BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES DUFRESNOY

Sur les valeurs ramifiées des fonctions méromorphes

Bulletin de la S. M. F., tome 72 (1944), p. 76-92

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1944__72__76_0>

SUR LES VALEURS RAMIFIÉES DES FONCTIONS MÉROMORPHES;

PAR M. JACQUES DUFRESNOY.

INTRODUCTION.

Nous nous proposons de compléter ceux des résultats du Chapitre III de notre Thèse (¹) que nous avions rassemblés sous la rubrique : *deuxième groupe de théorèmes*. Il s'agit essentiel-

---

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, 58, 1941, p. 179-259. Je profite du présent article pour indiquer que le théorème du défaut énoncé dans le paragraphe 24 de ce Mémoire est encore vrai dans les hypothèses plus larges prévues. Partons, en effet, de la relation

$$\sum P(D_i) \geqq (q-2)T(r) - (q-2)h\int_0^r L(r)\frac{dr}{r}.$$

En utilisant l'inégalité

$$L^2(r) \leqq 8\pi^2 r\frac{dS}{dr},$$

on peut obtenir, avec Dinghas, une borne supérieure du terme complémentaire lorsque $R=\infty$. Dans le cas $R<\infty$, on a de même

$$\left(\int_{r_0}^r L(r)\frac{dr}{r}\right)^2 \leqq \int_{r_0}^r \frac{dr}{(R-r)r}\int_{r_0}^r L^2(r)(R-r)\frac{dr}{r}$$
$$\leqq \frac{8\pi^2}{R}\left[\log\frac{r}{R-r}\right]_{r_0}^r \int_{r_0}^r (R-r)\,dS(r);$$

une intégration par parties montre que cette expression peut s'écrire

$$O\left[[S(r)(R-r)+T(r)]\log\frac{1}{R-r}\right].$$

D'autre part, on vérifie immédiatement que

$$S(r)(R-r)\log\frac{1}{R-r} < \varepsilon T(r)\log^2 T(r),$$

sauf sur *un ensemble exceptionnel Δ_r de r sur lequel on a*

$$\int_{\Delta_r} d\log\log\frac{1}{R-r} < \infty.$$

En dehors de Δ_r on a donc

$$\sum P(D_i) \geqq (q-2)T(r) - o\left[\sqrt{T(r)}\log T(r) + \sqrt{T(r)\log\frac{1}{R-r}}\right].$$

lement d'obtenir des critères de normalité pour des fonctions méromorphes $w = f(z)$, sachant que ces fonctions décrivent des surfaces de Riemann dont les ramifications jouissent de propriétés convenables.

Nous avons divisé notre exposé en deux parties. Dans la première, nous étudions les surfaces de Riemann. La proposition fondamentale à laquelle nous arrivons (n° 3) a déjà fait l'objet d'une Note (¹); mais nous développerons ici une démonstration plus simple et qui conduit à un résultat plus précis, en même temps qu'elle met en évidence la raison profonde de la propriété étudiée. Dans la deuxième partie nous appliquons ces résultats à l'étude des fonctions méromorphes; nous avions déjà abordé cette question (²), mais la forme que nous donnons ici à nos énoncés (nᵒˢ 10 et 11) constitue une vérification dans un cas nouveau du principe général énoncé par A. Bloch : « *Nihil est in infinito quod non prius fuerit in finito* ».

I.

1. Soit, sur la sphère unitaire Σ_0, une surface de recouvrement Σ simplement connexe d'aire $4\pi S$ et limitée par un contour de longueur L. Soient d'autre part $q \geq 3$ domaines fermés D_i simplement connexes et disjoints de la sphère Σ_0, *certains de ces domaines pouvant être réduits à des points.*

Nous nous proposons de compléter l'étude des disques que la surface Σ présente sur les domaines D_i. Il nous faut d'abord rappeler quelques définitions et quelques résultats. Un disque formé de n feuillets est appelé disque multiple; n est sa *multiplicité*. Si n_1 désigne la somme des ordres de ses points de ramifi-

---

Il en résulte que le théorème du paragraphe 24 est vérifié si

$$\varlimsup_{r \to R} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{R-r}} = \infty,$$

la $\varlimsup$ étant prise lorsque r reste extérieur à Δ_r. En tenant compte de la propriété de Δ_r indiquée ci-dessus, on verra sans peine qu'on peut s'affranchir de cette restriction.

(¹) *C. R. Acad. Sc.*, 215, 1942, p. 252-253.

(²) *C. R. Acad. Sc.*, 215, 1942, p. 294-296.

cation, la quantité $p = n - n_1$ est au plus égale à l'unité; on l'appelle *multiplicité simple* du disque considéré. Nous désignerons par $n(D_i)$ le nombre de disques situés sur D_i, chacun d'eux étant compté avec son ordre de multiplicité; par $\bar{n}(D_i)$ le nombre de ces mêmes disques, chacun d'eux étant compté une seule fois; par $p(D_i)$ la somme des multiplicités simples de ces disques. On a

$$p(D_i) \leqq \bar{n}(D_i).$$

Ahlfors a établi le théorème suivant, dont nous avons nous-même donné une démonstration nouvelle :

Il existe une constante h dépendant seulement des domaines D_i *et telle que*

$$\sum_{i=1}^{q} p(D_i) > (q-2)\,S - hL. \tag{1}$$

On utilisera souvent l'inégalité qui se déduit de celle-ci en remplaçant le premier membre par $\Sigma\bar{n}(D_i)$. En reprenant la démonstration, on voit que l'on peut ajouter une unité au second membre lorsque la surface Σ présente effectivement un disque au moins sur l'un des domaines D_i.

