BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDRÉ CHARRUEAU

Sur la déformation infiniment petite et sur des congruences qui s'y rattachent

Bulletin de la S. M. F., tome 74 (1946), p. 42-58
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1946__74__42_0>

SUR LA DÉFORMATION INFINIMENT PETITE ET SUR DES CONGRUENCES QUI S'Y RATTACHENT;

PAR M. ANDRÉ CHARRUEAU.

1. Soient z et z_1 deux fonctions de x et y. Désignons par p, q, r, s, t les dérivées partielles premières et secondes de z par rapport à x et à y et par p_1, q_1, r_1, s_1, t_1 celles de z_1.

Le trièdre $Oxyz$ des axes de coordonnées est trirectangle et nous appelons (S) la surface lieu du point (x, y, z). Nous supposons que (S) n'est pas développable.

Considérons un domaine dans lequel $rt - s^2 \neq 0$ et regardons p_1 et q_1 comme des fonctions de p et q par l'intermédiaire de x et y. Le calcul des dérivées partielles premières de p_1 et de q_1 par rapport à p et à q s'effectue facilement et l'on a

$$\frac{\partial p_1}{\partial p} + \frac{\partial q_1}{\partial q} = \frac{rt_1 + r_1 t - 2ss_1}{rt - s^2}. \tag{1}$$

Si, en outre, $r_1 t_1 - s_1^2 \neq 0$, on a, de même,

$$\frac{\partial p}{\partial p_1} + \frac{\partial q}{\partial q_1} = \frac{rt_1 + r_1 t - 2ss_1}{r_1 t_1 - s_1^2}. \tag{2}$$

Donnons-nous la fonction $z(x, y)$. Le problème de la déformation infiniment petite de la surface (S) conduit [1] à l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$rt_1 + r_1 t - 2ss_1 = 0, \tag{3}$$

z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1 désignant désormais une solution de (3) et ses dérivées partielles premières et secondes.

---

[1] DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, p. 10 (nouveau tirage).

Dans ces conditions, on a, en vertu de (1) et de (2),

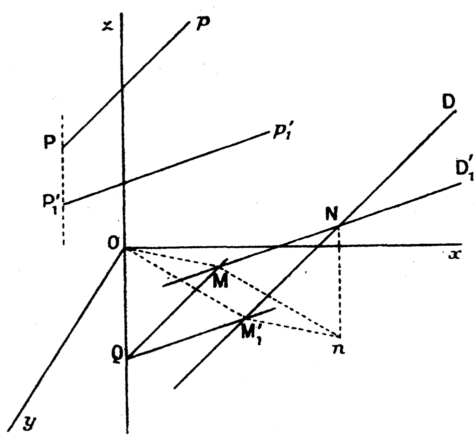
$$\frac{\partial p_1}{\partial p} + \frac{\partial q_1}{\partial q} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial p}{\partial p_1} + \frac{\partial q}{\partial q_1} = 0. \tag{5}$$

Considérons la surface (S'_1), lieu du point $P'_1(x, y, z_1)$. D'après une des hypothèses faites précédemment, (S'_1) n'est pas développable.

Par un point Q, quelconque, du demi-axe négatif des z (*fig.* 1), menons deux droites QM et QM'_1 respectivement parallèles aux normales Pp et $P'_1p'_1$, en P et P'_1, à (S) et à (S'_1).

Fig. 1.



Afin de simplifier l'écriture, nous prendrons QO pour unité de longueur. Q sera donc le point (0, 0, —1). Les droites QM et QM'_1 percent le plan xOy aux points $M(-p, -q, 0)$ et $M'_1(-p_1, -q_1, 0)$. Menons par M et M'_1 respectivement des parallèles, D'_1 et D, aux normales $P'_1p'_1$ et Pp à (S'_1) et à (S), c'est-à-dire des parallèles à QM'_1 et à QM.

La droite D a pour équations

$$X = -pZ - p_1, \qquad Y = -qZ - q_1, \tag{6}$$

et la droite D'_1,

$$X = -p_1Z - p, \qquad Y = -q_1Z - q. \tag{7}$$

Quand le point (x, y, o) se déplace dans le plan xOy, la droite D engendre une congruence, $\mathcal{C}$, et la droite D'_1, une autre congruence, $\mathcal{C}'_1$.

Pour chacune des ces congruences, en vertu de (4) ou de (5), l'équation classique du second degré donnant les cotes des points focaux par rapport au plan xOy ne renferme pas de terme du premier degré. Donc, chacune de ces congruences est à *surface moyenne plane, le plan moyen étant* xOy.

Comme le quadrilatère $QMNM'_1$ et sa projection $OMnM'_1$ sur le plan xOy sont des parallélogrammes, on peut encore définir les deux congruences considérées de la manière suivante. *On prend dans le plan perpendiculaire à* Oz *et de cote* $+1$, *le point* N, *dont les coordonnées sont égales à* $-(p+p_1)$, $-(q+q_1)$, 1 *et l'on mène par ce point des parallèles aux normales* Pp *et* $P'_1p'_1$ *à* (S) *et à* (S'_1).

