ANDRÉ LICHNEROWICZ

Sur les espaces riemanniens complètement harmoniques

Bulletin de la S. M. F., tome 72 (1944), p. 146-168

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1944__72__146_0>

SUR LES ESPACES RIEMANNIENS COMPLÈTEMENT HARMONIQUES;

PAR ANDRÉ LICHNEROWICZ.

INTRODUCTION.

On sait que toute équation linéaire aux dérivées partielles auto-adjointe peut être considérée comme l'équation de Laplace associée à un espace riemannien. Dans un travail récent ([1]), Copson et Ruse ont étudié systématiquement les espaces riemanniens tels que l'équation de Laplace, qui leur est associée, admette une solution élémentaire fonction de la distance géodésique s à un point de l'espace. Ces espaces appelés espaces harmoniques, sont l'objet du présent Mémoire. A propos de l'intégration des équations de la relativité au moyen des potentiels retardés, j'avais été amené à me poser le même problème que Copson et Ruse, et j'avais étudié les espaces complètement harmoniques de classe 1 par une méthode directe, différente de celle qui figure ici et qui utilise les résultats de Fialkow ([2]).

L'apparition du Mémoire de Copson et Ruse, connu de moi seulement tout récemment, m'a conduit à reprendre ces résultats et à exposer systématiquement ce que l'on connaît actuellement sur les espaces complètement harmoniques.

Dans la première partie de ce travail, je donne les notions de base de la théorie des espaces harmoniques, et je rappelle les identités relatives aux coordonnées normales, aux extensions du tenseur fondamental, aux tenseurs normaux dont je fais usage dans la suite.

La seconde partie est consacrée à la formation et à l'étude du système infini d'équations tensorielles qui fournit les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace riemannien soit

---

([1]) CORPSON et RUSE, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, t. 60, 1940, p. 116-133.
([2]) FIALKOW, *Annals of Math.*, t. 39, 1938, p. 762-785.

harmonique. On déduit aisément de ce système que tout espace complètement harmonique est espace d'Einstein.

Dans la troisième partie, j'étudie les rapports entre les espaces complètement harmoniques, les espaces à courbure constante et les espaces symétriques indécomposables. Il résulte de cette étude que les dérivées à l'origine de la fonction $f(\Omega)$ $\left[\Omega = \frac{1}{2}s^2\right]$ attachée à un espace harmonique satisfont nécessairement à des inégalités qui semblent devoir jouer un rôle important. D'autre part, tout espace complètement harmonique est indécomposable. On en déduit en particulier que tout espace complètement harmonique proprement riemannien, réalisable comme hyper-surface d'un espace à courbure constante, est lui-même à courbure constante. Un théorème relatif aux espaces symétriques indécomposables termine ce travail.

Comme d'habitude, je désigne par ∇_α l'opérateur de dérivation covariante.

I. — ESPACES HARMONIQUES ET COORDONNÉES NORMALES.

1. *Espace harmonique en un point.* — Étant donné un espace de Riemann V_n à n dimensions d'élément linéaire

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n) \tag{1-1}$$

considérons l'équation de Laplace associée

$$\Delta_2 V \equiv g^{\alpha\beta}(\partial_{\alpha\beta} V - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\, \partial_\rho V) = 0. \tag{1-2}$$

L'espace V_n sera dit *harmonique en un point* M_0 de coordonnées (x_0^α), si l'équation de Laplace (1-2) admet une solution qui n'est fonction que de la distance géodésique s du point courant M à M_0. Cette définition peut être mise sous une forme légèrement différente : l'espace V_n étant harmonique en M_0, soit

$$V = \varphi(s); \qquad s = \widehat{M_0 M}$$

une solution de (1-2); on a

$$\Delta_2 \varphi(s) = \varphi'(s)\,\Delta_2 s + \varphi''(s)\,\Delta_1 s = \varphi'(s)\,\Delta_2 s + \varphi''(s). \tag{1-3}$$

Il en résulte que nécessairement

$$\Delta_2 s = -\frac{\varphi''(s)}{\varphi'(s)} \tag{1-4}$$

ne dépend des coordonnées de M que par l'intermédiaire de s. On en déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème. — *Pour qu'un espace* V_n *soit harmonique en* M_0, *il faut et il suffit que, si* s *désigne la distance géodésique* $\widehat{M_0M}$, *il existe une fonction* $\chi(s)$ *telle que*

$$\Delta_2 s = \chi(s). \tag{1-5}$$

On sait que, dans la théorie des équations aux dérivées partielles, il est souvent commode d'introduire, au lieu de la variable s, la variable

$$\Omega = \frac{1}{2} s^2.$$

D'après les formules (1-3) et (1-5), on a

$$\Delta_2 \Omega = s\,\Delta_2 s + \Delta_1 s = s\,\chi(s) + 1. \tag{1-6}$$

Il en résulte que pour qu'un espace soit harmonique en M_0, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $f(\Omega)$ telle que

$$\Delta_2 \Omega = f(\Omega). \tag{1-7}$$

2. *La solution élémentaire de Ruse.* — Dans une étude sur la solution élémentaire de l'équation de Laplace [1], étude reprise partiellement par Van Mieghem [2], Ruse a établi un résultat qui est équivalent au suivant : Si un espace V_n est harmonique en M_0, l'équation de Laplace (1-2) admet la solution élémentaire définie par la formule

$$\varphi(s) = A \int_a^s \frac{J}{\sqrt{g}\sqrt{g_0}} \frac{ds}{s^{n-1}}, \tag{2-1}$$

(1) Ruse, *Proc. Edinburg Math. Soc.*, t. 2, 1930, p. 135-139.
(2) Van Mieghem, *Wis. en Naturkundig Tijdschrift*, t. 6, 1932, p. 28-90.

où A et a désignent des constantes, g le discriminant de (1-1), g_0 la valeur de g en M_0 et où J représente le déterminant

$$J = \left\| \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^\alpha \, \partial x_0^\beta} \right\|.$$

La fonction $\varphi(s)$, définie par (2-1), devient effectivement infinie comme $\frac{1}{s^{n-2}}$ au point M_0 et sur les géodésiques de longueur nulle issues de M_0.

