ROGER APÉRY

La géométrie algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 71 (1943), p. 46-66
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1943__71__46_0>

LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE;

Par M. Roger Apéry.

INTRODUCTION.

La géométrie algébrique date essentiellement du célèbre mémoire de Brill-Nöther de 1874 (1). C'est en principe l'ensemble des propriétés qui se conservent par transformations birationnelles (biunivoque et algébrique); c'est en fait l'étude des propriétés géométriques des courbes ou surfaces obtenues grâce au concours simultané de la géométrie, de l'algèbre, de l'analyse, de la topologie et parfois de l'arithmétique. Bien entendu, cette théorie ne peut être renfermée dans un exposé aussi bref qui se contentera d'en esquisser les traits les plus importants.

Les premiers problèmes posés sont d'ordre énumératif. Dès les éléments, le géomètre recherche combien de points se trouvent simultanément sur deux cercles C et C'. Tout problème énumératif peut se ramener à un problème d'intersection. Par exemple, supposons que l'on cherche combien de cubiques du plan satisfont à certaines conditions : une cubique est déterminée par des coefficients homogènes qui peuvent être représentés par un point d'un espace S à neuf dimensions, les conditions sont représentées par certaines variétés de l'espace S qui se coupent en les points images des cubiques cherchées. La véritable difficulté du problème vient du fait que les variétés peuvent avoir en commun une sous-variété représentant des solutions impropres du problème, ce qui rend délicat le décompte des points isolés communs.

Le théorème énumératif le plus simple est dû à Bezout : dans le plan deux courbes de degré m, n se coupent en mn points. Ce théorème est souvent considéré par les débutants comme imprécis, ils croient que le géomètre s'arrange pour compter les points

(1) *Ueber die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung an der Geometrie* (*Math. Annalen*, t. VII).

confondus de façon à rendre valable le théorème, comme le physicien invente une nouvelle forme d'énergie, quand le principe de conservation de l'énergie ne se vérifie pas. En réalité le théorème de Bezout est très précis à condition de lui ajouter le complément suivant dû à Halphen : le nombre de points d'intersection de deux courbes C et C′ absorbés par le point A est la somme des ordres des infiniment petits des segments ayant leur origine sur C, leur extrémité sur C′, découpés par une droite D dont la distance à A est prise comme infiniment petit principal.

Cette méthode de décompte des solutions confondues permet de résoudre n'importe quel problème de géométrie énumérative par le principe de conservation du nombre. Pour chercher le nombre de solutions d'un problème, on donne aux éléments de la figure des positions particulières, mais de façon que le nombre de solutions reste fini; le nombre de solutions du problème particulier est celui du problème général. Par exemple pour chercher les droites qui s'appuient sur quatre droites de l'espace, on suppose qu'elles sont réparties en deux couples coplanaires; le problème a visiblement deux solutions. Ce principe, formulé par Schubert dès 1874, fut l'objet de difficultés variées, qui furent élucidées par Severi en 1912. Il montra (1) que toutes les difficultés rencontrées venaient de solutions confondues ou de décomposition du problème. Si les conditions considérées se décomposent en conditions de même dimension, le principe reste valable, mais il cesse de l'être si les conditions sont de dimension différente. Par exemple si le problème peut se traduire par l'intersection dans l'espace ordinaire d'une droite avec un lieu géométrique formé d'une surface et d'une courbe, le principe n'est pas valable.

Un terme important à définir et qui revient fréquemment est l'expression « en général ». Tout le monde connaît les paradoxes sur l'existence des rebroussements auxquels conduit l'emploi inconsidéré de cette expression, et néanmoins cette expression est nécessaire pour dire par exemple que par 9 points il passe en général une cubique.

Les paradoxes viennent du fait que l'on considère des éléments à une infinité de paramètres (l'ensemble des courbes du plan).

---

(1) *Sul principio della conservazione del numero* (*Rend. Palermo*, 1912).

En arithmétique, il suffit de modifier l'ordre des entiers pour qu'un nombre soit un carré parfait « en général » ; en analyse, les maîtres de l'analyse française n'ont pu se mettre d'accord sur le sens à donner à l'expression « presque partout ». Pour éviter toute difficulté, le géomètre considérera toujours des êtres dépendant d'un nombre fini de paramètres qui puissent, en conséquence, être représentés par les points d'une variété algébrique à un nombre fini de dimensions. On dit qu'une propriété a lieu, en général, pour les points d'une variété indécomposable si l'ensemble des points où elle n'est pas vraie est formé de variétés de dimension moindre. Le mot indécomposable est important dans cette définition; ainsi une quartique plane est en général sans point double, mais on ne peut dire qu'une quartique de l'espace soit plane en général, bien que les quartiques planes dépendent de 17 paramètres et les quartiques gauches de 16 paramètres, parce que la famille des quartiques planes est analytiquement distincte de celles des quartiques gauches (qui forment d'ailleurs elles-mêmes deux familles).

La géométrie algébrique est multiple : il y a la géométrie algébrique de la droite, d'une courbe, du plan, d'une surface, de l'espace, etc. suivant le champ des transformations birationnelles permises. Ainsi l'étude d'une courbe dans ses rapports avec le plan, c'est-à-dire en ne permettant que les transformations birationnelles prolongeables dans le plan fournit plus de propriétés que la géométrie algébrique sur la courbe où sont permises toutes les transformations birationnelles de courbe à courbe. Dans ce dernier cas, deux courbes unicursales sont équivalentes. Elles ne le sont pas dans le premier.

