BULLETIN DE LA S. M. F.

GUSTAVE CHOQUET

Étude des espaces métriques par les propriétés de leurs sous-ensembles finis

Bulletin de la S. M. F., tome 71 (1943), p. 112-192

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1943__71__112_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1943, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉTUDE DES ESPACES MÉTRIQUES PAR LES PROPRIÉTÉS DE LEURS SOUS-ENSEMBLES FINIS;

PAR M. GUSTAVE CHOQUET.

INTRODUCTION.

Lorsqu'on étudie la structure locale d'un ensemble cartésien, quelques renseignements sur ses contingents et paratingents [1] suffisent en général pour obtenir des résultats très complets.

Dans les espaces métriques non cartésiens, on ne dispose plus en général d'un outil aussi simple. Mais, si l'on remarque que l'étude des contingents et paratingents d'un ensemble cartésien revient à celle des configurations infiniment petites formées d'un nombre fini de points de l'ensemble, on voit l'intérêt qu'il y a, en vue de l'étude locale d'un espace métrique, à considérer les groupes de n points de cet espace; on sait tout le profit qu'a tiré par exemple M. Menger de la considération des triangles inscrits dans un espace métrique, pour l'étude de sa courbure [2].

Parmi les groupes de n points d'un espace métrique, les groupes dont toutes les distances mutuelles sont égales : triangle équilatéral, tétraèdre régulier, etc., semblent jouer un rôle très important. L'absence de tels groupes entraîne pour l'espace une structure topologique bien déterminée.

Ce résultat nous conduit à l'étude des espaces dans lesquels, autour de tout point, les groupes de n points satisfont à une condition d' « aplatissement » convenable; nous caractérisons la structure topologique de ces espaces et nous étudions leur mesure. L'étude du cas limite nous conduit à une caractérisation métrique des sous-ensembles des espaces euclidiens.

---

(1) *Voir* BOULIGAND, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris, 1932.

(2) MENGER, *Untersuchungen über allgemeine Metrik* (*Math. Ann.*, t. 100, 1928 et t. 103, 1930). *Voir* aussi ALT, *Dissertation*, Vienne, 1932; PAUC, *Les méthodes directes en géométrie différentielle*, Hermann, 1941.

Nous faisons, en vue des applications, une étude particulièrement poussée des espaces tels que, autour de chaque point, les triangles inscrits infiniment petits aient au moins un angle infiniment petit; même dans le cas où ces espaces sont des arcs simples cartésiens, ils peuvent posséder des propriétés au premier abord paradoxales. Nous en donnons des exemples.

Les résultats s'étendent, presque en totalité, aux espaces uniformes définis par un écart régulier, c'est-à-dire par une métrique ne vérifiant pas en général l'inégalité triangulaire, mais telle cependant que deux points assez voisins d'un troisième soient voisins entre eux ([1]).

Dans une seconde partie ([2]), nous appliquerons les résultats précédents à l'étude des géodésiques des *ds* de Finsler : Lorsqu'un tel *ds* satisfait aux conditions de régularité énoncées par M. Bouligand, sur les géodésiques de ce *ds*, tout arc infiniment petit est équivalent à sa corde ([3]); nous montrerons qu'inversement tout arc qui satisfait à cette condition peut être considéré comme géodésique d'un certain *ds* de Finsler que nous déterminerons.

Un problème plus spécial se pose alors : Que peut-on dire des géodésiques d'une surface de l'espace à trois dimensions à plan tangent continu? Ce sont des géodésiques d'un *ds* de Finsler à trois variables; mais la réciproque est fausse car une géodésique d'un tel *ds* n'a pas forcément en tout point un paratingent plan. Nous devons résoudre d'abord le problème général suivant : A quelles conditions un ensemble fermé est-il situé sur une surface à plan tangent continu? Nous pouvons alors caractériser les géodésiques des surfaces à plan tangent continu; leur classe est très vaste. Elle englobe des arcs simples n'ayant pas de tangente en tous les points d'un résiduel.

Ces exemples paradoxaux montrent à quel point nous devon nous méfier, dès que les données ne sont plus analytiques ou du moins très régulières, de l'intuition acquise au contact de l'analyse classique. Cette intuition se révèle d'ailleurs tout aussi mauvaise

---

([1]) *Voir* Fréchet, *Les espaces abstraits*, p. 219, Paris, 1928.

([2]) A paraître.

([3]) *Voir* Bouligand, *Essai sur l'unité des méthodes directes*, Chap. II (*Mém. S. R. Sc. de Liége*, t. XIX).

lorsque la géodésique envisagée est analytique; nous montrerons en effet que tout arc analytique, ou plus généralement tout arc à tangente continue, peut être considéré comme géodésique d'une surface à plan tangent continu dont on peut se donner à priori la distribution des plans tangents le long de l'arc.

Au cours de ce travail, bien des questions se posent auxquelles nous n'avons donné qu'une réponse partielle :

1° Étudier les groupes de n points des espaces métriques pour $n \geqq 4$, ce que nous n'avons fait que succinctement;

2° Étendre les méthodes directes employées pour l'étude des ds de Finsler, à l'étude de problèmes plus généraux du calcul des variations;

3° Généraliser les résultats relatifs au plongement des ensembles cartésiens dans des variétés à plan tangent continu.

Dans tous ces problèmes, la méthode de travail restera évidemment la même : la méthode directe aidée éventuellement, pour certaines études locales, par une représentation analytique convenable.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

CHAPITRE I. — *Configurations équilatérales dans les espaces à écart régulier* 115

1. Configurations dans un espace quelconque à écart régulier 115
2. Lemme sur les espaces topologiques compacts et connexes 117
3. Triangles inscrits dans les courbes simples fermées 121
4. Triangles inscrits dans les arcs pointés 124
5. Triangles inscrits dans les continus non jordaniens 126
6. Théorème général sur les espaces compacts à écart régulier 127
7. Extension des résultats dans le cas des ensembles plans 130

CHAPITRE II. — *Espaces aplatis. Structures topologiques globales* 133

1. Espaces métriques aplatis d'ordre 1 133
2. Espaces métriques aplatis d'ordre n 135
3. Espaces topologiques séparés connexes à structure locale linéaire ... 141
4. Espaces topologiques séparés non connexes à structure locale lnéaire. 145

CHAPITRE III. — *Espaces métriques plats* 148

1. Notions préliminaires 148
2. Structure topologique des espaces plats 149
3. Structure métrique locale 151
4. Prolongement des ensembles cartésiens plats 153
5. Mesure des espaces plats 156
6. Généralisations 158

Pages.

CHAPITRE IV. — *Espaces métriques semi-plats* 159

1. Notions préliminaires 159
2. Structure topologique des espaces semi-plats 160
3. Représentation schématique plane 161
4. Structure métrique locale des espaces compacts quelconques 163
5. Structure métrique locale des espaces compacts connexes 164
6. Quasi-symétrie des arcs semi-plats 167
7. Prolongement des arcs semi-plats 168
8. Mesure des espaces semi-plats 172

CHAPITRE V. — *Arcs simples cartésiens semi-plats* 173

1. Caractérisation des arcs simples semi-plats 174
2. Quasi-symétrie et prolongement des arcs semi-plats 175
3. Représentation canonique locale des arcs semi-plats 176
4. Mesure des arcs plans semi-plats. Théorème d'existence 178
5. Étude des tangentes aux arcs plans semi-plats 188
6. Exemple singulier d'arc plan rectifiable semi-plat 189

CHAPITRE PREMIER.

CONFIGURATIONS ÉQUILATÉRALES DANS LES ESPACES A ÉCART RÉGULIER.

1. Configurations dans un espace quelconque à écart régulier. — Appelons configuration équilatérale d'un espace métrique tout ensemble fini de points de cet espace dont les distances mutuelles sont égales.

Les théorèmes de ce chapitre montreront l'importance des configurations équilatérales ou presque équilatérales des espaces métriques et d'espaces analogues pour la connaissance de la topologie de ces espaces.

Définition. — On appelle espace à écart régulier [1] un ensemble abstrait tel qu'à tout couple (a, b) de ses points soit attaché un nombre $\delta(a, b)$ appelé écart de ces points et tel que

$$\delta(a, b) = \delta(b, a); \qquad \delta(a, b) > 0 \qquad \text{pour } a \not\equiv b,$$

et

$$\delta(a, b) = 0 \qquad \text{pour } a \equiv b.$$

On suppose de plus qu'à tout nombre $\varepsilon > 0$, on peut attacher un nombre $\eta > 0$ tel que

$$\delta(a, c) < \eta \quad \text{et} \quad \delta(a, b) < \eta \quad \text{entraîne} \quad \delta(b, c) < \varepsilon.$$

---

[1] FRÉCHET, *loc. cit.*

On dit que les points a, b sont voisins d'ordre ε lorsque $\delta(a, b) < \varepsilon$; on peut alors définir dans l'espace une structure uniforme [1].

THÉORÈME I. — *Pour tout espace borné à écart régulier* E, *tel que l'espace complété* [1] $\hat{E}$ *ne soit pas compact, on peut trouver un nombre* $d > 0$ *tel que, pour tout nombre* ε, *il existe une suite infinie de points de* E *dont les distances mutuelles sont comprises entre* $(d - \varepsilon)$ *et* $(d + \varepsilon)$.

Démonstration. — Si $\hat{E}$ n'est pas compact, il existe des suites infinies S de points de E dont aucune sous-suite n'est une suite de Cauchy. Soient $M_0 M_1 \ldots M_k \ldots$ une telle suite S_0 et η un nombre tel que $0 < \eta < 1$.

Comme M_0 n'est pas point d'accumulation de S_0, on peut extraire de S_0 une suite S_1 dont tous les points sont à une distance de M_0 comprise entre $d_0(1 - \eta)$ et $d_0(1 + \eta)$, avec $d_0 > 0$. Soit M_{n_1} le premier point de S_1; on recommence sur M_{n_1} et S_1 comme on a fait sur M_0 et S_0, en remplaçant η par $\frac{\eta}{2}$, d'où de nouveaux éléments d_1, M_{n_2}, S_2; et ainsi de suite en remplaçant successivement $\frac{\eta}{2^i}$ par $\frac{\eta}{2^{i+1}}$. On obtient donc une suite $S_\omega : M_0 M_{n_1} M_{n_2} \ldots M_{n_i} \ldots$ extraite de S_0 et à laquelle est associée la suite $d_0, d_1, \ldots, d_i, \ldots$.

Or on a visiblement

$$d_{i+k}(1 - \eta) \leqq \varphi[d_i(1 + \eta)], \qquad \text{pour } k > 0 \text{ et } i = 1, 2, \ldots,$$

$\varphi(x)$ étant une fonction de x qui tend vers zéro avec x.

Donc 0 ne peut être une valeur d'accumulation de la suite des d_i, sinon S_ω serait une suite de Cauchy. Soit d une valeur d'accumulation de la suite des d_i.

Il est évident qu'on peut tirer de S_ω une suite infinie $M_{\alpha_0}, M_{\alpha_1}, \ldots, M_{\alpha_i}, \ldots$ telle que si δ_i et Δ_i désignent respectivement les bornes inférieure et supérieure des distances mutuelles des points de la suite $M_{\alpha_i} M_{\alpha_{i+1}} \ldots M_{\alpha_{i+k}} \ldots$, δ_i et Δ_i tendent vers d quand $i \to \infty$. Le théorème en résulte aussitôt.

---

[1] Pour toute définition ou propriété relative à la topologie générale *voir* BOURBAKI, *Topologie générale*, chez Hermann, Paris, 1940.

Remarque I. — Pour les espaces E non bornés, le théorème s'applique évidemment à toute partie bornée de E, en particulier à toutes les sphères de E.

Remarque II. — Voici un exemple d'espace métrique complet borné non compact : Ses points sont ceux d'un ensemble abstrait infini quelconque; la distance entre deux quelconques de ses points est un nombre arbitraire compris entre 1 et 2.

2. Lemme sur les espaces topologiques compacts et connexes. — Nous allons démontrer un lemme dont la signification dépasse d'ailleurs l'application que nous en ferons. Voici un aspect intuitif de la question :

Supposons tracé sur une feuille de papier transparent verticale un arc simple; si l'on replie cette feuille sur elle-même en plis verticaux, la courbe C se voit maintenant par transparence; elle est déformée mais c'est encore un continu. Inversement, si l'on dessine sur les parties tangibles de la feuille plissée un arc simple dont les extrémités soient sur les bords verticaux de la feuille, et si le trait d'encre s'imprime sur toutes les épaisseurs de papier superposées, lorsqu'on dépliera la feuille l'ensemble ainsi dessiné ne sera pas forcément un continu, mais il contiendra toujours un continu joignant les deux bords verticaux de la feuille.

Lemme 1. — *Soient* E_x *et* E_y *deux espaces topologiques compacts et connexes sur lesquels sont définies respectivement les fonctions numériques continues* $f(x)$ *et* $g(y)$ *variant chacune entre* 0 *et* 1. *Soient* F, F_0 *et* F_1 *respectivement les ensembles fermés des points* (x, y) *de l'espace* $E_x.E_y$ *en lesquels* $f(x) = g(y)$; $f(x) = g(y) = 0$; $f(x) = g(y) = 1$.

Dans l'espace $E_x.E_y$, *il existe une composante connexe de* F *qui contient les ensembles* F_0 *et* F_1, *qui par hypothèse ne sont pas vides.*

Démonstration. — 1° E_x *et* E_y *sont deux segments de droite.* — On peut figurer l'espace $E_x.E_y$ par le rectangle du plan xOy : $\alpha_1 \leqq x \leqq \alpha_2$; $\beta_1 \leqq y \leqq \beta_2$ dans lequel seront définies les fonctions $f(x)$ et $g(y)$.

Soient $P_0(a_0, b_0)$ un point de F_0 et $P_1(a_1, b_1)$ un point de F_1,

Q_0 et Q_1 étant les points qui forment avec P_0 et P_1 un rectangle ρ parallèle aux axes, avec $Q_0 \equiv (a_1, b_0)$ et $Q_1 \equiv (a_0, b_1)$.

Si F n'est pas continu entre P_0 et P_1, on sait qu'il existe dans xOy une courbe simple fermée γ sans point commun avec F, à laquelle P_0 est intérieur et P_1 extérieur.

L'ensemble des points de xOy intérieurs à la fois à γ et à ρ forme un ou plusieurs domaines disjoints deux à deux; soit D_0 celui qui admet P_0 comme point frontière. La frontière de D_0 est une courbe simple δ, contenant des points de ρ et de γ, et qui au voisinage de P_0 ne contient que des points de ρ; quand on se déplace sur δ en partant de P_0, sur la ligne brisée $P_0Q_0P_1$ par exemple, soit A le dernier point de $P_0Q_0P_1$ que l'on rencontre avant de revenir en P_0 sur $P_0Q_1P_1$; comme A est distinct de P_0 et P_1, A n'appartient pas à $P_0Q_1P_1$.

En continuant à parcourir δ dans le même sens à partir de A, soit B le premier point de $P_0Q_1P_1$ qu'on rencontre.

L'arc $\widehat{AB}$ de γ est situé en entier dans ρ et a ses extrémités A et B sur $P_0Q_0P_1$ et $P_0Q_1P_1$ respectivement. Supposons A sur P_0Q_0 et B sur P_0Q_1; on a $g(A) = 0$, $f(A) > 0$ puisque A n'est pas un point de F, et pour la même raison on a $f(B) = 0$; $g(B) > 0$; donc $f(A) > g(A)$ et $f(B) < g(B)$; il existe donc un point M de l'arc $\widehat{AB}$ en lequel $f(M) = g(M)$, contrairement à l'hypothèse que γ ne contient aucun point de F.

On mettrait en évidence la même contradiction pour les autres positions possibles de A et B sur $P_0Q_0P_1$ et $P_0Q_1P_1$; donc F est continu entre P_0 et P_1; la démonstration montre d'ailleurs de plus un fait que nous utiliserons plus loin, à savoir que la partie de F contenue dans ρ est continue entre P_0 et P_1.

F est continu entre deux points quelconques de F_0 et F_1; donc il existe bien une composante connexe de F qui contient F_0 et F_1.

2° *Cas général.* — Soient x_0, x_ω deux points de E_x tels que $f(x_0) = 0$ et $f(x_\omega) = 1$, et y_0, y_ω deux points de E_y tels que $g(y_0) = 0$ et $g(y_\omega) = 1$.

On sait qu'il existe une structure uniforme et une seule compatible avec la topologie d'un espace compact; on pourra donc toujours supposer que E_x, E_y et $E_x.E_y$ sont des espaces uniformes compacts.

Quels que soient ε et l'entourage V_x de la structure uniforme de E_x, on pourra trouver un entourage W_x plus petit que V_x tel que si deux points M_1 et M_2 de E_x sont voisins d'ordre W_x, on ait $|f(M_1)-f(M_2)|<\varepsilon$; et de même dans E_y.

Comme E_x est connexe, on peut pour tout entourage W_x et pour tout couple x_0, x_ω, de points de E_x, trouver une chaîne finie de points x_i de E_x ($0 \leqq i \leqq p$ et $x_p \equiv x_\omega$) telle que pour tout i vérifiant $0 \leqq i \leqq p-1$, les points x_i et x_{i+1} soient voisins d'ordre W_x; pour E_y on trouve de même une chaîne de points y_j joignant y_0 et y_ω, avec $0 \leqq j \leqq q$ et $y_q = y_\omega$.

On peut faire correspondre aux points x_i des points équidistants consécutifs : $P_0 P_1 \ldots P_\omega$ d'un segment de droite $P_0 P_\omega$; et aux points y_j des points équidistants $Q_0 Q_1 \ldots Q_\omega$ d'un segment $Q_0 Q_\omega$.

On peut définir sur $P_0 P_\omega$ une fonction numérique $F(P)$ continue telle que $F(P_i) = f(x_i)$ pour tout i, cette fonction variant linéairement dans chaque intervalle $P_i P_{i+1}$; de même sur $Q_0 Q_\omega$ peut se définir une fonction $G(Q)$.

Dans le rectangle produit topologique des segments $P_0 P_\omega$, $Q_0 Q_\omega$, il existe, d'après le premier cas traité, un continu joignant les points (P_0, Q_0) et (P_ω, Q_ω), en tout point duquel $F(P) = G(Q)$; il existe donc dans ce rectangle une chaîne finie de points R_k de la forme (P_i, Q_j), avec $R_0 \equiv (P_0, Q_0)$ et $R_\omega \equiv (P_\omega, Q_\omega)$, telle que les abscisses (resp. les ordonnées) de deux points consécutifs R_k, R_{k+1}, soient deux points consécutifs de la suite des P_i (resp. des Q_j), avec

$$|F(R_k) - F(R_{k+1})| = |f(R_k) - f(R_{k+1})| < 2\varepsilon$$

et de même

$$|g(R_k) - g(R_{k+1})| < 2\varepsilon.$$

Autrement dit, si M_0 est un point de F_0 et M_1 un point de F_1, on peut réunir M_0 et M_1 par une chaîne finie de points de $E_x . E_y$ telle que : 1° les valeurs de $f(x)$ [resp. $g(y)$] en deux points consécutifs de la chaîne diffèrent de moins de ε; 2° les valeurs de $f(x)$ et $g(y)$ en un même point de la chaîne diffèrent de moins de 2ε; 3° les abscisses (resp. les ordonnées) de deux points consécutifs soient voisines d'ordre V_x (resp. V_y).

Soit alors $C(M_0, M_1)$ l'ensemble d'accumulation dans $E_x . E_y$ d'une suite de ces chaînes obtenue en laissant V_x et V_y fixes et en

donnant à ε les valeurs $\frac{1}{2^i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. En tout point de $C(M_0, M_1)$ on a, en raison de la continuité de $f(x)$ et $g(y)$: $f(x) = g(y)$. D'autre part, quel que soit l'entourage W_{xy} de la structure uniforme de $E_x . E_y$, les chaînes de la suite finissent, pour i assez grand, par avoir tous leurs points voisins d'ordre W_{xy} d'au moins un point de $C(M_0 M_1)$, donc d'un point de F. Or pour tout $W_{0_{xy}}$ on peut choisir V_x et V_y tels que deux points de $E_x . E_y$ qui ont leurs abscisses (resp. ordonnées) voisines d'ordre V_x (resp. V_y) soient voisins d'ordre $W_{0_{xy}}$.