3. *Les espaces complètement harmoniques.* — Un espace V_n est dit *complètement harmonique* s'il est harmonique en chacun de ses points. Nous n'envisageons dans ce travail que des espaces harmoniques *proprement riemanniens*, c'est-à-dire dont la forme quadratique fondamentale est définie positive. Un espace complètement harmonique proprement riemannien sera désigné par la notation H_n. Dans un espace complètement harmonique, les fonctions $\chi(s)$ et $f(\Omega)$ peuvent *a priori* dépendre des coordonnées x_0^α du point de base M_0. Cette hypothèse est d'ailleurs faite par Copson et Ruse dans leur récent travail (1). Nous allons montrer à l'aide de la formule de Ruse qu'en fait les fonctions $\chi(s)$ et $f(\Omega)$ sont respectivement les mêmes dans tout l'espace.

En effet, comme la solution élémentaire (2-1) peut dépendre des x_0^α, désignons-la provisoirement par la notation

$$\varphi(s;\ x_0^\alpha).$$

En vertu de (2-1), il vient :

$$\varphi'(s;\ x_0^\alpha) = \frac{AJ}{\sqrt{g}\sqrt{g_0}} \frac{1}{s^{n-1}}. \tag{3-1}$$

La formule (3-1) montre que φ' est une fonction symétrique des deux points M_0 et M; s étant aussi symétrique, on en déduit immédiatement que $\varphi'(s;\ x_0^\alpha)$ ne dépend pas explicitement des coordonnées x_0^α de M_0. La propriété de symétrie précédente résulte d'ailleurs du caractère auto-adjoint de l'équation (1-2).

---

(1) COPSON et RUSE, *Proc. Roy. Soc. Edinburg*, t. 60, 1944, p. 117 et 128.

On voit ainsi que les fonctions

$$\chi(s) = -\frac{\varphi''(s)}{\varphi'(s)}, \tag{3-2}$$

$$f(\Omega) = s\chi(s) + 1 \tag{3-3}$$

ne dépendent pas du point de base M_0 choisi. Nous énoncerons :

Théorème. — *Dans un espace complètement harmonique* H_n, *les fonctions* $\chi(s)$ *et* $f(\Omega)$ *sont indépendantes du point de base* M_0 *considéré.*

4. *Quelques identités relatives aux coordonnées normales.* — La forme même des définitions précédentes conduit à penser que, dans l'étude des espaces complètement harmoniques, les coordonnées normales de Riemann doivent jouer un rôle important. C'est pourquoi nous commencerons par rappeler quelques identités simples relatives aux coordonnées normales. On sait que pour obtenir un système de coordonnées normales d'origine M_0, il suffit de mener les différentes géodésiques issues de M_0. Si $\Theta^i (i = 1, 2, .. n)$ désigne les composantes, par rapport à un repère quelconque d'origine M_0, du vecteur unitaire tangent en M_0 à la géodésique passant par M, le point M admettra pour coordonnées normales

$$x^i = \Theta^i s.$$

Sauf avis contraire, nous conviendrons désormais de faire correspondre des indices *latins* aux systèmes de coordonnées normales et des indices *grecs* aux systèmes de coordonnées arbitraires.

De la définition des coordonnées normales, résulte immédiatement qu'en un point M quelconque de V_n, on a l'identité bien connue

$$\Gamma^k_{ij} x^i x^j = 0, \tag{4-1}$$

tandis qu'à l'origine M_0 des coordonnées

$$(\Gamma^k_{ij})_0 = 0. \tag{4-2}$$

Nous devrons dans la suite introduire des dérivées partielles de la fonction Ω dans un système de coordonnées normales. Pour abréger, nous désignerons ces dérivées partielles des différents ordres par les notations Ω_i, Ω_{ij}, Ω_{ijk}, ... Le vecteur θ^i attaché au point M_0 étant unitaire, il vient

$$s^2 = 2\Omega = (g_{ij})_0\, x^i x^j.$$

On en déduit qu'au point M

$$\Omega_i = (g_{ij})_0 x^j \tag{4-3}$$

$$\Omega_{ij} = (g_{ij})_0, \tag{4-4}$$

tandis que les dérivées partielles d'ordre supérieur sont toutes nulles

$$\Omega_{ijk} = \Omega_{ijkl} = \ldots = 0.$$

D'autre part, à partir de la relation de définition de l'élément linéaire

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j,$$

on a

$$ds = g_{ij} \frac{dx^j}{ds} dx_i,$$

soit

$$\frac{\partial s}{\partial x^i} = g_{ij} \frac{dx^j}{ds} = g_{ij}\theta^j;$$

il en résulte

$$\Omega_i = g_{ij} x^j. \tag{4-5}$$

De (4-3) et (4-5), on déduit qu'en un point M quelconque, on a l'identité

$$g_{ij} x^j = (g_{ij})_0 x^j. \tag{4-6}$$

Par dérivation de (4-6) par rapport à x^j, il vient

$$\partial_j g_{ik} x^k = (g_{ij})_0 - g_{ij}, \tag{4-7}$$

d'où, le second membre étant symétrique par rapport aux indices i et j,

$$\partial_j g_{ik} x^k = \partial_i g_{jk} x^k. \tag{4-8}$$

5. *Le tenseur de courbure et la seconde extension du tenseur métrique.* — Étant donné un tenseur T rapporté à un système de coordonnées normales, évaluons les dérivées de ses composantes à l'origine du système de coordonnées. Les dérivées du premier

ordre, du second ordre, etc. sont les composantes de nouveaux tenseurs appelés extensions première, seconde, etc. du tenseur T [1]. La première extension de T coïncide avec sa première dérivée covariante, mais il n'en est plus de même pour les extensions et dérivées d'ordre supérieur.