1. **Géométrie algébrique sur les courbes** (1). — La géométrie algébrique sur la droite est la théorie générale de l'homographie. La géométrie sur une courbe contient essentiellement les séries linéaires. Étant donnée une courbe C du plan, les groupes de points mobiles découpés sur C par une famille linéaire de

(1) Il y a deux traités sur la question : ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche;* SEVERI-LÖFFLER, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, dont il a paru d'abord une édition moins complète en italien.

courbes constituent ce qu'on appelle une série linéaire que l'on représente par g_n^r, n étant le nombre de points d'un groupe arbitraire et r la dimension de la série, c'est-à-dire le nombre de paramètres dont elle dépend. On considère également des séries linéaires dont tous les groupes contiennent certains points fixes, les points mobiles formant une série linéaire au sens défini ci-dessus. Une série linéaire est dite complète (Vollschar) si ses groupes n'appartiennent pas à une série plus vaste, partielle dans le cas contraire (Teilschar). Tout groupe de points appartient à une série linéaire complète et une seule, qui peut être de dimension zéro. Le défaut d'une série partielle est la différence entre sa dimension et celle de la série complète qui la contient. Deux groupes de points sont dits équivalents s'ils appartiennent à une même série linéaire. Cette équivalence est réflexive, symétrique et transitive. Le groupe de points G_{m+n} obtenu par réunion des groupes G_m et G_n est dit somme des deux groupes, cette somme conserve l'équivalence. La série linéaire engendrée par G_{m+n} est la somme des séries linéaires G_m et G_n. Cette somme a toutes les propriétés de l'addition (associativité, commutativité). On peut par conséquent définir le produit d'un groupe ou d'une série par un entier k. La relation $G_n \equiv G'_n$ entraîne $kG_n \equiv kG'_n$, mais la réciproque n'est pas vraie.

Si une série complète g_{m+n} contient partiellement un groupe d'une g_n elle contient tous ses groupes. En retranchant un groupe G_n appartenant à g_n de tous les groupes de g_{m+n} qui le contiennent, on obtient une série résiduelle g_m complète, indépendante du choix de G_n. C'est la différence des séries g_{m+n} et g_n. De même la série complète engendrée par g_n est résiduelle d'un groupe quelconque de la g_m. L'opération de soustraction ainsi définie n'est pas toujours possible. Si elle ne l'est pas on peut définir des groupes virtuels formés par la différence de deux groupes quelconques. Deux groupes virtuels sont équivalents s'il existe un groupe auxiliaire qui ajouté à chacun d'eux donne des groupes équivalents.

On appelle genre de la courbe le nombre p tel que la série linéaire complète engendrée par k points généraux soit de dimension zéro si $k \leq p$, de dimension positive si $k > p$. Toute courbe de genre zéro est unicursale.

Le genre n'est pas le seul invariant birationnel. Les courbes de genre $p > 1$ birationnellement distinctes dépendent de $3p - 3$ modules. On peut les considérer comme éléments d'une variété irréductible à $3p - 3$ dimensions.

S'il existe entre deux courbes C, C′ de genres p et p' une correspondance (n, n') présentant δ points critiques sur C, δ' points critiques sur C′, on a la relation de Zeuthen

$$n'(2p - 2) + \delta = n(2p' - 2) + \delta'.$$

Cette relation, outre l'invariance de p, montre qu'il ne peut exister de correspondance simplement rationnelle entre courbes de même genre $p > 1$. Une telle correspondance peut exister si $p = 1$ (hessienne et cayleyenne d'un réseau de coniques). Les courbes à modules généraux de genre $p > 2$ ne possèdent pas de transformations birationnelles en elles-mêmes. Les courbes à modules particuliers en ont au plus $84(p - 1)$. La limite est atteinte pour la quartique de Klein qui est conservée par 168 homographies.

Le groupe jacobien d'une g_n^1 est le groupe des points doubles de la série; les points fixes comptent pour deux points doubles, les points multiples d'ordre ν pour $(\nu - 1)$ points doubles. Les groupes, jabobiens des g_n^1 d'une même série linéaire sont équivalents et engendrent une série linéaire dite série jacobienne de la première. Si A et B sont deux groupes de points qui engendrent les séries linéaires $|A|$ et $|B|$ de somme $|A + B|$, la série jacobienne de A + B est la somme de la série jacobienne de $|A|$ et du double de la série $|B|$ ce qui s'écrit symboliquement

$$|A + B|_j = |A_j + 2B| - |B_j + 2A|$$

d'où l'on tire

$$|A_j - 2A| = |B_j - 2B|.$$

La série $|A_j - 2A|$ est donc une série intrinsèquement attachée à la courbe qui est dite série canonique. Cette série est virtuelle pour les courbes unicursales, vide pour les courbes de genre 1, mais elle est effective dès que $p > 1$. Sa dimension est $p - 1$ et elle est formée de $2p - 2$ points.

Tout groupe formé de points appartenant à un même groupe de la série canonique est dit spécial. S'il appartient exactement à

i groupes linéairement indépendants son indice de spécialité est i. La série engendrée par le groupe est aussi d'indice de spécialité i. La dimension d'une série linéaire complète de n points de spécialité i sur une courbe de genre p est $r = n - p + i$ (théorème de Riemann-Roch). Si deux séries complètes $g_n^r, g_{n'}^{r'}$ ont pour somme la série canonique, on a : $n - n' = 2(r - r')$ (loi de réciprocite de Brill-Nöther). La série canonique n'a pas de point fixe. Toute série spéciale g_n^r satisfait à $n \geqq 2r$ (théorème de Clifford).

La condition nécessaire et suffisante pour que la série canonique soit décomposée et qu'elle contienne une g_2^1. La courbe est dite hyperelliptique. Si une courbe non unicursale contient plusieurs g_2^1, elle est de genre 1, on dit aussi qu'elle est elliptique.