Supposons que les disques situés sur D_i aient, à l'exception de d_i d'entre eux au plus, μ_i feuillets au moins [condition (C)] (1); on a alors

$$\bar{n}(D_i) \leqq d_i + \frac{1}{\mu_i}[n(D_i) - d_i]. \tag{2}$$

Il vient alors, en utilisant le théorème d'Ahlfors et le théorème du recouvrement (2),

$$\left[\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2\right] S < \left[\sum d_i\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-1\right]^+ + h'L, \tag{3}$$

la notation $[\alpha]^+$ représentant le plus grand des deux nombres α et 0; h' désigne une nouvelle constante dépendant seulement des domaines D_i.

---

(1) Dans le cas où sur D_i il y a d_i disques au plus en tout, on fait $\mu_i = \infty$. Tous les résultats qui suivent s'appliquent à ce cas particulier.

(2) Le raisonnement est en tous points analogue à celui que nous avons développé dans le paragraphe 17 de notre Thèse.

Les μ_i et les α_i étant supposés connus, cette inégalité fournit en fonction de S une borne inférieure positive de L lorsque les μ_i satisfont à

$$\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)>2 \tag{4}$$

et que S est *suffisamment grand.*

2. On peut obtenir d'autre part une inégalité qui fournit une borne inférieure de L lorsque S est donné *non entier*, cette inégalité ne faisant d'ailleurs intervenir aucune hypothèse sur la surface Σ. Pour l'établir on remarquera que, la surface Σ étant décomposée en feuillets Σ_ν d'aire $4\pi S_\nu$ et ayant un contour de longueur L_ν, on a

$$L_\nu^2 \geqq 16\pi^2 S_\nu(1-S_\nu);$$

d'autre part, on démontre par récurrence que

$$\sum S_\nu(1-S_\nu) \geqq s(1-s),$$

où s est l'excès sur sa partie entière de $S=\Sigma S_\nu$; de ces deux inégalités on déduit aussitôt une borne inférieure de $L=\Sigma L_\nu$

$$L^2 \geqq 16\pi^2 s(1-s).$$

Nous avons déjà fait usage de cette inégalité quand $S<1$. Jointe à (3), elle montre que, si les nombres d_i et μ_i sont fixés de telle sorte que la relation

$$\sum d_i\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)<\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-1 \tag{5}$$

soit vérifiée en même temps que (4), on peut déterminer une constante k telle que l'on ait toujours

$$S<kL. \tag{6}$$

On pourrait étendre légèrement les hypothèses sous lesquelles nous avons obtenu cette inégalité, mais il est plus simple d'arriver tout de suite à la proposition que nous avons en vue.

3. Nous allons montrer que si

$$\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)\geqq 2 \tag{4 bis}$$

et sous certaines conditions imposées aux d_i, on peut trouver un nombre L_0 dépendant seulement des domaines D_i et tel que L soit supérieur à L_0 lorsque S est supérieur à $\frac{1}{2}$.

Soit, en effet, une surface Σ présentant sur les domaines D_i des disques satisfaisant à la condition (C) énoncée dans le n° 1. Si l'on remplace le système des domaines D_i par un système de domaines $D_i^\star$ simplement connexes et disjoints tels que $D_i^\star \supset D_i$, la surface Σ satisfait aux mêmes conditions relativement à ce nouveau système. Or l_0 étant choisi assez petit (ce choix dépendant seulement des domaines D_i), on peut trouver un nombre fini de systèmes $D_i^\star$ tels que toute courbe fermée de longueur inférieure à l_0 soit complètement intérieure à un domaine $D_i^\star$ de l'un de ces systèmes.

Considérons alors la surface Σ et supposons que $L < l_0$. La courbe contour sera intérieure à un domaine, $D_1^\star$ par exemple, de l'un des nouveaux systèmes. Par des rétrosections convenables nous pouvons retrancher de la surface Σ les langues qu'elle présente sur $D_1^\star$. Ce qui reste alors de Σ constitue une ou plusieurs surfaces Σ' simplement connexes, chacune d'elles étant limitée par un contour situé sur la frontière de $D_1^\star$. On peut souder à ce contour un disque simplement connexe situé sur $D_1^\star$ de façon que la surface Σ' correspondante se transforme en une surface fermée de genre zéro. Nous obtenons ainsi une ou plusieurs surfaces fermées; s'il y en a plusieurs, nous pouvons réunir la première à la seconde, la seconde à la troisième, etc., l'avant-dernière à la dernière à l'aide de lignes de croisement entre les disques ajoutés sur $D_1^\star$. De la sorte nous obtiendrons finalement une seule surface fermée de genre zéro qui présentera sur $D_2^\star$, $D_3^\star$, ..., $D_q^\star$ les mêmes disques que Σ et qui présentera sur $D_1^\star$ les mêmes disques que Σ avec en plus un disque (formé par la réunion de ceux qui ont été ajoutés aux surfaces Σ').

