

# BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDRÉ CHARRUEAU

## Sur la courbure et la torsion géodésique

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 71 (1943), p. 20-26

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1943\\_\\_71\\_\\_20\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1943__71__20_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1943, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA COURBURE ET LA TORSION GÉODÉSIQUE;

PAR M. ANDRÉ CHARRUEAU.

1. Soient  $C_1$  une courbe quelconque tracée sur une surface  $S$ ;  $\frac{1}{R_1}$  et  $\frac{1}{T_1}$ , la courbure normale et la torsion géodésique de  $C_1$  en l'un de ses points  $P$ ;  $\frac{1}{\mathcal{R}_1}$ , celle des courbures principales,  $\frac{1}{\mathcal{R}_1}$  et  $\frac{1}{\mathcal{R}_2}$ , dont la valeur algébrique est la plus grande. Désignons par  $\varphi_1$  l'angle positif, compris entre zéro et  $\pi$ , que fait la droite tangente à  $C_1$  en  $P$  avec la direction principale  $\Delta_1$  correspondant à  $\frac{1}{\mathcal{R}_1}$ ; le sens dans lequel  $\varphi_1$  est compté positivement est le sens direct (de gauche à droite) par rapport à la demi-normale positive de  $S$ .

Traçons dans le plan tangent à  $S$  en  $P$  deux axes rectangulaires  $A\xi$  et  $A\eta$ , de sens direct par rapport à la demi-normale positive de  $S$  et dont le premier est parallèle à  $\Delta_1$  (*fig. 1*).

Soient  $A_1$  et  $A_2$  les deux points de  $A\xi$  dont les abscisses ont des valeurs algébriques égales à celles de  $\frac{1}{\mathcal{R}_1}$  et de  $\frac{1}{\mathcal{R}_2}$ , et traçons la circonférence de centre  $C$  dont  $A_2A_1$  est un diamètre.

Menons par le point  $A_2$  une parallèle  $A_2\tau_1$  à la tangente à la courbe  $C_1$  en  $P$ . Cette parallèle coupe la circonférence  $C$  au point  $\tau_1$ . On a  $\widehat{A_1A_2\tau_1} = \varphi_1$ , et l'on voit que les coordonnées de  $\tau_1$  sont égales à  $\frac{1}{R_1}$  et à  $-\frac{1}{T_1}$ . Le lieu du point  $\left(\frac{1}{R_1}, -\frac{1}{T_1}\right)$  lorsque  $\varphi_1$  varie est donc la *circonférence*  $C$ .

Traçons maintenant la droite  $A\tau_1$ , qui coupe la circonférence  $C$  en  $B$  et, par ce dernier point, menons une parallèle à  $A\xi$ , qui coupe la circonférence  $C$  en  $\tau'_1$ , et une parallèle à  $A\eta$ , qui coupe ladite circonférence en  $\tau''_1$ . Les points  $\tau'_1$  et  $\tau''_1$  sont diamétralement opposés.

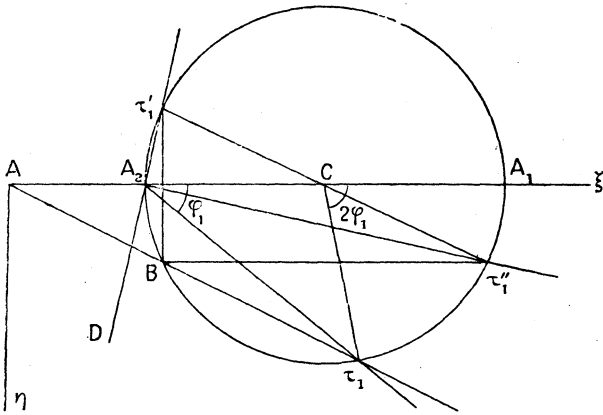
On démontre que les coordonnées du point  $\tau'_1$  sont égales l'une à la courbure normale et l'autre à la torsion géodésique changée de signe, relatives à la direction conjuguée de la tangente à la courbe  $C_1$  par rapport à l'indicatrice de la surface. Donc la droite  $A_2\tau'_1$  est parallèle à la direction conjuguée de la tangente à  $C_1$ .

On vérifie qu'on a

$$(1) \quad \widehat{\text{tang} \xi A_2 \tau'_1} \cdot \widehat{\text{tang} \xi A_2 D} = - \frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1},$$

conformément à une relation classique.

Fig. 1.



On voit aussi que la droite  $A_2\tau''_1$ , qui est perpendiculaire à  $A_2\tau'_1$ , est parallèle à la droite tangente à l'image sphérique de la courbe  $C_1$  au point correspondant à P.

La représentation précédente ressemble à celle de Mohr du vecteur contrainte, relative à l'équilibre plan des milieux continus.

On peut faire des applications intéressantes de cette représentation de la courbure normale et de la torsion géodésique.

