BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL LOÈVE

Nouvelles classes de lois limites

Bulletin de la S. M. F., tome 73 (1945), p. 107-126

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1945__73__107_0>

NOUVELLES CLASSES DE LOIS LIMITES;

PAR M. MICHEL LOÈVE.

Ce travail date de 1940; la plupart des résultats ont été énoncés dans une Note aux *Comptes rendus* (¹) et sont une contribution à l'étude de la divisibilité des lois, une branche récente du Calcul des Probabilités.

I. — Divisibilité des lois.

La loi de probabilité $\mathcal{L}$ d'une variable aléatoire (v. a.) X est définie, généralement, soit par la fonction de répartition (f. r.).

$$F(x) = Pr(X < x),$$

soit par la fonction caractéristique (f. c.)

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF(x),$$

où t est un paramètre réel et E désigne, comme d'habitude, une espérance mathématique.

Nous employons les mêmes accents ou indices pour $\mathcal{L}$, X, $F(x)$ et $\varphi(t)$ qui se correspondent.

On dit qu'une loi $\mathcal{L}$ est divisible par une loi $\mathcal{L}'$, s'il existe une loi $\mathcal{L}''$ telle que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}'.\mathcal{L}'',$$

c'est-à-dire, il existe une f. r. $F''(x)$ et une f. c. $\varphi''(t)$ satisfaisant aux relations équivalentes

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F'(x-y)\, dF''(y),$$

$$\varphi(t) = \varphi'(t).\varphi''(t).$$

(¹) Michel LOÈVE, *Nouvelles classes de lois limites* (*C. R. Ac. Sc.*, t. 210, 1940, p. 202).

Dans les sept premiers paragraphes les hypothèses sont choisies de manière à rendre les raisonnements aussi simples que possible. Nous indiquons dans le paragraphe VIII comment les résultats continuent à s'appliquer sous des conditions bien moins restrictives.

Lemme. — *Les lois limites $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ de deux suites de lois convergentes $\{\mathcal{L}_n\}$ et $\{\mathcal{L}'_n\}$, telles que $\mathcal{L}_n$ soit divisible par $\mathcal{L}'_n$ pour tout n, sont divisibles l'une par l'autre.*

Par hypothèse

$$\varphi_n(t) = \varphi'_n(t)\varphi''_n(t),$$

où $\varphi''_n(t)$ est une f. c. et $\varphi_n(t)$ et $\varphi'_n(t)$ tendent respectivement vers $\varphi(t)$ et $\varphi'(t)$, uniformément dans tout intervalle fini.

Si $\varphi'(t) \neq 0$ pour tout t fini alors la f. c. $\frac{\varphi_n(t)}{\varphi'_n(t)}$ tend, uniformément dans tout intervalle fini, vers $\varphi''(t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$, donc $\varphi''(t)$ est une f. c. et la proposition est établie.

Dans le cas général, comme $\varphi'(t)$ est une fonction continue et $\varphi'(0) = 1$, la limite uniforme de $\frac{\varphi_n(t)}{\varphi'_n(t)}$ existe, au moins dans un intervalle fini contenant l'origine. On en tire aisément ([2]) que la la suite $\{\mathcal{L}'_n\}$ contient au moins une suite partielle convergente et que l'on a

$$\varphi(t) = \varphi'(t).\varphi''(t),$$

où $\varphi''(t)$ est une f. c. Lorsqu'on n'est pas dans le cas particulier envisagé ci-dessus, ou celui où $\varphi''(t)$ n'a que des zéros isolés, $\varphi''(t)$ peut ne pas être univoquement déterminée ([2]).

II. — Lois limites des sommes normées.

Le calcul des probabilités comprend surtout l'étude des lois limites des sommes normées de v. a. indépendantes. D'une façon précise, soit $\{X_n\}$ une suite de v. a. indépendantes. On forme

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

([2]) *Voir* un travail *Ensembles de lois de probabilité*, qui paraîtra prochainement.

et l'on étudie les suites dès lois des v. a. $\frac{S_n}{a_n}$, où $\{a_n\}$ est une suite de nombres certains positifs tels que, lorsque $n \to \infty$,

$$a_n \to \infty \quad \text{et} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1.$$

Nous remplaçons ces conditions par la suivante :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \to \alpha \text{ fixe}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

et nous obtenons le théorème :

THÉORÈME 1. — *Si la suite des lois* $\left\{ \mathcal{L}\left(\frac{S_n}{a_n}\right) \right\}$ *converge vers une loi* $\mathcal{L}$ *à* f. r. $F(x)$ *et* f. c. $\Phi(t)$ *lorsque* $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to \alpha$ *fixe, compris entre* 0 *et* 1, *alors la loi* $\mathcal{L}$ *est divisible par la loi* $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ *à* f. r. $F\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ *et* f. c. $\Phi(\alpha t)$. En effet les v. a. X_i étant mutuellement indépendantes, on a pour la f. c. de $\frac{S_n}{a_n}$,

$$\Phi_n(t) = E\left(e^{it\frac{S_n}{a_n}}\right) = \prod_{k=1}^{n} E\left(e^{it\frac{X_k}{a_n}}\right) = \varphi_1\left(\frac{t}{a_n}\right) \cdot \varphi_2\left(\frac{t}{a_n}\right) \cdots \varphi_n\left(\frac{t}{a_n}\right),$$

puis

$$_{n+1}(t) = \varphi_1\left(\frac{t}{a_{n+1}}\right) \cdots \varphi_n\left(\frac{t}{a_{n+1}}\right) \cdot \varphi_{n+1}\left(\frac{t}{a_{n+1}}\right);$$

d'où

$$\Phi_{n+1}(t) = \Phi_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}t\right) \cdot \varphi_{n+1}\left(\frac{t}{a_{n+1}}\right).$$

Or, par hypothèse, $\Phi_n(t)$ et $\Phi_{n+1}(t)$ tendent vers $\Phi(t)$ et $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ tend vers α, lorsque $n \to \infty$. Nous avons donc deux suites convergentes de lois dont les f. c. $\Phi_{n+1}(t)$ et $\Phi_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}t\right)$ tendent respectivement vers les f. c. $\Phi(t)$ et $\Phi(\alpha t)$, ces lois étant divisibles l'une par l'autre pour les mêmes valeurs de n, par ailleurs quelconques. Le lemme montre alors qu'il existe au moins une f. c. $\varphi(t)$ telle que

$$\Phi(t) = \Phi(\alpha t) \cdot \varphi(t) \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Réciproquement :

THÉORÈME 2. — *Toute loi* $\mathcal{L}$ *divisible par la loi* $\mathcal{L}^{(\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, *est une loi limite de sommes normées de* v. a.