Le raisonnement précédent suppose que la surface Σ n'est pas tout entière intérieure à $D_1^\star$. Si elle l'était, chacun de ses feuillets satisferait à

$$L_\nu^2 \geqq 16\pi^2 S_\nu(1 - S_\nu) > 16\pi^2 S_1^\star S_\nu > 16\pi^2 S_1^\star S_\nu^2,$$

en désignant par $4\pi S_i^\star$ l'aire de la sphère unitaire dont on a retranché le domaine D_i^* ; on aurait donc

$$L > 4\pi\sqrt{S_1^*}\,S.$$

Soit alors L_0 le plus petit des nombres l_0 et $2\pi\sqrt{S_i^*}$. Si une surface de recouvrement Σ simplement connexe présente sur les domaines D_i des disques satisfaisant à la condition (C), si $S > \frac{1}{2}$ et si $L < L_0$, *il existe* une surface de recouvrement fermée de genre zéro présentant sur les domaines D_i (¹) des disques satisfaisant à la même condition dans laquelle un des nombres d_i a été augmenté d'une unité [condition (C')]. Il revient au même de dire qu'il existe une surface de recouvrement simplement connexe dont le contour se réduit à un point (²) et qui présente sur les domaines D_i des disques satisfaisant à la condition (C).

Si les nombres μ_i et d_i ont été fixés de façon qu'une telle surface n'existe pas, on peut donc affirmer que la surface Σ satisfera à $L > L_0$ lorsque $S > \frac{1}{2}$. Il est manifeste que cette condition imposée aux μ_i et aux d_i est nécessaire en même temps que suffisante.

L'inégalité (4 *bis*) à laquelle nous avons assujetti les nombres μ_i n'est pas intervenue dans notre démonstration. Mais il est bien connu que si elle n'est pas satisfaite, on peut construire une surface fermée de genre zéro ne présentant sur le domaine D_i que des disques à μ_i feuillets (surface régulièrement ramifiée); la condition nécessaire et suffisante n'est donc jamais remplie dans ce cas, quels que soient les d_i.

4. Pratiquement il sera utile d'avoir une condition *suffisante* plus maniable. On l'obtiendra en remarquant que l'ordre total de ramification d'une surface de genre zéro à n feuillets est égal à $2n-2$. Or, si cette surface ne présente sur le domaine D_i que des disques ayant μ_i feuillets au moins à l'exception de d_i' d'entre

---

(¹) Nous pouvons remplacer les domaines D_i^* par les domaines D_i puisqu'il s'agit ici d'une condition d'existence à caractère purement topologique.

(²) C'est la surface fermée précédente dont on a retiré un point appartenant au disque supplémentaire.

eux au plus, le nombre total de ces disques est inférieur ou égal à

$$d'_i + \mathrm{E}\left[\frac{n - d'_i}{\mu_i}\right],$$

en désignant par $\mathrm{E}[\alpha]$ la partie entière de α. L'ordre de ramification de l'ensemble de ces disques est donc au moins égal à

$$n - d'_i - \mathrm{E}\left[\frac{n - d'_i}{\mu_i}\right] = \overline{\mathrm{E}}\left[\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right)(n - d'_i)\right],$$

en désignant par $\overline{\mathrm{E}}[\alpha]$ le plus petit nombre entier au moins égal à α. Si ce nombre est négatif on le remplace par zéro. On a finalement

$$2n - 2 \geqq \sum \overline{\mathrm{E}}\left[\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right)(n - d'_i)\right]. \tag{7}$$

D'autre part, il est clair que n est au moins égal au plus grand μ des nombres μ_i auxquels correspondent des d'_i nuls.

Si pour chacun des q systèmes de d'_i définis par $d'_i = d_i$ pour $i \neq k$ et $d'_k = d_k + 1$, l'inégalité

$$2n - 2 < \sum \overline{\mathrm{E}}\left[\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right)(n - d'_i)\right] \tag{8}$$

est satisfaite pour tous les entiers $n \geqq \mu$, il n'existe pas de surface fermée de genre zéro satisfaisant à la condition (C') *et, par conséquent, on peut déterminer un nombre* L_0 *tel que* $\mathrm{L} > \mathrm{L}_0$ *lorsque* $\mathrm{S} > \frac{1}{2}$.

