BULLETIN DE LA S. M. F.

GUSTAVE CHOQUET

Sur des ensembles cartésiens paradoxaux et la théorie de la mesure

Bulletin de la S. M. F., tome 74 (1946), p. 15-25
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1946__74__15_0>

SUR DES ENSEMBLES CARTÉSIENS PARADOXAUX ET LA THÉORIE DE LA MESURE

PAR M. GUSTAVE CHOQUET.

M. Sierpinski a construit ([1]) un ensemble plan E coupé par toute droite $x = \lambda$ suivant un ensemble dénombrable, et dont le complémentaire est coupé par toute droite $y = \mu$ suivant un ensemble dénombrable. L'existence d'un tel ensemble est d'ailleurs équivalente à l'hypothèse du continu.

Cet exemple montre qu'il ne subsiste rien du théorème de Fubini sous sa forme classique, pour les fonctions non mesurables. Toutefois on pourrait encore espérer conserver quelque chose du théorème de Fubini en utilisant des ensembles de section plus généraux que les parallèles aux axes. Nous allons voir qu'il n'en est rien.

M. J. Dieudonné nous a récemment proposé le problème suivant, aux conditions d'allure très restrictive : Existe-t-il un ensemble plan E dont le complémentaire soit de mesure linéaire nulle sur toute droite $y = \mu$ et tel que pour tout ensemble L mesurable linéairement et de mesure linéaire nulle sur toute droite $y = \mu$, l'ensemble E.L soit de mesure linéaire nulle ?

En fait il est impossible de construire un ensemble E satisfaisant strictement à toutes ces conditions (du moins si l'on admet que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$), car tout ensemble plan dont le complémentaire est de mesure linéaire nulle sur toute droite $y = \mu$, contient des sous-ensembles mesurables linéairement, à sections horizontales de mesure linéaire nulle, et dont la mesure linéaire est infinie ([2]).

([1]) SIERPINSKI, *Hypothèse du continu*, p. 9.

([2]) Ce fait confirme, sous l'hypothèse que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, l'exactitude d'un contre-exemple proposé par J. Dieudonné (Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym, *Bull. Soc. Math.*, 72, 1944, p. 229) et prouve donc, comme il le soupçonnait, l'impossibilité de « représenter » comme des fonctions tous les éléments « abstraits » d'un espace de Riesz E_U qu'il considère.

Mais de tels sous-ensembles sont de nature très singulière. Et nous montrerons qu'en admettant l'hypothèse du continu, on peut répondre affirmativement à la question de M. Dieudonné, lorsqu'on impose aux ensembles L d'être boréliens, analytiques ou projectifs, ou bien d'avoir une mesure linéaire finie.

Notre principe de construction s'applique aussi à la construction d'ensembles E à propriétés analogues relativement à des mesures plus générales que la mesure linéaire.

Ces exemples montrent que, dès que l'on sort de la classe des fonctions mesurables, il ne reste rien du théorème de Fubini, même sous forme d'inégalités.

L'ensemble E que nous avons construit se trouve être dénombrable sur tout arc analytique distinct d'un segment de droite $y = \mu$; toutefois nous indiquerons dans une seconde partie, comme application d'un théorème général sur les ensembles abstraits, la construction d'ensembles S dont les propriétés généralisent plus directement encore celles de l'ensemble construit par Sierpinski : Par exemple il existe un ensemble plan S dont le complémentaire est *dénombrable* sur toute droite $y = \mu$, et qui est coupé suivant un ensemble dénombrable par tout arc de courbe analytique distinct d'un segment de droite $y = \mu$. L'existence d'un tel ensemble est équivalente à l'hypothèse du continu.

Notations. — 1° $\overline{\overline{A}}$ désigne le nombre cardinal de l'ensemble A.

2° $\overline{\overline{\alpha}}$ désigne le nombre cardinal de l'ensemble des ordinaux $\leqq$ au nombre ordinal α.