Il suffit, en effet, de prendre une suite de **nombres** certains positifs $\{a_n\}$ telle que $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to \alpha$ et une suite de f. c. $\varphi_n(t)$ telles que $\varphi_n\left(\frac{t}{a_n}\right) \to \varphi(t)$, ce qui est toujours possible [on peut, par exemple, prendre $\varphi_n(t) = \varphi(a_n t)$]. Ainsi

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une loi $\mathcal{L}$ soit loi limite de sommes de v. a. *indépendantes normées par des a_n telles que* $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to \alpha$, $0 < \alpha < 1$, *est que cette loi soit divisible par la loi $\mathcal{L}^{(\alpha)}$.*

Remarquons que la loi à f. c. $\varphi(t)$ est une loi d'accumulation de la suite des lois $\mathcal{L}\left(\frac{X_n}{a_n}\right)$.

III. — Classes L_α.

Définition. — *Une classe L_α de lois sera l'ensemble de lois $\mathcal{L}$ divisibles par les lois $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ correspondantes, α constante donnée comprise entre* 0 *et* 1.

L'ensemble de lois définies à une homothétie positive près, par rapport à l'origine, constitue un type T de lois; autrement dit, le type correspondant à une loi à f. r. $F(x)$ comprend toute les lois à f. r. $F(ax)$, $a > 0$ fini quelconque, et ces lois seulement.

Si une loi $\mathcal{L}$ du type T est divisible par une loi $\mathcal{L}'$ du type T', à chaque loi de T on peut, évidemment, faire correspondre une loi de T' qui la divise; on dira que *le type* T *est divisible par le type* T'. Lorsque $T \equiv T'$ et $\mathcal{L} \not\equiv \mathcal{L}'$ il y a divisibilité non triviale du type en lui-même, c'est précisément le cas des lois appartenant à une classe L_α quelconque.

Tout type d'une classe L_α est divisible par lui-même, d'une manière non triviale, et réciproquement.

Si $\mathcal{L}$ est divisible par $\mathcal{L}^{(\alpha)}$, c'est que

$$\Phi(t) = \Phi(\alpha t).\varphi(t),$$

d'où

$$\Phi(\alpha t) = \Phi(\alpha^2 t).\varphi(\alpha t),$$

donc

$$\Phi(t) = \Phi(\alpha^2 t).\varphi(t)\varphi(\alpha t).$$

Comme le produit de deux f. c. est une f. c., la classe L_α fait partie de la classe L_{α^2} et, d'une manière générale,

$$L_\alpha \subset L_{\alpha^2} \subset \ldots \subset L_{\alpha^n} \subset .$$

On obtient alors immédiatement la proposition suivante :

THÉORÈME 3. — *Si* $\frac{\log\alpha}{\log\beta}$ *est rationnel,* L_α *et* L_β *font partie d'une même classe.*

En effet,

$$\frac{\log\alpha}{\log\beta} = \frac{n}{m},$$

où n et m sont des entiers positifs, équivaut à

$$\alpha^m = \beta^n = \gamma,$$

donc

$$L_\alpha \subset L_\gamma \qquad \text{et} \qquad L_\beta \subset L_\gamma.$$

M. Paul Lévy nous a fait remarquer que si $T \neq T'$, T divisible par T' et T' divisible par T, T et T' appartiennent à une même classe.

Considérons maintenant les deux cas limites, $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

$\alpha = 0$. — Dans ce cas $\Phi(\alpha t) = \Phi(0) = 1$ et la relation de divisibilité s'écrit $\Phi(t) = \varphi(t)$, ce qui montre que toute loi appartient à la classe L_0.

$\alpha = 1$. — Dans ce cas $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$ et il y a deux possibilités à envisager : ou bien les a_n sont bornées supérieurement dans leur ensemble, alors chaque loi $\mathcal{L}(X_n)$ intervient, généralement, d'une façon non-négligeable dans la formation de la loi limite, ce cas ne nous intéresse pas ici; ou bien $a_n \to \infty$, c'est le cas classique. La loi à f. c. $\varphi(t) = \frac{\Phi(t)}{\Phi(\alpha t)} = 1$ est alors dégénérée à l'origine, c'est-à-dire donne la probabilité un à la valeur zéro. Mais de la suite $\{a_n\}$ on peut maintenant extraire des suites partielles $\{a_{n_p}\}$ telles que $\frac{a_{n_p}}{a_{n_{p+1}}} \to \alpha < 1$ *quelconque*. Par suite, on peut considérer la classe L_1 des lois limites, obtenues en normant classiquement, comme la classe dégénérée des classes L_α, en ce sens que L_1 appartient à toutes les L_α et, réciproquement, une loi appartenant à toutes les L_α est élément de L_1. Ce résultat est équivalent à l'une des solutions qu'a données M. Paul Lévy du problème suivant posé par M. Khintchine : caractériser les lois limites de sommes, normées de façon que pour n suffisamment grand, tous les termes de S_n soient négligeables devant cette somme. Ainsi, en se bornant aux $a_n \to \infty$, on a pour tout α tel que $0 \leqq \alpha \leqq 1$,

$$L_1 \subset L_\alpha \subset L_0.$$

IV. — Séries (ξ, α).

Nous allons donner une autre caractérisation des classes L_α.

Soit ξ, ξ_0, ξ_1, ..., ξ_n, ... une suite de v. a. indépendantes et équiprobables, à f. c. $\varphi(t)$.