On appelle involution sur une courbe γ_n^r, tout ensemble de groupes de n points tel que par r points généraux de la courbe passe un seul groupe de l'involution. Toute série linéaire est une involution, mais la réciproque n'est pas vraie : ainsi les couples de points conjugués par rapport à un réseau linéaire de coniques constituent une involution sur la hessienne de ce réseau, mais cette involution n'est pas une série linéaire puisque la cayleyenne du réseau n'est pas unicursale; on dit qu'on a affaire à une involution irrationnelle. On a néanmoins les théorèmes suivants :

1° Sur une courbe unicursale, toute involution est rationnelle; on en déduit immédiatement le théorème de Lüroth.

2° Sur une courbe quelconque, une série rationnelle de groupes de points appartient complètement à une série linéaire.

3° Une courbe ne peut contenir au maximum qu'un nombre fini d'involutions irrationnelles de genre > 1 et une infinité dénombrable d'involutions elliptiques (théorème de Painlevé). Ces involutions sont de dimension 1.

4° Une involution γ_n^r est une série linéaire ou se compose des ∞^r groupes d'une involution irrationnelle γ_ν^1 pris 2 à r (théorème de Castelnuovo-Humbert).

Une série est dite composée par une involution si tous les groupes contenant un point de la courbe en contiennent nécessairement d'autres; dans le cas contraire la série est simple. Une série simple représente une courbe Γ d'un espace S_r à r dimensions dont les sections par les S_{r-1} sont les groupes de points de la série. Si la série est complète la courbe est dite normale. Si la série n'est pas complète, la courbe est projection d'une courbe de même degré d'un espace supérieur, elle n'est pas normale. Une courbe non hyperelliptique a une série canonique simple; cette série a pour image une courbe d'ordre $2p - 2$ de l'espace à p dimensions, la courbe canonique.

L'exposé précédent des séries linéaires sur une courbe est dû aux géomètres italiens et s'appuie presque uniquement sur des considérations intrinsèques. Mais les exposés plus anciens s'appuyaient sur des propriétés des courbes en rapport avec le plan et sur le théorème $AF + B\Phi$ de Nöther. Si deux courbes $F = 0$, $\Phi = 0$ n'ont en commun que des points simples à tangentes différentes, toute courbe qui passe par les points communs à F et Φ a une équation de la forme $AF + B\Phi$. Ce théorème n'est plus vrai si les courbes F et Φ ont en commun des points multiples; par exemple si F et Φ ont un point double O en commun, parmi les courbes passant par l'intersection de F et Φ admettant O comme point double la forme $AF + B\Phi$ ne fournira que celles dont les tangentes sont en involution avec les tangentes de F et Φ. Dans le cas appelé traditionnellement « cas simple », on suppose que F et Φ ont en commun des points qui peuvent être multiples mais à tangentes différentes. Si ces points sont d'ordre r pour F et s pour Φ, les courbes admettant ces points comme points multiples d'ordre $r + s - 1$ sont de la forme $AF + B\Phi$, où A et B admettent les points comme points multiples d'ordre $s - 1$ et $r - 1$. Il est à noter qu'il existe une démonstration de ce théorème qui s'apparente à la méthode arithmétique de « descente infinie » : pour les courbes de degré suffisamment grand le théorème est montré par dénombrement des constantes, car les conditions imposées sont linéaires et indépendantes; on démontre ensuite que le théorème est vrai pour les courbes d'ordre $n - 1$ s'il est vrai pour les courbes d'ordre n.

Pour l'étude d'une courbe plane d'ordre m dont les points multiples sont à tangentes distinctes, on considère les adjointes, courbes admettant tout point d'ordre s de C comme point d'ordre $s - 1$ au moins. L'application du théorème $AF + B\Phi$ donne le célèbre théorème du reste de Brill-Nöther : si deux adjointes découpent sur C deux groupes $\mathcal{G} + \mathcal{H}$ et $\mathcal{G}' + \mathcal{H}$ on dit que $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont corésiduels, et cette propriété est indépendante du groupe $\mathcal{H}$. On en déduit les produits les propriétés des séries linéaires de points (deux groupes équivalents corésiduels) et le fait que les adjointes découpent des séries complètes. La série canonique est découpée par les adjointes d'ordre $m-3$. Le genre est le nombre d'adjointes d'ordre $m-3$ linéairement indépendantes (dans le cas des cubiques il faut considérer ce nombre comme égal 1).

Les propriétés précédentes restent vraies pour les courbes ayant des points multiples quelconques, à condition de considérer qu'à ces points multiples il faut en adjoindre d'autres dits « infiniment voisins » par lesquels les adjointes doivent passer. D'ailleurs on peut par transformation birationnelle du plan obliger une courbe à n'avoir que des points multiples à tangentes distinctes et par transformation birationnelle de la courbe à n'avoir que des points doubles ordinaires. Dans ce dernier cas le genre est égal à $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ diminué du nombre de points doubles.

Les courbes d'ordre m non décomposées douées de d points doubles $\left[d < \frac{(m-1)(m-2)}{2}\right]$ forment une seule famille algébrique et l'existence des points doubles impose aux courbes d'ordre m des conditions indépendantes. Le problème analogue n'est pas résolu si l'on impose à la courbe d'autres singularités, par exemple des rebroussements ou des points triples. Le théorème $AF + B\Phi$ a été généralisé par Severi pour $(n-k)$ variétés à $(r-1)$ dimensions de l'espace S dans le cas où ces variétés n'ont en commun que des variétés à k dimensions. Dans le cas contraire, le théorème est faux : par exemple, si 3 surfaces F, Φ, Ψ ont en commun une monoquadratique et des points isolés, il existe des surfaces passant par l'intersection de F, Φ, Ψ qui ne sont pas de la forme $AF + B\Phi + C\Psi$. Les algébristes expliquent ce phénomène en disant que l' « idéal » engendré par F, Φ, Ψ admet un « composant impropre ». On peut démontrer que le théorème est vrai ou faux suivant les propriétés de la variété à plus de d dimensions, indépendamment des variétés à $(r-1)$ dimensions considérées [1].