Un cas particulier simple mérite d'être signalé. C'est celui où $\mu_1 = \infty$ avec $d_1 = 0$. On a forcément $d'_1 = 1$ et l'inégalité (7) se met sous la forme

$$n - 1 \geqq \sum_{i \neq 1} \overline{\mathrm{E}}\left[\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right)(n - d_i)\right]. \tag{7 bis}$$

On voit aisément que c'est la condition nécessaire *et suffisante* pour qu'il existe une surface fermée de genre zéro à n feuillets satisfaisant à la condition (C'). On peut donc déterminer le nombre L_0 sous la condition *nécessaire* et suffisante que les μ_i et les d_i satisfassent à l'inégalité

$$(8\,bis)\qquad n-1<\sum_{i\neq 1}\overline{\mathrm{E}}\left[\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)(n-d_i)\right]$$

pour tout entier n au moins égal au plus grand des μ_i auxquels correspondent des d_i nuls ($i\neq 1$). En faisant $n=1$, on voit que l'inégalité ne peut être satisfaite que si l'un au moins de ces d_i est nul; soit, par exemple, $d_2=0$. Si un autre d_i est nul, ($8\,bis$) est certainement vérifiée; si non, pour qu'elle le soit, il faut (faire $n=\mu_2$) et il suffit que l'un au moins de ces autres d_i soit inférieur à μ_2.

Dans le cas particulier où $\mu_1=\infty$ *avec* $d_1=0$, *on peut déterminer* L_0 *sous la condition nécessaire et suffisante que, parmi les* $d_i(i\neq 1)$, *il y en ait deux qui soient nuls; ou bien qu'il y en ait un nul, et un autre inférieur au* μ_i *correspondant à celui-là.*

Dans le cas général, la condition (8) imposée aux μ_i et aux d_i est une condition suffisante, mais non pas nécessaire, pour que L_0 existe. Car il y a des systèmes de nombres n, μ_i et d_i satisfaisant à (7) et auxquels ne correspond pas de surface fermée de genre zéro vérifiant la condition (C′). Malgré cette difficulté on peut amorcer une discussion.

5. Il faut remarquer d'abord que l'inégalité (7) sera vérifiée si

$$(9)\qquad n\left[\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2\right]>\sum d_i'\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2,$$

ou, plus particulièrement, si

$$(10)\qquad n\left[\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2\right]>\sum d_i\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-\left(1+\frac{1}{m}\right),$$

m désignant le plus grand des μ_i. On est ainsi conduit à distinguer deux cas.

Premier cas : $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)=2$. — Les nombres μ_i étant entiers, il n'y a qu'un nombre fini d'éventualités que nous étudierons les unes après les autres. Pour chacune d'elles nous indiquerons ce que devient la condition (10) et nous *vérifierons* que si les d_i n'y satisfont pas, il existe effectivement une surface fermée de genre zéro répondant à la condition (C′). Il en résultera que le nombre L_0 peut être déterminé lorsque les d_i satisfont à (10) *et dans ces cas-là seulement.*

1° $\mu_1 = \mu_2 = \infty$; $d_1 + d_2 < 1$, c'est-à-dire $d_1 = d_2 = 0$.

Si les deux d_i n'étaient pas nuls, on pourrait former un système de d'_i dont aucun ne serait nul et la sphère simple serait une surface fermée répondant aux conditions.

2° $\mu_1 = \mu_2 = 2, \mu_3 = \infty; d_1 + d_2 + 2d_3 < 2$, c'est-à-dire $d_1 + d_2 < 2$ et $d_3 = 0$.

Le cas où deux des d_i seraient non nuls se traite comme précédemment. Reste donc à examiner :

a. $d_1 = 2$, $d_2 = d_3 = 0$, à quoi on peut associer $d'_1 = 2$, $d'_2 = 0$, $d'_3 = 1$;
b. $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 = 1$, à quoi on peut associer $d'_1 = d'_2 = 0$, $d'_3 = 2$.

On voit aussitôt qu'on peut satisfaire à ces conditions avec des surfaces à 2 feuillets.

3° $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 6$; $3d_1 + 4d_2 + 5d_3 < 7$.

Il suffit d'examiner :

a. $d_1 = 3$, $d_2 = d_3 = 0$, à quoi on peut associer $d'_1 = 4$, $d'_2 = d'_3 = 0$;
b. $d_1 = 0$, $d_2 = 2$, $d_3 = 0$, à quoi on peut associer $d'_1 = 0$, $d'_2 = 3$, $d'_3 = 0$;
c. $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 = 2$, à quoi on peut associer $d'_1 = d'_2 = 0$, $d'_3 = 3$.

Les deux premières conditions sont satisfaites par des surfaces à 6 feuillets, la dernière, par une surface à 3 feuillets.

4° $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = \mu_3 = 4$; $2d_1 + 3d_2 + 3d_3 < 5$.

Il suffit d'examiner :

a. $d_1 = 3$, $d_2 = d_3 = 0$, à quoi on peut associer $d'_1 = 4$, $d'_2 = d'_3 = 0$;
b. $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 = 2$, à quoi on peut associer $d'_1 = 1$, $d'_2 = 0$, $d'_3 = 2$.

Il existe des surfaces à 4 feuillets satisfaisant à ces conditions.

5° $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 3$; $d_1 + d_2 + d_3 < 2$.

Il suffit d'examiner $d_1 = 2$, $d_2 = d_3 = 0$, à quoi on peut associer $d'_1 = 3$, $d'_2 = d'_3 = 0$, condition qui est satisfaite par une surface à 3 feuillets.

6° $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 2$; $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 < 3$.