Finalement, quel que soit $W_{1_{xy}}$, on peut trouver une chaîne finie de points de F, joignant M_0 et M_1 et telle que deux points consécutifs de la chaîne soient voisins d'ordre $W_{1_{xy}}$. Donc F est continu entre M_0 et M_1.

Comme M_0 et M_1 ont été choisis arbitrairement, il existe bien une composante connexe de F qui contient F_0 et F_1; cette composante est compacte.

Remarque. — La démonstration du lemme en suggère une généralisation qui s'énoncerait ainsi :

Soient E_x et E_y deux espaces compacts connexes et $f(x)$, $g(y)$ deux fonctions continues définies sur E_x et E_y respectivement, les images de E_x et E_y par ces fonctions étant un même continu I irréductible entre deux points A, B.

Alors, dans l'espace $E_x . E_y$, *le lieu des points en lesquels* $f(x) \equiv g(y)$ *contient un continu contenant tous les points* (x, y) *en lesquels* $f(x) \equiv g(y) \equiv$ A *ou* B.

En s'inspirant de notre démonstration, on peut effectivement démontrer cette généralisation pour E_x et E_y quelconques, lorsque I est d'un type que nous avons appelé [1] « linéaire », et qui contient tous les continus irréductibles couramment étudiés.

Applications du lemme. — 1° Soit $h(x, y)$ une fonction numérique continue définie sur $E_x . E_y$ ou seulement sur F. Notre

---

[1] *Voir* CHOQUET, *Points invariants et structure des continus*, (*C. R. Acad. Sc.*, p. 376, 10 mars 1941).

lemme montre que $h(x, y)$ prend sur F toute valeur intermédiaire entre son maximum et son minimum sur $(F_0 + F_1)$.

2° Supposons E_x et E_y identiques à un même continu C d'un espace métrique ou à écart régulier, et soit I_0 un point de cet espace non situé sur C.

Si x est un point de C, on posera

$$f(x) = g(x) = \text{écart } \delta(I_0, x);$$

$f(x)$ varie sur C entre deux limites a et b qui jouent le rôle des nombres o et 1 du lemme.

A tout couple (x, y) de points de C tels que $\delta(I_0, x) = \delta(I_0, y)$, attachons la valeur $h(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{\delta(I_0, x)}$. Il résulte de la première application du lemme que $h(x, y)$ peut prendre toute valeur comprise entre o et α, α étant le maximum qu'elle atteint pour $\delta(I_0, x) = \delta(I_0, y) = a$ ou b.

3. Triangles inscrits dans les courbes simples fermées.

Lemme 2. — *Dans tout espace à écart régulier* E, *homéomorphe à une circonférence, on peut inscrire des triangles isocèles d'angle au sommet* 0, *pour tout* $0 \leqq \frac{\pi}{3}$; *pour tout* 0 *donné, les sommets principaux de ces triangles forment un ensemble partout dense sur* E.

Démonstration. — Le problème revient au suivant : C étant une circonférence de longueur 1, à tout couple de points M, N de C, on attache un nombre F(M, N) qui varie continuement avec M et N, et tel que

$$F(M, N) = F(N, M); \qquad F(M, N) > 0, \qquad \text{pour } M \not\equiv N$$

et

$$F(M, N) = 0, \qquad \text{pour } M \equiv N.$$

Il faut montrer l'existence, pour tout nombre positif $\lambda \leqq 1$, de trois points M, N, P de C tels que

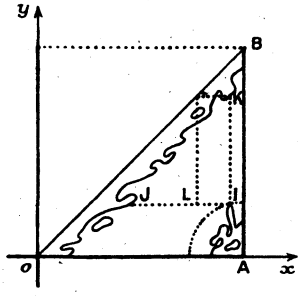
$$\lambda . F(P, M) = \lambda . F(P, N) = F(M, N).$$

Nous dirons que trois tels points forment un triangle isocèle de paramètre λ inscrit dans C.

Soit ω un point quelconque de C; on choisit un sens positif de parcours sur C; les points de C sont alors repérés par leur abscisse curviligne σ ($0 \leqq \sigma \leqq 1$); tout couple de points de C, d'abscisses curvilignes σ_1 et σ_2 peut être figuré, dans un système d'axes rectangulaires Ox, Oy par le point (σ_1, σ_2) du carré : $0 \leqq x \leqq 1$; $0 \leqq y \leqq 1$; comme les points (σ_1, σ_2) et (σ_2, σ_1) représentent le même couple, on peut se borner à considérer les points du carré pour lesquels $y \leqq x$, c'est-à-dire ceux du triangle OAB (cf. *fig.* 1).

Dans cette représentation, tout point $(\sigma, 0)$ de OA doit être considéré comme identique au point $(1, \sigma)$ de AB [ceci entraîne que l'espace des couples (x, y) est identique à un ruban de

Fig. 1.



Möbius dont la frontière est figurée ici par le segment OB et le point A.]

Si M, N, P sont trois points de C, les trois couples MN, MP, NP sont représentés par trois points qui sont sommets d'un rectangle dont le quatrième sommet est sur OB; ces trois sommets du rectangle sont dits *associés*.

Soit $z = \varphi(x, y)$ la fonction définie par $\varphi(x, y) = F(M, N)$, x et y étant les abscisses curvilignes respectives de M et N sur C. La fonction $\varphi(x, y)$ est continue dans le triangle OAB, s'annule en tout point de OB et en A, et en ces points seulement.

Soit $E(h)$ l'ensemble des points du triangle en lesquels

$$\varphi(x, y) = h \qquad (h > 0),$$

et soit $\delta(h)$ le maximum de la distance d'un point de $E(h)$ à l'ensemble $(OB + A)$. Pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{10}$, on peut

évidemment choisir h assez petit pour que $\delta(h) < \varepsilon$, et pour que, sur toute parallèle à Ox ou à Oy distante de A de moins de $\delta(h)$, les valeurs de $\varphi(x, y)$ aux points situés à une distance de $(OB + A)$ supérieure à $\delta(h)$ aient un maximum supérieur à h.

L'ensemble $E(h)$ est la somme de deux ensembles fermés non vides disjoints $E_{OB}(h)$ et $E_A(h)$ qui ont respectivement tous leurs points situés à une distance inférieure à $\delta(h)$, de OB et de A. Soit I l'un des points de $E_A(h)$ dont la distance à A est maximum. Les demi-droites issues de I parallèlement à $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AB}$ respectivement ne rencontrent pas $E_A(h)$ à cause du choix de I; soient J et K respectivement leurs premiers points d'intersection avec $E_{OB}(h)$, à partir de I [l'existence de J et K résulte de la continuité de $\varphi(x, y)$].

En tout point des intervalles IJ, IK, on a $g(x, y) \geqq h$. Soient a, b les coordonnées de I, a, c celles de K et soit L le point (c, b); L est situé sur l'intervalle IJ, car

$$IL < \varepsilon\sqrt{2}; \qquad IJ > 1 - 2\varepsilon\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon < \frac{1}{10}.$$

Soient S la surface représentative, dans l'espace $Oxyz$, des variations de la fonction $z = \varphi(x, y)$; Γ la courbe de S qui a pour projection le segment IK; et ι, $\varkappa$ les extrémités de Γ.

Appliquons à Γ le lemme I en prenant, avec les notations de ce lemme, $E_x \equiv E_y \equiv \Gamma$ et $f(\alpha) = g(\alpha) =$ cote z de α, α étant un point variable de Γ.

Sur Γ le minimum de $f(\alpha)$ est h; soit H le maximum de $f(\alpha)$ et soit μ l'un des points de Γ où ce maximum est atteint.

D'après le lemme I, il existe sur Γ un ensemble continu de couples de points (α, β) de Γ dont les cotes sont égales, et contenant les couples $(\iota, \varkappa)$ et (μ, μ)

Or, à tout couple (α, β) de cote z faisons correspondre le point γ de l'espace, de cote λz, tel que les trois projections de α, β, γ sur xOy soient trois points associés. Lorsque $(\alpha, \beta) \equiv (\mu, \mu)$, le point γ correspondant est situé au-dessus de la surface S; lorsque $(\alpha, \beta) \equiv (\iota, \varkappa)$, le point γ correspondant est situé au-dessous de la surface, car il se projette en L sur xOy, et en ce point $\varphi(x, y) > h \geqq \lambda h$.

Il existe donc un couple (α, β) pour lequel le point γ est sur S;

on a donc trouvé trois points α, β, γ de S dont les projections sur xOy sont figuratives des couples de sommets d'un triangle isocèle de paramètre λ. L'abscisse curviligne du sommet principal de ce triangle est égale à l'abscisse de I; cette abscisse est arbitrairement voisine de $\imath$ puisque ε est arbitrairement petit. Donc sur C le sommet correspondant du triangle est arbitrairement proche de ω, et, comme ω est quelconque sur C, il en résulte que les sommets principaux des triangles isocèles de paramètre λ inscrits dans C sont partout denses sur C.

Remarque. — La restriction apportée au choix de I correspond à une nécessité effective : En effet tout point d'une courbe plane fermée, par exemple, n'est pas toujours sommet d'un triangle équilatéral inscrit dans la courbe; par exemple si cette courbe est convexe, ses points anguleux où l'angle des demi-tangentes est inférieur à $\frac{\pi}{3}$ sont à exclure (¹).

4. Triangles inscrits dans les arcs pointés.

Définition. — On appelle *arc pointé* tout espace topologique séparé composé d'un arc simple fermé et d'une suite de points tendant vers un point intérieur de l'arc; ce point limite s'appelle *centre* de l'arc pointé.

Lemme 3. — *Dans tout espace* E *à écart régulier, qui est un arc pointé, on peut inscrire des triangles isocèles d'angle au sommet* θ, *pour tout* $\theta \leqq \frac{\pi}{3}$; *pour tout* θ *donné, les sommets principaux de ces triangles forment un ensemble dense au voisinage du centre de l'arc pointé, sauf peut-être pour une valeur de* θ *pour laquelle il y a néanmoins* $2^{\aleph_0}$ *triangles répondant à la question.*

Soient $\widehat{AB}$ ou Γ l'arc simple fermé de E, I son centre, et $M_1M_2\ldots M_i\ldots$ la suite des points de $(E-\Gamma)$ qui tendent vers I. Supposons $IA \leqq IB$ et désignons par A′ et B′ les premiers

(¹) Il y a d'ailleurs deux tels points exceptionnels au plus; ceci semble pouvoir se généraliser à toute courbe simple fermée, plane ou non; on a un énoncé analogue pour les triangles isocèles.

points, à partir de I, des arcs $\widehat{IA}$ et $\widehat{IB}$ respectivement, tels que

$$IA' = IB' = d, \qquad \text{avec } d \leqq IA.$$

Désignons, comme pour le lemme 2, par λ le paramètre des triangles isocèles d'angle au sommet $0 \leqq \frac{\pi}{3}$. Trois cas sont à distinguer :

1° $A'B' > \lambda d$. Pour un point M_i quelconque tel que $M_iI < M_iA'$ et M_iB', désignons par A''_i et B''_i les premiers points des arcs $\widehat{IA'}$ et $\widehat{IB'}$ rencontrés à partir de I, et tels que

$$M_iA''_i = M_iB''_i = \text{min. } [M_iA' \text{ et } M_iB'].$$

Lorsque $i \to \infty$, A''_i et B''_i tendent vers A' et B' respectivement sinon il existerait sur A' et B' un point intérieur P tel que $IP = IA' = IB'$, ce qui est impossible.

Donc, en prenant i assez grand, on a

$$A''_iB''_i > \lambda . M_iA''_i = \lambda . M_iB''_i;$$

on est dès lors dans le cas de la deuxième application du lemme 1, en prenant $C \equiv \widehat{A''_iB''_i}$ et $I_0 \equiv M_i$. On peut donc trouver un triangle isocèle inscrit dans $(M_i + \widehat{A'B'})$, de sommet principal M_i et d'angle au sommet 0.

2° $A'B' = \lambda d$. Le triangle isocèle $A'IB'$, de paramètre λ répond à la question. Si l'on a cette égalité pour toute valeur de d, il existe donc $2^{\aleph_0}$ triangles isocèles inscrits de paramètre λ et de sommet I.

3° $A'B' < \lambda d$. On va se ramener au cas du lemme 2 en prolongeant l'arc $\widehat{A'B'}$ en une courbe simple fermée.

Soit E' l'espace à écart régulier défini par

$$E' = \widehat{A'IB'} + \widehat{A'CB'},$$

l'arc $\widehat{A'CB'}$ étant isométrique à un arc de cercle cartésien, de rayon égal à IB', de corde égale à A'B', et inférieur à un demi-cercle.

Si M et N sont des points respectifs de $\widehat{A'IB'}$ et $\widehat{A'CB'}$, on posera

$$MN = \frac{MA'.\widehat{NB'} + MB'.\widehat{NA'}}{\widehat{NB'} + \widehat{NA'}},$$

$\widehat{NA'}$ et $\widehat{NB'}$ désignant les longueurs des arcs de cercle de même nom.

On vérifie aisément que l'on définit bien ainsi un espace E' à écart régulier. D'après le lemme 2, on peut inscrire dans E' des triangles isocèles MNP de paramètre λ, et dont le sommet principal P peut être choisi arbitrairement dans un ensemble partout dense sur E'. Lorsque P tend vers I, soient m et n deux positions limites correspondantes de M et N; si m, par exemple, était sur $\widehat{A'CB'}$, n y serait aussi puisque $Im = In$; or ceci est impossible puisqu'alors on aurait $mn < \lambda . Im$. Donc dès que P est assez voisin de I, le triangle correspondant MNP a tous ses sommets sur $\widehat{A'IB'}$, ce qui démontre le lemme.

5. Triangles inscrits dans les continus non jordaniens.

Lemme 4. — *Dans tout espace* E *connexe, compact, à écart régulier, qui n'est pas localement connexe, on peut inscrire une infinité de triangles isocèles d'angle au sommet* θ, *pour tout* $\theta \leqq \frac{\pi}{3}$.

Si E contient un arc pointé, ce qui est souvent le cas pour les continus usuels, on est ramené au cas du lemme précédent; sinon on recherche dans E un sous-ensemble analogue à un arc pointé : comme E n'est pas localement connexe, il existe toujours un point M_{α_0} de E en lequel E n'est pas localement connexe. Il existe donc un nombre $d > 0$ et une suite de points $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$ tendant vers M_{α_0} et telle que tout sous-continu de E joignant M_{α_0} et M_i ($i = 1, 2, \ldots$) ait un diamètre $> d$. On peut alors extraire de cette suite une sous-suite $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}, \ldots$ telle que tout sous-continu de E joignant deux points de l'ensemble $\sum_0^\infty M_{\alpha_i}$ ait un diamètre $> \delta$ ($\delta > 0$).

Soit Σ (resp. S) l'ensemble des points de E situés à une distance de $M_{\alpha_0} \leqq \frac{\delta}{2}$ $\left(\text{resp.} = \frac{\delta}{2}\right)$.

Dans Σ les composantes connexes de deux points M_{α_i}, M_{α_j} distincts sont disjointes. Chacune de ces composantes a des points sur S. Soit γ l'ensemble d'accumulation des composantes connexes des points M_{α_i} dans Σ (pour $i = 1, 2, \ldots$); γ est un continu. Soit P un point de γ. S et C un sous continu de γ irréductible entre M_{α_0} et P.

Si I est un point quelconque de C, distinct de M_{α_0} et P, il existe toujours une suite de points de $(\Sigma - C)$ tendant vers I; soit $N_1, N_2, \ldots, N_i \ldots$, une telle suite. L'ensemble compact $\left(C + \sum_i N_i\right)$ va jouer le rôle d'arc pointé, avec I pour centre, M_{α_0} et P pour extrémités. On achèvera la démonstration comme dans le lemme 3, en utilisant ici des ε-chaînes et en remarquant qu'une suite de triangles inscrits dans E et de paramètre λ admet au moins un triangle d'accumulation de paramètre λ, lorsque les diamètres de ces triangles sont bornés inférieurement.

6. **Théorème général sur les espaces compacts à écart régulier.** — 1° Soit E un espace à écart régulier, compact et connexe. Distinguons deux cas :

a. Tous les points de E sont de premier genre. E est donc un continu jordanien (1). E contient alors une courbe simple fermée, sinon E est un arc simple ou bien une dendrite qui contient un arc pointé (2). Donc, d'après les lemmes 2 et 3, lorsque E n'est pas un arc simple, il contient toujours des triangles isocèles inscrits de paramètre λ, pour tout $\lambda \leqq 1$.

b. E contient au moins un point de deuxième genre, le lemme 4 lui est alors applicable.

En résumé, lorsque E n'est pas un arc, on peut y inscrire des triangles isocèles de paramètre λ, pour tout $\lambda \leqq 1$.

---

(1) Kuratowski, *Contribution à l'étude des continus de Jordan* (*Fund Math.*, t. 5, p. 112-122).

(2) Ceci résulte d'un résultat de R. L. Wilder, *Concerning continuous curves* (*Fund. Math.*, t. 7, p. 365).

2° Soit E un espace à écart régulier, compact mais non connexe.

Si toutes les composantes connexes de E sont réduites à un arc simple ou à un point, et si E ne contient aucun arc pointé, il résulte d'un théorème de M. L.-W. Cohen (¹) que E est homéomorphe à un ensemble linéaire fermé borné.

Sinon, il résulte du 1° ci-dessus et du lemme 3 qu'on peut inscrire dans E des triangles isocèles de paramètre λ, pour tout $\lambda \leqq 1$.

On peut donc énoncer le théorème général suivant :

THÉORÈME II. — *Dans tout espace compact à écart régulier, on peut inscrire une infinité de triangles isocèles d'angle au sommet* 0, *pour tout* $0 \leqq \frac{\pi}{3}$, *sauf peut-être si* E *est homéomorphe à un ensemble linéaire fermé borné.*

Du rapprochement des théorèmes I et II résulte aussitôt le corollaire :

COROLLAIRE. — *Dans tout espace à écart régulier borné* E, *on peut inscrire des triangles dont les trois angles sont arbitrairement voisins de* $\frac{\pi}{3}$, *sauf peut-être si l'espace complété* $\hat{E}$ *est homéomorphe à un ensemble linéaire fermé borné.*

Remarque I. — Il est curieux, à première vue, que le théorème II ne s'applique qu'aux triangles isocèles d'angle au sommet au plus égal à $\frac{\pi}{3}$. Voici pourquoi :

Soit E un espace quelconque à écart régulier; comme il est toujours métrisable, soit E′ un espace métrique de même structure uniforme que E, et soit E″ l'espace métrique suivant : Il se déduit de E′ en posant, pour deux points quelconques A et B de E′,

$$\text{dist.}_{E''}(A, B) = [\text{dist.}_{E'}(A, B)]^{\frac{1}{k}} \qquad \text{avec } k \geqq 2.$$

(¹) COHEN, *A charakterization....* (*Fund. Math.*, t. 14, p. 281-303). L'énoncé de M. Cohen s'applique aux espaces métrisables séparables et suppose que E satisfait à deux conditions en plus de celles que nous avons indiquées. Mais la compacité de E entraîne que ces deux conditions sont satisfaites.

Il résulte de l'inégalité

$$(b+c)^{\frac{1}{k}} < b^{\frac{1}{k}} + c^{\frac{1}{k}},$$

que E″ est bien un espace métrique; il a même structure uniforme que E′, donc aussi que E. Or, convenons de caractériser la forme d'un triangle par les valeurs x, y de ses deux plus petits angles, avec $x \geqq y$. On peut alors figurer l'espace des triangles définis à une similitude près par les points d'un domaine plan T limité par les trois droites

$$y = 0; \quad y = x; \quad y = \pi - 2x.$$

Un calcul élementaire montre que les triangles inscrits dans E″ sont représentés sur T par des points situés dans une bande étroite limitée par la droite $y = \pi - 2x$; quand $k \to \infty$, cette bande tend vers le segment d'extrémités $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, qui représente les triangles isocèles d'angle au sommet $\theta \leqq \frac{\pi}{3}$.