---

[1] Dubreil, *Quelques propriétés des variétés algébriques* (*Actualités scientifiques et industrielles*, 1935).

Les adjointes d'ordre $m - 3$ sont intéressantes non seulement par les groupes qu'elles découpent sur C, mais en elles-mêmes. En effet, une transformation birationnelle du plan conserve le système adjoint, c'est-à-dire le système des adjointes d'ordre $m - 3$, défalcation faite des parties fixes. Cette transformation conserve de la même façon les adjointes d'indice k, courbes d'ordre $m - 3k$ admettant les points d'ordre s comme points multiples d'ordre $s - k$ au moins. A côté du genre d'une courbe, on peut donc définir des genres successifs qui sont les nombres d'adjointes d'indice k linéairement indépendantes. Chaque genre d'indice k est le genre des adjointes d'indice $k - 1$ si elles existent. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe soit équivalente à une droite par transformation de Cremona est que tous ses genres successifs soient nuls, à une cubique sans point double que son genre soit 1 et que les autres genres soient nuls.

Le théorème du reste devient applicable aux courbes gauches en appelant surface adjointe à une courbe gauche C (supposée sans point multiple pour simplifier) toute surface passant par l'intersection résiduelle C′ de deux surfaces d'ordre m_1, m_2 passant par C. La série canonique complète est découpée par les surfaces d'ordre $m_1 + m_2 - 4$ passant par C′. Ceci permet notamment de déterminer le genre de C et le nombre de points d'intersection de C et C′ connaissant le genre de C′. En supposant que la série découpée par les surfaces d'ordre m sur une courbe C d'ordre n et de genre p soit complète et non spéciale, le nombre de conditions pour qu'une surface d'ordre m passe par C, qu'on appelle aussi la postulation de C, est égal à $mn + 1 - p$; pour m suffisamment grand, les hypothèses faites sont vérifiées, mais il n'en est pas de même pour les petites valeurs de m où la postulation peut être plus forte ou plus faible que la valeur théorique. La postulation est un cas particulier de la fonction caractéristique de Hilbert d'un idéal.

Les courbes gauches algébriques d'ordre donné n ne forment pas une seule famille. On est amené à distinguer les courbes suivant leur nombre de points doubles apparents. Les courbes ayant même degré et même nombre de points doubles apparents forment également plusieurs familles et il semble qu'il faille une infinité de caractères numériques pour classer les courbes. Il ressort des travaux d'Halphen [1] que les courbes de degré donné et de genre maximum sont situées sur une quadrique. Les valeurs possibles du genre présentent des lacunes entre o et le maximum. Le nombre de paramètres dont dépend une courbe gauche d'une famille déterminée est égal à $4n$ pour les petites valeurs du genre ($p \leqq n - 3$), il est plus grand pour les grandes valeurs du genre. Les recherches d'Halphen utilisent la représentation monoïdale de Cayley : toute courbe moyennant l'adjonction d'un certain nombre de droites concourantes est l'intersection complète d'un cylindre et d'une surface monoïde. Les recherches de Severi sur les courbes montrent que toutes les familles de courbes gauches contiennent des formes dégénérées en n droites, ce qui permet notamment de résoudre les problèmes énumératifs [2]. Castelnuovo a trouvé le genre maximum d'une courbe d'ordre donné plongée dans un espace à plus de 3 dimensions [3].

La géométrie sur les courbes planes algébriques peut se faire également au moyen des intégrales abéliennes attachées à la courbe. Toute courbe algébrique peut être représentée par une surface de Riemann qui est topologiquement une surface fermée d'ordre de connexion $2p+1$. Ces intégrales possèdent, outre leurs éventuelles périodes polaires, $2p$ périodes cycliques. Il y a p intégrales de première espèce linéairement indépendantes. Elles sont de la forme $\int \frac{Q\,dx}{f_y}$, où $Q = 0$ est une adjointe d'ordre $m - 3$. La condition nécessaire et suffisante pour que deux groupes de points soient équivalents est que la somme des intégrales de première espèce limitées aux points de chaque groupe soient égales (aux multiples de périodes près).

Si deux groupes de points sont des intersections complètes avec des courbes ne passant pas par les points singuliers de la courbe, on obtient des sommes égales non seulement en utilisant les intégrales abéliennes de première espèce, mais aussi en utilisant les intégrales de deuxième espèce admettant un rebroussement pour pôle simple ou des intégrales de troisième espèce admettant les

(1) *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques* (*Journal de l'École Polytechnique*, 52e cahier, 1882).

(2) *Sulla classificazione delli curve algebriche. Rend. Lincei*, 1915.

(3) *Ricerche di geometrie sulle curve algebriche. Atti di Torino*, 1889.

deux points confondus en un point double comme points critiques. Si l'on se donne les sommes de valeurs des intégrales de première espèce relatives à p points, on obtient en général un seul groupe de points. Leurs fonctions symétriques sont des fonctions $2p$ fois périodiques de p variables, c'est-à-dire des fonctions abéliennes (si $p = 1$, on a des fonctions elliptiques). La variété qui représente les groupes de p points d'une courbe de genre p est la variété de Jacobi attachée à la courbe. Si les courbes de genre 1 peuvent être uniformisées au moyen de leur intégrale de première espèce, il n'en est pas de même des courbes de genre supérieur. Poincaré a démontré que les coordonnées d'une courbe quelconque sont des fonctions fuchsiennes d'un paramètre, mais ces fonctions sont relativement peu maniables, le paramètre n'a pas de relation simple avec la courbe et l'on n'a pas pu obtenir par cette voie des résultats nouveaux.