3° Si A et B sont deux sous-ensembles d'un ensemble C, $(A - B)$ est mis pour $(A - A.B)$.

4° $\{ a \}$ désigne l'ensemble ayant pour seul élément a.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Théorème 1. — *Soient* F *un ensemble abstrait*, Φ *une famille de sous-ensembles* ε *de* F *disjoints deux à deux*, $\mathfrak{F}$ *une famille quelconque de sous-ensembles* e *de* F.

On peut trouver un sous-ensemble E *de* F *tel que pour tout élément* ε *de* Φ *on ait :*

$E.\varepsilon = \varepsilon - \bigcup_{i \in I_\varepsilon} e_i$, (*où* I_ε *est un ensemble d'indices, avec* $\overline{\overline{I_\varepsilon}} \leqq \overline{\overline{\mathcal{F}}}$ *et* $\overline{\overline{I_\varepsilon}} < \overline{\overline{\Phi}}$), *et tel que pour tout élément e de* $\mathcal{F}$ *on ait :*

$E.e \subset \bigcup_{i \in I_e} \varepsilon_i$, (*où* I_e *est un ensemble d'indices, avec* $\overline{\overline{I_e}} \leqq \overline{\overline{\Phi}}$ *et* $\overline{\overline{I_e}} < \overline{\overline{\mathcal{F}}}$).

Démonstration. — Rangeons les éléments ε et e dans deux suites transfinies :

$$(1) \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\alpha \ldots \qquad \text{avec } \overline{\alpha} < \overline{\overline{\Phi}},$$

$$(2) \qquad e_1 e_2 \ldots e_\beta \ldots \qquad \text{avec } \overline{\beta} < \overline{\overline{\mathcal{F}}}.$$

L'ensemble E est ainsi défini .

$$E = \bigcup_\alpha E.\varepsilon_\alpha \qquad \text{et} \qquad E.\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha - \bigcup_{\beta \leqq \alpha} e_\beta.$$

Comme l'ensemble des β tels que $\beta \leqq \alpha$ a une puissance $< \overline{\overline{\Phi}}$ et aussi $\leqq \overline{\overline{\mathcal{F}}}$, la première propriété de E énoncée dans le lemme est vérifiée.

D'autre part, pour tout β on a : $E.e_\beta \subset \bigcup_\alpha \varepsilon_\alpha$ et de plus $E.e_\beta$ ne peut avoir de points que sur les ε_α tels que $\alpha < \beta$; comme l'ensemble des α tels que $\alpha < \beta$ a une puissance $< \overline{\overline{\mathcal{F}}}$ et aussi $\leqq \overline{\overline{\Phi}}$, la deuxième propriété de E énoncée dans le lemme est vérifiée.

Application. — Prenons pour F l'ensemble des points du plan, pour Φ la famille des droites $y = \mu$ et pour $\mathcal{F}$ la famille des ensembles plans *e*, *boréliens*, *analytiques ou projectifs* dont toute section horizontale ($y = \mu$) est de mesure linéaire nulle. Si l'on admet l'hypothèse du continu, on a : $\overline{\overline{\Phi}} = \overline{\overline{\mathcal{F}}} = \aleph_1$. D'après le théorème 1, il existe donc un ensemble plan E qui rencontre toute droite $y = \mu$ suivant un ensemble dont le complémentaire sur cette droite est de longueur nulle, et qui rencontre tout ensemble *e* suivant un ensemble de projection dénombrable sur Oy, c'est-à-dire suivant un ensemble de longueur nulle [1].

---

[1] Car une réunion dénombrable d'ensembles de longueur nulle est de longueur nulle.

Or, d'après H. Hahn [1] tout ensemble cartésien mesurable linéairement et de mesure finie est la somme d'un ensemble de longueur nulle et d'une réunion dénombrable d'ensembles fermés.

