BULLETIN DE LA S. M. F.

LAURENT SCHWARTZ

Sur certaines familles non fondamentales de fonctions continues

Bulletin de la S. M. F., tome 72 (1944), p. 141-145
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1944__72__141_0>

SUR CERTAINES FAMILLES NON FONDAMENTALES [1] DE FONCTIONS CONTINUES;

PAR M. LAURENT SCHWARTZ.

Définition. — On dit qu'une fonction continue $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est solution généralisée de l'équation aux dérivées partielles à coefficients constants non tous nuls

$$(1) \qquad \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_n=m} a_{p_1,p_2,\ldots,p_n} \frac{\partial^m U}{(\partial x_1)^{p_1}(\partial x_2)^{p_2}\ldots(\partial x_n)^{p_n}} = 0$$

si elle est limite uniforme sur tout compact de solutions vraies de cette équation.

Exemple. — Une solution généralisée de l'équation de Laplace $\Delta U = 0$ est une solution vraie. Il en est de même pour l'équation $\Delta^k U = 0$ des fonctions polyharmoniques.

Mais, dans le cas de 2 dimensions, une solution généralisée de l'équation hyperbolique $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ est une fonction de la la forme $f(x+y) + g(x-y)$, où f et g sont des fonctions continues quelconques non forcément dérivables.

THÉORÈME. — *Pour que le système de fonctions continues*

$$U(\lambda x_1 + \xi_1, \lambda x_2 + \xi_2, \ldots, \lambda x_n + \xi_n)$$

des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soit non fondamental [1] *sur un compact* K *de l'espace à n dimensions, lorsque λ et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, prennent toutes les valeurs réelles possibles, il faut (et il suffit si l'intérieur de* K *n'est pas vide) que* U *soit solution généralisée d'au moins une équation aux dérivées partielles du type* (1).

Condition suffisante. — Si U est solution généralisée d'une équation du type (1), il en est de même de

$$U(\lambda x_1 + \xi_1, \ldots, \lambda x_n + \xi_n)$$

---

[1] *Voir* paragraphe 18 du précédent travail, en note.

et par suite de toutes les limites uniformes de leurs combinaisons linéaires; si K contient un ouvert, toute fonction continue sur K n'est pas solution généralisée de (1) et le système n'est pas fondamental ([1]).

Condition nécessaire. — Si le système n'est pas fondamental, il existe une distribution de masses $\neq 0$ $d\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ portée par un compact et telle que l'on ait, pour toutes valeurs de $\lambda, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$,

$$(2) \qquad \int U(\lambda x_1 + \xi_1, \lambda x_2 + \xi_2, \ldots, \lambda x_n + \xi_n)\, d\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Soit $\rho(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une fonction nulle en dehors d'un compact et indéfiniment dérivable. Posons

$$(3) \quad V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int U(x_1 + u_1, x_2 + u_2, \ldots, x_n + u_n)\rho(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 du_2 \ldots du_n.$$

Il est bien évident que V est continue ainsi que toutes ses dérivées successives, qui s'obtiennent par dérivation sous le signe $\int$ dans la formule

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int U(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, \rho(u_1 - x_1, u_2 - x_2, \ldots, u_n - x_n)\, du_1 du_2 \ldots du_n.$$

D'autre part V satisfait comme U aux relations (2)

$$(2') \quad \int V(\lambda x_1 + \xi_1, \ldots, \lambda x_n + \xi_n)\, d\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \int \Big[\rho(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, du_1 du_2 \ldots du_n \times \int U(\lambda x_1 + \xi_1 + u_1, \ldots, \lambda x_n + \xi_n + u_n)\, d\Phi(x_1, \ldots, x_n)\Big] = 0.$$

Il est bien connu que, sur un compact, le système des fonctions continues $x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}$ (tous les p_i variant de 0 à ∞ par valeurs entières) est fondamental (approximation d'une fonction continue par un polynome).

---

[1] J'admets implicitement cette proposition pour ne pas alourdir la démonstration. On peut également montrer l'existenee de fonctions continues qui ne sont solution généralisée d'aucune équation aux dérivées partielles du type (1).