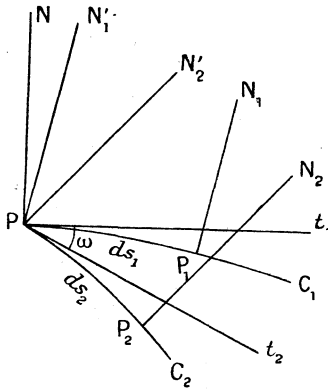
2. Soient  $u, v$  des coordonnées curvilignes quelconques; E, F, G, D, D', D'' les coefficients des deux formes fondamentales de S; H la quantité positive  $\sqrt{EG - F^2}$ .

Appelons respectivement courbes  $C_1$  et  $C_2$  les lignes  $v = \text{const.}$  et les lignes  $u = \text{const.}$  de S et prenons pour demi-normale posi-

tive en un point quelconque  $P(x, y, z)$  de  $S$ , celle dont les cosinus directeurs sont égaux à  $\frac{1}{H} \frac{D(y, z)}{D(u, v)}$ ,  $\frac{1}{H} \frac{D(z, x)}{D(u, v)}$ ,  $\frac{1}{H} \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ .

Soient (*fig. 2*)  $Pt_1$  la demi-tangente à une courbe  $C_1$  en  $P$  dirigée dans le sens de  $u$  croissant;  $Pt_2$  la demi-tangente à une courbe  $C_2$  en  $P$  dirigée dans le sens de  $v$  croissant;  $PN$ ,  $P_1N_1$  et  $P_2N_2$  les demi-normales positives à  $S$  en  $P$ ,  $P_1$  et  $P_2$ ;  $PN'_1$  et  $PN'_2$  les demi-droites issues de  $P$ , parallèles à  $P_1N_1$  et à  $P_2N_2$  et de

Fig. 2.



même sens;  $ds_1$  et  $ds_2$  les longueurs des arcs  $PP_1$  et  $PP_2$  positifs et infiniment petits;  $\frac{1}{R_1}$ ,  $\frac{1}{R_2}$  et  $\frac{1}{T_1}$ ,  $\frac{1}{T_2}$  les courbures normales et les torsions géodésiques en  $P$  de la courbe  $C_1$  et de la courbe  $C_2$  qui passent en ce point.

Désignons par  $\omega$  le plus petit angle positif  $(Pt_1, Pt_2)$ , le sens positif adopté pour compter  $\omega$  étant le sens direct par rapport à  $PN$ . On a  $\omega < \pi$ .

On sait que

$$(2) \quad \frac{1}{R_1} = -\frac{\cos(Pt_1, PN'_1)}{ds_1} = \frac{D}{HE}, \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{\cos(Pt_2, PN'_2)}{ds_2} = \frac{D'}{HG}.$$

Considérons deux *éléments analogues* aux précédents, mais dépendant à la fois des courbes  $C_1$  et  $C_2$  :

$$(3) \quad \frac{1}{R_{1,2}} = -\frac{\cos(Pt_2, PN'_1)}{ds_1}, \quad \frac{1}{R_{2,1}} = -\frac{\cos(Pt_1, PN'_2)}{ds_2}.$$

On démontre que les quantités  $\frac{I}{R_{1,2}}$  et  $\frac{I}{R_{2,1}}$ , définies par (3), sont égales et telles que

$$(4) \quad \frac{I}{R_{1,2}} = \frac{I}{R_{2,1}} = \frac{D'}{H\sqrt{EG}}.$$

Bien entendu, cette valeur n'est égale ni à la courbure de la projection de  $C_1$  sur le plan  $NPt_2$ , ni à la courbure de la projection de  $C_2$  sur le plan  $NPt_1$ .

Appelons  $Pm_{1,2}$  la projection de la demi-droite  $PN'_1$  sur le plan  $NPt_2$ , et  $Pm_{2,1}$  la projection de la demi-droite  $PN'_2$  sur le plan  $NPt_1$ .

Posons

$$(5) \quad (Pm_{1,2}, PN'_1) = \varepsilon_{1,2}, \quad (Pm_{2,1}, PN'_2) = \varepsilon_{2,1},$$

ces angles étant comptés positivement, le premier dans le sens direct par rapport à  $Pt_2$ , et le second dans le sens direct par rapport à  $Pt_1$ .