Il suffit d'examiner :

a. $d_1 = 3$, $d_2 = d_3 = d_4 = 0$, à quoi on peut associer $d'_1 = 4$, $d'_2 = d'_3 = d'_4 = 0$;
b. $d_1 = 2$, $d_2 = 1$, $d_3 = d_4 = 0$, à quoi on peut associer $d'_1 = d'_2 = 2$, $d'_3 = d'_4 = 0$.

On peut satisfaire à la première condition avec une surface à 4 feuillets et à la dernière avec une surface à 2 feuillets.

Deuxième cas : $\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) > 2$. — Il semble difficile de caractériser simplement les ensembles de nombres μ_i et d_i qui assurent l'existence de L_0. Mais si l'on se donne numériquement un ensemble de μ_i et d_i, on peut parvenir, par une discussion méthodique, à savoir si le nombre L_0 existe.

Il est tout d'abord nécessaire que deux des d_i au moins soient nuls [1]. S'il en est ainsi, on considère les q systèmes de d'_i possibles et l'on cherche si, pour chacun d'eux, l'inégalité (8) est satisfaite quand on donne à n toutes les valeurs entières au moins égales à μ. [Cette étude ne demande qu'un nombre fini d'essais, car l'inégalité (8) est certainement satisfaite dès que n vérifie (9).] Si (8) est toujours satisfaite, le nombre L_0 existe. Si (8) n'est pas satisfaite pour certains systèmes de nombres n et d'_i, il faut faire une étude complète de chacun d'eux et rechercher s'il existe effectivement une surface fermée de genre zéro satisfaisant aux conditions correspondantes. (Cette recherche peut, elle aussi, être conduite méthodiquement, car, n et les d'_i étant fixés, les surfaces dont on est amené à tenter la construction sont en nombre fini.) S'il n'y a aucune telle surface, L_0 existe; dans le cas contraire, L_0 n'existe pas.

Cette discussion, pour longue qu'elle soit, n'en est pas moins théoriquement possible. A titre d'exemple, nous allons faire l'étude générale pour $q = 3$ et nous verrons que la discussion est, en fait, beaucoup moins longue que ne le laissent prévoir les considérations qui précèdent.

6. *Étant donnés les entiers* μ_1, μ_2 et μ_3 *satisfaisant à*

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} < 1,$$

---

(1) *Voir* le raisonnement exposé dans l'étude du premier cas.

le nombre L_0 *existe lorsque les entiers* d_i *sont tels que* (¹)

$$\begin{aligned} &d_1 = d_2 = 0, \\ &d_3 \leqq \mu_1 - 2 \qquad \text{si } \mu_1 = \mu_2 \quad (^2), \\ &d_3 \leqq \mu_1 - 1 \qquad \text{si } \mu_1 < \mu_2. \end{aligned}$$

Montrons en effet que les inégalités (8) sont alors vérifiées.

Plaçons-nous d'abord dans le premier cas. Ici, les inégalités (9) elles-mêmes sont vérifiées; elles s'écrivent, en effet,

$$\begin{aligned} 2n-2 &< \left(1-\frac{1}{\mu_1}\right)(n-1)+\left(1-\frac{1}{\mu_2}\right)n+\left(1-\frac{1}{\mu_3}\right)(n-\mu_1+2), \\ 2n-2 &< \left(1-\frac{1}{\mu_1}\right)n+\left(1-\frac{1}{\mu_2}\right)(n-1)+\left(1-\frac{1}{\mu_3}\right)(n-\mu_1+2), \\ 2n-2 &< \left(1-\frac{1}{\mu_1}\right)n+\left(1-\frac{1}{\mu_2}\right)n+\left(1-\frac{1}{\mu_3}\right)(n-\mu_1+1). \end{aligned}$$

Et l'on s'assure aussitôt qu'elles sont respectivement satisfaites pour $n = \mu_2, \mu_1, \mu_2$ (³); elles le sont *a fortiori* pour $n \geqq \mu_2, \mu_1, \mu_2$.

Plaçons-nous maintenant dans le dernier cas. Deux des inégalités (9) sont vérifiées pour $n = \mu_2$ (⁴), donc pour $n \geqq \mu_2$, à savoir :

$$\begin{aligned} 2n-2 &< \left(1-\frac{1}{\mu_1}\right)(n-1)+\left(1-\frac{1}{\mu_2}\right)n+\left(1-\frac{1}{\mu_3}\right)(n-\mu_1+1), \\ 2n-2 &< \left(1-\frac{1}{\mu_1}\right)n+\left(1-\frac{1}{\mu_2}\right)n+\left(1-\frac{1}{\mu_3}\right)(n-\mu_1). \end{aligned}$$

(¹) Ce résultat ne peut être amélioré car, dans le premier cas, à $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 = \mu_1 - 1$ on peut associer $d'_1 = d'_2 = 0$, $d'_3 = \mu_1$, tandis que, dans le second, à $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 = \mu_1$ on peut associer $d'_1 = 0$, $d'_2 = 1$, $d'_3 = \mu_1$; ces nouvelles conditions sont satisfaites par des surfaces fermées à μ_1 feuillets.

