JEAN DIEUDONNÉ

Compléments à trois articles antérieurs

Bulletin de la S. M. F., tome 74 (1946), p. 59-68

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1946__74__59_0>

COMPLÉMENTS A TROIS ARTICLES ANTÉRIEURS;

PAR M. JEAN DIEUDONNÉ.

I.

1. Je voudrais revenir d'abord sur la démonstration d'un résultat de mon article *Sur le socle d'un anneau et les anneaux simples infinis* publié en 1942 dans ce *Bulletin* [1]. Il s'agit de la proposition énoncée dans les dernières lignes de la page 70 et les premières de la page 71 de ce travail : il y est affirmé que tout isomorphisme de B_1 sur B_2 est nécessairement de la forme $u \rightarrow f \circ u \circ f^{-1}$, où f est un di-automorphisme de E. En réalité, le raisonnement prouve seulement que la *restriction* d'un tel isomorphisme au *socle* $\mathcal{F}(E, E'_1)$ de B_1 est de cette forme; mais il faut encore montrer que l'isomorphisme considéré, que nous désignerons par g, coïncide bien avec l'isomorphisme $u \rightarrow f \circ u \circ f^{-1}$ sur tout l'anneau B_1, et non seulement sur $\mathcal{F}(E, E'_1)$. C'est ce que je me propose d'établir.

Lorsqu'on le munit de la topologie $\mathcal{T}$ (S, p. 63-67), l'anneau $\mathcal{F}(E, E'_1)$ est partout dense dans son complété $\mathcal{E}(\hat{E}, E'_1)$; nous désignerons par $\mathcal{T}_1$ la topologie de ce dernier. L'anneau $\mathcal{F}(E, E'_1)$ est *a fortiori* dense dans le sous-anneau B_1 de $\mathcal{E}(\hat{E}, E'_1)$; la proposition sera donc démontrée si l'on établit que les isomorphismes g et $u \rightarrow f \circ u \circ f^{-1}$ sont *continus* pour la topologie induite par $\mathcal{T}_1$ sur l'anneau B_1 (et la topologie analogue sur B_2). En fait, nous allons voir que *tout* isomorphisme de B_1 sur B_2 est *continu* pour ces topologies; cela résultera immédiatement du fait que la topologie induite par $\mathcal{T}_1$ est *entièrement déterminée par la structure algébrique* de l'anneau B_1.

---

[1] *Bull. Soc. Math. de France*, t. 70, 1942, p. 46-75. Nous désignerons par la suite cet article par la lettre S.

En effet, on a un système fondamental de voisinages de zéro dans la topologie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{F}(E, E'_1)$ en prenant les idéaux à droite *annihilateurs à droite dans* $\mathcal{F}(E, E'_1)$ *des éléments de cet anneau* (S p. 64). Comme $\mathcal{E}(\hat{E}, E'_1)$ est le complété de $\mathcal{F}(E, E'_1)$, un système fondamental de voisinages de zéro pour la topologie $\mathcal{C}_1$ est formé des *adhérences* dans $\mathcal{E}(\hat{E}, E'_1)$ des annihilateurs à droite précédents (¹); montrons que ce sont les annihilateurs à droite, *dans l'anneau* $\mathcal{E}(\hat{E}, E'_1)$, des éléments du sous-anneau $\mathcal{F}(E, E'_1)$. En effet, soit u_0 un élément de $\mathcal{F}(E, E'_1)$, $\mathfrak{r}$ son annihilateur à droite dans $\mathcal{F}(E, E'_1)$; l'adhérence $\bar{\mathfrak{r}}$ de $\mathfrak{r}$ dans $\mathcal{E}(\hat{E}, E'_1)$ est un voisinage de zéro, donc un idéal ouvert et fermé, et il est contenu dans l'annihilateur à droite $\mathfrak{r}'$ de u_0 dans $\mathcal{E}(\hat{E}, E'_1)$; donc $\mathfrak{r}'$ est aussi ouvert et fermé, ce qui entraîne qu'il est l'adhérence de sa trace sur le sous-anneau partout dense $\mathcal{F}(E, E'_1)$; mais cette trace est par définition $\mathfrak{r}$, donc $\mathfrak{r}' = \bar{\mathfrak{r}}$.