Notre ensemble E est donc rencontré aussi suivant un ensemble de longueur nulle par tout ensemble mesurable linéairement, de mesure finie et à sections horizontales ($y=\mu$) de longueur nulle. Nous pouvons donc énoncer :

Théorème 2. — *Si $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, il existe un ensemble plan* E *dont le complémentaire est de mesure linéaire nulle sur toute droite $y=\mu$ et tel que si* L *est un ensemble quelconque mesurable linéairement et de mesure linéaire nulle sur toute droite $y=\mu$, et de plus, ou borélien, ou analytique, ou projectif ou de mesure finie l'ensemble* E.L *soit de mesure linéaire nulle.*

Remarque 1. — Tout ensemble de longueur nulle est contenu dans un G_δ de longueur nulle. Donc tout ensemble de mesure finie est contenu dans un ensemble L borélien. Donc pour tout ensemble L du théorème, l'ensemble E.L a une projection dénombrable sur Oy. En particulier tout ensemble L, dénombrable sur toute droite $y=\mu$, rencontre E suivant un ensemble dénombrable (Exemple : les arcs analytiques distincts d'un segment de droite $y=\mu$).

Remarquons encore que tout ensemble plan à mesure linéaire extérieure finie, et à sections horizontales de mesure nulle, rencontre E suivant un ensemble de mesure nulle.

Remarque 2. — Nous avons dit dans l'Introduction qu'il était impossible de trouver un ensemble E répondant strictement à la question de M. Dieudonné.

Pour nous guider dans cette étude, considérons l'ensemble E dont l'existence est affirmée dans le théorème 2. Soit H un ensemble plan mesurable linéairement et de mesure linéaire nulle sur toute droite $y=\mu$.

Si la mesure de H est finie, la mesure de E.H est nulle.

Si la mesure de H est infinie et que mes. ext.(E.H) $\neq 0$, je

---

[1] H. Hahn, *Theorie der reelle Funktionen*, vol. 1, 1921, p. 444.

vais montrer que (E.H) est un ensemble mesurable singulier [1]. Il suffit pour le voir [1], de montrer que tout sous-ensemble de (E.H) a pour mesure linéaire extérieure o ou ∞.

Supposons qu'il existe A tel que $A \subset E.H$ et de plus

$$\text{mes. lin. ext. } (A) = l,$$

avec $l \neq$ o et ∞. Il existe alors un sous-ensemble A′ de H contenant A, mesurable linéairement et de mesure l. D'après le théorème 2, mes. (E.A′) = o; on a donc aussi

$$\text{mes. } (E.\,A) = \text{mes. } (A) = 0.$$

On arrive donc bien à une contradiction.

Nous voyons ainsi que la recherche des ensembles H en litige revient à celle des sous-ensembles mesurables singuliers de E. Nous allons montrer l'existence de tels sous-ensembles.

THÉORÈME 3. — *Dans tout ensemble plan* E *dont le complémentaire est de mesure linéaire nulle sur toute droite* $y = \mu$, *il existe, si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *des sous-ensembles mesurables singuliers* [1] M, *de mesure linéaire nulle sur toute droite* $y = \mu$.

Démonstration [2]. — Soit sur l'axe $y'y$ un ensemble quelconque k de puissance $2^{\aleph_0}$. Désignons par K l'ensemble des droites Δ parallèles à $x'x$ et contenant un point de k.

Soit V l'ensemble projection sur $x'x$ de (E.K); le complémentaire de V sur $x'x$ a une mesure linéaire nulle.

Rangeons les droites Δ de K et les points a de V dans deux suites transfinies semblables.

$$\begin{array}{ll} (1) & \Delta_1, \ \Delta_2, \ \ldots, \ \Delta_\alpha, \ \ldots \\ (2) & a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_\alpha, \ \ldots \end{array} \qquad \text{où } \bar{\alpha} \leqq \aleph_0.$$

(1) Nous disons qu'un ensemble mesurable est singulier si sa mesure est ∞ et si tous ses sous-ensembles sont mesurables et de mesure o ou ∞. Pour l'étude de ces ensembles, *voir* CHOQUET, *Ensembles singuliers et structure des ensembles mesurables pour les mesures de Hausdorff*, dans ce volume.

