\alpha+3)-6=\alpha^2+2\alpha-9.$$

Son genre linéaire, égal au genre d'une telle courbe, se peut calculer en calculant le genre de la courbe décomposée en la section par une $F_{\alpha-3}$, et une quadrique passant par la cubique. Le calcul assez pénible, nous redonne

$$\overline{p_1}=9(\alpha-2)^2+1.$$

Montrons maintenant qu'une surface de S^3, qui devient rationnelle par la naissance de trois points d'ordre α, détermine un plan multiple dont la courbe de diramation peut se décomposer en 3α courbes, 3 d'ordre α, 3 d'ordre $(\alpha-1)$, ..., 3 d'ordre 2, 3 d'ordre 1. Une telle surface a en effet pour caractères

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} p_a &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2},\\ \overline{p_1} &= \frac{21\alpha^2-13\alpha+110}{2},\end{aligned}\right.$$

$$n=3\alpha+1,\qquad \pi=3\alpha(\alpha-1).$$

Les courbes décomposées doivent se rencontrer en

$$(11)\quad I=\frac{d}{4}+\frac{k}{3}=-p_a+\frac{(n+\pi)^2}{2}-\frac{5\pi}{2}-\frac{3n}{2}+1$$

points, c'est-à-dire

$$(12)\quad I=9\alpha^4+14\alpha^3+3\alpha^2-2\alpha.$$

Vérifions que la décomposition en 3α courbes, précitées, vérifie bien cette formule. Considérons un système de telles courbes, soit $I(\alpha)$ le nombre des points d'intersection. Ajoutons 3 courbes d'ordre $(\alpha+1)$; le nombre des intersections croît de

$$(\alpha+1)\left[2(\alpha+1)+\frac{3\alpha(\alpha+1)}{2}+\alpha+1+\frac{3\alpha(\alpha+1)}{2}+\frac{3\alpha(\alpha+1)}{2}\right],$$

d'où

$$I(\alpha+1)-I(\alpha)=\frac{9\alpha^3+24\alpha^2+21\alpha+6}{2}. \tag{13}$$

On peut vérifier immédiatement cette formule sur (12).

Théorème. — *Un plan quadruple dont la courbe de diramation est*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \underset{1,2}{C_\alpha} \arrow[rr, dash] \arrow[dr, dash] & & \underset{2,3}{C_\alpha} \arrow[dl, dash] \\ & \underset{2,4}{C_\alpha} & \end{tikzcd}$$

représente une surface d'ordre $\alpha+3$, *de* S^5, *possédant trois points d'ordre* $\alpha-1$.

Un autre type de surfaces peut facilement s'interpréter. Considérons un plan multiple du type

$$C_i - C_{i+1}, \ldots, C_n - C_h - C_{h+q}, \ldots, C_{h+k};$$

si C_i, C_{i+1}, ..., C_n, sont $(n-i)$ courbes d'ordre i, $i+1$, ..., n, croissants, si C_{h+k}, ..., C_{h+q} sont des courbes d'ordre k, $k+1$, ..., p, et si C_h est courbe d'ordre h, de genre $p<\pi$, $h<nq$, π étant le genre de la section d'une surface générale d'ordre q, par une surface d'ordre n. Un tel plan multiple représente une surface d'ordre $n+q$ dotée de deux points multiples d'ordres respectifs $i-1$ et $k-1$, et d'une courbe double d'ordre $nq-k$, telle qu'associée à la courbe C_h, d'ordre h, l'ensemble représente la courbe d'ordre nq, section des surfaces d'ordre n et q.

Ceci peut nous suggérer une méthode pour résoudre un problème de classification non encore résolu. M. Enriques, à la page 31 de son Ouvrage, *Sulla classificazione delle superficie algebriche particulamente di genere zero*, fait la remarque suivante :

« La question de savoir si les surfaces qui correspondent à des valeurs générales des caractères p_g, p_a, $\overline{p_1} > 1$ forment une ou plusieurs familles distinguables par quelque autre caractère numérique, n'a pas encore été résolue ».

Nous nous contenterons de montrer que l'on peut trouver des décompositions de Chisini, de plans quadruples différents selon les valeurs des caractères p_a, et $\overline{p_1} > 1$.

Supposons deux plans quadruples de décomposition

$$C_u,\ C_v,\ C_w,$$
$$C_{u'},\ C_{v'},\ C_{w'}$$

donnant les mêmes caractères. Nous supposerons pour simplifier les types consécutifs et dans l'ordre des lettres. On aura donc

$$u + v + w = u' + v' + w', \tag{14}$$
$$uv + vw + wu = u'v' + v'w' + w'u', \tag{15}$$
$$uw = u'w', \tag{16}$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} u' = \alpha u, \qquad w' = \dfrac{w}{\alpha} \qquad (\alpha \text{ entier}), \\ v(u + w) = v'(u' + w'). \end{array}\right. \tag{17}$$