Une branche intéressante de la géométrie algébrique est l'arithmétique sur une courbe algébrique; étude des propriétés des courbes qui se conservent par transformations birationnelles à coefficients entiers et notamment la recherche des points à coordonnées rationnelles (1). Des méthodes purement géométriques ont permis de montrer que toute courbe unicursale équivaut à une droite ou à une conique (ce qui rend immédiate la recherche des points rationnels), et que toute courbe de genre 1 possédant un point rationnel équivaut à une cubique possédant un point d'inflexion rationnel. Malheureusement, sur les points rationnels des courbes non unicursales, même des cubiques, on ne connaît que des résultats particuliers. Citons notamment le théorème de Mordell; tous les points rationnels d'une cubique C peuvent être engendrés à partir d'un nombre fini d'entre eux en appliquant les

(1) L'ensemble des points rationnels, contrairement aux apparences, n'a pas de caractère métrique et ne dépend pas des axes de coordonnées. On peut le définir de façon purement géométrique de la façon suivante : étant donnés quatre points A, B, C, D tels que trois quelconques d'entre eux soient non alignés, on joint ces points deux à deux et on prend l'intersection de toutes les droites de la figure, on joint tous les points de la figure et ainsi de suite. L'ensemble de tous les points obtenus est indépendant des quatre points initiaux pris dans l'ensemble. Si les points initiaux sont rationnels c'est l'ensemble des points rationnels.

On pourrait définir de façon analogue les points appartenant à un corps.

principes suivants : la droite joignant deux points rationnels recoupe C en un point rationnel, la tangente en un point rationnel recoupe C en un point rationnel.

2. **Géométrie algébrique sur les surfaces.** — L'étude des surfaces, beaucoup plus complexe que celle des courbes, a été commencée par Nöther et continuée par les géomètres italiens, notamment Castelnuovo, Enriques et Severi. Nöther a envisagé les surfaces dans leur rapport avec l'espace ambiant en définissant des adjointes aux surfaces. Pour ne considérer que des singularités pas trop compliquées, on peut transformer la surface considérée en une surface sans point singulier plongée dans l'espace à cinq dimensions, qui se projette dans l'espace ordinaire suivant une surface n'ayant pour singularités qu'une courbe double à points triples à la fois pour la courbe et pour la surface. Une adjointe est alors une surface passant par la courbe double. Dans le cas général, une surface dont toutes les sections planes sont adjointes des sections planes de la surface considérée est dite sous-adjointe, une surface sous-adjointe n'est adjointe que si elle a un comportement convenable aux points multiples isolés de la surface : ainsi, si un point double conique ou biplanaire est sans importance, une adjointe doit passer par les tacnodes ou les points triples de la surface. Le système des adjointes d'ordre $m-4$ se conserve dans toute transformation birationnelle. On appelle genre géométrique (Flächengeschlecht) $p_g (\geqq 0)$ le nombre d'adjointes d'ordre $m-4$ linéairement indépendantes (dans le cas des surfaces quartiques il faut poser $p_g = 1$). Si $p_g > 1$ les adjointes découpent sur la surface un système linéaire appelé système canonique. Le genre de la partie mobile du système canonique est appelé genre linéaire de la surface (Curvengeschlecht) et désigné généralement par p (1). Si l'on évalue le nombre d'adjointes d'ordre $m-4$ en appliquant les formules de postulation aux courbes singulières de la surface, on trouve un nombre $p_a \leqq p_g$ dont Zeuthen a montré l'invariance par les transformations birationnelles. Le nombre p_a s'appelle genre

(1) *Voir* le traité d'Enriques et Campedelli, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche.*

arithmétique de la surface et $p_g - p_a$ son irrégularité; si $p_a = p_g$ la surface est régulière, si $p_a < p_g$ elle est irrégulière. Pour une réglée à sections planes de genre p, $p_g = 0$, $p_a = -p$; pour une surface du 6e ordre ayant 8 points triples situés sur un réseau de quadriques $p_g = 3$, $p_a = 2$; pour les surfaces représentant les couples de points de deux courbes de genre π_1 et π_2

$$p_g = \pi_1 \pi_2, \qquad p_a = \pi_1 \pi_2 - (\pi_1 + \pi_2);$$

pour les surfaces représentant les couples non orientés d'une courbe de genre π

$$p_g = \frac{p(p-1)}{2}, \qquad p_a = \frac{p(p-3)}{2}.$$

La généralisation par Severi de la formule de Zeuthen sur les correspondances (n, n') fait intervenir p_a et non p_g.

Les surfaces pour lesquelles p_a et p_g sont nuls ne sont pas forcément rationnelles. Cela a amené Enriques à introduire un nouvel invariant, le bigenre, nombre de surface d'ordre $2m - 8$ biadjointes, c'est-à-dire, dans le cas des singularités ordinaires, passant deux fois par la courbe double (1). La surface du 6e ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre a pour genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$. On définit de même les multigenres P_3, P_4.