Donc pour tout triangle τ, qui n'est pas un tel triangle isocèle, la connaissance de la structure uniforme d'un espace à écart régulier ne peut, dans aucun cas, permettre d'affirmer l'existence de triangles semblables à τ inscrits dans cet espace. (Toutefois il n'existe aucun continu dans lequel tous les triangles inscrits soient isocèles.)

Remarque II. — Dans l'espace E″ ci-dessus, lorsque $k \to \infty$, on a vu que les triangles tendaient vers certaines formes limites. Il en est de même des configurations de n points. Par exemple les configurations de quatre points tendent vers l'une ou l'autre des formes suivantes :

Type ABCD avec $AB = AC = AD = a$; $BC = BD = b \leqq a$; $CD = c \leqq b$;
Type ABCD avec $AB = BC = CD = DA = a$; $AC < a$; $BD < a$.

Toutefois on ne peut pas généraliser directement le théorème II en y remplaçant, par exemple, les triangles isocèles par les tétraèdres des deux types précédents, et l'expression « ensemble linéaire » par « ensemble plan »; car il existe dans E_3 des continus non homéomorphes à des continus plans et dans lesquels on ne peut inscrire aucun tétraèdre régulier.

7. **Extension des résultats dans le cas des ensembles plans.** — Nous allons voir que lorsqu'on applique le théorème II aux ensembles plans, on peut y remplacer les triangles isocèles par des triangles de forme quelconque.

Lemme 1. — *Dans tout continu plan* Γ *qui est une coupure irréductible entre deux points de son plan, et pour tout vrai triangle* (ABC) *donné, on peut inscrire des triangles* (A'B'C') *semblables à* (ABC), *les sommets* A' (*resp.* B' *et* C') *de ces triangles formant un ensemble partout dense sur* Γ.

Démonstration. — Soient $\hat{A}$ l'angle $\widehat{BAC} \neq 0$ et π du triangle ABC et $\lambda \geq 1$ le rapport $k = \frac{AB}{AC}$. Soit Δ une des régions bornées déterminées par Γ dans le plan Π, Γ étant coupure irréductible de Π entre un point O de Δ et le point à l'infini de Π. Soit M un point de contact de Γ avec la circonférence d'un cercle intérieur à Δ; soit P l'un des points de Γ dont la distance à M est maximum.

Soit Γ' le transformé de Γ par la similitude $\left(M, \hat{A}, k\right)$, et P' l'homologue de P sur Γ'.

Si P' est sur Γ, le triangle MPP' inscrit dans Γ est bien semblable à (ABC).

Sinon, Γ' a des points extérieurs à Δ; or il résulte du choix de M qu'il existe dans tout voisinage de M des points de Γ' intérieurs à Δ.

Donc comme Γ' est coupure irréductible entre deux points de Π, on ne peut avoir [1] $\Gamma.\Gamma' \equiv M$, sinon on aurait : $\Gamma' = \Gamma'.\overline{\Delta} + \Gamma'.(\Pi - \Delta)$, avec $\left[\Gamma'.\overline{\Delta}\right].\left[\Gamma'.(\Pi - \Delta)\right] \equiv M$.

On a donc $\Gamma.\Gamma' \not\equiv M$; donc il existe des triangles MB'C' inscrits dans Γ et semblables à (ABC). Comme les points M sont partout denses sur Γ, le lemme est démontré.

Lemme 2. — *Dans tout continu plan* Γ *non jordanien qui ne coupe pas le plan, et pour tout triangle* (ABC), *on peut inscrire une infinité de triangles semblables à* (ABC).

---

(1) Kuratowski, *Sur les coupures du plan* (*Fund. Math.*, t. 6, p. 136).

Démonstration. — Comme Γ n'est pas jordanien, il existe [1] dans le plan Π de Γ une suite d'arcs simples de $(\Pi - \Gamma)$, de diamètres tendant vers o, dont chacun limite avec Γ un domaine borné de diamètre $> l > 0$, l ne dépendant que de Γ.

Soient $\widehat{PQ}$ l'un de ces arcs, ε son diamètre et Δ la région bornée de diamètre $> l$ déterminée par $\left(\widehat{PQ} + \Gamma\right)$. La frontière de Δ contient une coupure irréductible entre Δ et le point à l'infini de Π [2]; donc il existe d'après le lemme précédent des triangles $(A'B'C')$ semblables à (ABC), inscrits dans $\left(\widehat{PQ} + \Gamma\right)$ et ayant leur sommet A' situé à une distance $> \left(\frac{l}{2} - \varepsilon\right)$ de $\widehat{PQ}$.

Si l'on peut trouver de tels triangles ayant tous leurs sommets sur Γ, le théorème est démontré; sinon le diamètre de ces triangles $(A'B'C')$ est au moins égal à $\left(\frac{l}{2} - \varepsilon\right)$. Lorsqu'on fait tendre ε vers zéro, tout triangle limite de ces triangles est un triangle inscrit dans Γ, semblable à (ABC) et de diamètre $\geqq \frac{l}{2}$.

Il existe alors évidemment une infinité [3] de tels triangles répondant à la question.

Lemme 3. — *Dans tout arc pointé plan* E, *et pour tout triangle* (ABC), *on peut inscrire des triangles* (A'B'C') *semblables à* (ABC), *les sommets* A' (*resp.* B' *et* C') *de ces triangles formant un ensemble dense sur* E *au voisinage du centre de* E.

Démonstration [4]. — Soient Γ l'arc simple fermé de E, I le centre de E et $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$ la suite des points de $(E - \Gamma)$ qui tendent vers I. Soit Γ' l'arc déduit de Γ par la similitude $(I, \hat{A}, k)$, les notations étant les mêmes que pour le lemme 1. Deux cas sont possibles :

---

(1) *Voir* Carathéodory, *Math. Ann.*, t. 73, 1913, p. 323-370.

(2) Kuratowski, *loc. cit.*

(3) Leurs sommets sont partout denses sur les continus de condensation de Γ; on le montrerait aisément.

(4) Pour abréger, nous ne donnons ici que l'esquisse de la démonstration; on la rendrait aisément rigoureuse.

a. Au voisinage de I, Γ' a des points de part et d'autre de Γ. Désignons par Γ'_i l'arc déduit de Γ par la similitude $(M_i, \hat{A}, k)$; Γ'_i est arbitrairement voisin de Γ' dès que i est assez grand; Γ'_i traverse donc aussi Γ au voisinage de I. Donc pour tout i assez grand, il existe un triangle $(M_i B'C')$ semblable à (ABC), ayant ses sommets B' et C' sur Γ.

b. Au voisinage de I, Γ' est tout entier situé d'un même côté de Γ; soit Δ_1 ce côté, Δ_2 l'autre côté. Si M est un point de Γ suffisamment voisin de I et situé sur la circonférence d'un petit cercle de Δ_2, l'arc Γ_M déduit de Γ par la similitude $(M, \hat{A}, k)$ a des points dans Δ_2, et comme il est arbitrairement voisin de de Γ, il a aussi des des points dans Δ_1; donc Γ'_M rencontre Γ en des points voisins de I. Donc M est sommet d'un triangle $(MB'C')$ semblable à (ABC) et inscrit dans Γ; ces points M sont partout denses sur Γ au voisinage de I.

Le lemme est donc entièrement démontré.

Remarquons que les triangles inscrits dont nous avons montré l'existence sont infiniment petits en même temps que la distance d'un de leurs sommets à I.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant.

Théorème III. — *Dans tout ensemble plan fermé et borné* E, *et pour tout vrai triangle* (ABC), *on peut inscrire dans* E *une infinité de triangles semblables à* (ABC), *sauf peut-être lorsque* E *est un sous-ensemble d'un arc simple.*

Démonstration. — On a vu, au paragraphe 6, que tout espace métrique compact qui n'est pas homéomorphe à un ensemble linéaire fermé contient, soit un continu non jordanien, soit une courbe simple fermée, soit un arc pointé. Donc si l'on tient compte des trois lemmes précédents et du fait que toute coupure du plan contient une coupure irréductible entre deux points, on voit que tout ensemble exceptionnel du théorème est homéomorphe à un ensemble linéaire fermé borné; comme un tel ensemble est toujours sur un arc simple [1], le théorème est démontré.

---

[1] Moore et Kline, *Ann. of Math.*, vol. 20, 1919, p. 218-223.

On en déduit aisément un théorème analogue relatif aux ensembles plans quelconques non fermés.

CHAPITRE II.

ESPACES APLATIS. STRUCTURES TOPOLOGIQUES GLOBALES.

1. Espaces métriques aplatis d'ordre 1. — Nous étudierons dans les chapitres suivants des espaces métriques où, au voisinage de tout point, les n-points [1] infiniment petits vérifient une condition locale. Ce sera, par exemple, pour les triangles infiniment petits, d'avoir un ou deux angles infiniment petits.

Afin de prévoir les propriétés locales et globales de tels espaces, nous allons d'abord étudier des cas limites; par exemple le cas où tout triangle inscrit dans l'espace a deux angles nuls.

Définitions. — 1° Nous dirons qu'un espace métrique est hyperplan d'ordre n s'il est isométrique à un ensemble de $\mathcal{E}_n$.

2° Nous dirons qu'un espace métrique est aplati d'ordre n, si chacun de ses $(n+2)$-points est hyperplan d'ordre n.

Dans ces paragraphes 1 et 2 nous voulons démontrer par récurrence le théorème suivant qui révèle la structure des espaces aplatis.

THÉORÈME I. — *Tout espace métrique aplati d'ordre n est : soit hyperplan d'ordre n, soit composé de $(n+3)$ points seulement; un tel espace s'obtient alors en ajoutant un point à un $(n+2)$-points hyperplan d'ordre n, choisi arbitrairement (à l'exclusion toutefois, pour $n \geqq 2$, de certaines configurations précisées dans la démonstration); les distances de ce point aux sommets du $(n+2)$-points s'obtiennent de façon unique par une construction élémentaire faite dans un espace $\mathcal{E}_n$.*

Un tel $(n+3)$-points exceptionnel est dit $(n+3)$-*points tordu;* il n'est isométrique à aucun ensemble cartésien.

Démonstration. Cas de $n=1$. — 1° Soient A, B, C, D quatre points de l'espace E aplati d'ordre 1.

---

[1] Un n-points d'un espace métrique est un sous-espace formé de n points.

Supposons AB = maximum des distances mutuelles de ces points.

Figurons sur une droite les points a, b, c, d, tels que $ab = \mathrm{AB}$, les 3-points (abc) et (abd) étant respectivement isométriques aux 3-points (ABC) et (ABD).

Si l'on a $cd = \mathrm{CD}$, le 4-points $(abcd)$ est isométrique à (ABCD).

Sinon, en désignant par d', d'' les symétriques de d par rapport à a et b respectivement, on a

$$cd' = \mathrm{CD} = cd'', \qquad \text{d'où} \quad cd' = cd''$$

ou

$$ac + ad = bc + bd.$$

Il en résulte

$$\mathrm{AC} = \mathrm{BD}; \qquad \mathrm{AD} = \mathrm{BC}; \qquad \mathrm{AB} = \mathrm{CD} = \mathrm{AC} + \mathrm{BC}.$$

Le 4-points tordu ainsi obtenu peut se représenter comme formé des quatre extrémités de deux diamètres d'une circonférence, la distance entre deux quelconques de ces points étant la longeur de l'arc minimum qui les joint.

2° Supposons d'abord que tous les 4-points de E soient hyperplans d'ordre 1. A et B étant deux points fixes de E, on figure sur une droite deux points a et b tels que $ab = \mathrm{AB}$; à tout point M de E correspond alors sur la droite un point m unique tel que les deux 3-points (abm) et (ABM) soient isométriques.

Or si P et Q sont deux points de E, par hypothèse les 4-points (ABPQ) et $(abpq)$ sont isométriques; donc $pq = \mathrm{PQ}$. Donc E est isométrique au lieu de m sur la droite, lieu obtenu en faisant varier M sur E.

Supposons maintenant qu'il existe dans E au moins un 4-points tordu : (ABCD), et un cinquième point P; représentons encore les points de E sur une droite à partir des points de base a et b.

On a par exemple

$$\mathrm{AB} = \mathrm{CD} = \mathrm{AC} + \mathrm{CB} = \mathrm{AD} + \mathrm{DB}.$$

Si les 4-points (ABCP) et (ABDP) ne sont pas tordus, on a

$$\mathrm{CP} = cp \qquad \text{et} \qquad \mathrm{DP} = dp;$$

le point p ne peut se trouver sur cd puisque alors

$$(cp + dp) \quad \text{et} \quad |cp - dp| \leqq cd < ab = \mathrm{CD};$$

le point p ne peut pas non plus se trouver en dehors de cd, car alors d'une part $|cp - dp| = cd < \mathrm{CD}$ et d'autre part l'égalité $cp + dp = \mathrm{CD} = ab$ ne peut être vérifiée que lorsque p est en a ou en b, ce qui est impossible puisque P est distinct des points A et B.

Donc l'un des 4-points (ABCP) et (ABDP) doit être tordu.

Si par exemple (ABCP) est tordu, p est confondu avec d; donc (ABDP) doit aussi être tordu, sinon $\mathrm{DP} = 0$, ce qui est incompatible avec la relation $\mathrm{D} \not\equiv \mathrm{P}$; mais alors les points c, d, p doivent être confondus et l'on a

$$\mathrm{CD} = \mathrm{DP} = \mathrm{PC} = ab.$$

ce qui implique que CDP soit équilatéral, contrairement à la propriété fondamentale de E.

Donc, s'il existe dans l'espace E un 4-points tordu, l'espace se réduit à ce 4-points.

2. **Espaces métriques aplatis d'ordre** n. — Le théorème du paragraphe 1 étant supposé démontré jusqu'à l'ordre $(n-1)$, nous allons le démontrer pour l'ordre n.

1° Considérons un $(n+3)$-points quelconque de E; cet ensemble contient au moins un $(n+1)$-points qui n'est pas hyperplan d'ordre $(n-1)$, sinon d'après le théorème, supposé vrai pour l'ordre $(n-1)$, comme $(n+3) > (n-1)+3$, ce $(n+3)$-points serait hyperplan d'ordre $(n-1)$, donc aussi d'ordre n et le théorème serait démontré pour ce $(n+3)$-points.

Soit $(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{PQ})$ ce $(n+3)$-points, le $(n+1)$-points $(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_{n+1})$ n'étant pas hyperplan d'ordre $(n-1)$.

Dans un espace cartésien $\mathcal{E}_n$, soit $(a_1a_2\ldots a_{n+1})$ un $(n+1)$-points isométrique à $(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_{n+1})$; à tout point M de E correspond dans $\mathcal{E}_n$ un point m unique tel que les deux $(n+2)$-points $(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{M})$ et $(a_1a_2\ldots a_{n+1}m)$ soient isométriques; soient p et q les images de P et Q.

Si l'on a $pq = \mathrm{PQ}$, le $(n+3)$-points $(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{PQ})$ est isométrique à $(a_1a_2\ldots a_{n+1}pq)$; il est donc hyperplan d'ordre n.

Sinon, remarquons que tout $(n+2)$-points obtenu en enlevant un point A_i au $(n+3)$-points donné est par hypothèse hyperplan d'ordre n, et notons le $(\ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots PQ)$; il est isométrique à l'un ou l'autre des deux $(n+2)$-points $(\ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots p_i q)$ et $(\ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots pq)$, le point p_i étant le symétrique de p par rapport à l'hyperplan à $(n-1)$ dimensions bien défini [1] par les points $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} - a_i)$.

Comme $pq \neq PQ$, on a donc

$$PQ = p_i q \qquad (\text{pour } i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

De plus aucun des $(n+1)$-points de la forme $(\ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots p)$ n'est hyperplan d'ordre $(n-1)$; en effet, supposons par exemple que $(a_2 a_3 \ldots a_{n+1} p)$ soit hyperplan d'ordre $(n-1)$; comme q et a_1 sont par hypothèse distincts, il existe deux points distincts (q et a_1) qui sont chacun à égale distance de tous les points $p_i (i = 1, 2, \ldots, n+1)$, puisque les points p et p_1 sont confondus; tous ces points sont donc situés dans un même hyperplan à $(n-1)$ dimensions, ce qui entraîne que les hyperfaces à $(n-1)$ dimensions issues de a_1 dans le simplexe $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1})$ aient en commun une droite, contrairement à l'hypothèse.

Donc, dans le $(n+2)$-points $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1} p)$, aucun des $(n+1)$-points n'est hyperplan d'ordre $(n-1)$; de même pour le $(n+2)$-points $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1} q)$.

Inversement, donnons-nous dans un espace $\mathcal{E}_n$, un $(n+2)$-points $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1} p)$ tel qu'aucun de ses $(n+1)$-points ne soit hyperplan d'ordre $(n-1)$. Soit p_i le symétrique de p par rapport à l'hyperplan à $(n-1)$ dimensions déterminé par les points $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} - a_i)$ avec $i = 1, 2, \ldots, (n+1)$. L'hypothèse faite sur le $(n+2)$-points donné entraîne que ces points sont distincts; lorsqu'ils ne sont pas dans un même hyperplan à $(n-1)$ dimensions, il passe par ces points une et une seule hypersphère à $(n-1)$ dimensions; soit q son centre.

L'espace métrique constitué par $(n+3)$-points $A_1 A_2 \ldots A_{n+1} PQ$ dont les distances mutuelles sont égales aux distances euclidiennes des points correspondants dans $\mathcal{E}_n$, sauf pour la distance PQ

---

[1] S'il était indéterminé, le $(n+1)$-points $(A_1 A_2 \ldots A_{n+1})$ serait hyperplan d'ordre $(n-1)$.

qu'on prendra égale au rayon de l'hypersphère précédente, est par construction aplati d'ordre n, sans être hyperplan d'ordre n. C'est donc un $(n+3)$-points tordu.

Discussion de la construction. — Le seul cas où l'hypersphère n'est plus déterminée est le cas où les $(n+1)$ points p_i sont dans un même hyperplan à $(n-1)$ dimensions. Il faut et il suffit pour cela que les projections de p sur les faces du simplexe $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1})$ soient aussi dans un hyperplan à $(n-1)$ dimensions. Un calcul simple montre que cela entraîne que p soit situé sur une certaine hypersurface algébrique S_n à $(n-1)$ dimensions et de degré n passant par les sommets du simplexe (pour $n=2$, c'est le cercle circonscrit au triangle $a_1 a_2 a_3$).

On pourrait croire que, dans certains cas, les points p_i peuvent être situés sur une même hypersphère à $(n-2)$ dimensions, auquel cas le point q serait indéterminé sur un hyperplan à une ou plusieurs dimensions; mais, dans ce cas, les points $(p_1 p_2 \ldots p_{n+1} p)$ seraient sur une même sphère à $(n-1)$ dimensions, ce qui entraînerait que toutes les faces du simplexe $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1})$ passent par un même point. Comme ceci est contraire à l'hypothèse, on voit que lorsque p est sur S_n, il n'existe aucun point q correspondant à p.

En résumé, on obtient tous les $(n+3)$-points tordus en partant d'un $(n+2)$-points d'un espace $\mathcal{E}_n$, dont aucun $(n+1)$-points ne soit hyperplan d'ordre $(n-1)$, et tel que tous ses sommets ne soient pas sur une même surface S_n déterminée par $(n+1)$ d'entre eux; le $(n+3)$-points obtenu par la construction précédente est alors unique et tordu.

Remarque I. — Remarquons que l'unicité du point q obtenu à partir de p entraîne, ce qui peut se montrer aussi par la géométrie élémentaire, que si l'on recommence à partir des points $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1} q)$ la construction, on va déterminer un point identique à p. La correspondante entre p et q est donc involutive. Nous dirons que *les points p et q sont associés par rapport au simplexe* $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1})$.