Supposons de plus que C_v et $C_{v'}$ aient des points doubles en nombre égal. Pour éviter les difficultés d'interprétation et se ramener au cas des surfaces décomposables en deux autres, je supposerai

$$v < uw, \qquad v' < u'w'. \tag{18}$$

Je peux ainsi avoir les deux surfaces

$$\left\{\begin{array}{l} u = 3 \\ v = 8 \\ w = 4 \end{array}\right. \quad (15 p^{ts} \text{ doubles}) \qquad \left\{\begin{array}{l} u' = 6 \\ v' = 7 \\ w' = 2 \end{array}\right. \quad (15 p^{ts} \text{ doubles})$$

avec

$$N = 30, \qquad \pi = 12,$$
$$p_a = 10, \qquad \overline{p_1} = 31.$$

La première surface est une surface du 9^e ordre, qui peut se décomposer en une du 4^e ordre à point double, et une du 5^e à point triple. Cette surface a une courbe double du 12^e ordre qui avec celle du 8e ordre de genre 6, forme une courbe du 20e ordre de genre 51, donc courbe double du 12e ordre de genre 17, rencontrant celle du 8e ordre en 29 points.

La seconde surface est du 10e ordre, décomposable en une cubique et une du 7e ordre à point quintuple. Il y a une courbe double d'ordre 14, qui avec la courbe rationnelle du 7e ordre, donne une C_{21} de genre 64. Cette C_{14} est donc de genre 21, rencontrant la C_7 en 44 points.

Il resterait à voir si ces deux surfaces ne sont pas birationnellement distinctes. Je pense revenir ultérieurement sur ce problème.

4. Les surfaces rationnelles nées des surfaces dont tous les genres sont 1. — Si l'on impose à une surface dont tous les genres sont 1, de posséder un point triple, on peut obtenir une surface rationnelle. Projetant à partir du point triple, la $F_{2\pi-2}$ de S^{π}, on a dans $S^{\pi-1}$ une surface rationnelle d'ordre $2\pi-5$ à sections de genre $\pi-3$. La première surface de cette famille est la surface cubique, et celles correspondant à des valeurs supérieures de π, s'obtiennent à partir de la surface cubique, que l'on peut regarder comme leur projection à partir d'un nombre convenable de points doubles. Nous allons voir comment pour les valeurs simples de π, on peut reconstituer leurs plans multiples représentatifs, à partir des coniques contenues dans la surface cubique.

α. $\pi=5$. — Considérons sur la surface cubique une seule conique C_2, ceci donnera bien au type le plus simple

$$\underset{(1,2)}{C_1} - \underset{(2,3)}{C_2} - \underset{(3,4)}{C_2} - \underset{(4,5)}{C_1},$$

qui d'après les formules connues donne

$$\overline{p_1}=2,$$

ce qui est en accord avec la représentation plane (1)

$$C_4(A^2, 7B)$$
$$\overline{p_1}=10-\sigma=10-8=2.$$

(1) *Cf.* Pour les représentations planes de ces surfaces rationnelles, se reporter à ma Thèse

β. $\pi = 6$. — Nous avons à considérer sur la cubique deux coniques C_2 et Γ_2 ; ceci va donner lieu à trois groupements possibles de ces coniques.

a. C_2 et Γ_2 ne se rencontrent pas sur la cubique. Ceci conduit au type

$$\underset{(1,\,2)}{\gamma_1} - \underset{(2,\,3)}{\gamma_2} \begin{cases} \underset{(2-3,\,4)}{C_2} - \underset{(4,\,5)}{C_1} \\ \underset{(2-3,\,6)}{\Gamma_2} - \underset{(6,\,7)}{\Gamma_1} \end{cases}$$

les arcs de C_2 comportant soit l'échange (2, 4), soit l'échange (3, 4), ce que j'ai indiqué par (2-3; 4).

On a alors $k = 42$, $\overline{p_1} = 0$, correspondant à la représentation plane C_5 (A^3, $9B$) pour laquelle $\sigma = 10$.

b. C_2 et Γ_2 ne se rencontrent qu'en un point sur la cubique (1); la courbe de diramation a alors les caractères $k = 45$, $\overline{p_1} = 1$, ce qui correspond à la représentation plane $C_5(3A^2, 6B)$; $\sigma = 9$.

c. C_2 et Γ_2 se rencontrent en deux points sur la cubique. On obtient $k = 48$, $\overline{p_1} = 2$, ce qui correspond à la représentation plane $C_6(7A^2, B)$; $\sigma = 8$.

γ. $\pi = 7$. — Nous avons à considérer sur la cubique trois coniques C_2, Γ_2 et Δ_2.

a. Les coniques sont sans point commun. C'est le cas où $k = 60$, $\overline{p_1} = -2$, en correspondance avec la représentation plane $C_6(A^4, 11B)$; $\sigma = 12$.

b. C_2 et Γ_2 n'ont pas de point commun, Δ_2 les rencontre chacune en un point. On a $k = 66$, $\overline{p_1} = 0$, qui correspond à la représentation plane $C_6(A^3, 3A^2, 6B)$; $\sigma = 10$.

c. C_2, Γ_2 et Δ_2 se rencontrent deux à deux en un point. On a alors $k = 69$, $\overline{p_1} = 1$, qui correspond à la représentation plane $C_6(6A^2, 3B)$; $\sigma = 9$.