Nous donnerons plus loin, à la fin du paragraphe 3, une *autre définition* qui indiquera la *surface unique* dont on peut déduire chaque congruence.

Désignons par h^2 et h'^2_1 les carrés des cotes par rapport au plan xOy des *points focaux* des droites D et D'_1 des congruences $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'_1$.

L'application de la formule classique dont nous avons déjà parlé donne

$$h^2\frac{D(p,q)}{D(p_1,q_1)}+1=0 \tag{8}$$

et

$$h'^2_1\frac{D(p_1,q_1)}{D(p,q)}+1=0. \tag{9}$$

Mais

$$\frac{D(p,q)}{D(p_1,q_1)}=\frac{D(p,q)}{D(x,y)}\,\frac{D(x,y)}{D(p_1,q_1)}=\frac{rt-s^2}{r_1t_1-s_1^2}. \tag{10}$$

D'où

$$h^2=-\frac{r_1t_1-s_1^2}{rt-s^2}, \tag{11}$$

$$h'^2_1=\frac{1}{h^2}. \tag{12}$$

Considérons le réseau de courbes du plan xOy défini par

$$-dp\,dq_1+dq\,dp_1=0, \tag{13}$$

c'est-à-dire par

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \\ r & s & t \\ r_1 & s_1 & t_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Il constitue *la projection commune sur le plan xOy d'un réseau conjugué de* (S) *et d'un réseau conjugué de* (S'_1).

Il est le seul réseau du plan xOy qui jouisse de cette propriété.

Quand le point (x, y, o) décrit une courbe du réseau défini par (14), y, p, q, p_1, q_1 sont des fonctions de x et l'on a, en vertu de (13),

$$(15)\qquad -\frac{dp}{dx}\frac{dq_1}{dx} + \frac{dq}{dx}\frac{dp_1}{dx} = 0.$$

Ainsi donc, *les développables des congruences $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'_1$ correspondent, à la fois, au réseau conjugué de* (S) *et au réseau conjugué de* (S'_1) *dont la projection commune sur le plan xOy est le réseau satisfaisant à* (14).

On voit aisément, compte tenu de (3), que le discriminant de l'équation (14), du second degré en $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{dx}{dy}$, est égal à

$$-(rt - s^2)(r_1 t_1 - s_1^2).$$

2. Les propositions précédentes sont déduites de l'équation (3). Elles ne font pas intervenir de couple de surfaces se correspondant avec *orthogonalité des éléments linéaires*.

Nous allons maintenant considérer de telles surfaces.

La suite du présent paragraphe est consacrée à des calculs préliminaires.

Soit (S_1) une surface lieu d'un point P_1 (x_1, y_1, z_1) tel que x_1, y_1, z_1 sont des fonctions de x et y satisfaisant à

$$(16)\qquad dx_1 = -pp_1\,dx + (c_1 - qp_1)\,dy,$$

$$(17)\qquad dy_1 = -(c_1 + pq_1)\,dx - qq_1\,dy,$$

avec

$$(18)\qquad \frac{\partial c_1}{\partial x} = \frac{\partial(qp_1)}{\partial x} - \frac{\partial(pp_1)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial c_1}{\partial y} = \frac{\partial(qq_1)}{\partial x} - \frac{\partial(pq_1)}{\partial y},$$

$$(19)\qquad rt_1 + r_1 t - 2ss_1 = 0.$$

Les surfaces (S) et (S_1) se correspondent avec *orthogonalité des éléments linéaires* et, réciproquement, une correspondance de cette nature entraîne (16), (17), (18) et (19) [1].

La surface (S'), lieu du point $P'(x_1, y_1, z)$ et la surface (S'_1), lieu du point $P'_1(x, y, z_1)$, qui a été déjà envisagée au paragraphe **1**, se correspondent aussi avec *orthogonalité des éléments linéaires*.

Posons

$$k = c_1 + p q_1 - q p_1. \tag{20}$$

On a

$$\left\{\begin{array}{l} dx_1 = c_1\,dy - b_1\,dz, \qquad dy_1 = a_1\,dz - c_1\,dx, \\ dz_1 = b_1\,dx - a_1\,dy, \end{array}\right. \tag{21}$$

$$\left\{\begin{array}{l} dx_1 = c'\,dy - b'\,dz_1, \qquad dy_1 = a'\,dz_1 - c'\,dx, \\ dz = b'\,dx - a'\,dy, \end{array}\right. \tag{22}$$

avec

$$a_1 = -q_1, \qquad b_1 = p_1, \tag{23}$$

$$a' = -q, \qquad b' = p, \qquad c' = k. \tag{24}$$

On a, en outre,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial x_1}{\partial x} = -p p_1, \qquad \dfrac{\partial x_1}{\partial y} = c_1 - q p_1, \qquad \dfrac{\partial y_1}{\partial x} = -(c_1 + p q_1), \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial y} = -q q_1 \end{array}\right. \tag{25}$$

et

$$\frac{D(x_1, y_1)}{D(x, y)} = k c_1. \tag{26}$$

De (18) on tire

$$dc_1 = -p\,dq_1 + q\,dp_1 \tag{27}$$

et, compte tenu de (20),

$$dk = -p_1\,dq + q_1\,dp. \tag{28}$$

Nous supposons

$$k \neq 0, \qquad c_1 \neq 0.$$

---

[1] DARBOUX, *loc. cit.*

On obtient

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial x_1} = -\dfrac{q q_1}{k c_1}, \quad \dfrac{\partial x}{\partial y_1} = -\dfrac{c_1 - q p_1}{k c_1}, \quad \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = \dfrac{c_1 + p q_1}{k c_1}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial y_1} = -\dfrac{p p_1}{k c_1}. \end{cases}$$