Remarque II. — Nous avons trouvé le point q à partir des points $(a_1 \ldots a_{n+1} p)$ en faisant jouer à p un rôle privilégié; si l'on

fait jouer le même rôle successivement à chacun de ces $(n+2)$-points, on va trouver $(n+2)$-points q auxquels correspond d'ailleurs le même espace tordu. Il en résulte aisément que l'ensemble des hyperplans à $(n-1)$ dimensions médiateurs des segments joignant deux à deux ces $(n+2)$-points q est identique à l'ensemble des hyperplans à $(n-1)$ dimensions déterminés par les points $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1} p)$.

2° Considérons maintenant un espace E aplati d'ordre n, et contenant plus de $(n+3)$ points; on vient de voir que tout $(n+3)$-points de E est, soit hyperplan d'ordre n, soit tordu.

a. Supposons que tous les $(n+3)$-points de E soient hyperplans d'ordre n. On peut toujours, comme on l'a déjà fait, supposer que E contient un $(n+1)$-points $(A_1 A_2 \ldots A_{n+1})$ qui n'est pas hyperplan d'ordre $(n-1)$; on pourra alors associer à tout point M de E un point m de $\mathcal{E}_n$, à partir d'un simplexe $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1})$ isométrique à $(A_1 A_2 \ldots A_{n+1})$.

Or par hypothèse, si P et Q sont deux points quelconques de E, les $(n+3)$-points $(A_1 A_2 \ldots A_{n+1} PQ)$ et $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1} pq)$ sont isométriques; d'où $PQ = pq$. Donc E est isométrique à un ensemble de $\mathcal{E}_n$, à savoir le lieu de m lorsque M varie dans E.

b. Supposons que E contienne au moins un $(n+3)$-point tordu $(A_1 A_2 \ldots A_{n+1} PQ)$ et un autre point R.

Nous représentons encore les points de E par des points de $\mathcal{E}_n$ à partir du simplexe $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1})$.

Par hypothèse les points p et q sont associés par rapport à $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1})$. Deux cas sont possibles :

α. Le $(n+3)$-points $(A_1 A_2 \ldots A_{n+1} PR)$ est tordu; donc les points p et r sont associés par rapport à $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1})$; q et r étant les associés d'un même point sont confondus, ce qui n'est possible d'ailleurs que si le $(n+3)$-points $(A_1 A_2 \ldots A_{n+1} QR)$ est tordu, puisqu'on a supposé $Q \not\equiv R$; donc les trois points p, q, r sont confondus. Or la distance PQ, par exemple, est égale au rayon d'une hypersphère construite à partir de p; comme p, q, r sont confondus, les trois hypersphères construites à partir de ces points sont confondues, donc $PQ = QR = RP$ et de plus le point

(p, q, r) est centre d'une hypersphère inscrite dans le simplexe $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1})$ et de rayon $\frac{PQ}{2}$.

A_i et A_j étant deux des points $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$, le $(n+2)$-points de sommets $(P, Q, R, A_1 + A_2 + \ldots + A_{n+1} - A_i - A_j)$ est par hypothèse hyperplan d'ordre n.

Désignons par ω le point (p, q, r) et par

$$(\omega, \omega', \omega'', a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} - a_i - a_j)$$

les sommets du $(n+2)$-points de $\mathcal{E}_n$ isométrique au $(n+2)$-points ci-dessus.

Comme tout point de l'ensemble $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} - a_i - a_j)$ est situé à égale distance des trois points ω, ω', ω'', ces trois points forment un triangle équilatéral inscrit dans une circonférence ayant pour hyperaxe l'hyperplan à $(n-2)$-dimensions déterminé par les points $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} - a_i - a_j)$. Donc ω' et ω'' sont respectivement les symétriques de ω par rapport aux deux hyperplans déterminés par cet hyperaxe et les deux points a_i et a_j.

Ceci impose $\theta = 120°$, θ désignant l'angle dièdre qui contient ω et qui est déterminé par les hyperplans $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} - a_i)$ et $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} - a_j)$.

Le simplexe $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1})$ est donc équilatéral, puisque tous ses angles dièdres sont égaux et l'on arrive à une contradiction, par exemple parce que ω ne peut se trouver à la fois dans tous les dièdres obtus formés par les faces du simplexe.

β. Les $(n+3)$-points $(A_1 A_2 \ldots A_{n+1} PR)$ et $(A_1 A_2 \ldots A_{n+1} QR)$ sont hyperplans d'ordre n. Dans le $(n+4)$-points $(A_1 A_2 \ldots A_{n+1} PQR)$, les distances mutuelles des points sont donc égales à celles de leurs images dans $\mathcal{E}_n$, sauf la distance PQ qui n'est pas égale à pq. Le point q est donc à une distance égale à PQ de tous les symétriques de p par rapport aux hyperplans à $(n-1)$-dimensions déterminés par les points $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1} r)$; aucun de ces hyperplans ne contient p, sinon on aurait $PQ = pq$; il en est de même de q.

D'autre part il existe toujours au moins deux hyperfaces à $(n-1)$-dimensions du simplexe $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1})$ qui ne contiennent pas r, sinon ce point serait un des sommets du simplexe; soit par exemple $(a_1 a_2 \ldots a_{n-1})$ l'hyperplan à $(n-2)$-dimensions qui constitue leur intersection; les trois hyperplans à $(n-1)$-

dimensions $(a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n)$, $(a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_{n+1})$ et $(a_1 a_2 \ldots a_{n-1} p)$ sont distincts; les symétriques de p par rapport à ces trois hyperplans sont sur un cercle d'hyperaxe à $(n-2)$-dimensions $(a_1 a_2 \ldots a_{n-1})$; donc le point q doit se trouver sur cet hyperaxe, c'est-à-dire dans une face du simplexe $(a_1 a_2 \ldots a_{n+1})$, contrairement à ce que nous venons de voir.

En résumé, si E contient un $(n+3)$-points tordu, il ne peut contenir aucun autre point.

Le théorème est donc bien démontré pour l'ordre n.

Application. — Il résulte immédiatement du théorème I la caractérisation métrique suivante des ensembles cartésiens :

Pour qu'un espace métrique E *contenant plus de* $(n+3)$-*points soit isométrique à un ensemble de* $\mathcal{E}_n$, *il faut et il suffit que tout* $(n+2)$-*points de* E *soit isométrique à un ensemble de* $\mathcal{E}_n$.

On en déduit aussitôt que, pour qu'un espace métrique E soit isométrique à $\mathcal{E}_n$, il faut et il suffit que : 1° il vérifie les conditions précédentes; 2° à tout $(n+1)$-points K de E on puisse associer au moins un autre point de E formant avec K un $(n+2)$-points isométrique à un $(n+2)$-points quelconque de $\mathcal{E}_n$ contenant un $(n+1)$-points isométrique à K.

Ceci nous conduit à étudier des espaces métriques plus généraux jouissant de la propriété suivante : Pour toute valeur finie de n, chacun de leurs $(n+1)$-points est isométrique à un ensemble de $\mathcal{E}_n$. Nous dirons que ces espaces possèdent le caractère euclidien fini.

Il existe une classe importante de tels espaces : ceux que nous appellerons espaces hilbertiens généralisés et que nous noterons $\mathcal{E}_{\aleph_\alpha}$.

Définition. — $\aleph_\alpha$ *désignant le* $\alpha^{\text{ième}}$ *nombre cardinal infini après* $\aleph_0$, *et* I *un ensemble d'indices de nombre cardinal* $\aleph_\alpha$, *l'espace* $\mathcal{E}_{\aleph_\alpha}$ *a pour points les ensembles de nombres réels* $\{x_i\}_{i \in I}$ *tels que* $\sum_{i \in I} (x_i)^2$ *soit finie* (*ce qui implique qu'il y ait au plus un nombre dénombrable de ces* x_i *qui ne sont pas nuls*).

La distance $\delta(a, b)$ entre les points $a = \{x_i\}$ et $b = \{y_i\}$ est définie par $\delta^2 = \sum_{i \in I} (x_i - y_i)^2$.

L'espace $\mathcal{E}_{\aleph_\alpha}$ est bien un espace métrique et il est séparable d'ordre $\aleph_\alpha$ (1). D'autre part il est clair que tout n-points de $\mathcal{E}_{\aleph_\alpha}$ est isométrique à un n-points de $\mathcal{E}_{\aleph_0}$, c'est-à-dire de l'espace de Hilbert. Donc tout espace $\mathcal{E}_{\aleph_\alpha}$ possède comme $\mathcal{E}_{\aleph_0}$ le caractère euclidien fini.

L'importance des espaces $\mathcal{E}_{\aleph_\alpha}$ vient du théorème suivant que nous nous contenterons d'énoncer :

Pour qu'un espace métrique E *soit isométrique à un ensemble de* $\mathcal{E}_{\aleph_\alpha}$, *il faut et il suffit qu'il soit séparable d'ordre* $\aleph_\alpha$ *et qu'il possède le caractère euclidien fini.*

Donc tout espace métrique à caractère euclidien fini peut être plongé isométriquement dans un espace $\mathcal{E}_{\aleph_\alpha}$; ceux-ci apparaissent donc comme des espaces universels.

Nous terminerons ces remarques en donnant une caractérisation non plus des sous-ensembles de $\mathcal{E}_{\aleph_0}$, mais de $\mathcal{E}_{\aleph_0}$ lui-même :

Pour qu'un espace métrique E soit isométrique à l'espace de Hilbert $\mathcal{E}_{\aleph_0}$, il faut et il suffit que : 1° Il soit séparable; 2° (2) A tout $(n+1)$-points K de E on puisse associer au moins un autre point de E formant avec K un $(n+2)$-points isométrique à un $(n+2)$-points quelconque de $\mathcal{E}_n$ contenant un $(n+1)$-points isométrique à K.

3. Espaces topologiques séparés connexes à structure locale linéaire. — Nous aurons besoin par la suite, connaissant la structure topologique locale d'un espace métrique, de déterminer sa structure topologique globale. Nous allons, dans ce but, démontrer quelques théorèmes, qui s'appliquent d'ailleurs à tous les espaces topologiques.

Définitions. — 1° Nous emploierons dans les énoncés les expressions : Courbe simple fermée, arc simple fermé, arc ouvert, arc semi-ouvert. Leur sens est bien connu.

---

(1) C'est-à-dire que $\aleph_\alpha$ est le nombre cardinal minimum des ensembles de $\mathcal{E}_{\aleph_\alpha}$ partout denses.

(2) On peut remplacer dans cette 2ième condition $\mathcal{E}_n$ par $\mathcal{E}_{n+1}$.

2° Nous dirons qu'un espace topologique est un *arc fermé* (resp. ouvert) *transfini* s'il est homéomorphe à l'espace E_1 (resp. E'_1); nous dirons que c'est un *arc bitransfini* s'il est homéomorphe à l'espace E_2, les espaces E_1, E'_1, E_2 étant définis comme suit :

Ces espaces se définissent respectivement à partir des ensembles totalement ordonnés F_1, F'_1, F_2 en convenant (¹) d'appeler ensembles ouverts de ces espaces les sommes d'intervalles ouverts de ces ensembles ordonnés.

Les points de F_1 sont les symboles (α, θ), α étant un nombre transfini quelconque de première ou de deuxième classe pouvant être nul, θ étant un nombre ordinaire tel que $0 \leqq \theta < 1$. On convient que $(\alpha, \theta) < (\alpha', \theta')$ lorsque $\alpha < \alpha'$ ou lorsque $\alpha = \alpha'$ et $\theta < \theta'$.

L'ensemble F'_1 est le sous-ensemble $[F_1 - (0, 0)]$ de F_1.

L'ensemble F_2 est la somme ordonnée $(-F_1) + F'_1$, l'ensemble $(-F_1)$ se déduisant de F_1 en y inversant la relation d'ordre.

a. Il est immédiat qu'un arc transfini ou bitransfini a en tout point un voisinage homéomorphe à un arc simple; ces arcs ne sont pas pour cela des arcs simples. Cela résultera du théorème suivant :

Théorème II. — *Un arc transfini ou bitransfini n'est homéomorphe à aucun espace métrique, donc en particulier à aucun arc de Jordan.*

Démonstration. — On sait que pour qu'un espace métrique soit compact (au sens de Bourbaki), il faut et il suffit que toute suite dénombrable de points de cet espace ait au moins un point d'accumulation. Or il est immédiat que toute suite dénombrable de points d'un arc fermé transfini admet un point d'accumulation; et cependant ces arcs ne sont pas compacts, puisque le recouvrement ouvert de E_1, par exemple, par les semi-intervalles ouverts d'extrémités $(0, 0)$ et $(\alpha, 0)$ ne contient pas un recouvrement fini de E_1.

Comme tout arc transfini ou bitransfini contient un sous-esnsemble homéomorphe à E_1, ces arcs ne sont donc pas métrisables (tout en étant d'ailleurs uniformisables).

b. Remarquons que tous les arcs, simples ou transfinis, rencontrés jusqu'ici sont des espaces topologiques connexes dont tout point possède un voisinage homéomorphe à un arc simple.

(¹) *Voir* Bourbaki, *loc. cit.*

Un raisonnement trop rapide pourrait faire croire que ce sont les seuls espaces connexes qui jouissent de cette propriété. Voici un espace E qui montre qu'il n'en est rien; il est construit à partir de cette idée que, dans un espace topologique, un arc semi-ouvert d'extrémité a peut avoir plusieurs extrémités associées b; il n'est pas sans analogie avec la variété de Prüfer à deux dimensions non triangulable (*Voir* Stoïlow, Collection Borel, Paris 1938).

L'espace E se compose des points x tels que $-1 < x < 1$ et d'un autre point A. Appelons intervalle ouvert de E, tout ensemble de la forme

$$(\alpha < x < \beta) \qquad \text{ou} \qquad (-\alpha < x < 0;\ A;\ 0 < x < \alpha).$$

Les ensembles ouverts de E seront définis comme réunions quelconques d'intervalles ouverts de E, ce qui définit entièrement la topologie de E. E jouit bien de la propriété locale demandée, mais ne rentre pas dans les types d'arcs étudiés.

Remarquons toutefois que cet espace E n'est pas séparé (ou de Hausdorff), puisque deux voisinages quelconques de A et du point $x \equiv 0$ ont des points communs. Le théorème suivant montre que de tels espaces singuliers sont éliminés dans la classe des espaces séparés

Théorème III. — *Tout espace topologique connexe séparé* E, *dont tout point possède un voisinage homéomorphe à un arc simple, fermé ou non, est : soit une courbe simple fermée, soit un arc simple, ouvert, semi-ouvert ou fermé, soit un arc transfini, ouvert ou fermé, soit un arc bitransfini.*

Démonstration. — Soit M un point de E, γ_1 un arc simple, qu'on peut toujours supposer fermé, et qui est un voisinage de M. Si $\gamma_1 \neq E$, on peut prolonger γ_1 en l'une au moins de ses extrémités par un autre arc γ_2; continuons ce prolongement, toujours dans le même sens : On obtient les arcs $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$. Si l'arc semi-ouvert $(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots)$ n'a pas de point d'accumulation, l'opération s'arrête; sinon, à partir d'un tel point d'accumulation, qui est forcément une extrémité de l'arc $(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots)$, on recommence l'opération, et ainsi de suite transfiniment en donnant aux opérations successives des numéros d'ordre correspondant à tous les nombres transfinis de première

et deuxième classe. On n'est arrêté que si à un instant donné l'arc semi-ouvert obtenu n'a pas de point d'accumulation ou si à partir d'un tel point le prolongement n'est plus possible, ou encore si l'un des arcs obtenus a un point commun avec un arc déja tracé : Dans ce dernier cas, la somme des arcs γ_i est une courbe simple fermée.

Lorsqu'on n'est pas dans ce dernier cas, on opère sur la deuxième extrémité de γ_1 comme on a opéré sur la première; l'arc γ_1 est ainsi prolongé dans les deux sens.

En résumé, l'ensemble obtenu C est, soit une courbe simple fermée, soit un arc simple, soit un arc transfini ou bitransfini.

Je dis que $C \equiv E$: Comme E est connexe, il suffit de montrer que $(E - C).\overline{C} + (\overline{E - C}).C = o$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi.

Soit P un point de $\overline{E - C}.C$; le point P possède dans E un voisinage qui est un arc simple γ et P possède dans C un voisinage qui est un sous-arc δ de γ; si P est intérieur à δ, δ est aussi un voisinage de P dans E; si P est une extrémité de δ, c'est que l'opération de prolongement de C n'est pas possible à partir de P, donc δ est encore ici un voisinage de P dans E. Dans ces deux cas, P ne peut être point d'accumulation de $(E - C)$; donc $\overline{E - C}.C$ est vide.

Soit Q un point de $(E - C).\overline{C}$; le point Q possède dans E un voisinage qui est un arc simple γ; il existe une suite $Q_1 Q_2 \ldots Q_n \ldots$ de points de cet arc qui tendent vers Q, ces points faisant aussi partie de C; comme ces points sont en infinité dénombrable, on les a tous rencontrés, dans la construction de C après une $\alpha^{\text{ième}}$ opération, α étant un nombre de deuxième classe.

Les points d'accumulation de cette suite convergente se réduisent à Q, puisque E est séparé; donc Q fait partie de C, contrairement à l'hypothèse.

On a donc bien $(E - C).\overline{C} = o$.

Remarque. — Stoïlow a caractérisé les types topologiques des surfaces orientables et triangulables. Il serait intéressant de caractériser, par une généralisation du théorème précédent, tous les types topologiques des espaces topologiques connexes séparés, localement homéomorphes à un domaine plan ouvert simplement

connexe. Parmi de telles variétés à deux dimensions, signalons par exemple un « plan transfini » analogue à notre arc transfini.

On montre aisément sur ces variétés à deux dimensions, comme sur celles à n dimensions, que deux points quelconques d'une telle variété peuvent être joints par un arc simple, et que cette variété peut être triangulée par $\aleph_0$ ou $\aleph_1$ simplexes.

4. **Espaces topologiques séparés non connexes à structure locale linéaire.** — Nous énoncerons sans démonstration le théorème général suivant.

Théorème IV. — *Tout espace topologique séparé, dont tout point possède un voisinage homéomorphe à un ensemble cartésien linéaire, est une somme topologique d'espaces topologiques dont chacun est, soit une courbe simple fermée, soit un sous-ensemble d'un arc bitransfini.*

Remarquons que ce théorème peut remplacer pour nous le théorème de M. Cohen, utilisé au Chapitre I, et relatif à la caractérisation des espaces métriques homéomorphes à un ensemble linéaire (1).

Nous allons ici, en vue des applications, démontrer un théorème moins général que le précédent.

Théorème V. — *Tout espace métrique* E, *dont tout point possède un voisinage homéomorphe à un ensemble linéaire fermé borné, est une somme topologique d'espaces topologiques dont chacun est une courbe simple fermée ou un ensemble linéaire fermé, borné ou non.*

Inversement, toute somme d'espaces topologiques homéomorphes à de tels ensembles cartésiens est métrisable.

Démonstration. — La deuxième partie du théorème est presque évidente : En effet, tout ensemble linéaire fermé et toute courbe

(1) Lorsque l'espace considéré est un espace métrique, le théorème IV résulte d'ailleurs du rapprochement du théorème de M. Cohen et d'un théorème de M. Sierpinski qu'on peut énoncer ainsi : Tout espace métrique localement séparable est une somme topologique d'espaces séparables [*voir* Sierpinski, *Sur les espaces métriques localement séparables* (*Fund. Math.*, pp. 107-113, t. 21)].

simple fermée sont homéomorphes à un ensemble plan e_i de diamètre < 1.

Soit $\sum_i e_i$ l'espace somme donné. L'espace métrique E est ainsi défini : Ses points sont ceux de $\sum_i e_i$; la distance de deux points d'un même e_i est égale à la distance cartésienne des deux points dans le plan qui porte e_i; la distance de deux points de deux e_i différents est égale à 1. Cet espace E vérifie évidemment les conditions requises.