L'étude des surfaces se complique du fait que dans une transformation birationnelle certaines courbes de la surface dites courbes exceptionnelles (ausgezeichnete Kurven) peuvent avoir pour image des points. Deux surfaces équivalentes du point de vue de la géométrie algébrique ne forment pas des variétés topologiquement équivalentes. On est amené à distinguer deux sortes d'invariants : les invariants absolus qui se conservent dans toutes les transformations birationnelles, les invariants relatifs qui ne se conservent que dans les transformations qui changent les points en points. L'étude, par le second point de vue, d'un plan ou d'une quadrique donne respectivement les géométries projectives et anallagmatiques planes qui sont ainsi des chapitres de la géométrie algébrique.

(1) Godeaux, *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (*Act. scientif. et indust.*, n° 123).

Les définitions ci-dessus des invariants utilisent les propriétés de l'espace ambiant à la surface. D'autre part elles n'ont pas toujours un sens. Que sera le genre linéaire s'il n'y a pas de système canonique ($p_g = 0$) ou si le système canonique est formé de courbes décomposées ?

Castelnuovo et Enriques ont fait l'étude des systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface et les éléments indépendants du système de départ sont invariants pour la surface. Les caractères principaux d'un système linéaire sont sa dimension (nombre de paramètres dont dépend la courbe générale du système), son genre (genre de la courbe générale du système) et son degré (nombre de points d'intersection variables de deux courbes du système). Un système linéaire de courbes peut avoir certains points-base dont on a fixé la multiplicité. Si outre les points imposés le système a d'autres points-base, ces derniers sont dits accidentels. Si des points-base imposés ont une multiplicité plus grande que celle qu'on leur impose, ils sont dits hypermultiples. Si l'on a précisé les points-base imposés et leur ordre de multiplicité on peut parler du système complet déterminé par une courbe. On peut définir la somme et la différence de deux systèmes linéaires complets, la différence étant éventuellement virtuelle. Le genre et le degré virtuels d'une courbe générale du système s'obtient en ne comptant les points-base multiples qu'avec la multiplicité imposée. Si l'on appelle $\pi_1, n_1 ; \pi_2, n_2 ; \pi, n$ le genre et le degré virtuels de deux systèmes linéaires $|C_1|$ et $|C_2|$ et de leur somme $|C|$, et si i est le nombre de points d'intersection des courbes mobiles C_1 et C_2 autres que les points-base imposés, on peut écrire dans tous les cas

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1$$
$$n = n_1 + n_2 + 2i.$$

Ces formules permettent de définir le genre et le degré virtuels d'un système réductible fixe, ou formé d'une seule courbe ou même d'un système virtuel.

On peut, comme pour les séries de points sur les courbes, associer à tout système $|C|$ un système jacobien $|C_j|$. Le système $|C_j - 3C|$ est indépendant du système $|C|$ choisi, c'est le système canonique $|K|$. La dimension $p_g - 1$ de genre virtuel $p^{(1)}$ et de degré virtuel $p^{(1)}-1$. Ces définitions pour être invariantes supposent que l'on défalque du système $|C_g - 3C|$ les courbes exceptionnelles de la surface. Alors que pour une surface rationnelle ou équivalente à une réglée, une infinité de courbes sont exceptionnelles, il n'y en a qu'un nombre fini pour les autres. Les surfaces ni rationnelles ni réglées sont birationnellement équivalentes à des surfaces sans courbe exceptionnelle. Les systèmes linéaires complets et sans points-base découpés sur cette surface sont les systèmes linéaires purs. Leur considération donne des résultats remarquables; ainsi sur une surface dont tous les genres sont égaux à 1, par exemple la surface du 4e degré sans singularité ou douée de points doubles coniques ou biplanaires, tout système linéaire pur de genre π est de dimension π et de degré $2\pi-2$.

A tout système linéaire $|C|$ on associe ainsi le système adjoint $|C'| = |C_j - 2C|$ qui découpe sur $|C|$ la série canonique. Si le genre et le degré de $|C|$ et $|C'|$ sont respectivement π, n; π', n' et si δ est le nombre de courbes C admettant un point double autre que les points-base, on peut définir 2 invariants relatifs, l'invariant de Castelnuovo-Enriques

$$\omega = \pi' - 3(\pi - 1) + n$$

et l'invariant de Zeuthen-Segre

$$I = \delta - n - 4\pi.$$

Les invariants relatifs considérés sont liés aux invariants absolus par des relations simples : si e est le nombre de courbes exceptionnelles de 1re espèce

$$\omega + e = p^{(1)},$$
$$\omega + I = 12p_a + 9.$$

Un autre invariant relatif est le nombre minimum ρ tel qu'il existe ρ courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ linéairement indépendantes telles que toute courbe C de la surface soit linéairement liée aux courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$; dans cette définition on considère deux courbes comme équivalentes si elles appartiennent à un même système *algébrique* irréductible. La valeur de ρ correspondant à une surface sans courbes exceptionnelles est un invariant absolu. L'extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces est assez compliquée : un système linéaire de courbes de genre π, de degré n a pour dimension

$$r = p_a + n - \pi + 1 - i + \sigma$$

où i est l'indice de spécialité (nombre d'adjointes linéairement indépendantes contenant une courbe du système) et σ la surabondance (nombre $\geqq 0$ dont l'interprétation est assez compliquée). Alors que le caractère i est facile à déterminer, on ne sait rien en général du caractère ρ. Quand i et σ sont nuls, le système est dit régulier. Le théorème de Riemann-Roch est complété par la réciproque suivante : si les caractères π, n, i d'une courbe tracée sur une surface de genres p_g, p_a satisfont à l'inégalité

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geqq 0,$$

la courbe appartient à un système linéaire de dimension

$$r = p_a + n - \pi + 1 - i + \sigma$$

et à un système continu de dimension

$$r' = p_g + n - \pi + 1 - i + \sigma \qquad (\sigma \geqq 0).$$

Les surfaces irrégulières sont caractérisées par les propriétés suivantes :

1° Le maximum du défaut de la série caractéristique d'un système linéaire quelconque de la surface est $p_g - p_a$;

2° Le défaut de la série (canonique) découpée sur un système par son système adjoint est $p_g - p_a$ (1);

3° Il existe des systèmes algébriques continus non linéaires formés de $\infty^{p_g - p_a}$ systèmes linéaires ; en effet, tout système continu de courbes algébriques de la surface appartient à un système dont la série caractéristique est complète.