Désignons par p', q', r', s', t' les dérivées partielles premières et secondes de z par rapport à x_1 et à y_1. Il vient, compte tenu de (29),

$$(30)\quad \begin{cases} p' = \dfrac{\partial z}{\partial x_1} = p\dfrac{\partial x}{\partial x_1} + q\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = \dfrac{q}{k}, \\ q' = \dfrac{\partial z}{\partial y_1} = p\dfrac{\partial x}{\partial y_1} + q\dfrac{\partial y}{\partial y_1} = -\dfrac{p}{k}. \end{cases}$$

Désignons par p'_1, q'_1, r'_1, s'_1, t'_1 les dérivées partielles premières et secondes de z_1 par rapport à x_1 et à y_1. Nous avons, compte tenu de (29),

$$(31)\quad \begin{cases} p'_1 = \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} = p_1\dfrac{\partial x}{\partial x_1} + q_1\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = \dfrac{q_1}{c_1}, \\ q'_1 = \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} = p_1\dfrac{\partial x}{\partial y_1} + q_1\dfrac{\partial y}{\partial y_1} = -\dfrac{p_1}{c_1}. \end{cases}$$

On a

$$(32)\quad \begin{cases} dx = c\, dy_1 - b\, dz_1, \quad dy = a\, dz_1 - c\, dx_1, \\ dz = b\, dx_1 - a\, dy_1, \end{cases}$$

$$(33)\quad \begin{cases} dx = c'_1\, dy_1 - b'_1\, dz, \quad dy = a'_1\, dz - c'_1\, dx_1, \\ dz_1 = b'_1\, dx_1 - a'_1\, dy_1, \end{cases}$$

avec

$$(34)\quad a = -q' = \frac{p}{k}, \qquad b = p' = \frac{q}{k}, \qquad c = -\frac{1}{k},$$

$$(35)\quad a'_1 = -q'_1 = \frac{p_1}{c_1}, \qquad b'_1 = p'_1 = \frac{q_1}{c_1}, \qquad c'_1 = -\frac{1}{c_1}.$$

Depuis le début du présent paragraphe 2, nous n'avons fait encore aucune hypothèse concernant $rt - s^2$ et $r_1 t_1 - s_1^2$.

Supposant maintenant $rt - s^2 \neq 0$, regardons p_1, q_1, c_1, k, p', q' comme des fonctions de p et q par l'intermédiaire de x et y.

On a, d'après (28),

$$(36)\quad \frac{\partial k}{\partial p} = q_1, \qquad \frac{\partial k}{\partial q} = -p_1.$$

De (30) et (36) on tire

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p'}{\partial p} = -\dfrac{q q_1}{k^2}, \quad \dfrac{\partial p'}{\partial q} = \dfrac{c_1 + p q_1}{k^2}, \quad \dfrac{\partial q'}{\partial p} = -\dfrac{c_1 - q p_1}{k^2}, \\ \dfrac{\partial q'}{\partial q} = -\dfrac{p p_1}{k^2}; \end{cases}$$

$$(38)\quad \frac{D(p', q')}{D(p, q)} = \frac{c_1}{k^3}.$$

D'autre part,

$$r' t' - s'^2 = \frac{D(p', q')}{D(x_1, y_1)} = \frac{D(p', q')}{D(p, q)} \frac{D(p, q)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(x_1, y_1)}.$$

D'où, en vertu de (26) et (38),

$$(39)\quad r' t' - s'^2 = \frac{rt - s^2}{k^4}.$$

Supposant, en outre, $r_1 t_1 - s_1^2 \neq 0$, regardons p, q, c_1, k, p'_1, q'_1 comme des fonctions de p_1 et q_1 par l'intermédiaire de x et y.