Pour la première partie du théorème, remarquons que toute composante connexe de E constitue un espace métrique vérifiant les conditions du théorème III; si on le rapproche du théorème II, on voit que toute composante connexe de E est, soit une courbe simple fermée, soit un arc simple, fermé, semi-ouvert ou ouvert.

Les propriétés locales de E entraînent qu'aucun point de E n'est point d'accumulation d'une suite de composantes connexes de E qui soient des courbes simples fermées ou des arcs ouverts ou semi-ouverts; désignons ces derniers ensembles, munis d'indice, par les lettres respectives f_i, o_j, s_k, et posons

$$E_2 = E - \sum_{i,j} f_i + o_j.$$

L'ensemble E_2, ainsi que tout ensemble f_i et o_j est à la fois ouvert et fermé dans E.

Sur chacun des arcs s_k de E_2, marquons un point A_k; ce point divise s_k en un arc fermé A_kB_k et un arc ouvert o'_k ayant une extrémité en A_k; posons

$$E_3 = E_2 - \sum_k o'_k.$$

L'ensemble E_3 jouit des mêmes propriétés locales que E, mais de plus toutes ses composantes connexes non réduites à un point sont des arcs fermés.

Soit δ un nombre positif donné. Tout point M de E_3 définit un ensemble $C_\delta(M)$ qui est l'ensemble des points de E_3 qu'on peut joindre à M par une chaîne finie de points, de pas au plus égal à δ; tout ensemble $C_\delta(M)$ est évidemment fermé et deux tels

ensembles sont, ou bien identiques, ou bien distants l'un de l'autre de plus de δ.

Il est évident que, grâce à la nature des composantes connexes de E_3, il existe pour tout point M de E_3 un nombre δ tel que $C_{\delta'}(M)$ soit homéomorphe à un ensemble linéaire fermé borné, dès que $\delta' < \delta$.

Pour $\delta = 1$, notons par C_1 tout ensemble $C_1(M)$ qui est homéomorphe à un ensemble linéaire fermé borné.

Pour $\delta = \frac{1}{2^i}$, notons par $C_{\frac{1}{2^i}}$ tout ensemble $C_{\frac{1}{2^i}}(M)$ de $\left[E_3 - \sum_1^{i-1}\sum C_{\frac{1}{2^i}}\right]$ qui est homéomorphe à un ensemble linéaire fermé borné.

Tout point de E_3 fait évidemment partie d'un et d'un seul de ces ensembles $C_{\frac{1}{2^i}}$.

Considérons l'un quelconque de ces ensembles, soit $C_\delta(M)$. Il ne contient qu'un nombre fini d'arcs $\widehat{A_k B_k}$, sinon il existerait sur $C_\delta(M)$ un point d'accumulation d'arcs semi-ouverts σ_k; donc $C_\delta(M)$ peut être décomposé en un nombre fini d'ensembles fermés disjoints dont chacun ne contient qu'un seul arc $\widehat{A_k B_k}$, si dans ces ensembles, on complète maintenant chacun des arcs $\widehat{A_k B_k}$ par son complément o'_k, on obtient à partir de $C_\delta(M)$ un nombre fini d'ensembles à la fois ouverts et fermés, et dont chacun est homéomorphe à un ensemble linéaire fermé; soit K_1 un tel ensemble. On a évidemment $E_2 = \sum_i K_{\frac{1}{2^i}}$.

Si l'on revient à E, on voit qu'on a pu le décomposer en ensembles f_i, o_i, $K_{\frac{1}{2^i}}$, qui sont chacun à la fois ouvert et fermé. E est donc la somme topologique de ces sous-espaces, ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème VI. — *Soit* E *un espace métrique dont tout point possède dans l'espace complété* $\hat{E}$ *un voisinage homéomorphe à un ensemble linéaire fermé borné. Il existe un sous-espace* E_1

de $\hat{E}$ *tel que* $E \subset E_1 \subset E$, *tout point de* E_1 *ayant dans* E_1 *un voisinage du type énoncé.*

Démonstration. — Désignons par E_1 l'ensemble des points de $\hat{E}$ ayant dans $\hat{E}$ un voisinage homéomorphe à un ensemble linéaire fermé borné. On a $E \subset E_1 \subset \hat{E}$ et E_1 est évidemment ouvert dans $\hat{E}$. Donc E_1 possède bien la propriété demandée.

Il peut d'ailleurs exister d'autre ensembles de $\hat{E}$ qui jouissent des mêmes propriétés.

Remarque. — La structure topologique de E_1 résulte du premier théorème de ce paragraphe. Celle de E en résulte aussitôt.

CHAPITRE III.

ESPACES MÉTRIQUES PLATS.

1. **Notions préliminaires.** — Lorsqu'un ensemble cartésien E possède en un de ses points d'accumulation **M** une paratingente unique **Δ**, toute droite joignant deux points voisins de **M** a une direction voisine de celle de **Δ**; donc tout triangle inscrit dans E et infiniment voisin de **M** a deux angles infiniment petits.

Réciproquement, si tout triangle inscrit dans E et infiniment voisin d'un point d'accumulation M de E a deux angles infiniment petits, E possède en M une paratingente unique : Sinon il existerait un angle $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ tel qu'il y ait deux couples de points de E : (M, M′) et (N, N′) arbitrairement voisins de M, avec $\widehat{MM', NN'} > \alpha$; la droite MN faisant un angle au moins égal à $\frac{\alpha}{2}$ avec NM′ ou NN′, l'un des triangles MNM′, MNN′ aurait un angle (ou son supplément) compris entre $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

De façon analogue on verrait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble cartésien E ait, en un de ses points d'accumulation M, toutes ses paratingentes situées dans un même plan est que tout tétraèdre, inscrit dans E et infiniment voisin

de M, ait toutes ses arêtes parallèles à un même plan, à un angle infiniment petit près.

On voit la possibilité de remplacer des conditions portant sur le paratingent d'un ensemble en un point, par des conditions portant sur des configurations infiniment voisines de ce point.

C'est grâce à ce moyen que nous allons pouvoir étudier certaines propriétés locales des espaces métriques.

Définitions. — 1° Nous dirons que les points A, B, C sont sommets d'un triangle ABC inscrit dans l'espace métrique E, quand A, B, C sont des points de E. Le sens des expressions : angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ du triangle ABC est évident.

2° Soit ABC un triangle et *abc* un triangle égal tracé dans un plan; par un point O de ce plan, menons les parallèles aux côtés de *abc*. On voit aisément que le plus petit angle qui contient ces trois directions est égal à la somme des deux plus petits angles du triangle ABC : Nous appellerons cette quantité « *courbure* » *du triangle* ABC; elle est comprise entre zéro et $\frac{2\pi}{3}$. Quand elle vaut $\frac{2\pi}{3}$, le triangle est équilatéral.

3° On dit que l'espace métrique E est « *plat* » *au point d'accumulation* M de E lorsque la courbure des triangles inscrits dans E tend vers zéro quand leurs trois sommets tendent vers M.

On dit que E est *plat* lorsqu'il est plat en chacun de ses points.

On dit que E est *uniformément plat* lorsque la courbure des triangles inscrits dans E tend uniformément vers zéro avec leur diamètre.

Remarque. — Pour les espaces cartésiens et de façon plus générale pour les espaces à métrique tétraédrale, pour que l'espace soit plat en un point M, il suffit que tout triangle inscrit dans l'espace, infiniment petit et ayant un sommet en M, ait une courbure infiniment petite. Mais ceci ne s'étend pas à tous les espaces métriques.

2. Structure topologique des espaces plats. — Nous allons étudier la structure topologique des espaces plats par deux méthodes : D'une part en utilisant les théorèmes du Chapitre I, d'autre part directement.

Première méthode : Si E est plat en un point M, ce point possède un voisinage borné V(M) dans lequel tous les triangles inscrits out une courbure inférieure à $\frac{\pi}{2}$, par exemple. D'après le

corollaire des théorèmes I et II, Chapitre I, le point M possède donc dans $\hat{E}$ un voisinage homéomorphe à un ensemble linéaire fermé borné.

Deuxième méthode : Si E est plat en un point M, soit V(M) un voisinage de M dans lequel tous les triangles inscrits ont une courbure $< \frac{\pi}{2}$.

Soit P un point de V(M) distinct de M et W l'ensemble des points de V(M) situés à une distance de M inférieure ou égale à $\frac{MP}{4} = \frac{\delta}{4}$.

Il existe un point au plus de W situé à une distance donnée de P, sinon A et B étant deux tels points, le triangle isocèle APB aurait une courbure supérieure à $\frac{\pi}{2}$, puisque

$$AB \leqq \frac{\delta}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{3\delta}{4} \leqq PA \leqq \frac{5\delta}{4}.$$

D'autre part, soient A et B deux points quelconques de W. Si $AB < \varepsilon$, on a $|PA - PB| < \varepsilon$. Si $|PA - PB| < \varepsilon$, on a $AB < \eta(\varepsilon)$. $\eta(\varepsilon)$ tendant vers zéro avec ε, sinon on pourrait trouver deux points A et B tels que la courbure du triangle PAB dépasse $\frac{\pi}{2}$.

Ces deux résultats entraînent que W est homéomorphe à l'ensemble numérique des distances de P aux points de W, cette homéomorphie étant uniformément continue. Donc l'espace métrique W est tel que $\hat{W}$ est homéomorphe à un ensemble linéaire fermé borné; comme $\hat{W}$ est un voisinage de M dans E, on arrive au même résultat que par la première méthode.

En vertu du dernier théorème du Chapitre III on peut donc énoncer :

Théorème I. — *Si* E *est un espace métrique plat, il existe un espace* E_1 *tel que* $E \subset E_1 \subset \hat{E}$, E_1 *étant une somme topologique d'espaces dont chacun est homéomorphe, soit à une courbe simple fermée, soit à un ensemble linéaire fermé, borné ou non.*

Si E *est uniformément plat, on peut prendre pour* E_1 *l'espace* $\hat{E}$.

Le corollaire suivant résulte immédiatement du théorème :

Corollaire. — *Si* E *est un espace métrique compact plat,* E *est la somme d'un nombre fini de courbes simples fermées, deux à deux disjointes, et d'un ensemble disjoint de ces courbes et homéomorphe à un ensemble linéaire fermé borné.*

Remarque. — Ce théorème et son corollaire s'appliquent aussi aux espaces tels qu'au voisinage de tout point, les triangles inscrits aient une courbure $< \alpha < \frac{\pi}{2}$.

3. Structure métrique locale.

Définitions. — 1. Nous dirons qu'un ensemble F d'un espace métrique E admet en un point I de E *un rayon contingent unique* lorsque l'angle en I des triangles MIN inscrits dans $(F + I)$ tend vers o quand M et N tendent vers I.

2. Si deux ensembles F_1 et F_2 d'un même espace métrique E admettent chacun en I un rayon contingent unique, nous dirons que ces deux rayons contingents font un angle α lorsque l'angle $\widehat{MIN}$ tend vers α lorsque M et N tendent vers I sur F_1 et F_2 respectivement.

Remarque. — Si $\alpha \neq o$, le point I ne peut être point d'accumulation de $F_1 . F_2$. Si $\alpha = o$, l'ensemble $F_1 + F_2$ admet en I un rayon contingent unique; mais il peut exister trois ensembles F_1, F_2, F_3 ayant chacun en I un rayon contingent unique, de même que $(F_1 + F_2)$, $(F_1 + F_3)$ sans qu'il en soit de même de $(F_2 + F_3)$.

Cette singularité empêche de donner de façon générale une définition acceptable du contingent en un point d'un espace E; une telle définition est au contraire possible dans un espace à métrique tétraédrale; si de plus la métrique est pentaédrale, on peut définir l'angle de deux rayons du contingent (ce dernier peut d'ailleurs être vide en un point d'accumulation de l'espace).

a. Cas des espaces connexes. — D'après le théorème du paragraphe 2, un espace connexe plat E est un arc simple ou une courbe simple fermée. Soit $\widehat{AB}$ un arc de E dans lequel tous les triangles inscrits ont une courbure $< \varepsilon < \frac{\pi}{4}$; si M est un point quelconque de $\widehat{AB}$, je dis que $\widehat{AMB} > \pi - \varepsilon$. En effet quand M est

infiniment voisin de B, l'angle $\widehat{MAB}$ est infiniment petit; quand M varie continuement sur $\widehat{AB}$, cet angle varie continuement, donc, comme il doit être soit inférieur à $\frac{\pi}{4}$, soit supérieur à $\frac{3\pi}{4}$, il reste inférieur à $\frac{\pi}{4}$; il en est de même de $\widehat{MBA}$; le résultat annoncé en résulte.

En passant à la limite et en interprétant les résultats avec les notations définies dans ce paragraphe, on obtient le théorème :

Théorème II. — *Tout point* M *intérieur à un arc simple plat divise cet arc en deux arcs ayant chacun en* M *un rayon contingent unique, les deux rayons contingents faisant un angle égal à* π.

b. Cas des espaces non connexes. — Le théorème précédent est faux en général quand l'espace n'est pas connexe.

Voici un exemple d'espace plat F, non connexe, pouvant être décomposé en trois ensembles [1] F_1, F_2, F_3, n'ayant deux à deux en commun qu'un seul point I, chacun de ces ensembles ayant en I un rayon contingent unique, et les rayons contingents faisant deux à deux un angle égal à π.

Les points de F sont des points situés sur trois segments IA, IB, IC d'un plan, aux distances respectives de I

$$IA_n = \frac{1}{(3n)!}; \qquad IB_n = \frac{1}{(3n+1)!}; \qquad IC_n = \frac{1}{(3n+2)!} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

La métrique de F est ainsi définie : La distance de deux points situés sur un même segment est égale à leur distance cartésienne; celle de deux points situés sur des segments différents est égale à la somme de leurs distances respectives à I.

On pose

$$F_1 = I + \sum_n A_n; \qquad F_2 = I + \sum_n B_n; \qquad F_3 = I + \sum_n C_n.$$

La propriété annoncée se vérifie aussitôt.

---

[1] La même construction serait possible en remplaçant 3 par n et même par $\aleph_0$.

Le même principe de construction permet de construire des espaces plats possédant un point d'accumulation en lequel aucun sous-ensemble infini n'admet de rayon contingent unique.

De tels espaces ne sont évidemment sous-espaces d'aucun espace connexe plat.

Remarque. — Ces exemples paradoxaux montrent que si l'on veut avoir des espaces non connexes plats à propriétés très voisines de celles des ensembles cartésiens, il faut se limiter à certaines classes d'espaces.

Le fait pour un espace plat d'avoir une métrique tétraédrale élimine beaucoup de singularités : Tout espace plat tétraédral se laisse décomposer au voisinage de tout point I en deux ensembles, éventuellement vides, ayant chacun en I un rayon contingent unique, les deux rayons contingents faisant un angle égal à π.

4. **Prolongement des ensembles cartésiens plats.** — L'exemple singulier du paragraphe précédent montre que tout point d'un espace plat ne possède pas un voisinage qui puisse être plongé isométriquement dans un arc simple plat.

Il n'en est pas de même des ensembles cartésiens plats; la démonstration en est presque immédiate, aussi allons-nous ici nous occuper plutôt d'un problème global, en démontrant le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Tout ensemble borné uniformément plat* E *d'un espace cartésien* $\mathcal{E}_n$ *est un sous-ensemble d'un nombre fini de courbes simples fermées, deux à deux disjointes, dont chacune est une courbe à tangente continue, donc un ensemble plat.*

Démonstration. — Comme la fermeture de l'ensemble donné E est un ensemble uniformément plat, nous supposerons par la suite que E est fermé.

E possède en tout point M une paratingente unique $\Delta(M)$ (*voir* § 1). La semi-continuité supérieure d'inclusion du paratingent [1] entraîne la continuité de $\Delta(M)$ sur E; par une méthode

---

[1] *Voir* BOULIGAND, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Vuibert, Paris 1932.

classique, on peut prolonger cette fonction $\Delta(M)$ par une fonction continue définie en tout point de l'espace [il suffit de prolonger les n composantes scalaires de la direction de $\Delta(M)$ de façon qu'elles ne s'annulent pas toutes à la fois]; en particulier $\Delta(M)$ peut ainsi être définie en tout point isolé de E.

Il existe évidemment un nombre $\rho > 0$ tel que, pour tout point M_0 de E, la sphère pleine $\Sigma(M_0)$ de centre M_0 et de rayon ρ vérifie les conditions suivantes :

La droite $\Delta(M)$ en tout point M de $E.\Sigma(M_0)$ et la droite joignant deux points quelconques de $E.\Sigma(M_0)$ font avec $\Delta(M_0)$ un angle $< \alpha$, avec $\alpha < \frac{\pi}{18}$.

Soit M_0 un point déterminé de E, $S(M_0)$ la sphère de centre M_0 et de rayon $\frac{\rho}{2}$, et e la projection orthogonale de $E.S(M_0)$ sur $\Delta(M_0)$. La projection établit une homéomorphie entre e et $E.S(M_0)$: Soient a et b les extrémités de e, A et B les points correspondants de $E.S(M_0)$; soient c_i et d_i les extrémités d'un des intervalles complémentaires bornés de e, C_i et D_i les points correspondants de $E.S(M_0)$; soit enfin E_i le milieu de C_iD_i; nous appellerons C_iD_i segment contigu à $E.S(M_0)$:

Dans le plan $[C_iE_i, \Delta(C_i)]$, traçons l'arc $\widehat{C_iE_i}$ d'équation : $y = kx(\alpha - x)^2$, l'axe C_ix étant confondu avec $\overrightarrow{C_iE_i}$, et C_iy étant perpendiculaire à C_iE_i, les coefficients α et k étant choisis de façon que la courbe soit tangente en C_i à $\Delta(C_i)$ et en E_i à C_iE_i. On vérifie aisément que la tangente en tout point de cette courbe fait avec C_iE_i un angle au plus égal à $\widehat{\overrightarrow{C_iE_i}, \Delta(C_i)}$, donc inférieur à 2α; donc cette tangente fait avec $\Delta(M_0)$ un angle $< 3\alpha$.

On définit de même un arc $\widehat{D_iE_i}$; la somme de $E.S(M_0)$ et de tous les arcs $\widehat{C_iE_i} + \widehat{E_iD_i}$ construits sur les segments C_iD_i contigus à $E.S(M_0)$ est évidemment un arc simple, $\gamma(M_0)$, d'extrémités A, B, dont la tangente varie continuement et fait en tout point, avec $\Delta(M_0)$ un angle $< 3\alpha < \frac{\pi}{6}$; cet arc est entièrement déterminé par M_0; il est situé dans la sphère $S(M_0)$ et dans le cône de révolution d'axe $\Delta(M_0)$ et d'angle au sommet $\frac{\pi}{6}$.

Soient maintenant M_0 et M_1 deux points quelconques de E; les arcs $\gamma(M_0)$, $\gamma(M_1)$ peuvent être disjoints; sinon, je dis que leur somme est un arc simple à tangente continue. En effet $\gamma(M_0)$ et $\gamma(M_1)$ ayant un point commun, il en est de même de $S(M_0)$ et $S(M_1)$, et il est immédiat que ces sphères ont en commun un point de E; soit M_2 un tel point; l'ensemble $\gamma(M_0)+\gamma(M_1)$ est situé dans $\Sigma(M_2)$ puisque $S(M_0)$ et $S(M_1)$ le sont aussi. A partir de l'ensemble $E.\Sigma(M_2)$ je peux construire, par la même méthode que ci-dessus, un arc $\Gamma(M_2)$ contenant $E.\Sigma(M_2)$; or, soit C_iD_i un des segments contigus à $E.S(M_0)$; c'est aussi un segment contigu à $E.\Sigma(M_2)$: En effet les limitations des pentes relatives par l'angle $\alpha < \frac{\pi}{18}$ entraînent que la projection $c'_id'_i$ de C_iD_i sur $\Delta(M_2)$ est un intervalle complémentaire de la projection de $E.S(M_0)$ sur $\Delta(M_2)$; si $c'_id'_i$ n'était pas un intervalle complémentaire de la projection de $E.\Sigma(M_2)$ sur $\Delta(M_2)$, il existerait un point F_i de $E\Sigma.(M_2)$ se projetant entre c'_i et d'_i; le choix de ρ entraînerait alors que F_i soit intérieur à la sphère $S(M_0)$; donc $c'_id'_i$ ne pourrait être un intervalle complémentaire de la projection de $E.S(M_0)$ sur $\Delta(M_2)$, contrairement à ce qu'on a vu.