Il existe donc un système d'entiers $q_1, q_2, \ldots, q_n \left(\sum q_i = m\right)$ tel que

$$(4) \qquad \int x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n} \, d\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0.$$

Le premier membre de $(2')$ peut se dériver sous le signe $\int$, en vertu des propriétés de V; sa dérivée $m^{\text{ième}}$ par rapport à λ, pour $\lambda = 0$, est

$$(5) \qquad \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_n=m} \left[\frac{m!}{p_1!\,p_2!\ldots p_n!} \frac{\partial^m V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{(\partial\xi_1)^{p_1}(\partial\xi_2)^{p_2}\ldots(\partial\xi_n)^{p_n}} \right.$$
$$\left. \times \int x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n} \, d\Phi(x_1, x_2 \ldots x_n) \right].$$

Cette dérivée devant être nulle, V est solution de l'équation aux dérivées partielles (1) avec

$$a_{p_1,p_2,\ldots,p_n} = \frac{m!}{p_1!\,p_2!\ldots p_n!} \int x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} \, d\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

[équation aux dérivées partielles véritable, en vertu de (4)].

En prenant $\rho(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de telle sorte que

$$\int \rho(u_1, \ldots, u_n) \, du_1 \ldots du_n = 1$$

et que ρ soit nulle en dehors d'un voisinage arbitrairement petit de l'origine, on rend V aussi voisine que l'on veut de U sur un compact donné; U est donc limite uniforme sur tout compact, de solutions de (1), elle est donc solution généralisée de cette équation aux dérivées partielles.

Remarque. — On peut se borner à supposer que le système n'est pas fondamental lorsque $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ prenant toutes les valeurs, λ parcourt une suite de valeurs tendant vers zéro; la conclusion n'est pas changée.

Théorème. — *Pour que le système de fonctions continues* $U[\mathcal{T}^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ *soit non fondamental sur un compact* K [*dans cette formule,* $\mathcal{T}^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est le transformé du point* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *par la transformation* $\mathcal{T}^{-1}$] *lorsque* $\mathcal{T}$ *parcourt le système de toutes les similitudes possibles, il faut* (*et il suffit si l'intérieur de* K *n'est pas vide*) *que* U *soit polyharmonique, c'est-à-dire solution d'une équation itérée de Laplace* $\Delta^k U = 0$.

Condition suffisante. — Si U est solution de $\Delta^k U = 0$, il en est de même de toutes les fonctions $U[\mathcal{T}^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ lorsque $\mathcal{T}$ est une similitude, et par suite aussi des limites uniformes de leurs combinaisons linéaires. Le système n'est pas fondamental.

Condition nécessaire. — Il résulte du théorème précédent que si le système n'est pas fondamental, U est solution généralisée d'une équation aux dérivées partielles du type (1). Mais la distribution de masses $(d\Phi)$ peut être remplacée par n'importe quelle distribution transformée par rotation

$$\mathcal{R}(d\Phi) = d\Phi[\mathcal{R}^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

et aussi par n'importe quelle moyenne de telles transformées; en particulier on peut prendre la moyenne des transformées par toutes les rotations de même centre I (moyenne prise par la mesure de Haar sur le groupe ds ces rotations), ce qui remplace la distribution $d\Phi$ par une distribution $d\Psi$ *sphérique*, c'est-à-dire dans laquelle la masse contenue dans toute couronne sphérique de centre I est répartie avec homogénéité dans toutes les directions. (On peut choisir I de façon que la distribution $d\Psi$ soit $\neq 0$; sans quoi toute boule contiendrait dans la distribution $d\Phi$ une masse nulle, la densité serait partout nulle et la mesure $d\Phi$ serait nulle.) Nous ramènerons en I l'origine des coordonnées par changement de variables.

Le polynome de degré m : $\sum a_{p_1 p_2 \ldots p_n} X_1^{p_1} X_2^{p_2} \ldots X_n^{p_n}$ vaut

$$\int \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_n=m} \frac{m!}{p_1!\,p_2!\ldots p_n!}(x_1X_1)^{p_1}(x_2X_2)^{p_2}\ldots(x_nX_n)^{p_n}\,d\Psi(x_1\ldots x_n)$$

$$= \int (x_1X_1 + x_2X_2 + \ldots + x_nX_n)^m \, d\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

En vertu des propriétés de Ψ, cette intégrale n'est fonction que de $r = \sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}$; comme c'est une forme de degré m, elle vaut r^{2k}, $k = \frac{m}{2}$; alors l'équation aux dérivées partielles n'est autre que $\Delta^k U = 0$ et U, qui en est solution généralisée, en est solution vraie.

Remarque. — On peut se borner ici encore à supposer le système non fondamental lorsque $\mathfrak{T}$ parcourt toutes les similitudes dont les rapports forment une suite tendant vers ∞.

(Manuscrit reçu le 31 octobre 1944).