Considérons le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$; sa première extension est nulle. Sa seconde extension $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ est un tenseur équivalent au tenseur de courbure $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ et qui le remplace avantageusement dans certains cas. Les composantes du tenseur admettent le système complet d'identités [2]

$$g_{\alpha\beta,\gamma\delta} = g_{\beta\alpha,\gamma\delta} = g_{\alpha\beta,\delta\gamma}, \tag{5-1}$$

$$g_{\alpha\beta,\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma,\delta\beta} + g_{\alpha\delta,\beta\gamma} = 0, \tag{5-2}$$

d'où l'on déduit les identités

$$g_{\alpha\beta,\gamma\delta} = g_{\gamma\delta,\alpha\beta}. \tag{5-3}$$

Le tenseur $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ s'exprime à l'aide du tenseur de courbure par les relations

$$3\, g_{\alpha\beta,\gamma\delta} = R_{\alpha\gamma\beta\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma}. \tag{5-4}$$

Inversement

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\gamma,\beta\delta} - g_{\beta\gamma,\alpha\delta}. \tag{5-5}$$

Il nous faut enfin exprimer le tenseur de Ricci $R_{\lambda\mu}$ à l'aide du tenseur $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$. Par contraction à partir de (5-4), on obtient les deux expressions

$$R_{\lambda\mu} = -\frac{3}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 3\, g^{\alpha\beta} g_{\alpha\lambda,\beta\mu}. \tag{5-6}$$

6. *Les tenseurs normaux.* — L'espace V_n étant rapporté à un système de coordonnées normales d'origine M_0, évaluons les

---

[1] Pour la théorie générale des extensions, *cf.* T. Y. THOMAS, *The differential invariants of generalized spaces* (*Camb. Univ. Press*, 1934, p. 96-107).

[2] *Cf.* T. Y. THOMAS, *op. cit.*, p. 114, 115.

dérivées à l'origine des cœfficients Γ^i_{jl} de la connexion de V_n

$$(6\text{-}1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} (A^i_{jlm})_0 & = (\partial_m \Gamma^i_{jl})_0, \\ (A^i_{jlmn})_0 & = (\partial_{mn} \Gamma^i_{jl})_0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \\ (A^i_{jlmn\dots r})_0 & = (\partial_{mn\dots r} \Gamma^j_{il})_0. \end{array}\right.$$

En rapportant l'espace à des coordonnées normales d'origine M variable, on définit ainsi à l'aide des équations (6-1) des ensembles de fonctions des coordonnées x^α de M; on montre que ces fonctions sont les composantes de tenseurs [1]

$$A^{\alpha}_{\beta\lambda\mu};\quad A^{\alpha}_{\beta\lambda\mu\nu};\quad \dots,\quad A^{\alpha}_{\beta\lambda\mu\nu\dots\rho}.$$

Au tenseur $A^{\alpha}_{\beta\lambda\mu\nu\dots\rho}$ à $(k+2)$ indices on donne le nom de *tenseur normal* d'ordre k de V_n. Le tenseur $A^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}$ est équivalent au tenseur de courbure [2]. Quant au tenseur normal d'ordre k, il s'exprime à l'aide du tenseur de courbure et de ses dérivées covariantes jusqu'à l'ordre $(k-2)$.

Évaluons le tenseur contracté $A^{\alpha}_{\alpha\lambda\mu}$ à l'aide du tenseur de Ricci $R_{\lambda\mu}$. En coordonnées normales, on a, par définition,

$$(A^i_{ilm})_0 = (\partial_m \Gamma^i_{il})_0$$

et d'autre part, à l'origine M_0 des coordonnées normales,

$$(R_{lm})_0 = (\partial_i \Gamma^i_{lm} - \partial_m \Gamma^i_{il})_0$$

soit, en tenant compte de l'égalité bien connue

$$(\partial_k \Gamma^i_{lm} + \partial_l \Gamma^i_{mk} + \partial_m \Gamma^i_{lk})_0 = 0,$$

l'expression

$$(R_{lm})_0 = -3\,(\partial_m \Gamma^i_{il})_0.$$

On en déduit la relation cherchée

$$(6\text{-}2)\qquad A^{\alpha}_{\alpha\lambda\mu} = -\frac{1}{3} R_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\lambda\mu}.$$

---

(1) *Cf.* T. Y. Thomas, *op. cit.*, p. 103.

(2) *Cf.* Schouten et Struik, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, Noordhoff, t. 1, 1935, p. 137.

II. — LES ÉQUATIONS DE COPSON ET RUSE.

7. *Le discriminant d'un espace harmonique en coordonnées normales.* — L'espace de Riemann V_n étant harmonique en M_0, rapportons-le tout d'abord à un système déterminé de coordonnées polaires géodésiques d'origine M_0. L'élément linéaire de V_n s'écrit

$$ds^2 + \gamma_{i'j'}\, d\Theta^{i'}\, d\Theta^{j'} \qquad [\, i', j' = 1, 2, \ldots, (n\text{-}1)\,], \tag{7-1}$$

où les $\Theta^{i'}$ sont les $(n-1)$ premières composantes du vecteur unitaire tangent en M_0 à la géodésique passant par M; γ' désignant le discriminant de la forme quadratique

$$\gamma_{i'j'}\, d\Theta^{i'}\, d\Theta^{j'}$$

le laplacien est donné, dans ce système de coordonnées, par la relation

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\sqrt{\gamma'}} \frac{\partial}{\partial s}\left(\sqrt{\gamma'}\frac{\partial V}{\partial s}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma'}} \frac{\partial}{\partial \Theta^{i'}}\left(\gamma^{i'j'}\sqrt{\gamma'}\,\frac{\partial V}{\partial \Theta^{j'}}\right).$$

On en déduit que le laplacien de s s'écrit

$$\Delta_2 s = \frac{1}{\sqrt{\gamma'}} \frac{\partial \sqrt{\gamma'}}{\partial s} = \chi(s),$$

d'où, par intégration,

$$\frac{1}{2}\log \gamma' = \Xi(s) + \Phi(\Theta^{i'}),$$

où $\Xi(s)$ désigne une primitive de $\chi(s)$ et $\Phi(\Theta^{i'})$ une fonction arbitraire des $\Theta^{i'}$.