On a, d'après (27),

$$(40)\quad \frac{\partial c_1}{\partial p_1} = q, \qquad \frac{\partial c_1}{\partial q_1} = -p.$$

De (31) et (40) on tire

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p'_1}{\partial p_1} = -\dfrac{q q_1}{c_1^2}, \quad \dfrac{\partial p'_1}{\partial q_1} = \dfrac{c_1 + p q_1}{c_1^2}, \quad \dfrac{d q'_1}{\partial p_1} = -\dfrac{c_1 - q p_1}{c_1^2}, \\ \dfrac{\partial q'_1}{\partial q_1} = -\dfrac{p p_1}{c_1^2}; \end{cases}$$

$$(42)\quad \frac{D(p'_1, q'_1)}{D(p_1, q_1)} = \frac{k}{c_1^3}.$$

On a aussi

$$(43)\quad r'_1 t'_1 - s'^2_1 = \frac{r_1 t_1 - s_1^2}{c_1^4}.$$

Au moyen de (28), (30) et (31) on obtient

$$(44)\quad dc = d\left(-\frac{1}{k}\right) = -p'_1\, dq' + q'_1\, dp',$$

et, au moyen de (27), (30) et (31),

$$(45)\quad dc'_1 = d\left(-\frac{1}{c_1}\right) = -p'\, dq'_1 + q'\, dp'_1.$$

Nous avons supposé

$$rt - s^2 \neq 0, \qquad r_1 t_1 - s_1^2 \neq 0.$$

D'après (39) et (43) nous avons aussi

$$r' t' - s'^2 \neq 0, \qquad r'_1 t'_1 - s'^2_1 \neq 0.$$

Si nous regardons $c = -\frac{1}{k}$ comme une fonction de p' et q' nous avons

(46) $$\frac{\partial c}{\partial p'} = q'_1, \qquad \frac{\partial c}{\partial q'} = -p'_1;$$

et, si nous regardons $c'_1 = -\frac{1}{c_1}$ comme une fonction de p'_1 et q'_1 nous avons

(47) $$\frac{\partial c'_1}{\partial p'_1} = q', \qquad \frac{\partial c'_1}{\partial q'_1} = -p'.$$

De (36) on tire

(48) $$\frac{\partial p_1}{\partial p} + \frac{\partial q_1}{\partial q} = 0,$$

et, de (40),

(49) $$\frac{\partial p}{\partial p_1} + \frac{\partial q}{\partial q_1} = 0.$$

On obtient ainsi, à nouveau, les formules (4) et (5).

Puisque les surfaces (S′) et (S'_1) se correspondent, comme (S) et (S_1), avec orthogonalité des éléments linéaires, on a

$$r' t'_1 + r'_1 t' - 2 s' s'_1 = 0$$

et, aussi,

(50) $$\frac{\partial p'_1}{\partial p'} + \frac{\partial q'_1}{\partial q'} = 0,$$

(51) $$\frac{\partial p'}{\partial p'_1} + \frac{\partial q'}{\partial q'_1} = 0.$$

Les relations (50) et (51) peuvent aussi être déduites de (46) et de (47).

De plus, à l'aide de (39 et (43), on a

(52) $$\frac{D(p'_1, q'_1)}{D(p', q')} = \frac{r'_1 t'_1 - s'^2_1}{r' t' - s'^2} = \frac{k^4}{c_1^4} \frac{r_1 t_1 - s_1^2}{rt - s^2}.$$

Enfin, compte tenu de (30), (31), (36), (40), (46) et (47), il vient

$$(53)\qquad \frac{\partial c}{\partial a} = p'_1 = \frac{q_1}{c_1}, \qquad \frac{\partial c}{\partial b} = q'_1 = -\frac{p_1}{c_1};$$

$$(54)\qquad \frac{\partial c_1}{\partial a_1} = p, \qquad \frac{\partial c_1}{\partial b_1} = q;$$

$$(55)\qquad \frac{\partial c'}{\partial a'} = p_1, \qquad \frac{\partial c'}{\partial b'} = q_1;$$

$$(56)\qquad \frac{\partial c'_1}{\partial a'_1} = p' = \frac{q}{k}, \qquad \frac{\partial c'_1}{\partial b'_1} = q' = -\frac{p}{k}.$$

Dans (53), c est regardé comme une fonction de a et b et, dans (54), c_1 est regardé comme une fonction de a_1 et b_1. Il en est de même, dans (55), de c' par rapport à a' et b' et, dans (56), de c'_1 par rapport à a'_1 et b'_1.

3. Au paragraphe **1**, nous avons fait correspondre à l'ensemble des deux surfaces (S) et (S'_1) deux *congruences de droites* $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'_1$, dont *la surface moyenne est le plan* xOy.

Considérons maintenant les deux surfaces (S′) et (S_1) et les deux *congruences*, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_1$, engendrées respectivement par la *droite* D′, d'équations

$$(57)\qquad X = -p'Z - p'_1, \qquad Y = -q'Z - q'_1,$$

et par la *droite* D_1, d'équations

$$(58)\qquad X = -p'_1 Z - p', \qquad Y = -q'_1 Z - q'.$$

En vertu de (50) et de (51), la *surface moyenne* de $\mathcal{C}'$ et celle de $\mathcal{C}_1$ sont confondues avec *le plan* xOy.

D'après des indications du paragraphe **1**, qu'on peut étendre à $\mathcal{C}'$ et à $\mathcal{C}_1$, les quatre congruences $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_1$ sont engendrées respectivement par les droites D, D'_1, D′ et D construites de la manière suivante.