(2) Dans un travail en cours sur la théorie de la mesure (à paraître probablement aux *Fund. Math.*), C. Pauc a pu appliquer notre méthode de démonstration pour généraliser de la façon suivante le théorème 3 : « Tout ensemble de mesure extérieure non dénombrablement finie contient un sous-ensemble singulier ».

Désignons par v_α la projection de $(E.\Delta_\alpha)$ sur $x'x$. Le sous-ensemble singulier M de E va être ainsi construit :

Soit $\Delta_{[a_1]}$ le premier élément de la suite (1) tel que $v_{[a_1]}$ contienne a_1. Je pose

$$w^1 = a_1 + \left(V - \bigcup_{\alpha \neq [a_1]} v_\alpha \right).$$

L'ensemble w_1 est de mesure linéaire nulle.

Je supprime alors $\Delta_{[a_1]}$ de la suite (1) et les points de w^1 de la suite (2). Soient (1)′ et (2)′ les deux suites nouvelles ainsi obtenues.

A partir de (1)′ et (2)′ je définis un ensemble w^2 analogue à w^1, et deux suites (1)″ et (2″); etc.

Pour tout ordinal α tel que $\overline{\alpha} \leqq \aleph_0$ je définis de même un ensemble w^α. Tous ces ensembles w^α sont disjoints deux à deux et constituent une partition de V; chacun d'eux a une mesure linéaire nulle.

Soit Δ^α la droite de la suite (1) associée à l'ensemble w^α. Je pose $M_\alpha =$ ensemble des points de Δ^α qui se projettent sur $x'x$ suivant w^α. Pour tout α, on a $M_\alpha \subset K.E$.

On pose $M = \bigcup\limits_\alpha M_\alpha$.

On a donc construit un sous-ensemble M de K.E qui est de mesure linéaire nulle sur toute droite $y = \mu$, et dont la projection sur $x'x$ a une mesure linéaire non nulle.

Or, prenons pour k un ensemble de Lusin (1). Nous avons montré ailleurs (2) que M est alors linéairement mesurable ainsi que tous ses sous-ensembles.

Comme M a sur $x'x$ une projection de mesure linéaire non nulle, M a aussi une mesure non nulle. Donc M est un ensemble singulier et répond bien aux conditions énoncées dans le théorème 3.

---

(1) C'est-à-dire un ensemble non dénombrable et rencontré suivant un ensemble au plus dénombrable par tout ensemble parfait non dense. Pour l'étude de ces ensembles, *voir* Lusin, *C. R. Acad. Sc.*, t. 158, 1914; Lavrentieff, *Fund. Math.*, t. VI, p. 154-155; Sierpinski, *ibid.*, t. XI, p. 302-305.

(2) *Voir* Choquet, *loc. cit.*

Généralisation. — On sait qu'on peut définir pour les ensembles cartésiens des mesures qui généralisent la mesure linéaire, et qui sont liées à la donnée d'une fonction $\varphi(d)$ continue, non décroissante et nulle pour $d = 0$. Le résultat de Hahn est valable pour les ensembles cartésiens mesurables d'ordre $\varphi(d)$. Il en résulte par exemple le théorème suivant :

Théorème 4. — *Pour toute mesure d'ordre $\varphi(d)$ il existe un ensemble plan* E *dont le complémentaire est de mesure nulle d'ordre $\varphi(d)$ sur toute droite $y = \mu$ et tel que si* L *est un ensemble quelconque mesurable d'ordre $\varphi(d)$, de mesure nulle d'ordre $\varphi(d)$ sur toute droite $y = \mu$, et de plus ou borélien, ou analytique, ou projectif, ou de mesure finie, l'ensemble* E.L *soit de mesure nulle d'ordre $\varphi(d)$.*

Dans tout espace cartésien on aurait évidemment des résultats analogues.