Si l'on se rappelle que $\mathcal{F}(E, E'_1)$ est le *socle* (droit) de l'anneau B_1 (S, p. 70), on peut donc dire que les voisinages de zéro dans la topologie induite par $\mathcal{C}_1$ sur B_1 sont les *annihilateurs à droite, dans* B_1, *des éléments du socle droit de* B_1 : définition qui ne dépend que de la structure algébrique de B_1.

2. Dans un article paru seulement en 1944 dans les *Annals of Mathematics*, mais tout à fait indépendant du nôtre (²), M. B. H. Arnold a retrouvé les cas particuliers de nos théorèmes 4 et 5 correspondant au cas où le corps des endomorphismes d'un idéal à gauche minimal des anneaux *simples* qu'il considère est le corps des nombres complexes. Il est intéressant de constater, comme nous allons le voir, que les méthodes de M. Arnold s'adaptent sans difficulté au cas des anneaux simples généraux, et fournissent dans ce cas des démonstrations des théorèmes précités plus simples que celles que nous avons données tout d'abord.

Soit donc A un anneau simple possédant des idéaux minimaux

(¹) Voir N. Bourbaki, *Topologie générale* (*Act. Scient. et Ind.*, n° 916, p. 30, prop. 7).

(²) B. H. Arnold, *Rings of operators on vector spaces* (*Ann. of Math.*, t. 45, 1944, p. 24).

à gauche, et soit E un *idéal à gauche minimal* de A; soit K le corps des endomorphismes de l'idéal E; pour tout endomorphisme $\lambda \in K$ et tout élément $x \in E$, nous désignerons par λx le transformé de x par l'endomorphisme λ; il est clair que E, muni de sa structure de groupe additif et de la loi externe $(\lambda, x) \to \lambda x$ est un *espace vectoriel à gauche* sur le corps K. Pour tout $y \in A$ l'application $x \to yx$ de E dans lui-même est un *endomorphisme* u_y de la structure d'espace vectoriel de E; en effet, pour tout $\lambda \in K$, il existe un élément a_λ dans l'idéal E tel qu'on ait identiquement $\lambda x = xa_\lambda$ dans E (S, p. 51); par suite

$$y(\lambda x) = y(xa_\lambda) = (yx)a_\lambda = \lambda(yx)$$

ou encore $u_y(\lambda x) = \lambda u_y(x)$. Il est immédiat qu'on a

$$u_{y+z} = u_y + u_z \qquad \text{et} \qquad u_{yz} = u_y \circ u_z,$$

donc l'application $y \to u_y$ est une *représentation* de l'anneau A dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de l'espace vectoriel E; c'est d'ailleurs un *isomorphisme* de A *dans* $\mathcal{L}(E)$, car l'annihilateur à gauche de l'idéal à gauche E dans A est un idéal bilatère, donc égal à A ou à (o), et il ne peut être égal à A (S., p. 53, prop. **3**) [1].

Étudions les endomorphismes u_y de E pour $y \in E$. A tout $y \in E$ correspond l'endomorphisme $x \to xy$ de l'idéal à gauche E; c'est donc un élément de K, que nous désignerons par $\varphi(y)$, et l'on a $u_y(x) = \varphi(x).y$. Cette dernière relation montre que, pour tout $\mu \in K$

$$\varphi(\mu x)y = u_y(\mu x) = \mu u_y(x) = \mu\varphi(x)y,$$

autrement dit $\varphi(\mu x) = \mu\varphi(x)$, φ est une *forme linéaire* sur E, et les endomorphismes u_y sont ainsi déterminés pour $y \in E$.

Supposons maintenant que z appartienne à un autre idéal à gauche minimal de E; un tel idéal est de la forme Eb, donc on a $z = yb$ avec $y \in E$, et par suite $u_z(x) = \varphi(bx)y$; l'application

---

[1] Si l'on faisait un raisonnement analogue pour un anneau *quasi-simple à gauche* A, l'application $y \to u_y$ ne serait plus un isomorphisme, mais appliquerait A sur un anneau isomorphe à l'anneau simple quotient de A par son annihilateur à gauche.

$x \rightarrow \varphi(bx)$ est encore une forme linéaire sur E, que nous désignerons par φ_b.