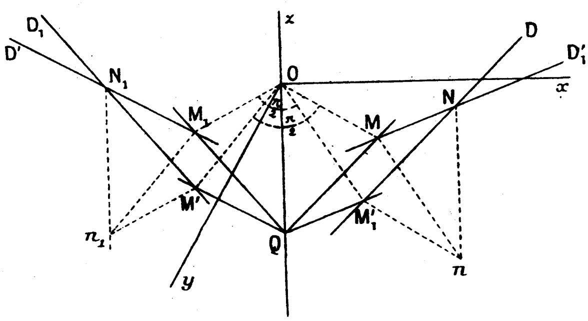
Par le point Q(0, 0, −1) de l'axe des z (*fig.* 2), on mène quatre droites QM, QM'_1, QM′, QM_1 respectivement parallèles aux normales à (S), (S'_1), (S′) et (S_1) aux points correspondants P, P'_1, P′ et P_1. Ces droites percent le plan xOy aux points

$$M(-p, -q, 0), \quad M'_1(-p_1, -q_1, 0), \quad M'(-p', -q', 0),$$
$$M_1(-p'_1, -q'_1, 0).$$

On obtient D'_1, D, D_1 et D' en menant par M, M'_1, M' et M_1 des parallèles aux normales à (S'_1) (S), (S_1) et (S') aux points P'_1, P, P_1 et P'.

Les quadrilatères $QMNM'_1$, $QM'N_1M_1$ et leurs projections $OMnM'_1$, $OM'n_1M_1$ sur le plan xOy sont des parallélogrammes.

Fig. 2.



En vertu de (30) et de (31), les droites OM et OM', d'une part, OM'_1 et OM_1, d'autre part, sont perpendiculaires. On a

$$(OM, OM') = \pm\frac{\pi}{2},$$

selon que $k < 0$ ou $k > 0$, et l'on a

$$(OM'_1, OM_1) = \pm\frac{\pi}{2},$$

selon que $c_1 < 0$ ou $c_1 > 0$. Les projections sur le plan xOy de D et de D' sont perpendiculaires, et il en est de même de celles de D'_1 et de D_1. On obtient, compte tenu de (30) et de (31),

$$\frac{\text{aire parallélog. } OMnM'_1}{\text{aire parallélog. } OM'n_1M_1} = \frac{OM \times OM'_1}{OM' \times OM_1} = |kc_1|.$$

On peut définir les congruences $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_1$ d'une manière analogue à celle qui a été indiquée au paragraphe I pour $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'_1$. *On prend dans le plan perpendiculaire à* Oz *et de cote* $+1$, *le point* N_1, *dont les coordonnées sont égales à* $-(p'+p'_1)$, $-(q'+q'_1)$, 1 *et l'on mène par ce point des parallèles aux normales à* (S') *et à* (S_1) *aux points* P' *et* P_1.

Nous allons indiquer *une autre définition, très importante*, de chacune des congruences $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_1$.

Elle fait intervenir l'une des quatre surfaces (A_1), (A'), (A'_1), (A), lieux des points $A_1(a_1, b_1, c_1)$, $A'(a', b', c')$, $A'_1(a'_1, b'_1, c'_1)$, $A(a, b, c)$, c'est-à-dire, d'après (23), (24), (34) et (35), lieux des points

$$(-q_1, p_1, c_1), \quad (-q, p, k), \quad \left(-q'_1, p'_1, -\frac{1}{c_1}\right), \quad \left(-q', p', -\frac{1}{k}\right).$$

Nous avons étudié dans un autre mémoire [1] des *ensembles de surfaces* comprenant notamment (S), (S_1), (S'), (S'_1), (A), (A_1), (A') (A'_1).

Les vecteurs issus de O aboutissant aux points A, A_1, A', A'_1 des surfaces (A), (A_1), (A'), (A'_1) sont respectivement parallèles aux normales à (S), (S_1), (S'), (S'_1) aux points P, P_1, P', P'_1.

Les surfaces (A), (A_1), (A'), (A'_1) correspondent respectivement aux surfaces (S_1), (S), (S'_1) et (S') par plans tangents parallèles.

En outre, d'après (23), (24), (34) et (35), les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OA'_1}$ et les demi-normales positives à (S), (S_1), (S'), (S'_1) en P, P_1, P', P'_1 sont de même sens si l'on a, respectivement, $k < 0$, $c_1 > 0$, $k > 0$, $c_1 < 0$. Les sens sont opposés dans les cas contraires.

Considérons d'abord la congruence $\mathcal{C}$. Soient A_1 (*fig.* 3) le point $(-q_1, p_1, c_1)$ de la surface (A_1) et m_1 sa projection sur le plan xOy. Faisons tourner m_1 de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Oz. Ce point vient en $M'_1(-p_1, -q_1, 0)$. Notons que, si $\vec{\mathcal{J}}$ est le vecteur unitaire correspondant à Oz, on a

$$\overrightarrow{OM'_1} = \vec{\mathcal{J}} \wedge \overrightarrow{OA_1}.$$

On obtient la droite D de la congruence $\mathcal{C}$ en menant par M une parallèle à la normale à la surface (A_1) en A_1, puisque cette normale est parallèle à celle de (S) au point P.