Si l'on considère un tel système formé avec une infinité de systèmes linéaires $|C|$, $|C_1|$, $|C_2|$, ..., le système linéaire $|C'| = |C + C_1 - C_2|$ appartient au système continu considéré. Les $\infty^{p_g - p_a}$ systèmes linéaires complets renfermés dans un système continu peuvent être représentés par les points d'une variété

(1) Ce théorème a été démontré par voie transcendante par Picard. Les méthodes géométriques ont seulement montré que le défaut est $\leqq p_g - p_a$.

algébrique à $p_g - p_a$ dimensions qui admet un groupe permutable $\infty^{p_g - p_a}$ de transformations birationnelles en elles-mêmes. C'est la variété de Picard attachée à la surface; elle est indépendante du système considéré et ses coordonnées sont des fonctions $2(p_g - p_a)$ fois périodiques de $p_g - p_a$ variables.

De même que pour les courbes un système de p points est représenté par des fonctions abéliennes de p paramètres, Picard a cherché s'il existe des surfaces telles que des systèmes de n points correspondent à des fonctions abéliennes de $2n$ paramètres. Seules les surfaces hyperelliptiques ($n = 1$) répondent à ce problème.

L'étude des modules des surfaces algébriques est plus complexe que celle des courbes; le nombre de modules est

$$M = 10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \theta$$

où θ est $\geqq 0$. Les surfaces dont tous les genres sont donnés ne forment pas toujours une seule famille. Ainsi les surfaces dont tous les genres sont égaux à 1, forment une infinité discrète de familles de surfaces dont chacune dépend de 19 modules. Par contre à chaque valeur du genre linéaire supérieure à 1 correspond un nombre fini de familles de surfaces.

Les surfaces qui possèdent un système linéaire de courbes rationnelles sont rationnelles. Si elles possèdent un faisceau irrationnel de courbes rationnelles elles équivalent birationnellement à une réglée.

Les surfaces à sections planes elliptiques ou hyperelliptiques sont rationnelles ou réglées. Toute surface qui renferme un système au moins ∞^1 de courbes de genre π, dont le degré $n > 2\pi - 2$ ou la dimension $r > \pi$, peut être transformée en une surface réglée rationnelle ou irrationnelle.

C'est de ce théorème que Castelnuovo a déduit la rationalité des involutions planes (¹) : toute involution plane peut être représentée par une surface, et aux droites des plans correspondent des courbes formant un système satisfaisant à l'inégalité ci-dessus. On en déduit que toute surface admettant une représentation propre admet une représentation impropre.

(¹) *Sulla razionalità delle involuzioni piane* (*Math. Annalen*, t. XLIV).

On peut aussi démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit rationnelle est que le genre arithmétique et le bigenre soient nuls

$$p_a = P_2 = 0.$$

Pour qu'une surface puisse être transformée birationnellement en une réglée la condition s'écrit

$$P_4 = P_6 = 0$$

(en réalité toute surface pour laquelle $p_a < -1$ équivaut à une réglée, mais pour $p_a = -1$ il existe des surfaces non réglées pour lesquelles $p_g = 0$).

On a étudié des familles importantes de surfaces particulières. Les plans doubles de Clebsch-Nœther d'équation $z^2 = f(x, y)$ généralisent les courbes hyperelliptiques. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan double soit rationnel est que sa courbe de diramation soit birationnellement équivalente à une courbe d'ordre m ayant un point multiple d'ordre $m - 2$, une courbe du 4^e^ ordre, ou une courbe du 6^e^ ordre douée de deux points triples infiniment voisins.

Les surfaces hyperelliptiques sont les surfaces représentables par des fonctions quadruplement périodiques de deux variables. Si à tout point de la surface correspondent r systèmes de valeurs incongrues, la surface est dite de rang r. Les périodes des fonctions abéliennes considérées peuvent être ramenées à la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & f & g \\ 0 & \frac{1}{\delta} & g & h \end{vmatrix}$$

où δ est un entier appelé le diviseur de la surface.

Les surfaces hyperelliptiques de rang 1 et de diviseur 1 sont équivalentes à la variété de Jacobi d'une courbe de genre 2; les surfaces de rang 2 et de diviseur δ représentent une involution d'ordre $r\delta$ sur la variété de Jacobi; la surface de Kummer est une surface hyperelliptique de rang 2 et de diviseur 1.

Picard et Painlevé ont étudié les surfaces non rationnelles qui admettent un groupe continu fini de transformations birationnelles en elles-mêmes; elles sont caractérisées par $p_a < 0$: ce sont, outre les réglées, les surfaces hyperelliptiques de rang 1 (surfaces de Picard) et les surfaces elliptiques (surfaces possédant une famille de courbes elliptiques de même module).

Humbert et Painlevé ont indiqué des surfaces admettant une infinité discontinue de transformations birationnelles. Enriques a montré que ces surfaces ont le genre linéaire $p^{(1)} = 1$, et, exception faite des surfaces dont tous les genres sont égaux à 1, possèdent un faisceau de courbes elliptiques de genre $p_g - p_a$. Godeaux a montré (1) que si une surface non réglée possède une transformation birationnelle laissant invariant un faisceau de courbes, ces courbes sont elliptiques ou la transformation appartient à un groupe continu.