Considérons les deux éléments suivants dépendant à la fois des courbes  $C_1$  et  $C_2$  :

$$(6) \quad \frac{I}{T_{1,2}} = \frac{\varepsilon_{1,2}}{ds_1}, \quad \frac{I}{T_{2,1}} = \frac{\varepsilon_{2,1}}{ds_2}.$$

On démontre que les quantités  $\frac{I}{T_{1,2}}$  et  $\frac{I}{T_{2,1}}$ , définies par (6), sont telles que

$$(7) \quad \frac{I}{T_{1,2}} = \frac{D'F - DG}{H^2\sqrt{EG}}, \quad \frac{I}{T_{2,1}} = \frac{D'E - D'F}{H^2\sqrt{EG}}.$$

On démontre aussi que

$$(8) \quad \frac{I}{R_{1,2}} = \frac{I}{R_{2,1}} = \frac{\cos \omega}{R_1} + \frac{\sin \omega}{T_1} = \frac{\cos \omega}{R_2} - \frac{\sin \omega}{T_2},$$

$$(9) \quad \frac{I}{T_{1,2}} = -\frac{\sin \omega}{R_1} + \frac{\cos \omega}{T_1}, \quad \frac{I}{T_{2,1}} = \frac{\sin \omega}{R_2} + \frac{\cos \omega}{T_2}.$$

En outre, on a, notamment,

$$(10) \quad -\frac{I}{R_{1,2}T_1} + \frac{I}{R_1T_{2,1}} = \frac{I}{R_{1,2}T_2} - \frac{I}{R_2T_{1,2}} = \frac{\sin \omega}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2},$$

$$(11) \quad \frac{I}{R_1R_2} - \frac{I}{R_{1,2}^2} = \frac{I}{T_1T_2} - \frac{I}{T_{1,2}T_{2,1}} = \frac{\sin^2 \omega}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2}.$$

Nous allons indiquer ce que représentent, au point de vue cinématique, les quantités  $\frac{I}{R_{1,2}}$ ,  $\frac{I}{T_{1,2}}$  et  $\frac{I}{T_{2,1}}$ .

3. Soient  $\mathcal{T}_1$  un trièdre trirectangle mobile de sens direct qui, lorsque son sommet est en P, a pour premier axe la demi-tangente  $Pt_1$  à  $C_1$  et pour troisième axe la demi-normale positive PN à la surface S, et  $\mathcal{T}_2$  un autre trièdre trirectangle mobile de sens direct qui, lorsque son sommet est en P, a pour premier axe la demi-tangente  $Pt_2$  à  $C_2$  et pour troisième axe la demi-normale positive PN à la surface S.

Considérons les deux mouvements suivants de  $\mathcal{T}_1$ , son troisième axe étant toujours la demi-normale positive à S :

1° mouvement  $\mathcal{M}_1$  : le sommet de  $\mathcal{T}_1$  se déplace sur  $C_1$  et le premier axe de  $\mathcal{T}_1$  est toujours la demi-tangente positive à  $C_1$  ;

2° mouvement  $\mathcal{M}_{2,1}$  : le sommet de  $\mathcal{T}_1$  se déplace, non plus sur  $C_1$ , mais sur  $C_2$ , et le premier axe de  $\mathcal{T}_1$  est la demi-tangente positive, en chaque point, à la courbe  $C_1$  qui y passe.

Considérons, de même, les deux mouvements suivants de  $\mathcal{T}_2$ , son troisième axe étant toujours la demi-normale positive à S :

1° mouvement  $\mathcal{M}_2$  : le sommet de  $\mathcal{T}_2$  se déplace sur  $C_2$  et le premier axe de  $\mathcal{T}_2$  est toujours la demi-tangente positive à  $C_2$  ;

2° mouvement  $\mathcal{M}_{1,2}$  : le sommet de  $\mathcal{T}_2$  se déplace, non plus sur  $C_2$ , mais sur  $C_1$  et le premier axe de  $\mathcal{T}_2$  est la demi-tangente positive, en chaque point, à la courbe  $C_2$  qui y passe.

Faisons jouer le rôle du temps à l'élément d'arc de  $C_1$  ou de  $C_2$  parcouru par le sommet du trièdre.

Les projections du vecteur rotation du trièdre mobile sur les deux premiers axes de ce trièdre sont données, pour chacun des quatre mouvements considérés et pour le point P, dans le tableau suivant :

Trièdre mobile.	Mouvement.	Désignation adoptée pour le vecteur rotation.	Projections sur le	
			1 <sup>er</sup> axe du trièdre mobile.	2 <sup>e</sup> axe du trièdre mobile.
$\mathcal{T}_1$ .....	$\mathcal{M}_1$	$\vec{V}_1$	$\frac{1}{T_1}$	$-\frac{1}{R_1}$
$\mathcal{T}_2$ .....	$\mathcal{M}_{1,2}$	$\vec{V}_{1,2}$	$\frac{1}{T_{1,2}}$	$-\frac{1}{R_{1,2}}$
$\mathcal{T}_1$ .....	$\mathcal{M}_{2,1}$	$\vec{V}_{2,1}$	$\frac{1}{T_{2,1}}$	$-\frac{1}{R_{2,1}}$
$\mathcal{T}_2$ .....	$\mathcal{M}_2$	$\vec{V}_2$	$\frac{1}{T_2}$	$-\frac{1}{R_2}$

}  $R_{1,2} = R_{2,1}$

Les indications du tableau relatives à  $\mathcal{M}_1$  et à  $\mathcal{M}_2$  sont classiques.