Si enfin z est un élément quelconque de A, il appartient à la somme d'un nombre fini d'idéaux à gauche minimaux Eb_i de A, donc on peut écrire $u_z(x) = \sum_i \varphi_{b_i}(x) y_i$. On voit donc que : 1° $u_z(E)$ est de dimension finie; 2° si E′ est le sous-espace vectoriel du dual E^* de E, engendré par les φ_b, où b parcourt A, $\overset{-1}{u_z}(0)$ est intersection d'un nombre fini d'hyperplans de la forme $\overset{-1}{\psi_i}(0)$, où les ψ_i appartiennent à E′. Autrement dit, l'image de A dans $\mathcal{L}(E)$ par l'isomorphisme $z \rightarrow u_z$ est contenu dans l'anneau $\mathcal{F}(E, E')$. Reste à montrer que cette image est identique à $\mathcal{F}(E, E')$; il suffit de raisonner comme dans S, pages 57-58, en remarquant que, quels que soient les éléments b_i de A, les éléments λ_i de K (en nombre fini), et l'élément $y \in E$, l'endomorphisme

$$x \rightarrow \left(\sum_i \varphi_{b_i}(x) \lambda_i\right) y$$

est de la forme u_z, avec

$$z = \sum_i (\lambda_i y) b_i.$$

Le théorème 4 est ainsi démontré.

3. Voyons maintenant comment la même méthode permet de démontrer le théorème 5 (S, p. 69) caractérisant les isomorphismes d'un anneau simple A (possédant des idéaux à gauche minimaux) sur un anneau simple B.

Soit θ un tel isomorphisme, E un idéal à gauche minimal de A, $F = \theta(E)$ l'idéal à gauche minimal de B qui lui correspond; nous désignerons par f la *restriction* à E de l'isomorphisme θ. Avec les notations du n° 2, on a, pour tout $z \in A$ et tout $y = f(x) \in F$,

$$f \circ u_z \circ f^{-1}(y) = f[u_z(x)] = f(zx) = \theta(zx) = \theta(z)\theta(x) = \theta(z) f(x) = u_{\theta(z)}(y),$$

autrement dit, $u_{\theta(z)} = f \circ u_z \circ f^{-1}$.

D'autre part, pour $x \in E$, $y \in E$, on a en posant $\lambda_x = \varphi(x)$

$$f(\lambda_x y) = f(yx) = f(y) f(x) = \lambda_{f(x)} f(y);$$

si $\lambda_x = 0$ dans le corps K des endomorphismes de l'idéal à gauche E, on a $\lambda_{f(x)} = 0$ dans le corps K' des endomorphismes de l'idéal F ; d'autre part

$$\lambda_{f(xy)} = \lambda_{f(x)f(y)} = \lambda_{f(y)}\lambda_{f(x)};$$

on déduit donc de l'application f de E sur F un *isomorphisme* $\lambda \to \lambda^\sigma$ de K sur K', et l'on peut alors écrire, pour tout $y \in$ E et tout $\lambda \in$ K, $f(\lambda y) = \lambda^\sigma f(y)$, ce qui prouve que f peut être considéré comme un *di-isomorphisme* de l'espace vectoriel E par rapport à K, sur l'espace vectoriel F par rapport à K'. Si l'on identifie A à l'anneau $\mathcal{F}$(E, E'), B à l'anneau $\mathcal{F}$(F, F'), l'isomorphisme θ est donc identique à l'isomorphisme $u \to f \circ u \circ f^{-1}$, ce qui achève de démontrer le théorème 5.

On notera que ces démonstrations n'utilisent pas l'axiome de Zermelo. Jointes aux considérations de S, pages 51-54 [*voir* aussi la note (17) de la page 59], elles semblent bien fournir la voie la plus *naturelle* pour arriver aux théorèmes fondamentaux de la théorie des anneaux semi-simples de longueur finie, savoir les deux théorèmes de Wedderburn et la caractérisation des automorphismes d'un anneau simple.