(²) Si $\mu_1 = \mu_2 = \infty$, d_3 est arbitraire. On retrouve le résultat obtenu dans le premier cas (1°).

(³) Il suffit, pour rendre ce résultat évident, de les mettre sous la forme

$$\begin{aligned} 0 &< (\mu_2-\mu_1)\left(1-\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_3}\right)+\left(1-\frac{2}{\mu_3}\right)+\frac{1}{\mu_1}, \\ 0 &< (\mu_2-\mu_1)\frac{1}{\mu_2}+\left(1-\frac{2}{\mu_3}\right)+\frac{1}{\mu_2}, \\ 0 &< (\mu_2-\mu_1)\left(1-\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_3}\right)+\left(1-\frac{1}{\mu_3}\right). \end{aligned}$$

(⁴) Elles s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} 0 &< (\mu_2-\mu_1-1)\left(1-\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_3}\right)+\left(1-\frac{2}{\mu_3}\right), \\ 0 &< (\mu_2-\mu_1)\left(1-\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_3}\right). \end{aligned}$$

Et il suffit donc de s'assurer que

$$(8^a)\qquad 2n-2<\overline{\mathrm{E}}\left[\left(1-\frac{1}{\mu_1}\right)n\right]+\overline{\overline{\mathrm{E}}}\left[\left(1-\frac{1}{\mu_2}\right)(n-1)\right]$$
$$+\overline{\mathrm{E}}\left[\left(1-\frac{1}{\mu_3}\right)(n-\mu_1+1)\right]$$

pour $n\geqq\mu_1$. Or, pour $\mu_1\leqq n\leqq\mu_2$, c'est une conséquence de

$$2n-2<\left(1-\frac{1}{\mu_1}\right)n+(n-1)+\left(1-\frac{1}{\mu_3}\right)(n-\mu_1+1),$$

tandis que pour $n\geqq\mu_2+1$ on peut avoir recours à l'inégalité (9) correspondante ([1]).

7. *Généralisation.* — Nous avons supposé jusqu'ici que nous connaissions une borne supérieure d_i du nombre des disques à moins de μ_i feuillets qui sont situés sur le domaine D_i.

On pourrait, plus généralement, se donner en ce qui concerne les disques situés sur D_i des bornes supérieures

$$d_i^{(1)}\leqq d_i^{(2)}\leqq\ldots\leqq d_i^{(\mu_i-1)}=d_i$$

des nombres de ceux de ces disques qui ont moins de 2, 3, ..., μ_i feuillets [condition $(\overline{\mathrm{C}})$].

L'étude antérieure correspondait au cas où $d_i^{(1)}=d_i^{(2)}=\ldots=d_i$.

Nous pouvons reprendre mot pour mot les considérations que nous avons développées dans le n° 3. On démontre ainsi que le nombre L_0 existe si les nombres μ_i et $d_i^{(j)}$ sont fixés de telle sorte qu'il n'y ait pas de surface fermée de genre zéro qui, après retrait d'un de ses points, satisfasse à la condition $(\overline{\mathrm{C}})$.

La condition à laquelle nous venons d'assujettir les μ_i et les $d_i^{(j)}$ est nécessaire et suffisante. On obtiendra des conditions suffisantes plus maniables en opérant comme dans le n° 4. On peut

---

([1]) Pour $n=\mu_2+1$, cette dernière peut en effet s'écrire

$$0<(\mu_2-\mu_1-1)\left(1-\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_3}\right)+\left(1-\frac{2}{\mu_1}\right)+\left(1-\frac{3}{\mu_3}\right).$$

On voit sans peine qu'elle est satisfaite à moins que $\mu_1=4$, $\mu_2=5$, $\mu_3=2$, auquel cas le second membre est nul; l'inégalité (9) est donc toujours satisfaite pour $n>\mu_2+1$. On s'assure enfin que, pour le cas exceptionnel $\mu_1=4$, $\mu_2=5$, $\mu_3=2$, $n=6$, l'inégalité (8^a) est encore vérifiée.

ainsi parvenir à une inégalité analogue à (8), ou, éventuellement, (8 *bis*), mais où l'expression

$$\overline{\mathrm{E}}\left[\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)(n-d_i)\right]$$

est changée en

$$\overline{\mathrm{E}}\left[\frac{n-d_i^{(1)}}{1\times 2}+\frac{n-(2\,d_i^{(2)}-d_i^{(1)})}{2\times 3}+\frac{n-(3\,d_i^{(3)}-d_i^{(2)}-d_i^{(1)})}{3\times 4}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{n-([\mu_i-1]\,d_i^{(\mu_i-1)}-d_i^{(\mu_i-2)}-\ldots-d_i^{(1)})}{(\mu_i-1)\mu_i}\right],$$

chacun des termes de cette somme devant être remplacé par zéro s'il est négatif. La discussion complète du cas où $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)=2$ est très longue et d'un intérêt médiocre; nous ne nous y attarderons pas. Dans le cas où $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)>2$, les considérations développées dans le n° 5 continuent de s'appliquer.

II.