La congruence $\mathcal{C}$ peut donc être définie au moyen de la seule surface (A_1).

---

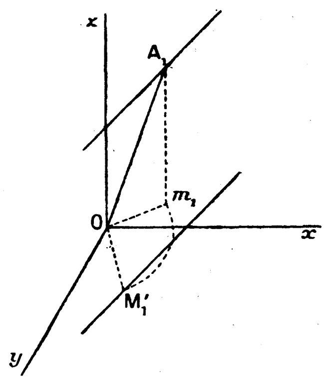
[1] André Charrueau, *Sur la déformation infiniment petite des surfaces* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. 69, mai-juin 1945, p. 92 à 108).

Il en est *de même* de $\mathcal{C}'_1$ par rapport à (A'), de $\mathcal{C}'$ par rapport à (A'_1) et de $\mathcal{C}_1$ par rapport à (A).

Nous avons donc les quatre relations vectorielles

$$\overrightarrow{OM'_1} = \vec{\mathcal{J}} \wedge \overrightarrow{OA_1}, \qquad \overrightarrow{OM} = \vec{\mathcal{J}} \wedge \overrightarrow{OA'},$$
$$\overrightarrow{OM_1} = \vec{\mathcal{J}} \wedge \overrightarrow{OA'_1}, \qquad \overrightarrow{OM'} = \vec{\mathcal{J}} \wedge \overrightarrow{OA}.$$

Fig. 3.



Remarquons que $\overrightarrow{OA_1}$ est situé dans le plan zOM_1, $\overrightarrow{OA'}$ dans le plan zOM', $\overrightarrow{OA'_1}$ dans le plan zOM'_1 et $\overrightarrow{OA}$ dans le plan zOM.

4. Nous avons démontré, à l'aide de (4), (5), (50) et (51), que les quatre congruences $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}_1$ admettent toutes le plan xOy comme surface moyenne.

Nous allons *établir cette proposition d'une manière différente.*

Considérons la congruence $\mathcal{C}$.

Regardons (*fig.* 3) le plan xOy comme le lieu du point $M'_1(-p_1, -q_1, 0)$. La surface (A_1), lieu du point $A_1(-q_1, p_1, c_1)$, et le plan xOy se correspondent alors avec orthogonalité des éléments linéaires. D'après des propriétés des congruences de Ribaucour [1], la congruence engendrée par la droite menée par M'_1 parallèlement à la normale à (A_1) au point A_1 admet le plan xOy

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie générales des surfaces*, t. IV (nouveau tirage), p. 61, n° 891.

comme surface moyenne et ses développables correspondent aux asymptotiques de (A_1). Réservons ce dernier point sur lequel nous reviendrons. La congruence considérée n'étant autre que $\mathcal{C}$ d'après le paragraphe 3, nous voyons que la surface moyenne de $\mathcal{C}$ est le plan xOy

Démonstrations *analogues* pour les trois autres congruences.

Les points M'_1, M, M_1, M' (*fig.* 2) sont donc les *points moyens* des droites D, D'_1, D', D_1 des congruences $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}_1$.

5. Désignons par h'^2 et h_1^2 les carrés des cotes par rapport au plan xOy des *points focaux* des droites D' et D_1 des congruences $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_1$.

Nous avons calculé au paragraphe 1 les quantités analogues, h^2 et $h_1'^2$, relatives aux droites D et D'_1 des congruences $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'_1$.

D'après (57) et (58) nous avons, pour D' et D_1,

$$h'^2 \frac{D(p', q')}{D(p'_1, q'_1)} + 1 = 0, \tag{59}$$

$$h_1^2 \frac{D(p'_1, q'_1)}{D(p', q')} + 1 = 0. \tag{60}$$

A l'aide de (11) et de (52) on obtient

$$h'^2 = \frac{k^4 h^2}{c_1^4} = -\frac{k^4}{c_1^4} \frac{r_1 t_1 - s_1^2}{rt - s^2}, \tag{61}$$

$$h_1^2 = \frac{1}{h'^2}. \tag{62}$$

Soient γ_S, γ_{S_1}, $\gamma_{S'}$, $\gamma_{S'_1}$ les cosinus des angles de Oz et des demi-normales positives à (S), (S_1), (S'), (S'_1) en P, P_1, P', P'_1;

C_S, C_{S_1}, $C_{S'}$, $C_{S'_1}$ les courbures totales de ces surfaces en ces points;

C_A, C_{A_1}, $C_{A'}$, $C_{A'_1}$ les courbures totales de (A), (A_1), (A'), (A'_1) en A, A_1, A', A'_1;

ρ, ρ_1, ρ', ρ'_1 les demi-distances focales des droites D, D_1, D', D'_1.

Pour toute surface, la demi-normale choisie ici comme positive est celle qui fait avec Oz un angle aigu.