Formons la v. a. à f. c. $\psi_n(t)$:

$$\sigma_n = \xi_0 + \alpha\xi_1 + \ldots + \alpha^n \xi_n$$

et la série (ξ, α), obtenue en faisant croître n indéfiniment,

$$\sigma = \xi_0 + \alpha\xi_1 + \ldots + \alpha^n \xi_n + \ldots.$$

Nous étudions plus loin les conditions de convergence stochastique de telles séries et jusque-là nous supposerons que les séries considérées convergent en loi, c'est-à-dire $\varphi(t)\varphi(\alpha t)\ldots\varphi(\alpha^n t)$, lorsque $n \to \infty$, converge vers une fonction, uniformément dans tout intervalle fini.

Nous allons montrer que l'ensemble des lois $\in L_\alpha$ coïncide avec l'ensemble des lois des séries (ξ, α) où α est donné $0 < \alpha < 1$, et ξ une v. a. quelconque rendant, bien entendu, la série convergente en loi.

Théorème 4. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une loi $\mathcal{L}$ appartienne à la classe* L_α *est qu'elle soit loi d'une série* (ξ, α); *la* v. a. ξ *est distribuée suivant la loi-quotient* $\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}(\alpha)}$.

La condition est nécessaire car si $\mathcal{L} \in L_\alpha$ a pour f. c. $\Phi(t)$, on a

$$\Phi(t) = \Phi(\alpha t).\varphi(t), \qquad \Phi(\alpha t) = \Phi(\alpha^2 t).\varphi(\alpha t), \qquad \ldots,$$

d'ou

$$\Phi(t) = \varphi(t).\varphi(\alpha t)\ldots\varphi(\alpha^n t)\Phi(\alpha^{n+1} t) = \psi_n(t).\Phi(\alpha^{n+1} t).$$

Or, lorsque $n \to \infty$, $\Phi_n(\alpha^{n+1} t) \to 1$, uniformément dans tout intervalle fini. Donc $\psi_n(t) \to \Phi(t)$.

La condition est suffisante, car si l'on a

$$\Phi(t) = \prod_{k=0}^{\infty} \varphi(\alpha^k t),$$

il s'ensuit que

$$\Phi(\alpha t) = \prod_{k=1}^{\infty} \varphi(\alpha^k t),$$

donc

$$\Phi(t) = \Phi(\alpha t)\varphi(t). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — *Les lois possibles pour ξ sont les lois d'accumulation des lois des $\frac{X_n}{a_n}$.*

V. — Fermeture des L_α.

1. *Le produit des lois de la classe L_α est une loi de cette classe. Réciproquement, si la loi de ξ est décomposable en lois de ξ_1 et de ξ_2, la loi de (ξ, α) existe et est décomposable en lois de (ξ_1, α) et (ξ_2, α), lorsque ces dernières existent et ne dépendent pas de l'ordre des termes de ces séries.*

Si

$$\Phi_1(t) = \Phi_1(\alpha t)\varphi_1(t) \qquad \text{et} \qquad \Phi_2(t) = \Phi_2(\alpha t)\varphi_2(t)$$

alors

$$\Phi_1(t)\Phi_2(t) = \Phi_1(\alpha t)\Phi_2(\alpha t).\varphi_1(t)\varphi_2(t).$$

Comme le produit de f. c. est f. c., la proposition directe est établie. Réciproquement, soit

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t).$$

La loi de (ξ, α) est à f. c.

$$(1) \qquad \Phi(t) = [\varphi_1(t)\varphi_2(t)].[\varphi_1(\alpha t)\varphi_2(\alpha t)]\ldots[\varphi_1(\alpha^n t)\varphi_2(\alpha^n t)]\ldots$$

si celle-ci existe.

Or, les f. c. des séries (ξ_1, α) et (ξ_2, α) sont respectivement

$$\Phi_1(t) = \varphi_1(t)\varphi_1(\alpha t)\ldots\varphi_1(\alpha^n t)\ldots$$

et

$$\Phi_2(t) = \varphi_2(t)\varphi_2(\alpha t)\ldots\varphi_2(\alpha^n t)\ldots,$$

où les seconds membres sont des produits absolument convergents, ce qui équivaut à

$$\sum_{n=0}^{\infty} | 1 - \varphi_1(\alpha^n t) | < \infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} | 1 - \varphi_2(\alpha^n t) | < \infty.$$

Par suite

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ | 1 - \varphi_1(\alpha^n t) | + | 1 - \varphi_2(\alpha^n t) | \right\} < \infty$$

et le produit infini qui figure dans le second membre de (1) est absolument convergent. On peut donc y changer l'ordre des termes et l'on a

$$\Phi(t) = [\varphi_1(t)\varphi_1(\alpha t)\ldots].[\varphi_2(t)\varphi_2(\alpha t)\ldots] = \Phi_1(t).\Phi_2(t).$$

2. *L'ensemble de lois dérivé d'un ensemble de lois* $\in L_\alpha$ *est formé, s'il n'est pas vide, des lois* $\in L_\alpha$.

Soit une suite convergente de lois $\mathcal{L}_n$ éléments de L_α, c'est-à-dire

$$\Phi_n(t) = \Phi_n(\alpha t).\varphi_n(t),$$

où

$$\Phi_n(t) \to \Phi(t) \text{ f. c.},$$

donc

$$\Phi_n(\alpha t) \to \Phi(\alpha t) \text{ f. c.}$$

Le lemme du début montre qu'alors il existe au moins une f. c. $\varphi(t)$ telle que

$$\Phi(t) = \Phi(\alpha t)\varphi(t).$$

Ainsi

Théorème 5. — *Toute classe* L_α *est fermée par rapport à la composition et par rapport au passage à la limite.*

VI. — Éléments indéfiniment divisibles.

Une loi à f. c. $\Phi(t)$ est dite indéfiniment divisible (i. d.) si $\Phi^{\frac{1}{n}}(t)$ est une f. c., n étant un nombre naturel quelconque. On connaît l'importance de ces lois dont l'ensemble coïncide avec l'ensemble de lois limites des sommes de v. a. indépendantes

$$S_n = X_{n,1} + X_{n,2} + \ldots + X_{n,n}$$

sous la seule condition que les $X_{n,i}$ soient uniformément négligeables à la limite, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait

$$\Pr(|X_{n,i}| > \varepsilon) < \varepsilon, \qquad 1 \leq i \leq n$$

dès que $n > N(\varepsilon)$ (P. Lévy-Khintchine).