4. Toutefois, le résultat le plus fréquemment utilisé dans la théorie des algèbres simples de rang fini n'est pas le théorème 5 de S, donnant *tous* les automorphismes d'une algèbre simple A, mais bien le théorème de Skolem-Noether (1) qui caractérise ceux de ces automorphismes *laissant invariants tous les éléments du centre* Z de A. Nous allons montrer comment ce théorème peut se déduire du théorème 5.

On sait que Z est un corps commutatif; supposons d'abord qu'il soit *algébriquement fermé*; alors A est l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie sur Z. Tout automorphisme g de A est donc de la forme $u \to f \circ u \circ f^{-1}$, où f est un di-automorphisme de l'espace vectoriel E correspondant à

(1) *Cf.* M. Deuring, *Algebren*, p. 43, Satz 5. On sait que ce théorème n'est plus exact pour les algèbres simples de rang infini, en particulier pour les corps gauches de rang infini sur leur centre.

un automorphisme σ de Z; si g laisse invariants les éléments du centre de A, qu'on peut identifier aux homothéties $x \rightarrow \gamma x$ de E, avec $\gamma \in Z$, on doit avoir $\gamma^\sigma = \gamma$, donc f est un automorphisme de E, autrement dit $f \in A$.

Passons maintenant au cas général; soit (c_i) une base de A par rapport à son centre Z; un automorphisme g de A laissant invariants les éléments de Z est une application linéaire biunivoque de A (considéré comme espace vectoriel sur Z) sur lui-même, satisfaisant aux conditions $g(c_i c_j) = g(c_i) g(c_j)$. Soit Ω un surcorps algébriquement fermé de Z; on étend g en un automorphisme $\bar{g}$ de l'algèbre A_Ω de centre Ω (obtenue par extension à Ω du corps des opérateurs de A) par la condition

$$\bar{g}\left(\sum_i \omega_i c_i\right) = \sum_i \omega_i g(c_i) \qquad (\omega_i \in \Omega).$$

L'algèbre A_Ω est une algèbre simple de centre Ω [1], et $\bar{g}$ laisse invariants les éléments du centre Ω, donc il existe $a = \sum_i \alpha_i c_i$, où les $\alpha_i \in \Omega$, tel que $g(c_i) = a c_i a^{-1}$, ou encore $a c_i = g(c_i) a$ pour tous les c_i. Autrement dit, si l'on pose $x = \sum_i \xi_i c_i$, le système d'équations linéaires $x c_i = g(c_i) x$ par rapport aux ξ_i, admet une solution non nulle appartenant au corps Ω; mais comme les coefficients de ce système sont dans Z, le système admet aussi une solution non nulle dans Z; donc il existe $b \in A$ tel que $b \neq 0$ et $b c_i = g(c_i) b$ pour tout c_i, d'où $bz = g(z) b$ pour tout $z \in A$. Reste à montrer que b est inversible dans A. Or, si $\mathfrak{a}$ est l'annihilateur à droite de b, $g(\mathfrak{a})$ est l'annihilateur à gauche de b; donc $\mathfrak{a}$ est à la fois idéal à gauche et à droite, et comme A est simple, on a nécessairement $\mathfrak{a} = A$ ou $\mathfrak{a} = (0)$. Comme on ne peut avoir $\mathfrak{a} = A$ puisque $b \neq 0$, on a $\mathfrak{a} = (0)$ et l'on sait que cela entraîne que b est inversible. On a bien démontré ainsi que tout automorphisme de A laissant invariants les éléments de Z est un automorphisme *intérieur*.

---

[1] M. Deuring, *loc. cit.*, p. 36.

II.

5. Dans l'article *Les déterminants sur un corps non commutatif* paru en 1943 [1], les théorèmes **2** et **3** (D, p. 41-44) sont démontrés pour un corps non commutatif K, soumis à la restriction que son centre a plus de 3 éléments (pour le th. **2**), un nombre d'éléments distinct de 2, 3 et 5 (pour le th. **3**). Nous allons voir qu'en réalité les théorèmes sont valables pour un corps non commutatif *quelconque*; les seuls corps pour lesquels ils sont en défaut sont donc les corps *commutatifs* à 2 et 3 éléments.

Ce résultat va découler d'une meilleure utilisation de la méthode exposée dans D, pages 43-44. Commençons par le théorème **2**; il s'agit de montrer que si G contient une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, il contient aussi une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$, avec, ou bien $\alpha' \neq \delta'$, ou bien $\alpha' = \delta'$, mais α' n'appartenant pas au centre de K.