2. Commentaires. — Il n'est pas certain que l'existence d'un ensemble E jouissant des propriétés énoncées dans le théorème 2 soit équivalente à l'hypothèse du continu. En effet, comme il est difficile de trouver des conditions pour qu'un ensemble soit de longueur nulle lorsque ses sections horizontales ($y = \mu$) sont de longueur nulle, nous avons cherché à nous ramener au cas d'ensembles qui soient des réunions dénombrables de sections horizontales de longueur nulle; et par là nous avons été conduits à introduire l'hypothèse du continu. Mais il semble possible, bien que difficile, de se passer de cette hypothèse.

Nous allons maintenant montrer l'existence d'un ensemble R jouissant de propriétés analogues à celles de l'ensemble E du théorème 2, et qu'on peut construire sans utiliser l'hypothèse du continu.

Théorème 5. — *Sans utiliser l'hypothèse du continu, on peut construire un ensemble plan* R *dont le complémentaire a au plus un point sur toute droite $y = \mu$, et dont tout sous-ensemble mesurable linéairement, à sections horizontales ($y = \mu$) de longueur nulle et qui est, ou borélien, ou analytique, ou de mesure finie, est de longueur nulle.*

Démonstration. — Soient Φ la famille des droites $y = \mu$, et $\mathcal{F}$ la famille des ensembles boréliens ou analytiques plans e ayant sur Oy une projection non dénombrable.

On a $\overline{\overline{\Phi}} = \overline{\overline{\mathcal{F}}}$. Rangeons les éléments de Φ et de $\mathcal{F}$ dans deux suites transfinies semblables :

$$\begin{array}{lll} (1) & y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_\alpha, \ \ldots & \\ & & \text{où } \overline{\alpha} < 2^{\aleph_0}. \\ (2) & e_1, \ e_2, \ \ldots, \ e_\alpha, \ \ldots & \end{array}$$

Nous poserons $R = C(T)$ [1], T étant un ensemble que nous allons définir :

Soit $y_{[e_1]}$ le premier y_α de la suite (1) tel que la droite y_α rencontre e_1 suivant un ensemble non vide; soit m_1 un point quelconque de $e_1 . y_{[e_1]}$.

Supposons alors m_β défini pour tout $\beta < \alpha$. Comme $\overline{\alpha} < 2^{\aleph_0}$, et que la projection sur Oy de tout élément e a la puissance $2^{\aleph_0}$, il existe dans la suite (1) des éléments $y \neq y_{[e_\beta]}$ pour $\beta < \alpha$ tels que les droites correspondantes rencontrent e_α suivant un ensemble non vide; soit $y_{[e_\alpha]}$ le premier de ces éléments et soit m_α un point quelconque de $e_\alpha . y_{[e_\alpha]}$.

Posons $T = \bigcup\limits_{\overline{\alpha} < 2^{\aleph_0}} m_\alpha$.

L'ensemble T a un point au plus sur toute droite $y = \mu$ et d'autre part tout élément e de Φ a un point dans T.

Donc aucun sous-ensemble borélien ou analytique de $R = C(T)$ ne fait partie de Φ; autrement dit, tout sous-ensemble borélien ou analytique de R a sur Oy une projection dénombrable.

Le théorème annoncé s'en déduit aussitôt en utilisant le résultat de H. Hahn déjà indiqué.

DEUXIÈME PARTIE.

3. Théorème 6. — *Soit* F *un ensemble abstrait de puissance* $2^{\aleph_0}$ *et* $\mathcal{F}$ *une famille de sous-ensembles* e *de* F, *telle que pour tout couple* e, e' *d'éléments de* $\mathcal{F}$, *on ait* $(\overline{\overline{e . e'}}) \leq \aleph_0$, *et telle que* $\overline{\overline{\mathcal{F}}} \leq 2^{\aleph_0}$.

---

[1] C(T) désigne le complémentaire de T par rapport au plan.