On passe au système de coordonnées polaires géodésiques le plus général d'origine M_0 en effectuant sur les variables angulaires $\Theta^{i'}$ le changement de variables

$$\Theta^{i'} = \psi^{i'}(\Theta^{j}).$$

Si γ désigne le nouveau discriminant de V_n et D le jacobien du changement de variables, on a

$$\gamma = \gamma' D^2,$$

et par suite il vient

$$\frac{1}{2}\log\gamma = \Xi(s) + \Phi(\theta^{i'}) + \log D(\theta^{i'}). \tag{7-2}$$

Rapportons enfin l'espace de Riemann V_n au système de coordonnées normales défini par les équations

$$x^i = \theta^i s.$$

Le discriminant correspondant est

$$g = \frac{\gamma}{(\theta^n)^2(s^{n-1})^2}. \tag{7-3}$$

Des formules (7-2) et (7-3) on déduit

$$\frac{1}{2}\log g = \Xi(s) - (n-1)\log s + \Phi(\theta^{i'}) + \log D(\theta^{i'}) - \log\theta^n(\theta^{i'}).$$

Il en résulte que l'on peut choisir les variables angulaires $\theta^{i'}$ de façon que g ne dépende que de s. Inversement, il est clair que si g ne dépend que de c, l'espace est harmonique en M_0. Nous énoncerons :

Théorème. — *Pour qu'un espace* V_n *soit harmonique en* M_0, *il faut et il suffit que l'on puisse choisir un système de coordonnées normales d'origine* M_0 *tel que le discriminant* g *correspondant ne dépende que de la distance géodésique* s *de* M_0 *au point courant* M.

Pour un tel système de coordonnées normales, on a

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\log g\right) = \chi(s) - \frac{n-1}{s}. \tag{7-4}$$

8. *Les équations de Copson et Ruse.* — Nous supposerons désormais que l'espace de Riemann V_n, harmonique en M_0, est analytique de telle sorte que la fonction $f(\Omega)$, qui joue un rôle fondamental dans cette étude, soit développable en série de Taylor au voisinage de $\Omega = 0$. On a, en vertu de (4-4),

$$f(0) = (\Delta_2\Omega)_{\Omega=0} = (g^{ij}\Omega_{ij})_{\Omega=0} = (g^{ij}g_{ij})_{\Omega=0} = n. \tag{8-1}$$

Nous poserons, par suite,

$$f(\Omega) = n + \Omega f'(0) + \frac{\Omega^2}{2!}f''(0) + \frac{\Omega^3}{3!}f'''(0) + \dots.$$

L'espace V_n étant harmonique en M_0, le déterminant g relatif au système de coordonnées normales envisagé ne dépend que de Ω, et il vient, d'après (3-3) et (7-4),

$$\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{2}\log g\right) = \frac{(f-1)-(n-1)}{2\Omega} = \frac{f-n}{2\Omega}.$$

On déduit que pour que l'espace V_n soit harmonique en M_0, il faut et il suffit que

$$\Gamma^i_{il} = \frac{f-n}{2\Omega}\,\Omega_l. \tag{8-2}$$

En développant les deux membres de (8-2) en série de Taylor et en tenant compte des relations (4-3) et (4-4), il vient par identification

$$\left\{\begin{aligned} &(\partial_m \Gamma^i_{il})_0 = \frac{1}{2} f'(0)(g_{lm})_0, \\ &(\partial_{mn}\Gamma^i_{il})_0 = 0, \\ &(\partial_{mnp}\Gamma^i_{il})_0 = \frac{1}{4} f''(0)[g_{lm}g_{np} + g_{ln}g_{mp} + g_{lp}g_{mn}]_0, \\ &(\partial_{mnpq}\Gamma^i_{il})_0 = 0, \qquad \ldots, \end{aligned}\right. \tag{8-3}$$

où la loi de formation des relations successives est évidente. Un système de relations analogues a été donné sans démonstration par Copson et Ruse [1].

Aux premiers membres de (8-3) figurent les valeurs en M_0 des composantes des tenseurs normaux des différents ordres. On en déduit le théorème suivant :

Théorème. — *Pour qu'il existe un espace, analytique, complètement harmonique* H_n *associé à la fonction analytique* $f(\Omega)$, *il faut et il suffit qu'en tout point de* H_n *on ait le système infini de relations*

$$A^\alpha_{\alpha\lambda\mu} = \frac{1}{2} f'(0) g_{\lambda\mu} \tag{8-4}$$

$$A^\alpha_{\alpha\lambda\mu\nu} = 0, \tag{8-5}$$

$$A^\alpha_{\alpha\lambda\mu\nu\pi} = \frac{1}{4} f''(0)[g_{\lambda\mu}g_{\nu\pi} + g_{\lambda\nu}g_{\mu\pi} + g_{\lambda\pi}g_{\mu\nu}], \tag{8-6}$$

$$A^\alpha_{\alpha\lambda\mu\nu\pi\rho} = 0, \qquad \ldots. \tag{8-7}$$

---

[1] Copson et Ruse, *op. cit.*, p. 130.

A ces équations nous donnerons le nom *d'équations de Copson et Ruse.*

9. *Tout espace complètement harmonique est espace d'Einstein.* — Il est facile d'interpréter les équations (8–4) et (8–5).

En vertu des formules (6–2), il vient

$$A^{\alpha}_{\alpha\lambda\mu} = -\frac{1}{3} R_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} f'(0) g_{\lambda\mu},$$

soit

$$R_{\lambda\mu} + \frac{3}{2} f'(0) g_{\lambda\mu} = 0. \tag{9-1}$$

Il en résulte que *tout espace complètement harmonique* H_n *est espace d'Einstein* et admet la courbure scalaire constante définie par

$$\frac{R}{n} = -\frac{3}{2} f'(0); \tag{9-2}$$

de (6-2), il vient aussi

$$g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\lambda\mu} = f'(0) g_{\lambda\mu}, \tag{9-3}$$

formule qui nous sera utile dans la suite. Quant à la formule (8–5), elle se déduit par différentiation de (8–4) ou (9–1) et ne contient donc rien de nouveau.