---

(1) *Nota*. — Pour des raisons typographiques, j'ai renoncé à partir de ce type à donner le schéma représentatif. La construction est la même, mais il y a lieu de joindre par un tiret vertical, les courbes C_2 et Γ_2, qui se coupent en un point, appartenant au même feuillet, donnant donc naissance à un point P. Il est même bon d'indiquer, près de ce tiret, le nombre de points d'intersection; dans le cas (*b*), on aurait $\begin{matrix} C_2 \\ | \\ \Gamma_2 \end{matrix}$ (1 point).

d. Les trois coniques passent toutes par deux points. On a alors $k = 72$, $\overline{p_1} = 2$, en accord avec la représentation plane $C_6(8A^3)$; $\sigma = 8$.

δ. $\pi = 8$. — L'étude de ce cas est déjà plus compliquée, mais on peut noter que ces surfaces étant virtuellement de genre 1, la représentation plane a au plus douze points-base, d'où il résulte que $\overline{p_1} \geqq -2$.

a. Les quatre coniques C_2, Γ_2, Δ_2, D_2 sont par couples : (C_2, Γ_2), (D_2, Δ_2) sans points communs et chaque conique d'un couple rencontre en un point chacune de celles de l'autre couple. Ce cas nous donne $k = 90$, $\overline{p_1} = 0$, correspondant à la représentation plane $C_6(5A^2, 5B)$; $\sigma = 10$.

b. La conique C_2 coupe Γ_2 en deux points; D_2 et Δ_2 se coupent en un point, et passent chacune par un point commun à C_2 et Γ_2; ceci donne $k = 93$, $\overline{p_1} = 1$, correspondant à la représentation plane $C_7(A_3, 7B^2, C)$; $\sigma = 9$.

c. Les quatre coniques ont un point commun, qui compte pour trois intersections. On a alors $k = 87$, $\overline{p_1} = -1$, ce qui correspond à la représentation plane $C_5(A^2, 10B)$; $\sigma = 11$.

ε. $\pi = 9$. — Sur la cubique nous devons considérer cinq coniques : C_2, Γ_2, D_2, Δ_2 et E_2.

a. Les cinq coniques ont un point commun, comptant pour quatre intersections. Le cas correspond à la représentation plane $C_6(A^3, B^2, 10C)$; $\sigma = 12$, puisque l'on a $k = 108$, $\overline{p_1} = -2$.

b. Les coniques C_2 et Γ_2 ne se rencontrent pas; les coniques D_2 et Δ_2 ne se rencontrent pas. E_2 passe par deux points A et B, A commun à C_2 et D_2, B commun à Γ_2 et Δ_2; C_2 rencontre D_2 et Δ_2, Γ_2 aussi.

Ce cas conduit à $k = 114$, $\overline{p_1} = 0$. Il correspond à la représentation plane $C_7(A^3, 6B^2, 3C)$; $\sigma = 10$.

c. Les coniques C_2 et D_2 ont un point commun A; E_2 rencontre C_2 en B, D_2 en F; la conique Γ_2 passe en B et F, la conique Δ_2 passe en F et A.

Cette hypothèse conduit à $k = 117$, $\overline{p_1} = 1$. Elle correspond à la représentation plane $C_8(7A^3, B^2, C)$; $\sigma = 9$.

Remarque. — Il est à noter que par ce procédé nous ne pouvons obtenir toutes les surfaces rationnelles du type considéré. En effet, le procédé suppose que la F_{13} puisse être dotée de cinq points doubles distincts, formant un S_4, ce qui n'est pas toujours possible. C'est par exemple le cas de la surface représentée par

$$C_2(9A^3), \qquad \sigma = 9, \qquad \overline{p_1} = 1.$$

Pour cette surface, nos cinq coniques doivent se rencontrer en trois points valant sept intersections, d'où la décomposition

$$7 = 3 + 3 + 1$$

(la décomposition $3 + 2 + 2$, correspondant au cas précédent), mais on ne peut construire sur la surface cubique cinq coniques possédant de telles intersections.

L'étude des valeurs supérieures de π, devient rapidement ardue, la position respective d'un grand nombre de coniques étant difficile à connaître.

La méthode de M. Chisini, malgré les quelques généralisations que je lui ai apportées, laisse donc encore échapper la représentation de nombreuses surfaces, même pour des valeurs assez faibles de leurs caractères. Ceci montre encore l'intérêt qu'il y aurait à connaître les raisons profondes de la *réductibilité* de la condition d'imposer à une surface une singularité, même aussi simple que le point triple. Alors qu'il n'existe pour π donné, qu'une famille générale de surfaces de genres 1, $F_{2\pi-2}$ de S^π, à sections de genre minimum, représentable par un plan multiple obtenu simplement par une méthode de Chisini généralisée, il existe un très grand nombre de surfaces rationnelles à point triple, d'ordre de S^π, nées de cette $F_{2\pi-2}$, et seulement certaines d'entre elles se laissent représenter par des plans multiples construits selon les mêmes principes.

(Manuscrit reçu le 12 janvier 1946.)