8. Considérons une fonction $w=f(z)$ méromorphe dans le domaine $|z|<\mathrm{R}$. Lorsque z décrit le cercle $|z|<r<\mathrm{R}$, les valeurs w de la fonction décrivent une surface de Riemann $\Sigma(r)$. Si nous représentons la variable w sur la sphère unitaire Σ_0 (sphère de Riemann), $\Sigma(r)$ est une surface de recouvrement simplement connexe de Σ_0; nous désignerons par $4\pi\mathrm{S}(r)$ son aire et par $\mathrm{L}(r)$ la longueur de son contour.

Soit, sur la sphère Σ_0, q domaines fermés D_i simplement connexes et disjoints, dont certains peuvent se réduire à des points. Supposons que la surface $\Sigma(\mathrm{R})$ satisfasse à la condition (C) ou, plus généralement, à la condition $(\overline{\mathrm{C}})$: les nombres des disques situés sur D_i et ayant moins de 2, 3, ..., μ_i feuillets sont au plus égaux à $d_i^{(1)}\leqq d_i^{(2)}\leqq\ldots\leqq d_i^{(\mu_i-1)}$, les quantités μ_i et $d_i^{(j)}$ étant fixées. Si ces quantités sont telles qu'il n'existe pas de fonction rationnelle pour laquelle $\Sigma(\infty)$ satisfasse à la condition $(\overline{\mathrm{C}})$ [1], nous représenterons celle-ci par $(\overline{\mathrm{C}}_0)$.

---

[1] Cette restriction est équivalente à celle donnée dans le n° 3. Elle exige, en particulier, $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)\geqq 2$.

D'après l'étude précédente, *si une fonction* $w = f(z)$ *satisfait à la condition* $(\overline{C_0})$, *on peut trouver un nombre* L_0 *tel que* $L(r) > L_0$ *dès que* $S(r) > \frac{1}{2}$, *ce nombre* L_0 *dépendant uniquement des domaines* D_i.

9. *Si une fonction* $w = f(z)$ *est méromorphe dans tout le plan fini et satisfait à la condition* $(\overline{C_0})$, *on a*

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{S(r)}{\log r} > 0 \qquad \text{d'où} \qquad \varliminf_{r \to \infty} \frac{T(r)}{\log^2 r} > 0.$$

Cette propriété est une conséquence immédiate de la proposition précédente jointe à l'inégalité

$$L^2(r) \leqq 8\pi^2 r \frac{dS}{dr}.$$

Remarquons qu'on ne peut avoir ici $\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) > 2$, sans quoi $f(z)$ serait rationnelle ([1]), ce qui est en contradiction avec la restriction apportée à la condition $(\overline{C})$. En particulier, les conditions (C_0) auxquelles le théorème précédent s'applique sont celles mises en évidence dans le n°5 (Premier cas).

10. Considérons maintenant une fonction $w = f(z)$ méromorphe dans $|z| < R$ et satisfaisant à la condition $(\overline{C_0})$ avec

$$\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) > 2.$$

L'inégalité (3), la remarque du n°2 appliquée à $S < \frac{1}{2}$ et la proposition du n° 6 montrent qu'il est possible de déterminer un nombre k, dépendant des domaines D_i ainsi que des quantités μ_i et $d_i^{(j)}$, tel que

$$S(r) < kL(r).$$

A partir de là on peut poursuivre les raisonnements que nous avons déjà développés dans notre Thèse ([2]). On obtient

$$S(r) \log \frac{R}{r} < 8\pi^2 k^2, \tag{11}$$

(1) *Cf.* le paragraphe 34 de notre Thèse.
(2) *Cf.* paragraphes 21, 29, 30 et 31.

d'où

$$(11\ bis) \qquad S(r) < \frac{r^2}{r^2 + R^2 e^{-32\pi^2 k^2}} \qquad \text{pour } r < R e^{-16\pi^2 k^2}.$$

On en déduit, d'une part,

$$(12) \qquad \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} < \frac{R}{R^2 - |z|^2} e^{16\pi^2 k^2}$$

et, d'autre part,

$$(13) \qquad T(r) < \frac{1}{2} \log \frac{r^2 + R^2 e^{-32\pi^2 k^2}}{R^2 e^{-32\pi^2 k^2}} \qquad \text{pour } r < R e^{-16\pi^2 k^2},$$

tandis que, pour $r > R e^{-16\pi^2 k^2}$,

$$(13\ bis) \qquad T(r) < \frac{1}{2} \log 2 + 8\pi^2 k^2 \left[\log 16\pi^2 k^2 - \log \log \frac{R}{r}\right].$$

On peut modifier la forme des hypothèses et énoncer ce résultat comme suit :

Considérons les fonctions $w = f(z)$ *méromorphes dans* $|z| < R$ *et dont les surfaces de Riemann* $\Sigma(R)$ *présentent sur* q *domaines fermés donnés* D_i *simplement connexes et disjoints, des disques satisfaisant à la condition suivante : les nombres de ceux qui ont moins de* 2, 3, ..., μ_i *feuillets sont au plus égaux à* $d_i^{(1)} \leqq d_i^{(2)} \leqq \ldots \leqq d_i^{(\mu_i - 1)}$. *Si les quantités* μ_i *et* $d_i^{(j)}$ *sont fixées de telle sorte qu'il n'existe aucune fonction satisfaisant à cette condition avec* $R = \infty$, *les fonctions considérées constituent une famille normale et les inégalités* (11), (11 *bis*), (12), (13) *et* (13 *bis*) *sont satisfaites.*