III. — LES ESPACES COMPLÈTEMENT HARMONIQUES H_n ET LES ESPACES A COURBURE CONSTANTE S_n.

10. *Forme explicite des équations* (8-6). — On sait que tout espace à courbure constante S_n est complètement harmonique. On peut inversement se poser le problème suivant : trouver des conditions suffisantes pour qu'un espace complètement harmonique H_n se réduise à un espace S_n. A cet effet nous allons chercher à former explicitement les équations (8-6) à partir de la seconde extension $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ du tenseur métrique et en tenant compte du fait que l'espace considéré est un espace d'Einstein. Pour y parvenir, on pourrait expliciter le tenseur normal $A^{\alpha}_{\alpha\lambda\mu\nu\pi}$ en fonction des cœfficients de la connexion riemanienne puis, à l'aide des expressions ainsi obtenues, en fonction du tenseur de

Riemann-Christoffel et du tenseur dérivé ([1]). Mais il est plus simple de former directement ces équations par une méthode qui apparaît comme une généralisation d'une méthode employée par T. Y. Thomas et E. W. Titt dans un Mémoire récent ([2]).

Soit H_n un espace complètement harmonique que nous supposerons rapporté à un système de coordonnées normales d'origine M_0. L'espace H_n étant espace d'Einstein, *en tout point du voisinage de* M_0 on a

$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij},$$

soit sous forme explicite

$$(10\text{-}1) \qquad \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_j \Gamma^k_{ki} + \Gamma^k_{kl} \Gamma^l_{ij} - \Gamma^l_{ki} \Gamma^k_{lj} = \frac{R}{n} g_{ij}.$$

En multipliant les deux membres de (10-1) par $x^i x^j$ et en tenant compte des relations (4-1), on obtient l'équation

$$(10\text{-}2) \qquad \partial_k \Gamma^k_{ij} x^i x^j - \partial_j \Gamma^k_{ki} x^i x^j - \Gamma^l_{ki} \Gamma^k_{lj} x^i x^j = \frac{R}{n} g_{ij} x^i x^j,$$

équation dont nous allons évaluer successivement les différents termes.

Différentions (4-1) par rapport à x^k, il vient

$$\partial_k \Gamma^k_{ij} x^i x^j = -2 \Gamma^k_{ki} x^i;$$

on en déduit, d'après (8-2) et (4-3),

$$(10\text{-}3) \qquad \partial_k \Gamma^k_{ij} x^i x^j = -2 \frac{f-n}{2\Omega} 2\Omega = -2(f-n).$$

Différentions (8-2) par rapport à x^j; il vient

$$\partial_j \Gamma^k_{ki} = \frac{f-n}{2\Omega} \Omega_{ij} + \frac{\Omega f' - (f-n)}{2\Omega^2} \Omega_i \Omega_j.$$

On en déduit, à l'aide de (4-3) et (4-4),

$$(10\text{-}4) \qquad \partial_j \Gamma^k_{ki} x^i x^j = 2\Omega f' - (f-n).$$

([1]) Pour un calcul analogue, voir Synge, *Proc. London Math. Soc.*, II, t. 32, 1930, p. 241-258.

([2]) *Cf.* T. Y. Thomas et E.-W. Titt, *Journ. de Math. pures et appl.*, t. 18, 1939, p. 217-248.

En reportant dans (10–2) les valeurs des termes fournis par (10–3) et (10–4), on obtient l'équation

$$\Gamma^{l}_{ki}\Gamma^{k}_{lj}x^i x^j = \frac{2R}{n}\,\Omega + 2f'\Omega + (f - n) \tag{10–5}$$

Or, compte tenu de (4–8), on a

$$\Gamma^{l}_{ki}x^i = \frac{1}{2}\,g^{lr}(\partial_k g_{ir} + \partial_i g_{kr} - \partial_r g_{ik})x^i = \frac{1}{2}\,g^{lr}\partial_i g_{kr}x^i.$$

On aboutit ainsi à l'équation simple

$$g^{lr}g^{ks}\partial_i g_{kr}\partial_j g_{ls}x^i x^j = \psi(\Omega), \tag{10–6}$$

où l'on a posé

$$\psi(\Omega) = -4\left(\frac{2R}{n}\,\Omega + 2f'\Omega + f - n\right). \tag{10–7}$$

Nous allons enfin évaluer les dérivées à l'origine par rapport à x^a, x^b, x^c, x^d des deux membres des équations (10–6). La dérivée de ψ (Ω) a pour valeur

$$\psi''(0)(\Omega_{ab}\Omega_{cd} + \Omega_{ac}\Omega_{bd} + \Omega_{ad}\Omega_{bc})_0,$$

où l'on a

$$\psi''(0) = -20f''(0).$$

On en déduit le système d'équations

$$\begin{aligned} g_0^{lr}g_0^{ks}[\partial_{ab}g_{kr}\partial_{cd}g_{ls} + \partial_{ac}g_{kr}\partial_{bd}g_{ls} + \partial_{ad}g_{kr}\partial_{bc}g_{ls}]_0 \\ = -20f''^{(0)}(g_{ab}g_{cd} + g_{ac}g_{bd} + g_{ad}g_{bc})_0. \end{aligned}$$

En coordonnées arbitraires, nous aboutissons ainsi au système d'équations explicites cherchées

$$\begin{aligned} g^{\lambda\rho}g^{\varkappa\sigma}[g_{\varkappa\rho,\alpha\beta}g_{\lambda\sigma,\gamma\delta} + g_{\varkappa\rho,\alpha\gamma}g_{\lambda\sigma,\beta\delta} + g_{\varkappa\rho,\alpha\delta}g_{\lambda\sigma,\beta\gamma}] \\ = -20f''^{(0)}(g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}g_{\beta\nu}). \end{aligned} \tag{10–8}$$

Comme on le voit aisément, le système des équations (10–8) est, compte tenu des équations (8–5), équivalent au système des équations (8–6).

