

BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES DENY

Sur l'approximation des fonctions harmoniques

Bulletin de la S. M. F., tome 73 (1945), p. 71-73

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1945__73__71_0

© Bulletin de la S. M. F., 1945, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'APPROXIMATION DES FONCTIONS HARMONIQUES;

PAR M. JACQUES DENY.

Le but de cette Note est de montrer comment quelques résultats très simples relatifs à l'extrémisation des masses permettent de retrouver les théorèmes ⁽¹⁾ de M. Brelot sur l'approximation des fonctions harmoniques continues.

Rappelons ⁽²⁾ que si λ est une distribution positive portée par un compact E de l'espace euclidien considéré R_τ ⁽³⁾ à τ dimensions ($\tau \geq 2$), il existe sur E une distribution positive λ' et une seule (dite *extrémisée* de λ) qui conserve le potentiel sur CE et qui le rende minimum sur E . La masse totale est la même. λ' est portée par la frontière $\dot{E}$ de E . Un point M de E est stable si $U^{\lambda'}(M) = U^\lambda(M)$ ⁽⁴⁾ pour toute λ positive, instable dans le cas contraire; tout point intérieur de E est donc instable.

De ces quelques résultats, on déduit immédiatement le

LEMME I. — *Pour que la frontière $\dot{E}$ de E ne soit le support d'aucune distribution (de signe quelconque) dont le potentiel soit identiquement nul sur CE , il faut et il suffit que E n'ait aucun point-frontière instable.*

⁽¹⁾ Théorèmes I et II de l'article précédent.

⁽²⁾ Cf. le Mémoire de M. Brelot noté IV dans l'article précédent.

⁽³⁾ On pourrait développer la théorie de l'extrémisation pour les compacts de l'espace $\overline{R}_\tau$, introduit par M. Brelot; cela nécessite une étude précise de la stabilité du point à l'infini. [Cf. M. BRELLOT, *Minorantes sous-harmoniques, extrémales et capacités* (*Journal de Math.*, 1944)]. Notons encore que l'extrémisation pour un compact de R_τ n'est autre qu'un balayage sur l'ouvert CE (notion introduite par H. Cartan dans un travail inédit); ce point de vue permet d'étendre l'opération aux ensembles fermés non bornés.

⁽⁴⁾ $U^\lambda(M)$ désigne la valeur en M du potentiel (logarithmique ou en $\frac{1}{\tau^{n-2}}$) engendré par la distribution λ .

Nous appellerons *fonctions harmoniques élémentaires relatives au point A* les fonctions

$$\Phi_n^A(M) = \frac{H_n(M)}{r^{2n+\tau-2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

où $r = \overline{AM}$ et H_n = polynome harmonique de degré n ⁽¹⁾. Pour $\tau = 2$, on pose $\Phi_0^A = \log \frac{1}{r}$. Si A est à l'infini, on prend $\Phi_n^A = H_n$.

Notons que lorsque le nombre de dimensions τ est pair, ces fonctions sont des fractions rationnelles des coordonnées de M (à l'exception du terme logarithmique dans le cas $\tau = 2$).

Soit maintenant E un compact de R_τ . Son complémentaire CE est constitué par un nombre fini ou dénombrable de domaines D_0 (non borné), $D_1, D_2, \dots$. Choisissons *arbitrairement* un point A_p dans chaque D_p .

LEMME II. — *Pour que le potentiel U^λ engendré par une distribution λ portée par E soit identiquement nul dans D_p , il faut et il suffit que les quantités $\int \Phi_n^{A_p}(M) d\lambda(M)$ soient toutes nulles.*

On s'en assure aussitôt en développant $U^\lambda(P)$ en série entière de $\overline{A_p P}$ autour du point A_p .

THÉORÈME. — *Pour que toute fonction F continue sur E , harmonique en tout point intérieur de E (s'il en existe), puisse être approchée uniformément par des combinaisons linéaires finies des fonctions harmoniques élémentaires $\Phi_n^{A_p}$, il faut et il suffit que E n'ait aucun point-frontière instable.*

Démonstration. — La condition nécessaire et suffisante pour que toutes les F puissent être ainsi approchées, est que les valeurs que prennent sur $\dot{E}$ les $\Phi_n^{A_p}$ forment un ensemble *total* dans

⁽¹⁾ On sait que si l'on pose $H_n = r^n Y_n$, on peut exprimer linéairement Y_n à l'aide des fonctions hypersphériques fondamentales d'ordre n . Ainsi, pour $\tau = 2$, on peut prendre pour les Φ_n^A

$$\log \frac{1}{r}, \quad \frac{\cos \theta}{r}, \quad \frac{\sin \theta}{r}, \quad \dots, \quad \frac{\cos n \theta}{r}, \quad \frac{\sin n \theta}{r}, \quad \dots$$

l'espace des fonctions continues sur $\tilde{E}$, donc, d'après un théorème bien connu de S. Banach, qu'il n'existe aucune distribution λ portée par $\tilde{E}$ telle que $\int \Phi_n^\lambda d\lambda = 0$ pour tous les n et p , c'est-à-dire telle que U^λ soit nul sur chacun des D_p (lemme II), donc hors de E . Or le lemme I montre que pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que E n'admette aucun point-frontière instable.

On reconnaît les résultats de M. Brelot, du moins dans le cas de R_τ ⁽¹⁾; on obtient même une sorte de développement en série de Laurent pour F ; les fonctions harmoniques qui réalisent l'approximation *n'ont que des singularités ponctuelles, non essentielles et en nombre fini*.

Lorsque $CE = D_0$ et que A_0 est le point à l'infini, on obtient le théorème de M. Keldych et M. Lavrentieff sur l'approximation uniforme à l'aide des polynomes harmoniques.

Lorsque $\tau = 2$ et que CE est constitué par un nombre fini de domaines, E n'a pas de point-frontière instable; d'où la possibilité de développer toutes les F en série uniformément convergente de fractions rationnelles harmoniques et de termes en $\log \frac{1}{r_p}$. Cet énoncé est dû à J. L. Walsh ⁽²⁾.

(Manuscrit reçu le 10 juillet 1945).

⁽¹⁾ On pourrait adapter le raisonnement précédent à l'espace $\overline{R}_\tau$ en utilisant les résultats du Mémoire cité de M. Brelot.

⁽²⁾ J. L. WALSH, *The approximation of the harmonic functions by harmonic polynomials and by harmonic rational functions* (Bull. Amer. Math. Soc., 35, 1929, p. 197-209).