Celles qui concernent  $\mathcal{M}_{1,2}$  et  $\mathcal{M}_{2,1}$  se justifient aisément de diverses façons.

Une première méthode consiste à remarquer que, dans les mouvements  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_{1,2}$ , les trièdes mobiles ont toujours leur troisième axe commun et que, par suite, le vecteur  $\vec{V}_{1,2} - \vec{V}_1$  est parallèle à ce troisième axe. Il en est de même de  $\vec{V}_{2,1} - \vec{V}_2$ . Donc, d'après (8) et (9), on a bien les résultats indiqués.

Une deuxième méthode consiste à utiliser les relations servant à déterminer, pour une surface donnée, les translations et rotations qui figurent dans les formules de Darboux (1) correspondant à celles de Codazzi.

L'élément d'arc  $\sqrt{E} du$  de  $C_1$  jouant le rôle de l'accroissement du temps dans le mouvement  $\mathcal{M}_{1,2}$ , les projections de  $\vec{V}_{1,2}$  sur les deux premiers axes du trièdre mobile sont respectivement égales

$$\text{à } \frac{D'F - DG}{H^2\sqrt{EG}} \text{ et à } -\frac{D'}{H\sqrt{EG}}, \text{ donc à } \frac{I}{T_{1,2}} \text{ et à } -\frac{I}{R_{1,2}} = -\frac{I}{R_{2,1}}.$$

De même, l'élément d'arc  $\sqrt{G} dv$  de  $C_2$  jouant le rôle de l'accroissement du temps dans le mouvement  $\mathcal{M}_{2,1}$ , les projections de  $\vec{V}_{2,1}$  sur les deux premiers axes du trièdre mobile sont respectivement égales à  $\frac{D'E - D'F}{H^2\sqrt{EG}}$  et à  $-\frac{D'}{H\sqrt{EG}}$ , donc à  $\frac{I}{T_{2,1}}$  et

$$\text{à } -\frac{I}{R_{2,1}} = -\frac{I}{R_{1,2}}.$$

On peut encore dire, en vertu de (8) et de (9) :

1° que la projection de  $\vec{V}_1$  sur le premier axe de  $\mathcal{C}_2$  est égale à  $\frac{I}{T_{1,2}}$  et que la projection de  $\vec{V}_2$  sur le premier axe de  $\mathcal{C}_1$  est égale à  $\frac{I}{T_{2,1}}$ ;

2° que la projection de  $\vec{V}_1$  sur le deuxième axe de  $\mathcal{C}_2$  et celle de  $\vec{V}_2$  sur le deuxième axe de  $\mathcal{C}_1$  sont égales et que leur valeur commune est  $-\frac{I}{R_{1,2}} = -\frac{I}{R_{2,1}}$ .

---

(1) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, 1315, p. 391.

On établit également la seconde propriété en utilisant la première des formules de Codazzi relatives au cas des coordonnées curvilignes obliques ou la dernière des formules correspondantes de Darboux <sup>(1)</sup>.

Ces résultats s'appliquent évidemment à deux familles quelconques de courbes de S, dépendant chacune d'un paramètre, puisqu'on peut les prendre pour lignes coordonnées.

Si les courbes coordonnées sont conjuguées, on a

$$(12) \quad D' = 0, \quad \frac{I}{R_{1,2}} = \frac{I}{R_{2,1}} = 0, \quad -\frac{R_1}{T_1} = \frac{R_2}{T_2} = \cotang \omega,$$

$$(13) \quad \frac{T_{2,1}}{T_{1,2}} = \frac{T_2}{T_1} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{DG}{D'E}.$$

Dans ce cas particulier,  $\vec{V}_1$  est situé dans le plan  $NP t_2$  et  $\vec{V}_2$ , dans le plan  $NP t_1$ .

Si les courbes coordonnées sont les lignes de courbure, on a

$$(14) \quad \frac{I}{T_{1,2}} = -\frac{I}{\mathcal{R}_1}, \quad \frac{I}{T_{2,1}} = \frac{I}{\mathcal{R}_2}, \quad \text{avec } \frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1} = \frac{DG}{D'E},$$

$\frac{I}{\mathcal{R}_1}$  et  $\frac{I}{\mathcal{R}_2}$  étant les courbures principales correspondant respectivement aux lignes de courbure  $v = \text{const.}$  et aux lignes de courbure  $u = \text{const.}$

(Manuscrit reçu le 25 mars 1943.)

---

<sup>(1)</sup> DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, 1915, p. 375 (formules de Darboux) et p. 407 (formules de Codazzi).