11. *Constance de la courbure scalaire quadratique.* — Nous multiplierons les deux membres des équations (10–8) par le produit $g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}$. Au second membre apparaît ainsi la quantité

$$g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}(g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) = n(n+2).$$

Quant au premier membre, il fournit le scalaire

$$g^{\lambda\rho} g^{\varkappa\sigma} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} [2 g_{\varkappa\rho,\alpha\beta} g_{\lambda\sigma,\gamma\delta} + g_{\varkappa\rho,\alpha\gamma} g_{\lambda\sigma,\beta\delta}]$$

qui, compte tenu des équations (9–3), prend la forme

$$2 g^{\lambda\rho} g^{\varkappa\sigma} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} g_{\varkappa\rho,\alpha\beta} g_{\lambda\sigma,\gamma\delta} + n f'^2(0).$$

On aboutit ainsi finalement à l'équation

$$(11\text{-}1) \quad g^{\lambda\rho} g^{\varkappa\sigma} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} g_{\varkappa\rho,\alpha\beta} g_{\lambda\sigma,\gamma\delta} = -10 n(n+2) f''(0) - \frac{1}{2} n f'^2(0).$$

Le premier membre de l'équation (11–1) n'est autre que le carré

$$G^2 = g^{\alpha\beta,\gamma\delta} g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$$

de l'extension seconde du tenseur métrique. A la quantité G^2 on donne le nom de *courbure scalaire quadratique* de l'espace riemannien considéré. Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — *Tout espace complètement harmonique* H_n *est à courbure scalaire quadratique constante.*

12. *Sur une inégalité fondamentale et ses applications* (1). — De l'équation (11–1) on peut tirer une importante inégalité en comparant la courbure scalaire quadratique de l'espace H_n à celle d'un espace à courbure constante. On peut mettre l'équation (11-1) sous la forme

$$\begin{aligned} & g^{\lambda\rho} g^{\varkappa\sigma} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} [g_{\varkappa\rho,\alpha\beta} - \lambda(2 g_{\varkappa\rho} g_{\alpha\beta} - g_{\varkappa\alpha} g_{\rho\beta} - g_{\varkappa\beta} g_{\rho\alpha})] \\ & \times [g_{\lambda\sigma,\gamma\delta} - \lambda(2 g_{\lambda\sigma} g_{\gamma\delta} - g_{\lambda\gamma} g_{\sigma\delta} - g_{\lambda\delta} g_{\sigma\gamma})] = 0, \end{aligned}$$

où λ désigne un scalaire racine de l'équation

$$(12\text{-}2) \qquad 6(n-1)\lambda^2 - 6 f'(0)\lambda - 10(n+2) f''(0) - \frac{1}{2} f'^2(0) = 0.$$

Les racines de l'équation (12–2) sont réelles si la quantité

$$\Delta = f'^2(0) + 20(n-1) f''(0)$$

(1) Quelques-uns des résultats de ce paragraphe ont paru dans une Note aux *Comptes Rendus* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 218, 1944, p. 436, séance du 13 mars).

est *positive ou nulle*. Supposons qu'il en soit ainsi. Le premier membre de l'équation (12–2) étant le carré du tenseur réel

$$g_{\alpha\beta,\gamma\delta} - \lambda(2 g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}),$$

cette équation ne peut être satisfaite que si ce tenseur est nul, c'est-à-dire si l'espace H_n considéré est un espace à courbure constante S_n. Dans ces conditions λ est racine double de l'équation (12–2), de telle sorte que l'on a

$$f'^2(0) + 20(n-1)f''(0) = 0$$

et

$$\lambda = \frac{f'(0)}{2(n-1)}.$$

Nous énoncerons :

Théorème. — *Si un espace riemannien complètement harmonique* H_n *est tel que*

$$(12\text{-}3) \qquad f'^2(0) \geqq -20(n-1)f''(0),$$

il se réduit nécessairement à un espace à courbure constante S_n *et c'est l'égalité qui a lieu dans* (12–3).

On en déduit que, pour tout espace complètement harmonique, on a

$$(12\text{-}4) \qquad f'^2(0) \leqq -20(n-1)f''(0),$$

l'égalité n'ayant lieu que pour un espace S_n.

13. *Cas où des espaces complètement harmoniques se réduisent localement à l'espace euclidien.* — Dans un travail récent [1], T. Y. Thomas et E. W. Titt ont établi que pour que l'équation de Laplace définie dans un espace de Riemann V_n admette la solution s^{2-n}, il faut et il suffit que V_n se réduise localement à l'espace euclidien. A l'aide des considérations précédentes, il est aisé de généraliser ce résultat.

Considérons d'abord un espace complètement harmonique H_n tel que

$$f''(0) \geqq 0.$$

[1] *Cf.* T. H. Thomas et E. W. Titt, *Op. cit.*, 1939, p. 225-228.

Il résulte de l'équation (11-1) que, pour un tel espace, la courbure scalaire quadratique G^2, qui ne peut être que positive ou nulle, est nécessairement nulle et que par suite

$$g_{\alpha\beta,\gamma\delta} = 0.$$

L'espace H_n considéré est localement euclidien.

Plus généralement, étant donné un espace complètement harmonique H_n, supposons qu'il existe un nombre k, supérieur à 1, tel que

$$(13\text{-}1) \qquad f'^2(0) \geqq -20k(n-1)f''(0) \qquad (k>1).$$

En comparant cette inégalité à l'inégalité (12-4), il vient

$$f''(0) \leqq kf''(0),$$

soit

$$f''(0) \geqq 0.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si un espace complètement harmonique* H_n *est tel qu'il existe un nombre k supérieur à l'unité pour lequel*

$$f'^2(0) \geqq -20k(n-1)f''(0),$$

l'espace H_n *se réduit localement à l'espace euclidien.*

14. *Produit de deux espaces riemanniens. Espace riemannien décomposable.* — Les espaces complètement harmoniques H_n ont en commun avec les espaces à courbure constante S_n une propriété importante, l'indécomposabilité. Avant d'établir cette propriété, nous allons rappeler brièvement les notions de produit de deux espaces riemanniens et d'espace riemannien décomposable telles qu'elles ont été introduites par W. Mayer et Élie Cartan [1] et reprises récemment par T. Y. Thomas et F. A. Ficken [2].

---

[1] A. DUSCHEK et W. MAYER, *Lehrbuch der Differential geometrie* Bd. II, Teubner, 1930 p. 147; E. CARTAN, *Bull. Soc. Math. France*, t. 55, p. 114, *Cf.* aussi EISENHART, *Trans. Americ. Math. Soc.*, t. 25, 1923, p. 297.

[2] T. Y. THOMAS, *Monats. für Math. Phys.*, t. 47, 1939, p. 388; F. A. FICKEN, *Annals of Math.*, t. 40, 1939, p. 892.