M. Paul Lévy a su caractériser les lois i. d. par une relation qui en permet une étude approfondie :

Pour qu'une loi à f. c. $\Phi(t)$ soit i. d., il faut et il suffit que l'on ait

$$(1) \quad \log\Phi(t) = \mathrm{M}it - \mathrm{G}\frac{t^2}{2} + \left(\int_{-\infty}^{-0} + \int_{+0}^{+\infty}\right)\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) d\mathrm{N}(u),$$

où M est une constante réelle, G une constante réelle non négative,

$$\mathrm{N}(u) = \begin{cases} \mathrm{N}_1(u) & \text{pour } u < 0, \\ \mathrm{N}_2(u) & \text{pour } u > 0, \end{cases}$$

les $\mathrm{N}_i(u)$ étant des fonctions non décroissantes, nulles à l'infini et telles que

$$\left(\int_{-a}^{0} + \int_{0}^{a}\right) u^2\, d\mathrm{N}(u) < \infty \qquad \text{pour tout } a > 0 \text{ fini.}$$

De plus, $\Phi(t)$ étant donnée, M, G et $\mathrm{N}(u)$ à une constante près, sont bien déterminées.

Étudions les éléments i. d. des classes L_α. On a de suite la proposition suivante :

Si la loi de ξ *est* i. d., *il en est de même de la loi de* (ξ, α). En effet, la loi de

$$\sigma_n = \xi_0 + \alpha\xi_1 + \ldots + \alpha^n\xi_n$$

est i. d. car l'ensemble de lois i. d. est fermé par rapport à la composition (P. Lévy), puis la loi de

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = (\xi, \alpha) = \xi_0 + \alpha\xi_1 + \ldots + \alpha^n\xi_n + \ldots$$

(dont nous admettons l'existence pour le moment) est encore i. d. car l'ensemble de lois i. d. est fermé par rapport au passage à la limite (Khintchine).

Étudions le problème inverse : quelles sont les conditions que doit remplir $\mathcal{L} \in \mathrm{L}_\alpha$ pour que la loi de ξ ou $\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}(\alpha)}$ soit également i. d. ?

Remarquons d'abord que la loi de ξ est bien déterminée puisque la f. c. d'une loi i. d. ne peut s'annuler pour aucune valeur finie de t et nous nous trouvons donc dans le cas particulier signalé dans le lemme du début. On a, $\log \Phi(t)$ étant bien déterminé,

$$\log \varphi(t) = \log \Phi(t) - \log \Phi(\alpha t).$$

Or, $\log \Phi(t)$ est donné par la relation (1) d'où l'on tire aisément que

$$\log \varphi(t) = \mathrm{M}(1-\alpha) it - \mathrm{G}(1-\alpha^2)\frac{t^2}{2}$$
$$+\left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}\right)\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) d\left[\mathrm{N}(u) - \mathrm{N}\left(\frac{u}{a}\right)\right].$$

Pour que $\mathcal{L}(\xi)$ soit i. d. il faut et il suffit que $\log \varphi(t)$ satisfasse à une relation de la forme de (1) où nous désignerons les constantes et la fonction de u par m, g, $n(u)$, ces quantités satisfaisant aux conditions indiquées.

On vérifie de suite que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait

$$d\left[\mathrm{N}(u) - \mathrm{N}\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right] \geqq 0,$$

c'est-à-dire que $\mathrm{N}_i(u) - \mathrm{N}_i\left(\frac{u}{\alpha}\right)$, $i = 1, 2$ soient des fonctions à accroissements non négatifs dans tout intervalle de u ne contenant pas l'origine.

Posons

$$\overline{u} = \log|u|, \qquad \overline{\mathrm{N}}(\overline{u}) = \mathrm{N}(u), \qquad \overline{\alpha} = |\log \alpha|.$$

La condition trouvée devient

$$d[\overline{\mathrm{N}}(\overline{u}) - \overline{\mathrm{N}}(\overline{u} + \overline{\alpha})] \geqq 0.$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire une notion nouvelle, celle de la *convexité d'une fonction de $\overline{u}$ à l'échelle $\overline{\alpha}$* : toute *ligne polygonale inscrite* dans la courbe représentative d'une telle fonction et dont les côtés ont pour projection $\overline{\alpha}$ sur l'axe des $\overline{u}$ représente une fonction convexe au sens ordinaire. Nous pouvons alors dire que $\overline{\mathrm{N}}_1(\overline{u})$ et $-\overline{\mathrm{N}}_2(\overline{u})$ doivent être convexes à l'échelle $\overline{\alpha}$.

Théorème 6. — *Si la loi de ξ est i. d. il en est de même de la loi de (ξ, α). Réciproquement pour qu'une loi i. d. $\mathcal{L}$ soit* $\in \mathrm{L}_\alpha$

et $\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L})\alpha;}$ soit i. d., il faut et il suffit que $\overline{N_1}(\bar{u})$ et $-\overline{N_2}(\bar{u})$ soient convexes à l'échelle $\bar{\alpha}$.

Si L_α dégénère en L_1, comme on a vu que $L_1 \subset L_\alpha$ pour tout α dans $(0, 1)$, on retrouve la convexité ordinaire établie pour ce cas par M. P. Lévy. Si les lois de ξ et de (ξ, α) sont de même type (non dégénéré), on a

$$\Phi(t) = \Phi(\alpha t)\,\Phi(\beta t) \qquad \text{avec } 0 < \alpha < 1 \qquad \text{et} \qquad 0 < \beta < 1.$$

Cette relation définit les lois semi-stables introduites par M. Pólya. Ces lois sont i. d. car la relation de définition donne de suite

$$\Phi(t) = \Phi(a_{n,1}t)\,\Phi(a_{n,2}t)\ldots\Phi a_{n,2^n}t),$$

les $a_{n,i}$ étant les 2^n termes du développement de $(\alpha + \beta)^n$. Comme

$$\max_i a_{n,i} \leqq \max(\alpha^n, \beta^n),$$

on a

$$\lim_{n \to \infty} \max_i a_{n,i} = 0.$$

Par suite, la loi de (ξ, α) se présente comme loi limite de sommes des v. a. indépendantes en nombre indéfiniment croissant et uniformément infiniment petites en probabilité. Donc cette loi est une loi i. d. élément commun des classes L_α et L_β. On en déduit pour la fonction $N(u)$ correspondante,

$$N(u) = N\left(\frac{u}{\alpha}\right) + N\left(\frac{u}{\beta}\right).$$

M. Pólya et M. P. Lévy ont donné l'expression des $N(u)$ satisfaisant à cette relation dans le cas où $\frac{\log\alpha}{\log\beta}$ est rationnel, c'est-à-dire lorsque L_α et L_β font partie d'une même classe L_γ; lorsque ce rapport n'est pas rationnel, il se pose une question que nous précisons ci-dessous.