Cherchons alors, comme dans D, page 43, un automorphisme v de E tel qu'on ait $u[v(e_1)] = \lambda e_1$, $v[u(e_1)] = \mu e_1$, mais en prenant pour λ et μ deux éléments *quelconques* de K (et non deux éléments du centre de K); on trouve que ces conditions déterminent v, et que la matrice correspondante est $\begin{pmatrix} -\lambda\gamma^{-1}\delta\beta^{-1} & \lambda\gamma^{-1} \\ \beta^{-1}\mu & 0 \end{pmatrix}$. Formons alors l'automorphisme $u^{-1}v^{-1}uv$ qui appartient à G; on constate qu'il correspond à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda\mu^{-1} & 0 \\ \xi & \beta^{-1}\mu\beta\gamma\lambda^{-1}\gamma^{-1} \end{pmatrix}$ (où il n'est pas nécessaire d'expliciter ξ); cette matrice sera certainement de la forme voulue si $\lambda\mu^{-1}$ n'appartient pas au centre de K, ce qui est toujours possible lorsque K n'est pas commutatif. Le théorème **2** est donc valable pour un corps non commutatif quelconque.

Si l'on veut appliquer la même méthode au théorème **3**, il faut que l'automorphisme v appartienne au groupe C_2 des commutateurs de GL_2 (K), c'est-à-dire, d'après le calcul du déterminant de cet automorphisme, que $\varphi(-\beta^{-1}\mu\lambda\gamma^{-1}) = 1$ (φ application canonique du groupe K^* sur son quotient K^*/C par son groupe des commuta-

[1]. *Bull. Soc. Math. de France*, t. 71, 1943, p. 27-45. Nous désignerons cet article par la lettre D.

teurs); comme K^*/C est abélien, et que $\varphi(-\beta\gamma)=1$ par hypothèse, cette condition revient à $\varphi(\lambda\mu)=1$, autrement dit, $\lambda\mu$ doit appartenir au groupe C.

Cela étant, on aura dans G une matrice de la forme voulue, sauf si $\beta^{-1}\mu\beta\gamma\lambda^{-1}\gamma^{-1}=\lambda\mu^{-1}$ et si les deux membres sont dans le centre Z pour tous les choix possibles de λ et μ tels que $\lambda\mu\in C$; nous allons voir que ce n'est pas possible si K est non commutatif.

Prenons en effet λ quelconque et $\mu=\lambda^{-1}$; la condition $\lambda\mu\in C$ étant bien vérifiée, on devrait avoir $\lambda^2\in Z$ pour tout λ de K. D'autre part, si l'on prend λ et μ dans Z tels que $\mu=\lambda^{-1}$, la relation $\beta^{-1}\mu\beta\gamma\lambda^{-1}\gamma^{-1}=\lambda\mu^{-1}$ donne $\lambda^4=1$; tout élément non nul de Z étant racine quatrième de l'unité, Z est nécessairement un corps *fini* (de 2, 3 ou 5 éléments). Cela étant, comme le carré d'un élément quelconque de K appartient à Z, un raisonnement classique ([1]) montre que le sous-corps de K engendré par deux éléments *quelconques* ξ, η de K est un corps de rang ≤ 4 par rapport à Z, donc un corps fini, et par suite *commutatif* d'après le théorème de Wedderburn ([2]); mais cela contredit l'hypothèse que K est non commutatif. Le théorème 3 est ainsi démontré pour tous les corps non commutatifs.

III.

6. Je reviens enfin sur certains points de mon article *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym* (II) ([3]). Il convient d'abord de compléter les raisonnements des pages 207-208; à la fin du n° **12** (p. 208) il est affirmé que la condition (VII_b) est vérifiée parce que $U(x)$ est borne supérieure de $U_z(x)$ lorsque z parcourt une partie T_0 de l'ensemble T; cela suppose qu'on a établi que, pour tout $z\in T$, on a

$$U_z(x)\leq U(x).$$

([1]) En écrivant que $(\xi+\eta)^2$ appartient à Z, on voit que $\xi\eta+\eta\xi$ appartient à Z, d'où résulte sans peine que tout élément de la sous-algèbre de K engendrée par ξ et η est combinaison linéaire à coefficients dans Z de 1, ξ, η, et $\xi\eta$. D'autre part, cette sous-algèbre est un corps, car pour tout élément $\xi\in K^*$, ξ^{-1} est égal au produit de ξ et de l'élément ξ^{-2} de Z.