Nous ferons dans les paragraphes 14, 15, 16, les conventions suivantes : étant donnés deux entiers positifs r et s, nous poserons $r+s=n$; les indices α_1, β_1, ... sont susceptibles des valeurs $1, 2, \ldots, r$; les indices α_2, β_2, ... selon le contexte, prendront soit les valeurs $1, 2, \ldots, s$, soit les valeurs $r+1$, $r+2, \ldots, r+s=n$; les indices α, $\beta, \ldots$ prendront les valeurs $1, 2, \ldots, n$.

Soient U_r et V_s deux espaces de Riemann, de dimensions respectives r et s, que nous rapporterons à deux systèmes de coordonnées (x^{α_1}) et (x^{α_2}). A ces deux espaces de Riemann nous allons en faire correspondre un troisième de la manière suivante :

a. Prenons dans chacun des deux espaces un point $P \in U_r$ et $Q \in V_s$. Nous désignerons par W l'ensemble des paires ordonnées (P Q). Si N(P) est un voisinage de P dans U_r et N(Q) un voisinage de Q dans V_s, l'ensemble des points (P′, Q′) de W tels que $P' \in N(P)$ et $Q' \in N(Q)$ est un voisinage N(P, Q) de W.

b. L'espace topologique W sera rapporté au système de coordonnées (x^α) qui peut être considéré comme le produit des deux systèmes de coordonnées (x^{α_1}) et (x^{α_2}). Un système de coordonnées de W qui peut être considéré comme le produit de deux systèmes de coordonnées de U_r et V_s sera dit *décomposable*.

c. Nous désignerons par

$$g_{\alpha_1\beta_1}(x^{\gamma_1})\,dx^{\alpha_1}dx^{\beta_1}$$

et par

$$g_{\alpha_2\beta_2}(x^{\gamma_2})\,dx^{\alpha_2}dx^{\beta_2}$$

les formes quadratiques fondamentales de U_r et V_s. A la variété W nous ferons correspondre la forme quadratique fondamentale :

$$(14\text{-}1)\quad ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha_1\beta_1}(x^{\gamma_1})\,dx^{\alpha_1}dx^{\beta_1} + g_{\alpha_2\beta_2}(x^{\gamma_2})\,dx^{\alpha_2}dx^{\beta_2}.$$

Nous définissons ainsi *un espace de Riemann* W_n *à n dimensions qui est dit le produit des espaces de Riemann* U_r *et* V_s.

Un espace riemannien est dit décomposable s'il est localement isométrique au produit de deux espaces riemanniens.

15. *Tenseur séparable et tenseur décomposable.* — Considérons, dans $W_n = U_r \times V_s$, un tenseur

$$T^{\alpha\ldots\beta}_{\gamma\ldots\delta}$$

et affectons chacune des lettres α, β, γ, δ, ... soit de l'indice 1, soit de l'indice 2. L'ensemble des composantes correspondantes sera dit un *membre* du tenseur T. Si toutes les lettres sont affectées de l'indice 1, le membre est dit *le premier membre* de T; de même pour l'indice 2, on obtient *le second membre* de T. Si les lettres sont affectées d'indices non égaux le membre est dit *mixte*.

Effectuons dans W_n un changement de système décomposable de coordonnées. Un tel changement est défini par deux changements de coordonnées respectifs dans U_r et W_s.

Dans un changement de système décomposable de variables, les composantes relatives à un même membre se transforment linéairement entre elles. Il en résulte que si un membre de T est nul dans un système décomposable de coordonnées, il est nul dans tout système décomposable de coordonnées. Nous pouvons par suite énoncer les définitions suivantes.

Définitions. — *Un tenseur* T *de* W_n *est dit séparable si dans un système décomposable de coordonnées, tout membre mixte de* T *est nul.*

Un tenseur T *de* W_n *est dit décomposable s'il est séparable et si son premier membre ne dépend que des variables de première espèce et son second membre de celles de seconde espèce.*

Dans le cas d'un tenseur décomposable, chacun des deux membres définit un tenseur soit dans U_r, soit dans W_s. La somme, la contraction, le produit contracté, les dérivées covariantes de tenseurs décomposables sont des tenseurs décomposables. Les tenseurs $g_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $R_{\alpha\beta}$, $A^{\alpha}_{\alpha\lambda\mu}$, $A^{\alpha}_{\alpha\lambda\mu\nu}$, $A^{\alpha}_{\alpha\lambda\mu\nu\pi}$, ... fournissent des exemples de tenseurs décomposables.

16. *Indécomposabilité des espaces complètement harmoniques.* — On sait [1] que les espaces à courbure constante S_n ne sont jamais isométriques au produit de deux espaces de Riemann. Nous allons maintenant établir qu'il en est de même pour les espaces complètement harmoniques H_n.

---

[1] *Cf.* Ficken, *op. cit.*, p. 896.

Nous partirons du système des équations (8-6) de Copson et Ruse,

$$A^{\alpha}_{\alpha\lambda\mu\nu\pi} = \frac{1}{4} f''(0)[g_{\lambda\mu} g_{\nu\pi} + g_{\lambda\nu} g_{\mu\pi} + g_{\lambda\pi} g_{\mu\nu}].$$

Le tenseur qui figure à gauche dans ces équations, est construit par addition et multiplication contractée à partir du tenseur fondamental, du tenseur de courbure et de ses dérivées covariantes. Il en résulte que ce tenseur est décomposable, donc *séparable* au sens précédemment défini. Il est clair au contraire que le tenseur qui figure à droite admet des membres mixtes en général non identiquement nuls tels que

$$\frac{1}{4} f''(0) g_{\lambda_1\mu_1} g_{\nu_2\pi_2}.$$

Ce tenseur ne peut être *séparable* que s'il est identiquement nul, c'est-à-dire si

$$f''(0) = 0.$$

Il résulte alors d'un théorème du paragraphe **13** que H_n se réduit localement à l'espace euclidien. Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME. — *Tout espace complètement harmonique* H_n *à courbure non nulle est indécomposable.*

17. *Les espaces complètement harmoniques réalisables comme hypersurfaces d'espaces à courbure constante.* — Nous nous proposons de rechercher les espaces complètement harmoniques H_n, proprement riemanniens, qui peuvent être considérés comme des hypersurfaces d'un espace à courbure constante S_{n+1}. Ces espaces H_n comprennent évidemment comme cas particulier *les espaces complètement harmoniques de classe un.*

Dans un travail récent [1], A. Fialkow a déterminé tous les espaces d'Einstein proprement riemanniens réalisables comme hypersurfaces d'espaces à courbure constante. Si S_{n+1} admet la courbure riemanienne K, ces espaces d'Einstein sont :

a. ou bien des espaces S_n à courbure constante;

---

[1] A. FIALKOW, *Annals of Math.*, t. 39, 1938, p. 762-785.

b. ou bien des espaces produits de deux espaces S_p et S_{n-p} à courbure constante, des courbes riemaniennes respectives

$$\frac{n-2}{p-1}K; \qquad \frac{n-2}{n-p-1}K.$$

Les espaces complètement harmoniques étant indécomposables, il ne peut y avoir d'espaces H_n correspondant au cas *b*.