VII. — Questions d'unicité et quelques détails.

1. Peut-on avoir une même loi pour (ξ, α) et (ξ, β), avec $\alpha \neq \beta$? Alors

$$\Phi(t) = \Phi(\alpha t)\,\varphi(t) = \Phi(\beta t)\,\varphi(t).$$

Or, dans un intervalle $|t| \leqq \tau$, suffisamment petit, $\varphi(t) \neq 0$. Donc dans cet intervalle $\Phi(\alpha t) = \Phi(\beta t)$, d'où $\Phi(t) = \Phi(\gamma t)$ où $0 < \gamma < 1$. Par suite

$$\Phi(t) = \Phi(\gamma t) = \Phi(\gamma^2 t) = \ldots = \Phi(0) = 1$$

dans le même intervalle, et ξ, comme (ξ, α), dégénèrent à l'origine.

2. Peut-on avoir une même loi pour (ξ, α) et (η, α), avec $\mathcal{L}(\xi) \neq \mathcal{L}(\eta)$? Alors

$$\Phi(t) = \Phi(\alpha t)\, \varphi_\xi(t) = \Phi(\alpha t)\, \varphi_\eta(t).$$

Or, dans un intervalle $|t| \leqq \tau$ suffisamment petit, $\Phi(\alpha t) \neq 0$. Donc, dans cet intervalle $\varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t)$ et la question se ramène à la suivante : existe-t-il des lois distinctes à f. c. coïncidant dans un certain intervalle $|t| \leqq t_0$? Or, un tel exemple a été précisément formé par M. Gnedenko. Donc la réponse est positive.

3. Peut-on avoir une même loi pour (ξ, α) et (η, β) avec $\alpha \neq \beta$ et $\mathcal{L}(\xi) \neq \mathcal{L}(\eta)$?

Alors

$$\Phi(t) = \Phi(\alpha t)\, \varphi_\xi(t) = \Phi(\beta t)\, \varphi_\eta(t).$$

Nous connaissons une première solution : L_α et L_β font partie d'une même classe L_γ avec $\alpha^m = \beta^n$, m et n nombres naturels distincts. Nous connaissons une autre solution : la loi de (ξ, α) appartient à L_1, donc à toutes les classes L_α.

En les éliminant, le problème se pose ainsi : existe-t-il des lois communes à deux classes L_α et L_β telles que $\frac{\log \alpha}{\log \beta}$ soit irrationnel, sans appartenir à toutes les classes, c'est-à-dire à L_1 ?

Dans le cas particulier de lois i. d., il s'énonce : existe-t-il des fonctions non décroissantes, convexes à la fois à 2 échelles incommensurables sans être convexes au sens ordinaire ?

Dans le cas de lois semi-stables la réponse à cette question permettrait de savoir s'il existe des lois semi-stables à $\frac{\log \alpha}{\log \beta}$ irrationnel sans être des lois stables.

Nous n'avons répondu qu'aux questions 1 et 2.

THÉORÈME 7. — *En dehors de lois dégénérées à l'origine, les lois communes à deux classes distinctes ne peuvent correspondre à une même $\mathcal{L}(\xi)$. Un élément d'une classe peut correspondre à deux lois distinctes $\mathcal{L}(\xi)$ et $\mathcal{L}(\eta)$ si, et seulement si leurs f. c. coïncident dans un intervalle $|t| \leqq \tau$.*

4. Écrivons

$$\Phi(t) = \Phi(\alpha t)\varphi(t) \qquad (0 < \alpha < 1).$$

S'il existe une valeur $t_0 \neq 0$ finie telle que $\Phi(t_0) = 1$, alors, comme les f. c. $\Phi(\alpha t)$ et $\varphi(t)$ sont, en module, inférieures ou égales à 1, $\Phi(\alpha t_0)\varphi(t_0) = 1$ entraîne $\Phi(\alpha t_0) = 1$ et $\varphi(t_0) = 1$. La relation $1 = \Phi(\alpha t_0) = \Phi(\alpha^2 t_0)\Phi(\alpha t_0)$ entraîne, à son tour, $\Phi(\alpha^2 t_0) = 1$ et $\varphi(\alpha t_0) = 1$ et d'une façon générale, $\Phi(t_0) = 1$ entraîne $\Phi(\alpha^n t_0) = 1$, $\varphi(\alpha_n t_0) = 1$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$. La loi à f. c. $\Phi(t)$ est alors totalement discontinue, la différence entre 2 valeurs possibles quelconques de la v. a. qu'elle distribue. étant un multiple de $\frac{2\pi}{\alpha^n t_0}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, soit $K_n . \frac{2\pi}{\alpha^n t^0}$, où K_n est un *entier* dépendant de n et des valeurs considérées. On a donc

$$K_n . \frac{2\pi}{\alpha^n t_0} = K_0 . \frac{2\pi}{t_0},$$

d'où

$$K_n = \alpha^n K_0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ce qui est impossible, à moins que l'on n'ait $K_0 = 0$. Finalement : *sauf les lois dégénérées à l'origine, les f. c. des lois*

$$\in L_\alpha (0 < \alpha < 1)$$

sont $\neq 1$ *pour tout t fini.*

On voit plus aisément encore, que s'il existe une valeur finie $t_0 \neq 0$ telle que $\Phi(t_0) = 0$, alors $\Phi(\alpha^{-n} t_0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ce qui montre que la loi à f. c. $\Phi(t)$ n'est pas totalement discontinue; de plus, il existe un entier $k = 0$ ou 1 ou 2, ... tel que

$$\varphi(\alpha^k t_0) = 0.$$

5. Revenons aux v. a. X_n des théorèmes 1 et 2.

Si pour $A > A_0 > 0$, on a

$$\Pr(|X_n| > A) \leqq \Pr(|Y| > A)$$

pour n suffisamment grand, Y étant une v. a. donnée, alors, lorsque $a_n \to \infty$ avec n, on a pour n suffisamment grand et $\varepsilon > 0$,

$$\Pr\left(\frac{|X_n|}{a_n} > \varepsilon\right) \leq \Pr(|Y| > a_n \varepsilon).$$

Il en résulte que ξ est presque certainement nulle, donc la loi (ξ, α) dégénère à l'origine.