Puisque la surface (A) est le lieu du point $A(-q', p', c)$, on a, compte tenu de (46) et (52),

$$C_A = \frac{D(p'_1, q'_1)}{D(p', q')} \gamma_{S_1}^4 = \frac{k^4(r_1 t_1 - s_1^2)}{(p_1^2 + q_1^2 + c_1^2)^2 (rt - s^2)}. \tag{63}$$

De même,

$$(64)\qquad C_{A_1} = \frac{D(p,\,q)}{D(p_1,\,q_1)}\,\gamma_S^4 = \frac{rt - s^2}{(p^2 + q^2 + 1)^2 (r_1 t_1 - s_1^2)},$$

$$(65)\qquad C_{A'} = \frac{D(p_1,\,q_1)}{D(p,\,q)}\,\gamma_{S'_1}^4 = \frac{r_1 t_1 - s_1^2}{(p_1^2 + q_1^2 + 1)^2 (rt - s^2)},$$

$$(66)\qquad C_{A'_1} = \frac{D(p',\,q')}{D(p'_1,\,q'_1)}\,\gamma_{S'}^4 = \frac{c_1^4 (rt - s^2)}{(p^2 + q^2 + k^2)^2 (r_1 t_1 - s_1^2)}.$$

Il vient, en vertu de (8), (9), (59) et (60),

$$(67)\qquad h^2 = -\frac{\gamma_S^4}{C_{A_1}}, \qquad \rho^2 = -\frac{\gamma_S^2}{C_{A_1}};$$

$$(68)\qquad h_1'^2 = -\frac{\gamma_{S'_1}^4}{C_{A'}}, \qquad \rho_1'^2 = -\frac{\gamma_{S'_1}^2}{C_{A'}};$$

$$(69)\qquad h'^2 = -\frac{\gamma_{S'}^4}{C_{A'_1}}, \qquad \rho'^2 = -\frac{\gamma_{S'}^2}{C_{A'_1}};$$

$$(70)\qquad h_1^2 = -\frac{\gamma_{S_1}^4}{C_A}, \qquad \rho_1^2 = -\frac{\gamma_{S_1}^2}{C_A}.$$

On voit que h^2 *et* ρ^2 *ne dépendent que de la courbure totale de* (A_1) *et de l'angle de sa normale avec* Oz.

Remarques *analogues* pour $h_1'^2$, $\rho_1'^2$ et (A'); h'^2, ρ'^2 et (A'_1); h_1^2, ρ_1^2 et (A).

On peut *aussi* établir ces propriétés en partant de la dernière définition des congruences $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_1$ donnée à la fin du paragraphe 3.

De la première égalité (52) et de la première égalité (63), on tire

$$(71)\qquad C_A = \frac{C_{S_1}\gamma_{S'}^4}{C_{S'}}.$$

On a de même

$$(72)\qquad C_{A_1} = \frac{C_S\,\gamma_{S'_1}^4}{C_{S'_1}},$$

$$(73)\qquad C_{A'} = \frac{C_{S'_1}\gamma_S^4}{C_S},$$

$$(74)\qquad C_{A'_1} = \frac{C_{S'}\gamma_{S_1}^4}{C_{S_1}}.$$

On obtient encore les formules

$$(75)\qquad h^2 = -\frac{C_{S'_1}\gamma_S^4}{C_S\,\gamma_{S'_1}^4}, \qquad \rho^2 = -\frac{C_{S'_1}\gamma_S^2}{C_S\,\gamma_{S'_1}^2},$$

et des formules analogues pour h'_1 et ρ'_1, h' et ρ', h_1 et ρ_1.

Remarquons que

$$(76)\qquad C_A C_{A'_1} = \gamma_{S'}^4 \gamma_{S_1}^4, \qquad C_{A'} C_{A_1} = \gamma_S^4 \gamma_{S'_1}^4.$$

Ces deux relations peuvent aussi être déduites de la propriété des surfaces (A), (A_1), (A′), (A'_1), signalée au paragraphe 9 de notre mémoire précité, d'après laquelle, à une rotation et à une symétrie près, (A) et (A'_1), d'une part, (A_1) et (A′), d'autre part, se correspondent dans une *transformation de Legendre.*

Soit φ l'angle des demi-normales positives des surfaces (A) et (A_1) en A et A_1. Cet angle est égal à celui des demi-normales positives de (S) et de (S_1) en P et P_1.

Soit φ' l'angle des demi-normales positives des surfaces (A′) et (A'_1) en A′ et A'_1. Cet angle est égal à celui des demi-normales positives de (S′) et de (S'_1) en P′ et P'_1.