Nous aboutissons donc au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Tout espace complètement harmonique* H_n, *réalisable comme hypersurface d'un espace à courbure constante* S_{n+1}, *en particulier tout espace complètement harmonique* H_n *de classe un est nécessairement à courbure constante.*

18. *Les espaces complètement harmoniques et les espaces symétriques indécomposables.* — On sait que tous les espaces complètement harmoniques à $n = 2$ et 3 dimensions sont à courbure constante. Nous allons ici donner quelques indications sur le cas des espaces H_4 à quatre dimensions.

Nous partirons des équations (8–4) et (8–6) et nous effectuerons sur elles une dérivation covariante, ce qui conduit au système des équations

$$\nabla_\nu A^\alpha_{\alpha\lambda\mu} = 0, \tag{18-1}$$

$$\nabla_\rho A^\alpha_{\alpha\lambda\mu\nu\pi} = 0, \tag{18-2}$$

système qui, grâce à (6–2) et (10–8), peut être mis sous la forme

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\nu g_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0; \tag{18-3}$$

$$\left\{\begin{aligned} & g^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\mu}\nabla_\rho g_{\alpha\beta,\nu\pi} + g^{\alpha\beta}{}_{,\nu\pi}\nabla_\rho g_{\alpha\beta,\lambda\mu}, \\ & + g^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\nu}\nabla_\rho g_{\alpha\beta,\mu\pi} + g^{\alpha\beta}{}_{,\mu\pi}\nabla_\rho g_{\alpha\beta,\lambda\nu}, \\ & + g^{\alpha\beta}{}_{,\lambda\pi}\nabla_\rho g_{\alpha\beta,\mu\nu} + g^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu}\nabla_\rho g_{\alpha\beta,\lambda\pi} = 0. \end{aligned}\right. \tag{18-4}$$

Les équations (18–1) et (18–2) forment ainsi un système d'équations linéaires et homogènes par rapport aux inconnues $\nabla_\nu g_{\alpha\beta,\lambda\mu}$. D'après des résultats classiques [1], le nombre des inconnues indépendantes est

$$G(n, 3) = \frac{n^2(n^2-1)(n+2)}{4\,!}.$$

[1] *Cf.* T.Y. THOMAS, *Differential invariants of generalized spaces*, Cambridge, Univ. Press, 1934, p. 144-145.

Quant au nombre des équations indépendantes du système (18-1) (18-2), on montre aisément qu'il est au moins égal à

$$K(n, 3) + K(n, 5) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!},$$

où $K(n, p)$ désigne le nombre des combinaisons p à p avec répétitions des n indices. Pour $n = 4$, le rang du système linéaire (18-3), (18-4) est égal à $G(4\text{-}3)$, de telle sorte que pour tout espace H_4, on a nécessairement

$$\nabla_\nu g_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0.$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème. — *Tout espace complètement harmonique* H_4 *est nécessairement symétrique indécomposable.*

On sait que E. Cartan, à qui est due la notion d'espace symétrique, a réussi à déterminer tous les espaces symétriques indécomposables (1), espaces qui comprennent comme cas particulier les espaces à courbure constante. L'étude des différentes classes d'espaces symétriques indécomposables permettra de déterminer ceux de ces espaces qui peuvent être complètement harmoniques. Tout espace symétrique étant homogène, il suffit d'ailleurs qu'un tel espace soit harmonique en un point pour être complètement harmonique. La condition pour les espaces H_n d'être espace d'Einstein n'introduit pas, parmi les espaces symétriques indécomposables, une discrimination, puisqu'on peut établir à l'aide d'un résultat récent de T. Y. Thomas (2) que tout espace symétrique indécomposable est espace d'Einstein.

En effet, étant donné un espace de Riemann R^*, nous appellerons *tenseur métrique* relatif à cet espace tout tenseur symétrique $T_{\alpha\beta}$ dont le tenseur dérivé dans R^* est identiquement nul. *L'indice* de l'espace R^* est le nombre $t(\geq 1)$ de tenseurs métriques linéairement indépendants dans R^*. On a alors le résultat suivant dû à T. Y. Thomas : *pour que l'espace* R^* *soit indécomposable, il faut*

---

(1) E. Cartan, *Annali di math.*, t. 4, 1927, p. 209-256; *Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 44, 1927, p. 345-467.

(2) T. Y. Thomas, *Monatsh. für Math. und Phys.*, t. 47, 1939, p. 388-418.

et il suffit que son indice t soit égal à l'unité. Ceci étant posé, considérons un espace symétrique indécomposable. L'espace étant symétrique, son tenseur de Ricci $R_{\alpha\beta}$ est un tenseur métrique. L'espace étant indécomposable, le tenseur $R_{\alpha\beta}$ ne peut être linéairement distinct du tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$, de sorte que l'on a

$$R_{\alpha\beta} = \frac{R}{n} g_{\alpha\beta},$$

d'où le théorème

THÉORÈME. — *Tout espace symétrique indécomposable est espace d'Einstein.*

On en déduit immédiatement, comme au paragraphe 17, que tout espace symétrique indécomposable, proprement riemannien, qui peut être réalisé comme hypersurface d'un espace à courbure constante, est lui-même à courbure constante.

Il est intéressant de voir dans quelle mesure le résultat énoncé relatif aux H_4 peut s'étendre à des espaces H_n quelconques. Je reviendrai sur cette question ultérieurement.

(Manuscrit reçu le 8 octobre 1944).