Cette conclusion cesse d'être valable dans le cas limite classique $\alpha = 1$.

Si ξ n'est pas presque certainement nulle, $\Pr\left(\frac{|X_n|}{\Phi_n} > \varepsilon\right)$ ne tend pas vers zéro pour tout $\varepsilon < 0$, lorsque $n \to \infty$. Comme $\alpha_n \to \infty$, la loi de X_n devient impropre à la limite. Remarquons que si ξ est bornée, c'est-à-dire $\Pr(|\xi| > \varepsilon_0) = 0$, alors $\Pr(|X_n| > a_n \varepsilon_0) \to 0$ avec $\frac{1}{n}$ et réciproquement, si cette relation a lieu, ξ est bornée; ceci ne contredit pas ce qui précède car, pour que $\mathcal{L}(X_n)$ ne devienne pas à la limite une loi impropre, il faut et il suffit que $\Pr(|X_n| > A_n) \to 0$, *quelle que soit la manière dont* $A_n \to \infty$.

VIII. — Extensions.

Pour *tout ce qui précède*, nous nous sommes placés dans des *hypothèses aussi simples que possible* afin de rendre les *résultats aussi intuitifs que possible*. En fait, *ces résultats demeurent valables avec des hypothèses beaucoup moins restrictives* et *les mêmes raisonnements continuent à s'appliquer*, leur traduction en formules est seule à se compliquer.

1. Généralisons d'abord le problème posé au début ; on considère la suite de sommes

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n$$

de v. a. $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ indépendantes et l'on cherchera maintenant à caractériser les lois limites des suites convergentes $\mathcal{L}\left(\frac{S_n}{a_n} - b_n\right)$, où $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to \alpha$, $0 < \alpha < 1$, et $\{b_n\}$ est une suite de nombres certains réels.

Théorème 1'. — *Si la suite* $\mathcal{L}\left(\frac{S_n}{a_n} - b_n\right)$ *converge vers* $\mathcal{L}(\sigma)$ *à f. r.* $F(x)$ *et à f. c.* $\Phi(t)$ *lorsque* $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to \alpha$, $0 < \alpha < 1$, *avec* $n \to \infty$, *alors la loi* $\mathcal{L}(\sigma)$ *est divisible par la loi* $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ *à f. r.* $F\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ *et à f. c.* $\Phi(\alpha t)$.

En effet,

$$\Phi_n(t) = E\left[e^{it\left(\frac{S}{a_n} - b_n\right)}\right] = \varphi_1\left(\frac{t}{a_n}\right)\varphi_2\left(\frac{t}{a_n}\right)\dots\varphi_n\left(\frac{t}{a_n}\right)e^{-itb_n}$$

et

$$\Phi_{n+1}(t) = \varphi_1\left(\frac{t}{a_{n+1}}\right)\varphi_2\left(\frac{t}{a_{n+1}}\right)\dots\varphi_{n+1}\left(\frac{t}{a_{n+1}}\right)e^{-itb_n},$$

d'où

$$\Phi_{n+1}(t) = \varphi_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}t\right).\varphi_{n+1}\left(\frac{t}{a_{n+1}}\right)e^{-it(b_{n+1} - b_n)}.$$

Comme

$$\Phi_{n+1}(t) \to \Phi(t), \qquad \Phi_{n+1}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}t\right) \to \Phi(\alpha t),$$

le lemme du début continue à s'appliquer et l'on a encore

$$\Phi(t) = \Phi(\alpha t).\varphi(t),$$

mais $\varphi(t)$ est f. c. d'une loi d'accumulation de la suite des lois à f. c. $\left\{\varphi_{n+1}\left(\frac{t}{a_{n+1}}\right)e^{-it(b_{n+1}-b_n)}\right\}$.

Les résultats qui suivent le théorème 1 demeurent valables, mais la notion de type de lois peut être remplacée par celle de type généralisé : ensemble de lois définies par les f. r. $F(ax + b)$, où $a > 0$ et b sont des constantes, par ailleurs quelconques.

2. Au lieu d'une suite convergente, soit une suite de types de sommes de v. a. indépendantes ayant deux éléments d'accumulation distincts

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_{n_k}}{a_{n_k}}\right) \to \mathcal{L}(\sigma) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}\left(\frac{S_{n'_k}}{a_{n'_k}}\right) \to \mathcal{L}(\sigma'')$$

lorsque $K \to \infty$. Alors le théorème 1 devient

Théorème 1''. — *Si* $n_k > n'_k$ *pour* K *suffisamment grand et* $\frac{a_{n'_k}}{a_{n_k}} \to \alpha$, $0 < \alpha < 1$, *alors* $T(\sigma)$ *est divisible par* $T(\sigma')$ etc.

Lorsqu'il s'agit de lois i. d., la condition nécessaire et suffisante du théorème 9 devient $\Delta N(u) \geqq \Delta N'\left(\frac{\alpha}{u}\right)$ *pour tout intervalle de u ne contenant pas l'origine.*

3. Nous avons constamment supposé que la suite $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ était convergente. Or, on peut faire l'hypothèse plus faible suivante :

$$0 < b' < \frac{a_n}{a_{n+1}} < b'' < 1,$$

b et b' deux nombres fixes, et, plus généralement supposer que $\{\alpha_n\}$ contient une suite partielle satisfaisant à cette relation. De même, la condition du 2 peut être remplacée par la suivante : $\{a_{n_k}\}$ et $\{a_{n'_k}\}$ contiennent respectivement des suites partielles $\{a'_{n_k}\}$ et $\{a'_{n'_k}\}$ telles que

$$0 < b' < \frac{a'_{n'_k}}{a'_{n_k}} < b'' < 1$$

b' et b'' deux nombres fixes.