Si l'on admet que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, *pour toute partition de* $\mathcal{F}$ *en sous-familles* $\mathcal{F}_i (i \in \mathrm{I}$, *avec* $\overline{\overline{\mathrm{I}}} \geqq 2)$, *il existe une partition de* F *en sous-ensembles* $\mathrm{F}_i (i \in \mathrm{I})$ *telle que pour tout* $e_i^{\mathrm{K}} \in \mathcal{F}_i$, *on ait* $\left(\overline{\overline{e_i^{\mathrm{K}} . \mathrm{F}_i}}\right) \leqq \aleph_0$.

Démonstration. — Ordonnons les points de F et de $\mathcal{F}$ dans deux suites bien ordonnées de types d'ordre respectivement $= \Omega$ et $\leqq \Omega$;

(1) $\quad a_1 \; a_2, \; \ldots, \; a_\alpha, \; \ldots,$

(2) $\quad e_1 \; e_2, \; \ldots, \; e_\alpha, \; \ldots.$

Désignons par $[e_\alpha]$ l'indice i de la famille $\mathcal{F}_i$ dont e_α fait partie; on désignera donc cette famille par $\mathcal{F}_{[e_\alpha]}$ et l'ensemble F_i correspondant par $\mathrm{F}_{[e_\alpha]}$.

Nous allons répartir les points de F progressivement entre les ensembles F_i inconnus; cette répartition sera définie univoquement dès que les suites (1) et (2) seront données.

Opération 1. — On pose $a_1 \in \mathrm{F}_{[e_1]}$ et $e_1 . \mathrm{F}_{[e_1]} \subset \{a_1\}$. Donc $e_1 . \mathrm{F}_{[e_1]}$ est désormais déterminé et l'on pose $e_1 - e_1 . \mathrm{F}_{[e_1]} \subset \mathrm{F}_{[e_\lambda]}$, λ étant le plus petit ordinal tel que $[e_\lambda]$ soit distinct de $[e_1]$.

Supposons alors terminées toutes les opérations d'ordre $\beta < \alpha$ (où α est un ordinal de seconde classe), toute opération d'ordre $\beta < \alpha$ consistant à classer dans $\mathrm{F}_{[e_\beta]}$ le premier point de la suite (1) non encore réparti, et à répartir tout point de l'ensemble e_β dans l'un des ensembles F_i, de façon que $\left(\overline{\overline{e_\beta . \mathrm{F}_{[e_\beta]}}}\right) \leqq \aleph_0$.

Soit C_α l'ensemble des points de E répartis au cours des opérations d'ordre $\beta < \alpha$.

Opération α. — Soit $a_{(\gamma_\alpha)}$ le premier point de la suite (1) qui ne fasse pas partie de C_α. On pose $a_{(\gamma_\alpha)} \in \mathrm{F}_{[e_\alpha]}$ et $e_\alpha . \mathrm{F}_{[e_\alpha]} \subset \{a_{(\gamma_\alpha)}\} + \mathrm{C}_\alpha$.

Alors $e_\alpha . \mathrm{F}_{[e_\alpha]}$ est déterminé, et l'on pose : $e_\alpha - e_\alpha . \mathrm{F}_{[e_\alpha]} \subset \mathrm{F}_{[e_\lambda]}$, λ étant le plus petit ordinal $> \alpha$, tel que $[e_\lambda] \neq [e_\beta]$ pour tout $\beta \leqq \alpha$.

Montrons que l'on a bien $\left(\overline{\overline{e_\alpha . \mathrm{F}_{[e_\alpha]}}}\right) \leqq \aleph_0$.

En effet, $e_\alpha . \mathrm{F}_{[e_\alpha]} \subset e_\alpha (\{a_{(\gamma_\alpha)}\} + \mathrm{C}_\alpha)$.