Les autres types de surfaces remarquables sont les surfaces de genre 1, déjà signalées, et les surfaces de genre linéaire $p^{(1)} = 1$ qui forment une famille dépendant de deux paramètres entiers de systèmes continus.

Severi a introduit les groupes de points situés sur les surfaces algébriques, mais la théorie semble plus complexe que celle des familles de courbes.

L'école française de géométrie algébrique (2) (Humbert, Painlevé, Poincaré, Picard, Garnier) a surtout porté son effort sur l'étude des intégrales attachées à la surface : intégrales doubles, intégrales simples de différentielles totales. On peut les diviser en trois espèces comme les intégrales abéliennes attachées aux courbes : p_g est le nombre d'intégrales doubles de première espèce; $p_g - p_a$ est le nombre d'intégales simples de première espèce; les intégrales doubles de seconde espèce sont au nombre de $2(p_g - p_a)$, ce nombre est aussi le nombre des périodes des intégrales simples considérées et le nombre des cycles linéaires distincts de la variété de Riemann à quatre dimensions attachée à la surface. L'invariant relatif ρ est lié à la théorie des intégrales simples de 3e espèce : il n'existe pas d'intégrale de différentielle totale ayant seulement pour courbes logarithmiques $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$, mais il en existe qui n'admette que $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ et une courbe arbitraire.

---

(1) *Rend. di Lincei*, XXI, 5e série, 1912.

(2) *Voir* notamment : *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, par Picard et Simart.

Des intégrales doubles de seconde espèce sont dites indépendantes s'il n'en existe aucune combinaison linéaire de la forme

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

où U et V sont des fonctions rationnelles de x, y, z. Picard a ainsi introduit un nouvel invariant absolu ρ_0, nombre des intégrales doubles linéairement indépendantes. Ce nombre est lié à ρ et à l'invariant de Zeuthen-Segre par la relation

$$\rho_0 = 1 + 4(p_g - p_a) - \rho + 2.$$

Le nombre ρ_0 ne dépend pas seulement des singularités de la surface, il est lié à la nature arithmétique des coefficients; ainsi pour la surface $z^2 = f(x)f(y)$, où $f(x)$ est un polynome du 3^e^ degré, le nombre ρ_0 est égal à 3, il s'abaisse à 2 si les fonctions elliptiques correspondant à $f(x)$ admettent une multiplication complexe.

L'uniformisation des surfaces est un problème non résolu dans le cas général. Picard a considéré des surfaces particulières représentables par des fonctions hyperfuchsiennes ou hyperabéliennes, mais on n'a formé jusqu'ici aucun exemple effectif de surfaces hyperfuchsiennes.

3. **Géométrie algébrique sur les hypersurfaces** [1]. — On peut définir sur une variété algébrique à trois dimensions un genre géométrique P_g, un genre arithmétique P_a, des multigenres P_2, P_3, ..., mais ici l'irrégularité tridimensionnelle $P_g - P_a$ peut être négative. On peut de même définir un système canonique formé de surfaces de genres $P_g^{(1)}$ et $P_a^{(1)}$; le degré du système canonique et le genre des courbes intersections fournissent d'autres invariants de la surface. La différence $P_g^{(1)} - P_a^{(1)}$ est appelée irrégularité superficielle de la surface, c'est l'irrégularité d'une section hyperplane générale de la variété, c'est aussi le nombre d'intégrales simples de première espèce attachées à la surface (ce théorème peut être généralisé aux variétés à un

[1] GODEAUX, *Questions non résolues de géométrie algébrique* (*Actualités scientifiques et industrielles*).

nombre quelconque de dimensions). P_g est le nombre d'intégrales triples de première espèce linéairement indépendantes. On croit que le nombre d'intégrales doubles de première espèce est la somme des deux irrégularités, mais le problème n'est pas résolu.

Fano a donné des exemples de variétés dont tous les invariants connus sont nuls et qui néanmoins ne sont pas rationnelles (variété du quatrième degré générale, intersection des variétés de degré 2 et 3 de l'espace à cinq dimensions). Il y a donc lieu de chercher d'autres invariants sur les variétés à trois dimensions.

De plus la variété du 6ᵉ degré citée est représentable par une involution de l'espace ordinaire.

Le théorème de Lüroth-Castelnuovo n'est donc plus vrai pour les variétés à trois dimensions. Toute variété à trois dimensions représentant une involution a son genre géométrique et ses multigenres nuls, de même que son irrégularité superficielle, mais on peut seulement montrer que son genre arithmétique est négatif ou nul.

Fano a montré que les variétés à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont rationnelles, sont elles-mêmes rationnelles, sauf peut-être la variété cubique. Nœther a posé il y a plus de cinquante ans la question de savoir si la variété cubique à trois dimensions est unicursale. Cette variété sur laquelle Fano a résolu toutes les questions de nature énumérative est représentable par une involution d'ordre 2 étudiée successivement par Nœther, Enriques, Snyder, Marlettu et Gauthier.

On voit que le passage des courbes aux surfaces, puis des surfaces aux hypersurfaces, provoque non seulement une augmentation du nombre de variables en jeu, mais aussi des difficultés d'essence différente.

Je termine en émettant l'espoir que dans la patrie de Pascal, de Poncelet et de Chasles, les géomètres fidèles au clair génie français sauront créer les méthodes nécessaires à la résolution des problèmes laissés en suspens.

(Manuscrit reçu le 10 juillet 1943.)