En combinant les hypothèses indiquées on obtient des conditions bien moins restrictives sous lesquelles les résultats acquis demeurent valables. Nous laissons au lecteur le soin de formuler les énoncés correspondants.

IX. — Convergence.

Soit

$$\sigma(\alpha) = \xi_0 + \alpha\xi_1 + \ldots + \alpha^n\xi_n + \ldots$$

une série où les ξ sont des v. a. indépendantes et équiprobables. C'est une série de v. a. indépendantes; on sait que dans ce cas la convergence en loi entraîne la convergence en probabilité et la convergence presque certaine. La convergence en moyenne quadratique entraîne ici les précédentes, mais n'est pas nécessairement entraînée par elles; aussi, parmi ces convergences ce sera la seule que nous qualifierons.

1. Pour que $\sigma(\alpha)$ converge, il faut et il suffit que

$$\varphi(t)\,\varphi(\alpha t)\ldots\varphi(\alpha^n t)$$

converge vers une fonction $\Phi(t)$ qui sera la f. c. de la loi de $\sigma(\alpha)$, uniformément dans un intervalle fini $(-t_0, +t_0)$. Une condition suffisante classique devient ici

$$|1-\varphi(\alpha^n t)| \leqq u_n, \quad \text{pour } n > n_0, \quad |t| < t_0, \quad \text{et} \quad \Sigma u_n < \infty.$$

Ainsi $\Phi(t)$ existe pour tout α tel que $0 < \alpha < 1$: pour la loi de Laplace-Gauss : $\varphi(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \left(\Phi(t) = e^{-\frac{\sigma^2}{2(1-\alpha^2)} t^2}\right)$; pour la loi de Cauchy : $\varphi(t) = e^{-|t|} \left(\Phi(t) = e^{-\frac{|t|}{1-\alpha}}\right)$, pour le type III de Pearson $\varphi(t) = (1 - iat)^{-b}$, $a > 0$ et $b > 0$, pour la distribution uniforme dans $(-l, +l)$ — $\varphi(t) = \dfrac{\sin lt}{lt}$, etc.

Un exemple un peu plus intéressant s'obtient à partir des f. c. formées par Gnedenko : $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ égales dans $(-1, +1)$ à $1 - |t|$ et dont l'une est nulle à l'extérieur de cet intervalle tandis que l'autre est périodique de période 2. Les f. c. $\Phi_1(t)$ et $\Phi_2(t)$ existent toutes deux et coïncident également dans $(-1, +1)$, l'une est nulle à l'extérieur tandis que l'autre s'annule pour $t = \alpha^{-n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Lorsque $\varphi(t)$ est f. c. d'une loi i. d., la formule de P. Lévy donne

$$\log \varphi(t) = mit - g\frac{t^2}{2} + \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}\right)\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dn(u),$$

$$\log \varphi(\alpha t) = \left[m + (1-\alpha^2)\left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}\right) \frac{u^3}{(1+u^2)(1-\alpha^2 u^2)}\, dn(u)\right] i\alpha t$$
$$- g\alpha^2 \frac{t^2}{2} + \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}\right)\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dn\left(\frac{u}{\alpha}\right).$$

Or, pour que la suite de lois $\mathcal{L}_n$ i. d., définies par M_n, G_n et $N_n(u)$ tende vers la loi i. d. $\mathcal{L}$ définie par M, G et $N(u)$, il faut et il suffit (Gnedenko) que, lorsque $u \to \infty$,

$$M_n \to M, \quad N_n(u) \to N(u)$$

en tout ses points de continuité et

$$P_n(\varepsilon) = \left(\int_{-\varepsilon}^{0} + \int_{0}^{\varepsilon}\right) u^2\, dN_n(u) + G_n \to P(\varepsilon), \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Dans notre cas ces conditions s'écrivent, comme on le vérifie aisément,

$$(1)\quad \sum_{K=0}^{n} \alpha^{K}(1-\alpha^{2K})\left(\int_{+\infty}^{0}+\int_{0}^{+\infty}\right)\frac{u^{3}}{(1+u^{2})(1+\alpha^{2K}u^{2})}\,dn(u) \rightarrow M-\frac{m}{1-\alpha},$$

$$(2)\quad \sum_{K=0}^{n} n\left(\frac{u}{\alpha^{K}}\right) \rightarrow N(u) \quad \text{en ses points de continuité,}$$

$$(3)\quad \sum_{K=0}^{n}\left(\int_{-\varepsilon}^{0}+\int_{0}^{\varepsilon}\right)u^{2}\,dn\left(\frac{u}{\alpha^{K}}\right) \rightarrow \left(\int_{-\varepsilon}^{0}+\int_{0}^{\varepsilon}\right)u^{2}\,dN(u)+G-\frac{g}{1-\alpha^{2}},$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

De plus $\sum_{K=0}^{n} n\left(\frac{u}{\alpha^{K}}\right)$ est une somme de fonctions non décroissantes de même signe, et, par suite, l'existence de $N(u)$ est équivalente à l'existence d'une borne supérieure $\mathfrak{N}_i(u)$, finie pour $u \neq 0$ fini, de $(1)^{i-1}\sum_{K=0}^{\infty} n_i\left(\frac{u}{\alpha^{K}}\right)$, $i=1,2$. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les conditions que l'on obtiendrait ainsi lorsque $\mathcal{L}(\xi)$ est i. d.

2. Supposons que le moment de second ordre de ξ soit fini; sans restreindre la généralité, on peut poser $E(\xi)=0$, $E(\xi^2)=1$. Alors

$$E[\sigma(\alpha)]=0, \qquad E[\sigma^{2}(\alpha)]=\frac{1}{1-\alpha^{2}}, \qquad \text{pour } |\alpha|<1,$$

donc la série $\sigma(\alpha)$ est convergente pour $|\alpha|<1$.