Il est clair, en effet, que la restriction apportée au choix des μ_i et des $d_i^{(j)}$ exige $\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) > 2$ en raison de l'existence de surfaces closes et de surfaces de type parabolique régulièrement ramifiées [1]. Mais alors, une fonction satisfaisant à la condition

---

[1] Lorsque $\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) < 2$, il existe des fonctions rationnelles satisfaisant aux conditions de l'énoncé précédent, même si tous les d_i sont nuls. Lorsque $\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) = 2$, il existe des fonctions méromorphes dans tout le plan fini jouissant de la même propriété.

énoncée avec $R=\infty$ ne peut être transcendante. On peut donc dire, de façon équivalente, que les μ_i et les $d_i^{(j)}$ doivent être tels que $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)>2$ et qu'il n'existe pas de fraction rationnelle qui pour $R=\infty$ satisfasse à la même condition; ce dernier point se ramène d'ailleurs à la non-existence de certaines surfaces closes de genre nul [1], que nous avons discutée avec quelques détails.

En particulier, pour $q=3$, $d_i^{(1)}=d_i^{(2)}\ldots=d_i$, le théorème précédent s'applique lorsque

$$\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}<1, \qquad d_1=d_2=0,$$
$$d_3\leqq\mu_1-2 \qquad \text{si } \mu_1=\mu_2,$$
$$d_3\leqq\mu_1-1 \qquad \text{si } \mu_1<\mu_2.$$

11. Nous avons déjà indiqué que, dans les propositions précédentes, certains des domaines D_i peuvent se réduire à des points. Supposons que l'un D_1 de ces domaines se réduise au point ∞ et que celui-ci ne soit pas couvert par la surface de Riemann; dans ces conditions, nous pouvons prendre $\mu_1=\infty$, $d_1^{(1)}=d_1^{(2)}=\ldots=d_1=0$ et la discussion que l'on doit faire pour montrer la non-existence d'une surface close est particulièrement simple [2].

D'autre part, nous avons alors affaire à des fonctions holomorphes dont on peut borner le module à partir des limitations obtenues pour $T(r)$. En utilisant une méthode indiquée dans un Mémoire récent [3], on parvient sans peine à

$$\log\sqrt{1+|f(z)|^2}<\frac{R}{R-|z|}\left[A\log\sqrt{1+|f(0)|^2}+Bk^2\overset{+}{\log}k+C\right], \tag{14}$$

où A, B et C sont des constantes numériques.

On montrerait, comme dans le numéro précédent, que l'on peut énoncer la proposition que voici :

Considérons les fonctions $w=f(z)$ holomorphes dans $|z|<R$ et dont les surfaces de Riemann $\Sigma(R)$ présentent sur q

(1) *Cf.* nos 3 et 7.

(2) *Cf.* no 4.

(3) J. Dufresnoy, *Théorie nouvelle des familles complexes normales* (*Ann. Ec. Norm.*, 3e série, t. LXI, 1944, p. 1-44); *voir* le paragraphe 21.

domaines fermés D_i, *simplement connexes, disjoints et laissant le point* ∞ *à leur extérieur, des disques satisfaisant à la condition suivante : le nombre de ceux qui ont moins de* $2, 3, \ldots, \mu_i$ *feuillets sont au plus égaux à* $d_i^{(1)} \leqq d_i^{(2)} \leqq \ldots \leqq d_i^{(\mu_i-1)}$. *Si les quantités* μ_i *et* $d_i^{(j)}$ *sont fixées de telle sorte qu'il n'existe aucune fonction entière satisfaisant à cette condition, les fonctions considérées constituent une famille normale et les inégalités* (11), (11 *bis*), (12), (13), (13 *bis*) *et* (14) *sont satisfaites.*

La restriction imposée au choix des μ_i et des $d_i^{(j)}$ peut être mise sous une forme plus pratique. Il faut que

$$n-1<\sum \mathrm{E}\left[\frac{n-d_i^{(1)}}{1\times 2}+\frac{n-(2\,d_i^{(2)}-d_i^{(1)})}{2\times 3}+\ldots + \frac{n-([\mu_i-1]\,d_i^{(\mu_i-1)}-d_i^{(\mu_i-2)}-\ldots-d_i^{(1)})}{(\mu_i-1)\mu_i}\right]$$

pour tout entier n au moins égal au plus grand des μ_i auxquels correspond un d_i nul; chacun des termes de cette somme doit être remplacé par zéro s'il est négatif. Dans le cas particulier où $d_i^{(1)} = d_i^{(2)} = \ldots = d_i$, cette condition est équivalente à la suivante : on doit avoir deux d_i nuls ou bien un nul et un autre inférieur au μ_i correspondant à celui-là.

(Manuscrit reçu le 9 juin 1944.)