En résumé, tout segment contigu à $E.S(M_0)$ ou à $E.S(M_1)$ est contigu à $E.\Sigma(M_2)$; les arcs de raccordement construits à partir de ces segments font donc partie de $\Gamma(M_2)$; donc $\Gamma(M_2)$ contient $\gamma(M_0)$ et $\gamma(M_1)$, ce qui montre bien que $\gamma(M_0)+\gamma(M_1)$ est un arc simple à tangente continue.

Or comme E est fermé, tous ses points sont intérieurs à un nombre fini de sphères $S(M)$; donc E est contenu dans la somme d'un nombre fini d'arcs $\gamma(M)$; soient $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ ces arcs et soit $F=\sum\gamma_i$.

Si P est un point quelconque de F, les résultats précédents montrent que P possède sur F un voisinage contenu dans $\gamma(P)$, donc un de ces voisinages est un arc simple. Donc toute composante connexe de F est, soit un arc simple fermé, soit une courbe simple fermée, à tangente continue; ces composantes sont en nombre fini.

Montrons que chacun des arcs simples éventuels pris parmi ces composantes peut être prolongé en une courbe simple fermée plate :

Soit C l'un de ces arcs, δ sa distance à $(F - C)$ et R, S ses extrémités. On peut trouver deux points R′, S′ tels que

$$RR' = SS' < \frac{\delta}{4},$$

les segments RR′ et SS′ formant avec C un arc simple C′ à tangente continue. On joint alors R′ à S′ par une ligne polygonale d'un nombre fini de côtés, située à une distance $< \frac{\delta}{2}$ de C, de telle sorte que cette ligne forme avec C′ une courbe simple fermée C″. Puis on remplace dans C″ les voisinages des sommets de la ligne polygonale par de petits arcs de cercle de raccordement. La ligne C‴ obtenue est la courbe cherchée.

Soit F′ l'ensemble déduit de F par ces prolongements; deux courbes simples fermées de F′ sont disjointes, par construction, ce qui termine la démonstration du théorème.

5. **Mesure des espaces plats.** — La structure locale des espaces plats suggère qu'on peut sans doute leur attribuer localement une longueur finie.

1° *Cas des espaces connexes.* — Un tel espace peut toujours être décomposé en un nombre dénombrable d'arcs simples fermés, ayant deux à deux au plus une extrémité en commun, tout triangle inscrit dans un de ces arcs ayant une courbure $< \varepsilon < \frac{\pi}{4}$.

Soit $\widehat{AB}$ un tel arc.

Pour tout η, on peut trouver une suite finie de points de $\widehat{AB}$

$$A_0, A_1, \ldots, A_n, \qquad \text{avec } A_0 \equiv A; \qquad A_n \equiv B$$

et

$$A_i A_{i+1} < \eta \qquad [i = 0, 1, \ldots, (n-1)],$$

ces points étant numérotés dans l'ordre de rencontre de A vers B sur $\widehat{AB}$.

On peut montrer, par un procédé classique [1], que $\sum_i A_i A_{i+1}$ tend vers une limite finie ou infinie, indépendante des points A_i

---

[1] *Voir* Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, p. 62, Paris, 1928.

choisis, lorsque η tend vers o. On appelle cette limite : longueur de $\widehat{AB}$.

Si M et N sont deux points quelconques de $\widehat{AB}$, avec $\widehat{AM} \subset \widehat{AN}$, on a vu au paragraphe 3 *a*, que $\widehat{AMN} > \pi - \varepsilon$; un calcul simple montre que $MN < \frac{AN - AM}{\cos \varepsilon}$; donc toute ligne polygonale γ inscrite dans $\widehat{AB}$ et d'extrémités A, B a une longueur l_γ telle que $AB \leqq l_\gamma < \frac{AB}{\cos \varepsilon}$.

Donc $\widehat{AB}$ a une longueur finie l comprise entre AB et $\frac{AB}{\cos \varepsilon}$.

Quand $\varepsilon \to 0$, $\frac{l}{AB} \to 1$. On peut donc énoncer :

Théorème IV. — *Tout espace métrique connexe plat peut être divisé en une infinité dénombrable d'arcs simples ayant une longueur finie; sur chacun d'eux, tout arc infiniment petit est uniformément équivalent à sa corde.*

Corollaire. — *Tout espace métrique plat, compact et connexe a une longueur finie.*

2° *Cas des espaces non connexes.* — Soient E un tel espace, M un de ses points, V(M) un voisinage borné de M dans lequel tout triangle inscrit a une courbure $< \varepsilon < \frac{\pi}{4}$.

En reprenant la démonstration et les notations du paragraphe 2, on voit aisément que l'ensemble W peut, pour tout nombre η, être divisé en un nombre fini d'ensembles de diamètre $< \eta$, la somme des diamètres de ces ensembles étant inférieure à $\frac{d}{\cos \varepsilon}$, en désignant par d le diamètre de W.

Or on peut définir ainsi la longueur d'un espace métrique F :

Supposons que, pour tout nombre η, F puisse être recouvert par un nombre dénombrable d'ensembles $U_k(\eta)$ de diamètre $d_k < \eta$. Soit alors $L(\eta)$ la borne inférieure de la somme $\sum_k d_k$ pour tous les recouvrements relatifs à η. $L(\eta)$ est une fonction non décroissante de η. Nous noterons :

Longueur extérieure de F $= \lim_{\eta \to 0} [L(\eta)]$.

Dans le cas où F est un arc simple, on peut montrer que sa longueur est la même avec cette définition qu'avec la définition basée sur les polygones inscrits.

Pour l'ensemble W, la remarque précédente montre que sa longueur extérieure est inférieure à $\frac{d}{\cos \varepsilon}$. On peut donc énoncer :

Théorème V. — *Tout espace métrique plat possède en chacun de ses points un voisinage de longueur extérieure finie; pour un point donné, le rapport de la longueur extérieure d'un voisinage, au diamètre de ce voisinage, est inférieur à un nombre qui tend vers* 1 *quand ce diamètre tend vers* 0.

Corollaire. — *Tout espace métrique compact plat a une longueur finie.*

6. **Généralisations.** — Tous les résultats de ce chapitre sont susceptibles de se généraliser immédiatement par les mêmes méthodes, à des espaces que l'on peut appeler « plats d'ordre n ».

Prenons par exemple $n = 2$. Pour tout tétraèdre cartésien, il existe un plan tel que le plus grand des angles de ce plan avec les arêtes du tétraèdre soit minimum; si α est ce minimum, on appellera 2α la courbure du tétraèdre.

On dira qu'un espace métrique est plat d'ordre 2 en un point M si tout 4-points inscrit dans E et éventuellement isométrique à un tétraèdre cartésien, a une courbure qui tend vers 0 quand ses sommets tendent vers M.

On peut montrer que si l'espace métrique E est plat d'ordre 2 au point M, ce point possède dans $\hat{E}$ un voisinage homéomorphe à un ensemble plan fermé borné : La démonstration est analogue à celle du paragraphe 2 (deuxième méthode); il faut introduire deux points P_1 et P_2 qui jouent le rôle du point P de la démonstration du paragraphe 2.

Après avoir défini l'aire d'un espace métrique, on peut montrer que si E est plat d'ordre 2 en M, si l'on désigne par $V(\rho)$ l'ensemble des points de E situés à une distance $\leqq \rho$ du point M, le rapport : $\frac{\text{aire}(V_\rho)}{\pi\rho^2}$ est inférieur à un nombre qui tend vers 1 quand $\rho \to 0$.

Pour les ensembles cartésiens uniformément plats d'ordre 2 se pose, comme pour l'ordre 1, le problème de les plonger dans des variétés à deux dimensions douées d'un plan tangent continu. Nous réserverons cette question pour la deuxième partie de ce travail, à cause des développements qu'elle exige.

Remarque. — Nous avons défini les espaces métriques plats d'ordre 2 sans supposer ces espaces tétraédraux. On aurait pu de même définir les espaces plats d'ordre 1 en les supposant simplement doués d'un écart régulier ne satisfaisant pas forcément à l'inégalité triangulaire; la plupart des propriétés des espaces plats se conservent alors, mais un arc simple plat suivant cette nouvelle définition peut avoir une longueur nulle :

Exemple. — Les points de E sont ceux d'un segment de droite $[0; 1]$; si x, y sont deux points de ce segment repérés par leurs abscisses, on pose dans E

$$\text{dist.}(x, y) = |x - y|^n \qquad (n > 1).$$

Des singularités analogues se produisent dans les espaces métriques plats d'ordre 2 qui ne sont pas tétraédraux.

CHAPITRE IV.

ESPACES MÉTRIQUES SEMI-PLATS.

1. Notions préliminaires. — L'étude qui va suivre a pour origine un fait sur lequel nous reviendrons en détail dans la deuxième partie et qui, dans un cas particulier consiste en ceci : Sur toute géodésique d'une surface à plan tangent continu de $\mathcal{E}_3$, le rapport de la longueur des arcs à leur corde tend vers 1 quand leur diamètre tend vers zéro.

Il en résulte que si ABC est un triangle inscrit dans cette géodésique, le rapport de son plus grand côté à la somme des deux autres tend vers 1 lorsque ce plus grand côté tend vers zéro; on vérifie aisément qu'il est équivalent de dire que le plus petit angle du triangle tend vers zéro en même temps que le diamètre de ce triangle.

En conformité avec les idées directrices de l'introduction, nous allons faire une étude des géodésiques en nous basant sur cette seule propriété; nous étudierons ainsi du même coup une classe assez vaste de courbes qui, nous le verrons, ne sont pas forcément rectifiables.

Afin de pouvoir appliquer nos résultats aux géodésiques relatives à des métriques plus générales, de Finsler par exemple, nous ferons le moins d'hypothèses possible sur la métrique des ensembles étudiés.

Définitions. — 1. On appelle « *épaisseur* » d'un triangle la valeur de son plus petit angle.

2. On dit que l'espace métrique E est *semi-plat* au point d'accumulation M de E lorsque l'épaisseur des triangles inscrits dans E tend vers o quand leurs trois sommets tendent vers M.

On dit que E est semi-plat lorsqu'il est semi-plat en tout point.

On dit que E est uniformément semi-plat lorsque l'épaisseur des triangles inscrits dans E tend uniformément vers o avec leur diamètre.

3. On dit qu'un espace métrique E est d'*épaisseur* α lorsque tout triangle inscrit dans E a une épaisseur au plus égale à α.

4. On appelle *coefficient de déformation* d'un arc simple cartésien $\widehat{AB}$ le rapport de la distance au sens de Fréchet [1] entre $\widehat{AB}$ et AB, à la longueur AB.

2. **Structure topologique des espaces semi-plats.** — La structure topologique des espaces semi-plats s'étudie entièrement par les mêmes méthodes que celles employées pour les espaces plats.

On montre d'abord, en s'appuyant sur le corollaire des théorèmes I et II du Chapitre I, que si E est semi-plat en M, ce point possède dans $\hat{E}$ un voisinage homéomorphe à un ensemble linéaire fermé borné.

Il suffit alors d'utiliser le dernier théorème du Chapitre II, paragraphe 4 pour énoncer :

Théorème I. — *Si* E *est un espace métrique semi-plat, il existe un espace métrique* E_1 *tel que* $E \subset E_1 \subset \hat{E}$, E_1 *étant une somme topologique d'espaces dont chacun est homéomorphe,*

---

[1] Fréchet, *Les espaces abstraits*, p. 154; Paris, 1928.

soit à une courbe simple fermée, soit à un ensemble linéaire fermé, borné ou non.

Si E *est uniformément semi-plat, on peut prendre* $E_1 \equiv \hat{E}$.

Corollaire. — Même énoncé que pour les espaces plats, en changeant l'expression « plat » en « semi-plat ».

Autre méthode. — Nous avons dû, pour énoncer le théorème précédent, utiliser complètement le théorème II du Chapitre I. Nous allons le retrouver par une méthode plus directe, qui nous renseignera en même temps sur la structure métrique locale des espaces semi-plats.

Soit E un espace métrique semi-plat en M; l'espace $\hat{E}$ est aussi semi-plat en M; donc il existe un voisinage V(M) de M dans $\hat{E}$ qui est d'épaisseur α $\left(\text{pour tout } \alpha < \frac{\pi}{3}\right)$. D'après le théorème I du Chapitre I, V(M) est compact, si l'on a pris V(M) fermé dans $\hat{E}$, ce qui est toujours possible.

On est donc ramené à étudier les espaces compacts d'épaisseur α. Si l'on peut montrer que toute composante connexe d'un tel espace est un arc simple ou un point, il résultera du lemme 3 du théorème II (Chapitre I) et d'un résultat déja invoqué de M. Cohen (Chapitre I, paragraphe 6) que cet espace est homéomorphe à un ensemble linéaire fermé borné.

3. **Représentation schématique plane.** — Soit E un espace métrique compact d'épaisseur α. Si l'on avait $\alpha = 0$, le théorème du Chapitre II, paragraphe 1, montre que E serait, soit isométrique à un ensemble linéaire, soit un 4-points tordu. La question se pose de savoir si cette conclusion varie continuement avec les hypothèses, autrement dit si l'on a une conclusion analogue lorsque α est petit. Nous avons besoin pour cela d'une représentation schématique de E.

Soient d le diamètre de E et A, B deux points de E distants de d; soient, dans un plan de référence, deux points a, b tels que $ab = d$, et Π l'un des demi-plans déterminés par la droite ab. A tout point M de E on associe le point m de Π tel que le triangle amb soit isométrique à AMB. On dira que m est l'image de M

(un même point m pouvant d'ailleurs être l'image de plusieurs points M).

Comme E est d'épaisseur α, l'image de E est située dans une région Δ de Π limitée par ab, deux segments portés par des demi-droites faisant un angle α avec ab, et deux arcs de cercle de rayon d centrés en a et b.

Nous avons obtenu la structure des espaces d'épaisseur $\alpha = 0$ en écrivant que dans tout triangle MNP où $MN \geqq MP \geqq NP$, on a

$$MN = MP + NP.$$

Lorsque l'espace est d'épaisseur $\alpha \neq 0$, cette égalité doit être remplacée par

$$MN = MP + NP - \theta.\omega.MN, \qquad \text{avec } 0 \leqq \theta \leqq 1 \qquad \text{et} \qquad \omega = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

En utilisant cette nouvelle égalité on arrive, par un calcul assez fastidieux, mais facile, au résultat suivant :

1. *Ou bien pour deux points quelconques* P *et* Q *de* E, *on a*

$$|PQ - pq| < 3\omega.d.$$

2. *Sinon* E *se décompose en quatre ensembles disjoints* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, *de diamètres inférieurs à* $2\omega d$, *tels que* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *contiennent* A *et* B *respectivement et tels que si* α, β, γ, δ *sont des points quelconques de* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, *respectivement, on ait :*

$$d - \alpha\beta < \omega d; \qquad d - \gamma\delta < \omega d; \qquad |\alpha\gamma - \beta\delta| < 2\omega d; \qquad |\alpha\delta - \beta\gamma| < 2\omega d.$$

En faisant dans ces inégalités $\omega = 0$. on retrouve les résultats relatifs aux espaces aplatis. Il y a donc bien continuité des conclusions.

Remarque. — Lorsque α est assez petit, le deuxième cas ci-dessus n'est évidemment pas possible pour les espaces connexes. Donc ceux-ci possèdent un caractère de régularité que ne possèdent pas toujours les autres.

La présence de 4-points tordus ou plus généralement « α-tordus » (¹) entraîne pour l'espace une concentration au

(¹) Cette expression qualifie les configurations obtenues dans le deuxième cas ci-dessus.

voisinage des sommets de ces 4-points. Voici un exemple d'espace semi-plat E où ce caractère est poussé à l'extrême :

Soit $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_i, \ldots$ une suite infinie de nombres positifs inférieurs à 1 et tendant vers zéro. Les points de E sont les suites infinies :

$$a_1\, a_2 \ldots a_i \ldots \qquad (\text{avec } a_i = 1, 2, 3 \text{ ou } 4).$$

La distance des deux points $(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots)$ est égale à : $p \times \theta_0 . \theta_1 \ldots \theta_n$, n étant le nombre de chiffres de la tranche initiale maxima qui est la même dans les deux suites $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$, p étant égal à 2 ou 1 suivant que a_{n+1} et b_{n+1} sont de même parité ou de parités distinctes.

On montre aisément que E est homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor, et qu'il est uniformément semi-plat.

E a pour diamètre $2\theta_0$ et se décompose en quatre ensembles de diamètre $2\theta_0\theta_1$ tels que si A, B, C, D en sont 4 points respectifs, ils forment un 4-points tordu avec :

$$\theta_0 = \mathrm{AC} = \mathrm{CB} = \mathrm{BD} = \mathrm{DA} = \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{\mathrm{CD}}{2};$$

il en est de même pour chacun de ces ensembles, et ainsi de suite.

On conçoit que la présence dans un espace d'épaisseur α de 4-points α-tordus modifie beaucoup sa structure métrique. La structure de cet espace apparaît donc comme résultant d'un dosage de 4-points α-tordus et de 4-points « α-alignés ». Pour conserver aux espaces non connexes leur caractère « linéaire » local, il faudrait éliminer les 4-points α-tordus.

Voici une façon de le faire : (ABCD) étant un 4-points de E, soit $d = \mathrm{AB}$ son diamètre et l la plus petite des sommes $(\mathrm{AC} + \mathrm{CD} + \mathrm{DB})$, $(\mathrm{AD} + \mathrm{DC} + \mathrm{CB})$; appelons $\frac{l-d}{d}$ « épaisseur » du 4-points (ABCD) ; on réalise la restriction demandée en imposant par exemple à l'épaisseur des 4-points inscrits dans E de tendre vers zéro avec leur diamètre.

Nous n'utiliserons d'ailleurs pas cette remarque, car nous étudierons surtout les espaces connexes.

4. Structure métrique locale des espaces compacts quelconques. — Soient E un espace métrique compact d'épaisseur α, M un point de E, et $\mathrm{E}(\rho)$ l'ensemble des points de E situés à la distance ρ de M.

Si A et B sont deux points de $E(\rho)$, le triangle isocèle AMB a son angle en M au plus égal à α ou au moins égal à $\pi - 2\alpha$. Le point A étant fixe, soit $e_1(\rho)$ l'ensemble des points B de $E(\rho)$ tels que :

$$\widehat{AMB} \leqq \alpha \qquad \text{et soit} \qquad e_2(\rho) = E(\rho) - e_1(\rho).$$

Si P et P′ sont deux points de $e_2(\rho)$, on a $\widehat{PMP'} \leqq \alpha$, sinon $\widehat{PMP'} \geqq \pi - 2\alpha$ et alors $2\rho \cos\alpha \leqq AP, AP', PP' \leqq 2\rho$, ce qui entraînerait pour le triangle PAP′ d'avoir une épaisseur supérieure à α, du moins dès que $\alpha < \arccos(-1 + \sqrt{3}) \# 43°$.

Un raisonnement analogue montre que si P et P′ sont dans $e_1(\rho)$ et $e_2(\rho)$ respectivement, on a $\widehat{PMP'} \geqq \pi - 2\alpha$; et que si P et P′ sont dans $e_1(\rho)$, on a $\widehat{PMP'} \leqq \alpha$.