Si le second moment est infini on peut appliquer le critère de Kintchine-Kolmogoroff. Posons

$$\xi'_n=\xi_n \quad \text{si } |\xi_n| \leq |\alpha|^{-n},$$
$$\xi'_n=0 \quad \text{si } |\xi_n| > |\alpha|^{-n}.$$

La condition de convergence stochastique devient celle de la convergence simultanée des séries certaines

$$S_0=\sum_n \Pr(\xi>|\alpha|^{-n}),$$

$$S_1=\sum_n |\alpha^n|\,E(\xi'_n) \qquad \text{et} \qquad S_2=\sum_n \alpha^{2n}E(\xi'^2_n)$$

ou, en posant $f(x)$ la f. r. de ξ et $\Delta_n = f(|\alpha|^{-n}) - f(-|\alpha|^{-n})$,

$$S_0 = \sum \frac{1}{\Delta_n} \int_{|x|>|\alpha|^{-n}} df(x),$$

$$S_1 = \sum \frac{1}{\Delta_n} \int_{-|\alpha|^{-n}}^{+|\alpha|^{n}} x\, df(x),$$

$$S_2 = \sum \frac{1}{\Delta_n} \int_{-|\alpha|^{-n}}^{+|\alpha|^{-n}} x^2\, df(x).$$

Supposons, par exemple, que pour $x > 0$ suffisamment grand

$$\Pr(|\xi| > x) > \frac{C}{\log x},$$

où C est une constante positive. Alors, pour n suffisamment grand,

$$\Pr(|\xi| > |\alpha|^{-n}) > \frac{C}{n\,|\log|\alpha||} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{C}{n\,|\log|\alpha||} = \infty.$$

Donc $\sigma(\alpha)$ n'existe pour aucune valeur de α comprise entre 0 et 1.

X. — Fonction aléatoire $\sigma(\alpha)$.

La série aléatoire

$$\sigma(\alpha) = \xi_0 + \alpha\xi_1 + \ldots + \alpha^n \xi_n$$

est une fonction aléatoire (f. a.) de α. Nous supposons que $E(\xi^2) < \infty$ et prenons, comme ci-dessus, $E(\xi) = 0$, $E(\xi^2) = 1$. De plus au lieu d'admettre que les ξ sont indépendantes, nous les supposerons seulement orthogonales, c'est-à-dire $E(\xi_i \xi_j) = 0$ pour $i \neq j$.

On a encore $E[\sigma^2(\alpha)] = \frac{1}{1-\alpha^2}$ pour $|\alpha| < 1$ et la f. a. $\sigma(\alpha)$ *est définie en* m. q. *dans l'intervalle* $(-1, +1)$. On peut dire que c'est une f. a. analytique dans cet intervalle. Si α et β sont deux valeurs appartenant à cet intervalle, l'inégalité de Schwarz montre que $E[\sigma(\alpha).\sigma(\beta)]$ est finie; d'ailleurs le calcul direct donne immédiatement

$$E[\sigma(\alpha).\sigma(\beta)] = \frac{1}{1-\alpha\beta} \qquad (0 < \alpha < 1;\ 0 < \beta < 1).$$

$\sigma(\alpha)$ *est continue en m. q.*, car

$$E[\sigma(\alpha) - \sigma(\beta)]^2 = \frac{1}{1-\alpha^2} - \frac{2}{1-\alpha\beta} + \frac{1}{1-\beta^2} \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$.

$\sigma(\alpha)$ est dérivable indéfiniment en m. q. et la dérivation se fait terme à terme.

En effet, posons formellement

$$\sigma'(\alpha) = \xi_1 + 2\alpha\xi_2 + \ldots + n\alpha^{n-1}\xi_n + \ldots,$$

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}\left[\frac{\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)}{\beta-\alpha} - \sigma'(\alpha)\right]^2 \\ & = \frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\left[\frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{2}{1-\alpha\beta}\right] - \frac{2}{\beta-\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha\beta}\right) \\ & - \frac{2}{\beta-\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{1-\alpha\beta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\left(\frac{1}{1-\alpha\beta}\right)_{\beta=\alpha} \to 0, \end{aligned}$$

lorsque $\beta \to \alpha$; de même pour les dérivées suivantes.

$\sigma(\alpha)$ est développable en série de Taylor en m. q. [dans l'intervalle $(-1, +1)$]. On vérifie par des calculs élémentaires, que

$$\mathrm{E}\left\{\sigma(\beta) - \left[\sigma(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{1\,!}\sigma'(\alpha) + \ldots + \frac{(\beta-\alpha)^n}{n\,!}\sigma^{(n)}(\alpha)\right]\right\}^2 \to 0$$

lorsque $n \to \infty$.

Les dérivées successives de $\sigma(\alpha)$, pour $\alpha = 0$, sont $\xi_0, \xi_1, \ldots$ c'est-à-dire des v. a. orthogonales et *c'est la seule valeur de α pour laquelle il en est ainsi.* En effet, on vérifie sans difficulté que

$$\mathrm{E}[\sigma^{(m)}(\alpha).\sigma^{(n)}(\alpha)] = \left\{\frac{\partial^{m+n}}{\partial\alpha^m\,\partial\beta^n}\cdot\mathrm{E}[\sigma(\alpha).\sigma(\beta)]\right\}_{\beta=\alpha}.$$

Par suite, pour que $\sigma^{(m)}(\alpha)$ et $\sigma^{(n)}(\alpha)$ soient orthogonales, il faut et il suffit que l'on ait

$$\left[\frac{\partial^{m+n}}{\partial\alpha^m\,\partial\beta^n}\left(\frac{1}{1-\alpha\beta}\right)\right]_{\beta=\alpha} = 0$$

et la seule valeur de α pour laquelle cette condition est réalisée est $\alpha = 0$. Ainsi *aucun développement de $\sigma(\alpha)$ autour d'une valeur de l'intervalle* $(-1, +1)$ *différente de* 0 *n'a des coefficients aléatoires orthogonaux.*

Nous avons obtenu depuis des résultats beaucoup plus généraux dont découlent ceux de ce paragraphe et dont certains sont énoncés dans une Note aux *Comptes rendus*, t. **220**, séance du 5 mars 1945, p. 295.

(Manuscrit reçu le 25 mai 1945).