Or $\mathrm{C}_\alpha = \bigcup\limits_{\beta < \alpha} (\mathrm{C}_{\beta+1} - \mathrm{C}_\beta)$; $(\mathrm{C}_{\beta+1} - \mathrm{C}_\beta)$ représente l'ensemble des points nouveaux répartis au cours de la $\beta^{\text{ième}}$ opération; ces points sont, à un point près, situés sur e_β; or $e_\alpha . e_\beta$ est au plus dénombrable par hypothèse; donc $e_\alpha . C_\alpha$ l'est aussi, et de même $e_\alpha . F_{[e_\alpha]}$.

On continue les opérations jusqu'à ce que les points de tous les e_α soient répartis. Les points de la suite (1) qui alors ne sont pas répartis, sont ceux de l'ensemble $\left(F - \bigcup_\alpha e_\alpha\right)$.

On pose $\left(F - \bigcup_\alpha e_\alpha\right) \subset F_{[e_1]}$.

La partition annoncée de F en ensembles F_i est réalisée.

Application. — Prenons pour F l'ensemble des points du plan, et pour $\mathcal{F}$ l'ensemble des courbes analytiques planes non décomposables. $\mathcal{F}$ satisfait bien aux conditions du théorème.

On prend la partition suivante de $\mathcal{F}$ en deux familles $\mathcal{F}_i (i = 1$ ou $2)$: $\mathcal{F}_1$ est identique à la famille des droites $y = \mu$, et $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F} - \mathcal{F}_1$.

Soient alors F_1 et F_2 les deux ensembles dont l'existence est assurée par le théorème 6.

L'ensemble plan $S = F_2$ a son complémentaire *dénombrable* sur toute droite $y = \mu$ et rencontre suivant un ensemble dénombrable tout arc de courbe analytique non portée par une droite $y = \mu$.

Un tel ensemble est en particulier coupé par toute droite $x = \lambda$ suivant un ensemble dénombrable. Il en résulte que son existence est équivalente à l'hypothèse du continu [1].

Généralisation. — On peut calquer sur la démonstration du théorème 6, celle d'un théorème plus général que nous énoncerons, sans démonstration, sous une forme valable sans supposer l'hypothèse du continu ou toute autre hypothèse analogue.

THÉORÈME. 7. — *Soit $\mathcal{F}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble abstrait* F, *et soit δ le plus petit des nombres ordinaux ρ tels que l'on ait $\overline{\overline{e . e'}} < \rho$, pour tout couple d'éléments e, e' de la famille $\mathcal{F}$.*

---

(1) *Voir* SIERPINSKI, *loc. cit.*

Pour toute partition de $\mathcal{F}$ en sous-familles $\mathcal{F}_i (i \in \mathrm{I}$, avec $\overline{\overline{\mathrm{I}}} \geqq 2)$, il existe une partition de F *en sous-ensembles* $\mathrm{F}_i (i \in \mathrm{I})$ *telle que pour tout élément e_i^{K} de $\mathcal{F}_i$, on ait :*

$$\left(\overline{\overline{e_i^{\mathrm{K}}.\mathrm{F}_i}}\right) < \delta \times \overline{\overline{\mathcal{F}}} = \sup(\delta, \overline{\overline{\mathcal{F}}}) \quad (^1).$$

Remarque. — Dans le théorème 6, on a $\delta = \aleph_1$ et $\overline{\overline{\mathcal{F}}} = 2^{\aleph_0}$.

L'inégalité du théorème ci-dessus devient alors $\left(\overline{\overline{e_i^{\mathrm{K}}.\mathrm{F}_i}}\right) < 2^{\aleph_0}$. Donc si $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, on a bien $\left(\overline{\overline{e_i^{\mathrm{K}}.\mathrm{F}_i}}\right) \leqq \aleph_0$.

(Manuscrit reçu le 11 juillet 1945.)

---

(1) Pour une limitation de $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$ en fonction de $\overline{\overline{\mathrm{F}}}$ et de δ, *voir* A. Tarski, *Sur une décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints* (*Fund. Math.*, 12, 1928, p. 188-206).