Donc $e_1(\rho)$ et $e_2(\rho)$ ne dépendent pas de A et l'on peut énoncer le résultat :

Théorème II. — *Dès que* $\alpha < \arccos(-1 + \sqrt{3})$, *il existe une partition unique de* $E(\rho)$ *en deux ensembles* $e_1(\rho)$ *et* $e_2(\rho)$ *tels que* $\widehat{PMP'} \leqq \alpha$ *ou* $\widehat{PMP'} \geqq \pi - 2\alpha$ *suivant que* P *et* P′ *font partie d'un même* $e_i(\rho)$ *ou de deux* $e_i(\rho)$ *différents.*

Lorsque ρ varie, ces deux ensembles varient continuement, en ce sens que si ρ tend vers ρ_0, on peut numéroter convenablement les ensembles $e_i(\rho)$ pour que l'on ait $\widehat{PMP'} \leqq \alpha + \varepsilon$ ou $\widehat{PMP'} \geqq \pi - 2\alpha - \varepsilon$ suivant que P et P′ sont ou non dans un seul des deux ensembles $[e_1(\rho) + e_1(\rho_0)]$, $[e_2(\rho) + e_2(\rho_0)]$, ε tendant vers zéro avec $(\rho - \rho_0)$.

Si donc il existe un nombre ρ_0 tel que pour $0 < \rho \leqq \rho_0$ les deux ensembles $e_1(\rho)$ et $e_2(\rho)$ ne soient jamais vides, on peut par continuité donner un numérotage bien défini à $e_1(\rho)$ et $e_2(\rho)$ dès que les ensembles $e_i(\rho_0)$ sont numérotés.

5. **Structure métrique locale des espaces compacts connexes.** — Soient E un espace compact connexe d'épaisseur $\alpha < 43°$ et M un point de E. Quand on fait varier ρ de $+\infty$ à 0, la connexité de E entraîne que tout ensemble $e_i(\rho)$, dès qu'il existe pour une valeur ρ_0 de ρ, existe et varie continuement pour les valeurs de $\rho < \rho_0$;

sinon E pourrait être décomposé en deux ensembles à la fois ouverts et fermés.

Lorsque, pour tout ρ, $E(\rho)$ se réduit à un seul ensemble $e_i(\rho)$, on dit que M est une extrémité de E; sinon on dit que M est intérieur à E.

Dans ce dernier cas, posons $c_i = \sum_\rho e_i(\rho)$ ($i = 1$ ou 2); les deux ensembles $(c_i + M)$ sont fermés et ont pour intersection M, donc ils sont connexes et M est une extrémité de chacun d'eux.

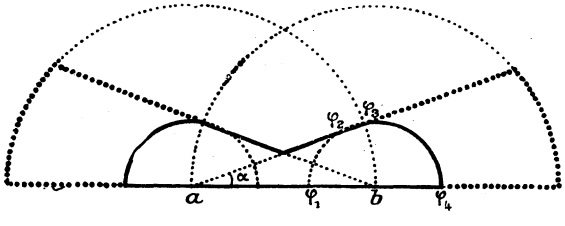
Donc tout point M de E est, soit une extrémité de E, soit une extrémité commune à 2 continus dont l'intersection est M et la somme E.

Si A et B sont deux points de E, soient $c_1(A)$ et $c_2(A)$ les deux continus déterminés par A; l'un deux, soit $c_1(A)$, contient B; le point B partage $c_1(A)$ en deux continus $c'_1(B)$ et $c'_2(B)$ dont l'un contient A. Donc E est partagé en 3 continus (éventuellement vides) par A et B, l'un deux ayant pour extrémités A et B.

Étudions la structure de ce continu Γ d'extrémités A et B.

Dans le demi-plan de référence Π, à partir des points a, b images de A et B, soit γ l'image de Γ; γ est évidemment un continu et, par hypothèse, il est coupé par le cercle (a, ab) suivant un

Fig 2.



ensemble dont tous les points sont distants de b d'au plus $2 . ab . \sin \frac{\alpha}{2}$; de même pour le cercle (b, ab); donc γ est entièrement situé dans le contour figuré, partie en gros pointillé, partie en trait plein, sur la figure 2.

On a donc : diamètre $(\Gamma) \leqq 3 . ab = 3 . AB$. Or si M est un point de Γ équidistant de A et B, on voit sur le schéma que $\widehat{AMB} \geqq \pi - 2\alpha$,

donc M est point intérieur de Γ; M divise Γ en deux continus d'extrémités respectives (M, A) et (M, B), avec

$$MA = MB = \frac{AB}{2\cos\alpha} \qquad (\text{avec } 2\cos\alpha > 1).$$

En répétant ce procédé de division indéfiniment, on voit que Γ est un arc simple d'extrémités A et B puisqu'on peut le décomposer en un nombre fini de continus de diamètres arbitrairement petits, et formant une chaîne régulière entre A et B.

Revenons à l'espace E; un point intérieur quelconque A de E partage E en deux continus E_1 et E_2; on peut trouver sur E_1 une suite dénombrable de points partout dense; un point M de cette suite détermine un arc $\widehat{AM}$ unique; soit E'_1 la somme de tous ces arcs; par construction, E'_1 est partout dense sur E_1 et c'est un arc semi-ouvert ou fermé. Si E'_1 est fermé, il est identique à E_1; si E'_1 est ouvert, soit B_1 un point de $(E_1 - E'_1)$; l'arc $\widehat{AB_1}$ de E_1 est partout dense sur E_1 et il est fermé, donc il est identique à E_1. De même pour E_2; donc E est un arc simple.

Nous avons donc démontré, par *une méthode constructive*, en ne faisant aucun appel aux théorèmes du Chapitre I, le résultat suivant :

Tout espace métrique compact, connexe et d'épaisseur α est un arc simple, pour tout α tel que $\alpha < \text{arc cos}(-1+\sqrt{3})$.

Précision. — Nous avons vu qu'un arc $\widehat{AB}$ d'épaisseur α a un diamètre au plus égal à 3.AB. On peut améliorer cette inégalité.

Dans le schéma du demi-plan II, considérons le contour en trait plein, limité en partie par 2 arcs de cercle de rayon $\rho_0 = 2ab.\sin\frac{\alpha}{2}$ centrés en a et b; γ ne peut avoir de points extérieurs à ce contour. Supposons en effet que γ ait des points sur les arcs $\widehat{\varphi_1\varphi_2}$ et $\widehat{\varphi_3\varphi_4}$; soient m et n deux tels points; on a

$$an - am \geqq 4.ab.\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

pour les points correspondants M et N de $\widehat{AB}$, on a donc

$$MN \geqq 4.ab.\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Or

$$BM = BN = 2ab \sin\frac{\alpha}{2}, \qquad \text{donc } \widehat{MBN} \geqq \alpha.$$

Comme l'égalité $\widehat{MBN} = \alpha$ est possible, on n'aboutit pas à une impossibilité; mais celle-ci apparaîtrait si l'on augmentait arbitrairement peu le rayon $e_0 = 2 . ab . \sin\frac{\alpha}{2}$.

Donc si P_1 et P_2 sont deux points quelconques de $\widehat{AB}$, on a

$$P_1P_2 \leqq (AP_1 + AP_2) \qquad \text{et} \qquad (BP_1 + BP_2),$$

d'où

$$P_1P_2 \leqq \frac{1}{2}[AP_1 + BP_1 + AP_2 + BP_2],$$

Or le schéma montre que

$$AP_i + BP_i \leqq ab + 2\rho_0 = ab\left(1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\right) \qquad \text{pour } i = 1 \text{ ou } 2,$$

donc

$$P_1P_2 \leqq ab\left(1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

d'où

Théorème III. — *Le diamètre d'un arc $\widehat{AB}$ d'épaisseur α est au plus* (1) *égal à* $AB\left(1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

6. Quasi-symétrie des arcs semi-plats.

Définition. — On dit que deux ensembles F et F′ d'un espace métrique E sont quasi-symétriques par rapport au point I de E, s'il existe une homéomorphie entre F et F′ telle que si M et M′ sont deux points homologues quelconques, $\frac{IM}{IM'}$ tende vers 1 et $\widehat{MIM'}$ tende vers π lorsque M tend vers I.

Cette homéomorphie est dite alors : *une quasi-symétrie.*

---

(1) On peut améliorer cette borne supérieure de même qu'on peut préciser le domaine dans lequel est située l'image de $\widehat{AB}$ dans Π. Il serait intéressant de déterminer le diamètre maximum des arcs d'épaisseur α et de corde donnée, ainsi que le domaine minimum de Π qui contient les images de tous les arcs $\widehat{AB}$ d'épaisseur α.

Théorème IV. — *Tout arc simple semi-plat en un point intérieur est divisé par ce point en deux arcs quasi-symétriques par rapport à ce point.*

Démonstration. — Soit C un arc simple semi-plat au point I intérieur à C. Il existe un sous-arc $\widehat{AIB}$ de C d'épaisseur

$$\alpha < \arccos(-1 + \sqrt{3}).$$

Soit d un nombre inférieur à IA et IB; soit, sur l'arc $\widehat{IA}$, A_n le premier point à partir de I qui soit à la distance $\frac{d}{n}$ de I ($n = 1, 2, \ldots$); on définit de même B_n sur $\widehat{IB}$.

Établissons entre $\widehat{IA}$ et $\widehat{IB}$ une homéomorphie H qui fasse correspondre I à lui-même et A_n à B_n ($n = 1, 2, \ldots$).

Les résultats des paragraphes 4, 5 montrent que H est une quasi-symétrie entre les A_n et les B_n; soit maintenant a un point de $\widehat{A_nA_{n+1}}$, b son homologue sur $\widehat{B_nB_{n+1}}$ et α l'épaisseur de $\widehat{A_nB_n}$; dans le triangle IA_nA_{n+1}, on a

$$\widehat{A_nIA_{n+1}} < \alpha, \qquad \text{d'où} \qquad A_nA_{n+1} < \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\right);$$

donc

$$\text{diamètre } \widehat{A_nA_{n+1}} < \left(1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Donc la distance de a à A_n (resp. b à B_n) est avec IA_n dans un rapport qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$; donc

$$\frac{Ia}{Ib} \to 1 \quad \text{et} \quad \widehat{aIb} \to \pi \qquad \text{lorsque} \qquad \frac{1}{n} \to 0.$$

Le théorème annoncé en résulte aussitôt.

Remarque. — Pour les arcs non semi-plats, mais d'épaisseur α connue, il existe en tout point une quasi-symétrie d'ordre α aisée à formuler.

7. Prolongement des arcs semi-plats. — Le théorème précédent nous renseigne sur la structure locale d'un arc semi-plat en un point intérieur; ce théorème ne s'appliquant pas aux extrémités,

une différence dans la structure locale de l'arc au voisinage d'un point intérieur et d'une extrémité semble possible à priori. Nous allons voir qu'il n'en est rien.

Lemme. — *Si l'espace métrique* E *est la somme de deux arcs simples* $\widehat{IA}$ *et* $\widehat{IB}$ *semi-plats en* I *et quasi-symétriques par rapport à* I, *ce point* I *possède dans* E *un voisinage qui est un arc simple semi-plat en* I, *et dont* I *est point intérieur.*

Démonstration. — Le point I est un point isolé de l'intersection de $\widehat{IA}$ et $\widehat{IB}$; sinon, soit $\{M_i\}$ une suite de points de cette intersection, tendant vers I. Le point M_i étant considéré comme situé sur $\widehat{IA}$, soit M'_i son quasi-symétrique sur $\widehat{IB}$; M_i et M'_i sont, sur l'arc $\widehat{IB}$, $\frac{IM_i}{IM'_i} \to 1$ et $\widehat{M_iIM'_i} \to \pi$ quand $M_i \to I$, donc $M_iM'_i$ est équivalent à $2IM_i$, ce qui est incompatible avec le fait que le diamètre des arcs $\widehat{IM_i}$ et $\widehat{IM'_i}$ est équivalent à leur corde, lorsqu'ils sont infiniment petits.

La structure topologique de E en I en résulte aussitôt.

La démonstration du fait que E est semi-plat en I est presque immédiate dans le cas où E a une métrique tétraédrale; elle est plus délicate dans le cas général. Nous allons en donner le principe en traitant complètement un cas limite; la démonstration générale s'en déduira en introduisant quelques ε, et en se souvenant que, si $\widehat{AB}$ est un arc simple d'épaisseur α, on a, pour tout point P de $\widehat{AB}$,

$$AP + BP = AB[1 + \theta.\eta(\alpha)] \qquad \text{avec } 0 < \theta < 1,$$

$\eta(\alpha)$ tendant vers zéro avec α.

Supposons que $\widehat{IA}$ et $\widehat{IB}$ soient isométriques à un même segment de droite, la distance des points a et b de ces arcs tels que $Ia = Ib$, étant égale à $2Ia$, pour tout point a; nous allons montrer que cette symétrie par rapport à I entraîne que $\widehat{Ia} + \widehat{Ib}$ soit isométrique à un segment.

Nous noterons les points par leur distance à I; soit a un point de $\widehat{IA}$ et x un point variable de $\widehat{IB}$ avec $x < a$. Posons dist.$(a, x) = f(x)$; $f(x)$ est une fonction continue et telle que $f(0) = a$; $f(a) = 2a$.

Pour $x_1 < x_2$, on doit avoir l'inégalité triangulaire

$$f(x_1) \leqq f(x_2) + (x_2 - x_1) \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 1;$$

donc $f(x)$ a ses nombres dérivés supérieurs droits au plus égaux à 1. Comme sur l'intervalle $(0, a)$, la variation de $f(x)$ est égale à a, $f(x)$ a donc 1 pour dérivée à droite en tout point; donc

$$f(x) = \text{dist.}(a, x) = a + x.$$

E est donc bien isométrique à un segment.

Nous allons voir maintenant que tout arc simple $\widehat{IA}$ semi-plat en I peut être prolongé en un arc semi-plat en I et dont I est point intérieur; nous n'imposons d'ailleurs pas à l'arc prolongé d'être situé dans un espace métrique donné, question qui sera examinée seulement pour les arcs cartésiens.

Définition. — Étant donnés un espace métrique E et un point I de E, on appelle *espace prolongé de* E *par rayonnement autour de* I, et l'on note $E_r(I)$, l'espace métrique suivant :

Ses points sont ceux de E et ceux d'un espace E′ en correspondance biunivoque avec E, I étant le seul point double de cette correspondance. La distance de deux points de E est donnée par la métrique de E; la distance de deux points de E′ est égale à celle de leurs homologues dans E; la distance d'un point M de E à un point M′ de E′ est égale à IM + IM′.

Cette métrique satisfait à l'inégalité triangulaire : Soient par exemple M_1 et M_2 deux points de E, M′ un point de E′.

On a

$$|IM_1 - IM_2| < M_1M_2 < IM_1 + IM_2.$$

Or

$$M_1M' = IM_1 + IM'; \qquad M_2M' = IM_2 + IM',$$

d'où

$$|M_1M' - M_2M'| < M_1M_2 < |M_1M' + M_2M'|.$$

Exemple. — Si E est homéomorphe à un plan, $E_r(I)$ est homéomorphe à un cône de révolution à deux nappes.

Quel que soit E, les sous-ensembles E et E′ de $E_r(I)$ sont isométriques et quasi-symétriques par rapport à I. Il résulte donc du lemme précédent le théorème :

Théorème V. — *Si un arc simple* E *d'extrémité* I *est semi-plat en* I, *l'espace* $E_r(I)$ *prolongé de* E *par rayonnement autour*

de I *est aussi semi-plat en* I *et* $E_r(I)$ *est un arc simple dont* I *est point intérieur.*

Corollaire. — *Si l'arc* E *est semi-plat, l'arc* $E_r(I)$ *est aussi semi-plat.*

Pour certains espaces E, il existe d'autres prolongements plus naturels que le précédent.

Définitions. — 1° On dit qu'un espace métrique E est tétraédral en un de ses points I lorsque tout 3-points de E forme avec I un 4-points isométrique à un tétraèdre cartésien.

2° On appelle *espace prolongé d'un espace* E *tétraédral en* I, *par symétrie par rapport à* I, et l'on note $E_s(I)$ l'espace métrique suivant :

Ses points sont ceux de E et ceux d'un espace E′ en correspondance biunivoque avec E, I étant *un des points doubles* de la correspondance. La distance de deux points de E est donnée par la métrique de E; la distance de deux points de E′ est égale à celle de leurs homologues dans E. La distance d'un point M_1 de E à un point M'_2 de E′ s'obtient ainsi : On construit dans un plan un triangle im_1m_2 isométrique à IM_1M_2, on prend le symétrique m'_2 de m_2 par rapport à i, et l'on pose $M_1M'_2 = m_1m'_2$.

Comme tout triangle $M_1M_2M_3$ de E forme avec I une figure tétraédrale, il en est de même de $M_1M_2M'_3$, ce qui montre que la métrique définie satisfait bien à l'inégalité triangulaire.

Les points doubles de la correspondance entre E et E′ sont les points de tous les couples A, B de E tels que

$$IA = IB = \frac{AB}{2}.$$

Les ensembles isométriques E, E′ sont quasi-symétriques par rapport à I.

Si E est un arc simple d'extrémité I et semi-plat en I, la structure locale de E en I élimine les points doubles au voisinage de I, d'où le théorème :

Théorème VI. — *Si un arc simple d'extrémité* I *est tétraédral et semi-plat en* I, *l'espace* $E_s(I)$ *prolongé de* E *par symétrie par rapport à* I *est semi-plat en* I *et admet en* I *un voisinage qui est un arc simple dont* I *est point intérieur.*

8. Mesure des espaces semi-plats.

Définition. — Soit $\varphi(d)$ une fonction continue et croissante de d, avec $\varphi(0) = 0$. Supposons que pour tout nombre $\eta > 0$, l'espace métrique E puisse être recouvert par un nombre dénombrable d'ensembles $U_k(\eta)$ de diamètre $d_k < \eta$.

Soit alors $\mathfrak{M}(\eta)$ la borne inférieure de la somme $\sum_k \varphi(d_k)$ pour toutes les décompositions de E en ensembles $U_k(\eta)$; $\mathfrak{M}(\eta)$ est une fonction non décroissante de η. Nous noterons

$$\text{Mesure d'ordre } \varphi(d) \text{ de E} = \mathfrak{M}_{\varphi(d)}(E) = \lim_{\eta \to 0} [\mathfrak{M}(\eta)].$$

Lemme. — *Tout espace métrique* E *d'épaisseur* α *telle que* $\omega = 2 \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{8}$, *a une mesure nulle d'ordre* d^{1+r} *dès que* $r > \dfrac{\log(1+8\omega)}{\log\left(\dfrac{2}{1+8\omega}\right)}$.

Il suffit évidemment de démontrer le lemme pour les espaces E de diamètre fini. Or si d est le diamètre d'un espace d'épaisseur α, il résulte immédiatement du résultat du paragraphe 3, que cet espace peut être décomposé en deux ensembles de diamètre inférieur à

$$\frac{d}{2} + 4\omega d = \frac{d(1+8\omega)}{2}.$$

Or $1 + 8\omega < 2$, donc si E a un diamètre borné, on peut par divisions successives, le décomposer en un nombre fini d'ensembles de diamètre inférieur à un nombre η arbitraire : Soient $U_k(\eta)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ les ensembles d'une telle décomposition et

$$S(\eta) = \sum_k (d_k)^{1+r}.$$

Tout ensemble $U_k(\eta)$ peut être décomposé en deux ensembles de diamètre inférieur à $\frac{d_k(1+8\omega)}{2}$; la somme $S'(\eta)$ relative à cette nouvelle décomposition est telle que

$$S'(\eta) < 2\, S(\eta) \left(\frac{1+8\omega}{2}\right)^{1+r}.$$

Si

$$\left(\frac{1+8\omega}{2}\right)^{1+r} < \frac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad r > \frac{\log(1+8\omega)}{\log\left(\frac{2}{1+8\omega}\right)},$$

on obtient donc, par décompositions successives, des sommes $S(\eta)$ arbitrairement petites. Les quantités $\mathfrak{M}(\eta)$ sont donc nulles, d'où le lemme.

Remarquons que $\dfrac{\log(1+8\omega)}{\log\left(\frac{2}{1+8\omega}\right)} \to 0$ quand $\omega \to 0$; donc si un espace est semi-plat en un point I, il existe, quel que soit $r > 0$, un voisinage de I dont la mesure d'ordre d^{1+r} est nulle.

Il résulte alors du théorème du paragraphe 2, le théorème suivant :

Théorème VII. — *Tout espace métrique* E, *séparable et semi-plat, a une mesure nulle d'ordre d^{1+r} pour tout $r > 0$* (1).