([2]) M. Deuring, *loc cit.*, p. 49.

([3]) *Bull. Soc. Math. de France* t. 72, 1944, p. 193-239. Nous désignerons cet article par L-II.

Or, si $z \in T$, on a

$$U_z(x) = U_x(z) = U_{ex}(z) = U_e(xz) \leqq U_e(x) = U(x) \qquad \text{pour tout } x \in E_+.$$

D'ailleurs, ce résultat prouve que $T_0 = T$, car la relation $U_z(x) \leqq U(x)$ s'écrit

$$U_{e-z}(x) \geqq 0 \qquad \text{pour tout } x \in E_+,$$

ce qui entraîne $e - z \geqq 0$ (L-II, p. 201).

Il faut préciser de la même manière le début du raisonnement de la page 207, affirmant que la condition (VII_a) entraîne (VII_b); la raison invoquée, savoir que S est contenu dans T, ne suffit que lorsqu'on a prouvé en outre que $U_z(x) \leqq U(x)$ pour tout $z \in T$ et tout $x \in E_+$. Or, on montre comme au n° 13 (p. 208) que (VII_a) entraîne l'existence d'un élément $e \in E_U$ tel que $U = U_e$, e étant cette fois la borne supérieure dans E_U de l'ensemble filtrant S. Cela fait, le raisonnement du n° 12, complété comme il vient d'être dit, montre que (VII_b) est vérifié.

7. Nous terminerons en précisant un point du raisonnement de la page 225 de L-II. Du fait que la fonction φ_N est limite presque partout de la suite décroissante (y_n), où $y_n = \sup_{p \geqq 0} x_{n+p}$, et $x_n \in E_+$ pour tout n, on conclut que l'ensemble N est, à un ensemble de mesure nulle près, intersection dénombrable de réunions dénombrables d'ensembles de $\mathcal{F}$. Cela demande une démonstration plus détaillée, car si l'on désigne par P_n l'ensemble des points ξ où $x_n(\xi) > 0$, par Q_n celui des points où $y_n(\xi) > 0$, il est clair que Q_n est réunion des ensembles P_{n+p} $(p \geqq 0)$, qui appartiennent à $\mathcal{F}$, mais N *n'est pas* en général intersection des Q_n à un ensemble de mesure nulle près.

Soit $g_n(t)$ la fonction continue de la variable réelle t, définie pour $0 \leqq t \leqq 2$, égale à zéro pour $0 \leqq t \leqq 1 - \frac{1}{n}$, à 1 pour $1 \leqq t \leqq 2$, linéaire pour $1 - \frac{1}{n} \leqq t \leqq 1$. Soit $f_n(t)$ un polynome sans terme constant tel que

$$g_n(t) - \frac{1}{n} \leqq f_n(t) \leqq g_n(t) \qquad \text{pour } 0 \leqq t \leqq 2.$$

Posons $z_n = \sup\limits_{p \geqq 0} [f_n(x_{n+p})]^+$; la fonction φ_N est encore limite presque partout de la suite (z_n); en effet, en un point ξ où la suite des $x_n(\xi)$ converge vers zéro, on a $z_n(\xi) = 0$ à partir d'un certain rang; et en un point où $x_n(\xi)$ converge vers 1, on a $z_n(\xi) > 0$ pour *tout n* et $1 - \frac{1}{n} \leqq z_n(\xi) \leqq 1$ à partir d'un certain rang. On voit en outre que N est, à un ensemble de mesure nulle près, l'intersection des ensembles où $z_n(\xi) > 0$; et chacun de ces ensembles est réunion dénombrable d'ensembles de $\mathcal{F}$, puisque $[f_n(x_{n+p})]^+$ appartient à E_+. La proposition est ainsi complètement démontrée.

(Manuscrit reçu le 17 octobre 1945.)