On a, en vertu de (20) et (31),

$$(77)\qquad \cos\varphi = \frac{k}{c_1}\gamma_S \gamma_{S_1},$$

et, en vertu de (20) et (30),

$$(78)\qquad \cos\varphi' = \frac{c_1}{k}\gamma_{S'}\gamma_{S'_1}.$$

De (10), (52), (63) et (64) on tire

$$C_A C_{A_1} = \frac{k^4}{c_1^4}\gamma_S^4 \gamma_{S_1}^4$$

De même

$$C_{A'} C_{A'_1} = \frac{c_1^4}{k^4}\gamma_{S'}^4 \gamma_{S'_1}^4.$$

On a donc les *relations simples*

$$(79)\qquad C_A C_{A_1} = \cos^4\varphi, \qquad C_{A'} C_{A'_1} = \cos^4\varphi'.$$

Ces deux formules peuvent aussi être déduites de ce que les surfaces (A) et (A_1), d'une part, (A′) et (A'_1), d'autre part, sont *polaires réciproques* par rapport à la *sphère* de centre O et de *rayon i.*

Pour cette raison également, on a

$$(80)\qquad \begin{cases} \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OA_1} = a\,a_1 + b\,b_1 + c\,c_1 = -1, \\ \overrightarrow{OA'}\,.\,\overrightarrow{OA'_1} = a'a'_1 + b'b'_1 + c'c'_1 = -1. \end{cases}$$

formules qu'on vérifie aisément au moyen de (23) et (34) et de (24) et (35). Donc les angles $\widehat{AOA_1}$ et $\widehat{A'OA'_1}$ sont toujours *obtus*. Selon que $\frac{k}{c_1}$ est positif ou négatif, φ et φ' sont tous deux aigus ou obtus, $\widehat{AOA_1}$ est égal à $\pi - \varphi$ ou à φ et $\widehat{A'OA'_1}$, égal à $\pi - \varphi'$ ou à φ'.

Les relations (63) à (66) montrent que les courbures totales C_A, $C_{A'_1}$, $C_{A'}$, C_{A_1} ont toutes le signe de $\frac{rt - s^2}{r_1 t_1 - s_1^2}$.

6. Quand le point (x, y, o) parcourt, dans le plan xOy, une courbe du réseau d'équation (14), y est une fonction de x telle qu'on a, à la fois,

$$\frac{dp}{dx}\frac{dq_1}{dx} - \frac{dq}{dx}\frac{dp_1}{dx} = 0, \tag{81}$$

$$\frac{dp'}{dx}\frac{dq'_1}{dx} - \frac{dq'}{dx}\frac{dq'_1}{dx} = 0. \tag{82}$$

La formule (82) découle de (81) en raison de la formule (40) de notre mémoire précité.

Nous avons indiqué au paragraphe 1 du présent travail que les développables de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'_1$ correspondent à la fois au réseau conjugué de (S) et au réseau conjugué de (S'_1) dont la projection commune sur le plan xOy est le réseau satisfaisant à (14).

Compte tenu des formules (38), (39) et (40) du mémoire déjà cité, on voit que *les développables de chacune des quatre congruences* $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}_1$ *correspondent aux asymptotiques de* (A), (A_1), (A'), (A'_1).

Nous savons déjà que ces asymptotiques se correspondent entre elles et, en outre, correspondent notamment aux deux réseaux conjugués de (S) et de (S'_1) satisfaisant à (14).

La propriété en question des congruences $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_1$ pourrait être déduite aussi, en partie, de la correspondance avec orthogonalité des éléments linéaires entre

(A)	et le plan xOy, lieu du point	$(-p', -q', o)$,
(A_1)	»	$(-p_1, -q_1, o)$,
(A')	»	$(-p, -q, o)$,
(A'_1)	»	$(-p'_1, -q'_1, o)$.

On utiliserait l'une des propriétés des congruences de Ribaucour, dont nous avons parlé au paragraphe 4.

On voit aisément qu'*on obtient le réseau des intersections des développables par le plan xOy en faisant tourner de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Oz les projections sur xOy des asymptotiques des surfaces*

(A_1)	pour la congruence	$\mathcal{C}$,
(A')	»	$\mathcal{C}'_1$,
(A'_1)	»	$\mathcal{C}'$,
$(A\ )$	»	$\mathcal{C}_1$.

Les intersections par le plan xOy de chacun des plans focaux relatifs à la droite D de $\mathcal{C}$ est donc *perpendiculaire* à la projection sur le plan xOy d'une des tangentes asymptotiques de (A_1) construites au point A_1. Chacun des plans focaux en question est donc perpendiculaire à une tangente asymptotique de (A_1). Ce fait concorde avec une propriété des congruences de Ribaucour (1).

Remarques analogues concernant $\mathcal{C}'_1$ et (A'), $\mathcal{C}'$ et (A'_1), $\mathcal{C}_1$ et (A).

Chacune des deux développables de $\mathcal{C}$ passant par D et la développable correspondante de $\mathcal{C}'_1$ passant par D'_1 (*fig.* 2) sont coupées suivant la *même courbe* par le plan perpendiculaire à Oz et de cote $+1$.

La tangente en M'_1 à l'intersection par la plan xOy de chacune des deux développables de $\mathcal{C}$ passant par D est donc *parallèle* à la tangente en M à l'intersection par le plan xOy de la développable correspondante de $\mathcal{C}'_1$ passant par D'_1. Cette propriété peut aussi être déduite directement de (81).

Des remarques analogues à celles des deux derniers alinéas peuvent être faites pour les droites D' et D_1 des congruences $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_1$.

(Manuscrit reçu le 30 octobre 1944.)

(1) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV (nouveau tirage), p. 61, n° 891.