Remarque. — La présence dans un espace d'épaisseur α, de 4-points α-tordus, diminue la mesure de cet espace; par exemple l'ensemble construit au paragraphe 3 a une mesure nulle d'ordre d^r pour tout $r > 0$.

La question se pose maintenant d'étudier la mesure des espaces semi-plats pour des fonctions $\varphi(d)$ dont l'ordre de croissance est compris entre celui de d et de d^{1+r} (pour tout r). L'étude des arcs cartésiens semi-plats nous permettra d'élucider cette question.

CHAPITRE V.

ARCS SIMPLES CARTÉSIENS SEMI-PLATS.

Le fait pour un espace semi-plat d'être isométrique à un ensemble cartésien élimine de cet espace certaines configurations

(1) Ce théorème ainsi que son lemme nous renseignent sur les triangles inscrits dans un espace métrique, lorsque la mesure d'ordre d^{1+r} de cet espace n'est pas nulle.

Plus spécialement, on sait que, dans tout ensemble plan d'aire intérieure non nulle, on peut inscrire des triangles équilatéraux et même de forme quelconque. La question se pose de savoir s'il en est de même des ensembles plans de mesure d'ordre d^r infinie pour tout $r < 2$.

rencontrées par ailleurs : soient par exemple A, B, C, D un 4-points cartésien d'épaisseur α; ces points sont sommets d'un tétraèdre : soit AB sa plus grande arête. Si l'on représente schématiquement [1] ce 4-points dans un plan Π à partir des points a, b (avec $ab = \mathrm{AB}$), il est immédiat que

$$|\mathrm{CD} - cd| \leqq 2\,\mathrm{AB}\sin\alpha;$$

donc un tel 4-points ABCD ne peut être α-tordu [2].

1. Caractérisation des arcs simples semi-plats. — Nous avons déjà remarqué le caractère « linéaire » local des espaces semi-plats; nous pouvons préciser beaucoup ici cette remarque.

Lemme. — *Tout arc simple cartésien d'épaisseur α a un coefficient de déformation* [3] *au plus égal à* $(\omega + 2\omega^2)$, *avec* $\omega = 2\sin\frac{\alpha}{2}$.

Soit $\widehat{\mathrm{AB}}$ un tel arc; divisons le segment AB en n parties égales par les points successifs $\mathrm{A}_0 \equiv \mathrm{A}$, A_1, ..., A_i, ..., $\mathrm{A}_n \equiv \mathrm{B}$; en parcourant $\widehat{\mathrm{AB}}$ de A vers B, soit a_i le premier point rencontré qui se projette orthogonalement en A_i sur AB. Comme tout point de $\widehat{\mathrm{AB}}$ est situé à une distance de AB au plus égale à $\omega.\mathrm{AB}$, on a

$$a_{i-1}a_i \leqq \sqrt[2]{\left(\frac{\mathrm{AB}}{n}\right)^2 + (2\omega.\mathrm{AB})^2} = \mathrm{AB}\sqrt[2]{\frac{1}{n^2} + 4\omega^2}.$$

Comme tout point de l'arc $\widehat{a_{i-1}a_i}$ est situé à une distance du segment $a_{i-1}a_i$ au plus égale à $\omega.a_{i-1}a_i$ et que tout point du segment $a_{i-1}a_i$ est situé à une distance de $\mathrm{A}_{i-1}\mathrm{A}_i$ au plus égale à $\omega.\mathrm{A}_{i-1}\mathrm{A}_i$, la distance maximum entre un point de $\widehat{a_{i-1}a_i}$ et un point de $\mathrm{A}_{i-1}\mathrm{A}_i$ est au plus égale à

$$\omega.\mathrm{AB} + \omega.a_{i-1}a_i + \mathrm{A}_{i-1}\mathrm{A}_i \leqq \mathrm{AB}\left[\omega + \omega\sqrt{\frac{1}{n^2} + 4\omega^2} + \frac{1}{n}\right] = \delta.$$

---

(1) *Voir* Chap. IV. § 3.

(2) Cette remarque montre que les ensembles cartésiens non connexes n'ont pas de propriétés très différentes de celles des ensembles connexes. Il serait intéressant de voir si tout ensemble cartésien fermé, borné, semi-plat est un sous-ensemble d'un nombre fini de courbes simples fermées semi-plates.

(3) *Voir* Chap. IV, § 1. *Définitions.*

Établissons une homéomorphie quelconque entre $\widehat{AB}$ et AB, qui fasse correspondre a_i à A_i (pour $i = 0, 1, \ldots, n$). L'inégalité ci-dessus montre que la distance entre deux points homologues reste inférieure ou égale à δ. Or δ tend vers $AB(\omega + 2\omega^2)$ quand $n \to \infty$, d'où le lemme.

Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un arc simple cartésien* Γ *soit semi-plat est que le coefficient de déformation des sous-arcs de* Γ *tende uniformément vers* 0 *avec leur diamètre.*

Démonstration. — Comme l'épaisseur des sous-arcs de Γ tend vers 0 avec leur diamètre, la nécessité de la condition résulte du lemme précédent.

D'autre part, soient a, b, c trois points de Γ, c étant sur l'arc $\widehat{ab}$; si Δ est le coefficient de déformation de $\widehat{ab}$, la distance de c à ab vaut au plus $\Delta . ab$, donc l'épaisseur du triangle abc vaut au plus arc tang (2Δ); d'où la suffisance de la condition.

Remarque. — Appelons « écart relatif » d'un arc $\widehat{\alpha\beta}$, le rapport de h à $\alpha\beta$, h étant la distance maximum d'un point de $\widehat{\alpha\beta}$ à $\alpha\beta$.

On peut alors remplacer dans le théorème l'expression « coefficient de déformation » par « écart relatif ».

2. Quasi-symétrie et prolongement des arcs semi-plats. — La quasi-symétrie des arcs semi-plats par rapport à chacun de leurs points intérieurs a été montrée de façon générale; pour les arcs cartésiens, cette quasi-symétrie entraîne, qu'*en tout point les contingents antérieur et postérieur sont symétriques par rapport à ce point.*

Tout arc semi-plat peut être prolongé en chacune de ses extrémités. Ce résultat se précise ici : Soit $\widehat{IA}$ un arc simple cartésien semi-plat en I, et $\widehat{IA}$ le symétrique de $\widehat{IA}$ par rapport à I. Une démonstration identique à celle du Chapitre IV, paragraphe 7, montre que l'ensemble $\widehat{IA} + \widehat{IA}'$ est au voisinage de I un arc simple semi-plat en I, et dont I est point intérieur.

Donc, le fait pour un point d'un arc cartésien semi-plat,

d'être intérieur à cet arc, n'entraîne aucune précision sur les propriétés de ses voisinages.

Remarque. — Si $\widehat{IA}$ est un arc *plan*, semi-plat en I, une partie du résultat précédent se généralise : Si $\widehat{IA}'$ est l'arc déduit de $\widehat{IA}$ par une rotation quelconque autour de I, le point I est point isolé de $\widehat{IA}.\widehat{IA}'$. Tout se passe comme si $\widehat{IA}$ avait une allure rectiligne au voisinage de I.

3. Représentation canonique locale des arcs semi-plats. — Nous verrons mieux la forme locale d'un arc semi-plat en donnant de cet arc une représentation canonique.

Soit $\widehat{IA}$ un arc cartésien semi-plat en I; posons $IA = d$, et soit A_i ($i = 1, 2, \ldots$) le premier point de $\widehat{IA}$ qu'on rencontre à partir de I et tel que $IA_i = \frac{d}{2^i}$. Lorsque i_0 est assez grand, la ligne brisée $A_{i_0}A_{i_0+1}\ldots A_{i_0+k}\ldots$ est évidemment un arc simple d'extrémité I. L'angle de deux côtés consécutifs de cette ligne tend vers o avec $\frac{1}{k}$ parce que $\widehat{IA}$ est semi-plat en I. On peut faire disparaître les points anguleux de cette ligne par de petits arcs de cercle de raccordement; on obtient alors un arc simple $\widehat{Ia}$ tel que l'angle $\vec{V}$ de la tangente en un de ses points M avec le rayon IM, tende vers o avec IM. De plus, toute sphère (I, ρ) coupe l'ensemble $\widehat{IA} + \widehat{Ia}$ suivant un ensemble de diamètre d tel que $\frac{d}{\rho}$ tende vers o avec ρ; cet arc $\widehat{Ia}$ donne donc une bonne image simplifiée de $\widehat{IA}$ en I. Nous allons voir que $\widehat{Ia}$ est semi-plat en I.

Lemme. — *Tout arc simple cartésien* $\widehat{IA}$, *ayant une tangente en tout point* M *distinct de* I, *et tel que l'angle de cette tangente avec* IM *tende vers* O *avec* IM, *est semi-plat en* I.

Il existe évidemment un sous-arc $\widehat{IA}'$ de IA qui n'est coupé qu'en un seul point par toute sphère de centre I; sur un tel arc on a, avec les notations classiques, $ds = \frac{d\rho}{\cos V}$, et si M_1 et M_2 sont

deux points de $\widehat{IA'}$ on a

$$\widehat{M_1M_2} = \left| \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{d\rho}{\cos V} \right|,$$

donc

$$\frac{\widehat{M_1M_2}}{|\rho_1 - \rho_2|} \to 1 \qquad \text{lorsque} \qquad \rho_1 \text{ et } \rho_2 \to 0.$$

Comme $|\rho_1 - \rho_2| \leqq M_1M_2 \leqq \widehat{M_1M_2}$, on voit que M_1M_2, $\widehat{M_1M_2}$ et $|\rho_1 - \rho_2|$ sont des infiniment petits équivalents lorsque ρ_1 et $\rho_2 \to 0$. Donc, si $M_1M_2M_3$ est un triangle inscrit dans $\widehat{IA'}$, le rapport de son périmètre à son plus grand côté tend vers 2 lorsque ses sommets tendent vers I, donc son épaisseur tend vers 0.

Le théorème suivant résulte du lemme et des propriétés de l'arc $\widehat{Ia}$:

Théorème II. — *A tout arc cartésien* $\widehat{IA}$ *semi-plat en* I, *on peut associer un arc* $\widehat{Ia}$ *semi-plat en* I, *rectifiable, ayant en tout point* M *distinct de* I *une tangente continue qui fait avec* IM *un angle tendant vers* 0 *avec* IM, *et tel que l'ensemble* $\widehat{IA} + \widehat{Ia}$ *soit coupé par la sphère* (I, ρ) *suivant un ensemble de diamètre* $\rho.\varepsilon(\rho)$ $[\varepsilon(\rho) \to 0$ *avec* $\rho]$.

Un tel arc $\widehat{Ia}$ fournit ce qu'on appelle *une représentation canonique* de $\widehat{IA}$.

Corollaire. — *On peut prolonger tout arc cartésien semi-plat* C *en une courbe fermée semi-plate* C_1, *telle qu'en tout point de* $(C_1 - C)$ *existe une tangente qui varie continuement sur* $(C_1 - C)$.

Cas des arcs plans. — Soit $\widehat{Ia}$ un arc plan fournissant une représentation canonique de l'arc plan $\widehat{IA}$ semi-plat en I.

Soit $\theta = \theta(\rho)$ l'équation polaire de $\widehat{Ia}$ dans un système de coordonnées polaires de pôle I. On a $\operatorname{tang} \hat{V} = \frac{\rho}{\rho'}$; comme $\hat{V}$ tend vers 0 avec ρ, l'équation de $\widehat{Ia}$ s'écrit

$$\rho \frac{d\theta}{d\rho} = f(\rho) \qquad \text{ou} \qquad \theta = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho \qquad (\text{avec } \rho \text{ et } \rho_0 > 0),$$

$f(\rho)$ étant une fonction continue qui s'annule pour $\rho = 0$.

Inversement, toute fonction de cette forme fournit un arc semi-plat en tout point, et dont les sous-arcs infiniment petits ont une longueur équivalente à leur corde.

Exemple I. — $\frac{f(\rho)}{\rho^p}$ (avec $p > 0$) reste borné en module quand $\rho \to 0$. Alors $\theta(\rho)$ a une limite quand $\rho \to 0$. Donc la courbe a une tangente en I.

Exemple II [1]. — $f(\rho) = \frac{-1}{2\sqrt{\log\left(\frac{1}{\rho}\right)}}$. On trouve la courbe $\rho = e^{-\theta^2}$.

Exemple III. — On trouvera des courbes ayant en I un paratingent incomplet en choisissant convenablement $f(\rho)$ parmi les fonctions de signe variable.

Exemple :

$$f(\rho) = \frac{\sin\left[\log_2\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]}{\log\left(\frac{1}{\rho}\right)};$$

on trouve

$$\theta = \cos\left[\log_2\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

Le paratingent et le contingent constituent ici un angle de deux radians.

Ces divers exemples, joints au fait qu'on peut toujours prolonger un arc semi-plat par symétrie, montrent qu'en un point intérieur à un arc semi-plat, il peut ne pas y avoir de tangente; nous verrons que l'ensemb de tels points peut former tout un résiduel de l'arc.

4. Mesure des arcs plans semi-plats. Théorème d'existence. — Nous allons examiner ici le problème que nous nous sommes posé à la fin du Chapitre IV à propos de la mesure des espaces semi-plats.

---

[1] L'exemple $\rho = e^{-\theta^2}$ a été donné par M. Bouligand comme exemple d'une courbe spirale dont les arcs infiniment petits sont équivalents à leur corde [*Voir* Bouligand, *Essai sur l'unité des méthodes directes*, § 29 (*Mém. S. R. de Liège*, t. 29)].

Définition. — Nous dirons que la fonction $\varphi(d)$ est normale et définit une mesure d'ordre $\varphi(d)$ normale lorsque :

1° $\varphi(d)$ est une fonction continue, croissante et convexe, définie pour $0 \leqq d \leqq d_0$, avec $\varphi(0) = 0$.

2° $\frac{\varphi(d)}{d}$ et $\frac{d^{1+r}}{\varphi(d)}$ tendent vers 0 avec d, pour tout $r > 0$.

3° Il existe un nombre positif k_0 différent de 1, tel que

$$\frac{\varphi(k_0 d)}{k_0 \varphi(d)} \to 1 \quad \text{quand} \quad d \to 0.$$

La condition (3) est naturelle et ne sert qu'à régulariser le mode de croissance de $\varphi(d)$; on montre en effet aisément que toute fonction $\varphi(d)$ vérifiant les deux premières conditions, est telle que pour tout nombre $k > 1$, on ait

$$\frac{\varphi(kd)}{k\varphi(d)} > 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{d \to 0} \left[\frac{\varphi(kd)}{k\varphi(d)}\right] = 1.$$

Nous voulons démontrer le théorème suivant.

Théorème III. — *Pour toute mesure d'ordre $\varphi(d)$ normale, il existe des arcs plans semi-plats Γ dont tout sous-arc infiniment petit a une mesure d'ordre $\varphi(d)$ équivalente à $\varphi(\varepsilon)$, ε étant la corde de cet arc.*

Corollaire. — *La mesure de Γ peut s'obtenir comme limite des sommes $\sum_k \varphi(d_k)$ relatives à des partitions quelconques de Γ en un nombre fini d'arcs simples, sous la seule condition que le maximum des diamètres de ces arcs tende vers* 0.

Démonstration. — Lemme 1. — *Si $\varphi(d)$ est normale, on a, pour tout $k > 0$, $\lim_{a \to 0} \left[\frac{\varphi(kd)}{k\varphi(d)}\right] = 1$. Cette limite est atteinte uniformément lorsque k est compris entre deux nombres positifs non nuls.*

Lorsque l'égalité du lemme est vérifiée pour un nombre k, elle l'est évidemment aussi pour son inverse. Supposons donc $k_0 < 1$.

On a

$$\lim_{d \to 0} \left[\frac{\varphi(k_0 d)}{k_0 \varphi(d)}\right] = 1; \qquad \lim_{a \to 0} \left[\frac{\varphi(k_0^2 d)}{k_0 \varphi(k_0 d)}\right] = 1,$$

d'où

$$\lim_{d \to 0} \left[\frac{\varphi(k_0^2 d)}{k_0^2 \varphi(d)} \right] = 1,$$

et de façon générale

$$\lim_{d \to 0} \left[\frac{\varphi(k_0^n d)}{k_0^n \varphi(d)} \right] = 1.$$

Soit alors k un nombre inférieur à 1 ; il existe un entier n tel que $k_0^n < k < 1$. Or la convexité de $\varphi(d)$ entraîne, comme le montre clairement un graphique de la fonction, que

$$\frac{\varphi(k_0^n d)}{k_0^n \varphi(d)} < \frac{\varphi(kd)}{k\varphi(d)} < \frac{\varphi(d)}{\varphi(d)} = 1.$$

Comme

$$\lim_{d \to 0} \left[\varphi \frac{(k_0^n d)}{k_0^n \varphi(d)} \right] = 1,$$

le lemme est démontré pour tout $k < 1$, donc aussi pour k quelconque. L'uniformité de la convergence résulte de la dernière inégalité écrite.

Lemme 2. — *Lorsque $\varphi(d)$ est normale, l'équation*

$$5^n \varphi\left(\frac{p_n}{5^n}\right) = \varphi(d_0)$$

est vérifiée par un nombre p_n unique tel que

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + \alpha_{n+1},$$

les nombres positifs α_n tendant vers 0 avec $\frac{1}{n}$, et la série $\sum_n \alpha_n$ étant divergente.

On peut poser $p_1 = 1 + \alpha_1$, avec $\alpha_1 > 0$. Supposons le lemme démontré pour tout entier jusque n inclus.

L'équation

$$\varphi\left(\frac{p_{n+1}}{5^{n+1}}\right) = \frac{\varphi(d_0)}{5^{n+1}}$$

a évidemment une solution unique en p_{n+1}. Il résulte de la convexité de $\varphi(d)$ que

$$\frac{1}{5}\frac{p_n}{5^n} < \frac{p_{n+1}}{5^{n+1}} < \frac{p_n}{5^n} \qquad \text{ou} \qquad 1 < \frac{p_{n+1}}{p_n} < 5.$$

Posons

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + \alpha_{n+1}.$$

On a, en formant le rapport membre à membre des égalités qui définissent p_n et p_{n+1},

$$\frac{\varphi\left(\frac{p_n}{5^n}\right)}{5\varphi\left(\frac{p_{n+1}}{5^{n+1}}\right)} = 1.$$

Donc

$$\frac{\varphi\left(\frac{p_n}{5^n}\right)}{5\frac{p_n}{p_{n+1}}\varphi\left(\frac{p_{n+1}}{5^{n+1}}\right)} = 1 + \alpha_{n+1};$$

Or le premier membre de cette égalité est de la forme $\frac{\varphi(kd)}{k\varphi(d)}$, avec $k = \frac{5p_n}{p_{n+1}}$; il tend uniformément vers 1 puisque k est compris entre 1 et 5; donc α_{n+1} tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

Si la série $\sum_n \alpha_n$ était convergente, p_n aurait une limite finie p_∞.

Or

$$\frac{\varphi\left(\frac{p_n}{5^n}\right)}{\left(\frac{p_n}{5^n}\right)} = \frac{\varphi(d_0)}{p_n}.$$

On aurait donc

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\varphi\left(\frac{p_n}{5^n}\right)}{\left(\frac{p_n}{5^n}\right)}\right] = \frac{\varphi(d_0)}{p_\infty}.$$

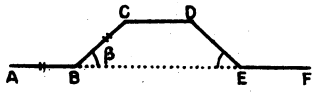
Ceci est en contradiction avec la deuxième propriété fondamentale de $\varphi(d)$. Donc $p_n = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2), \ldots, (1+\alpha_n)$ tend vers l'infini avec n.

Construction d'un arc simple Γ. — 1° Puisque α_n tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$, on peut toujours supposer d_0 assez petit pour que tous les α_n soient inférieurs à un nombre α_0 donné.

A partir d'un segment arbitraire AF, de longueur l, construisons

une ligne brisée ABCDEF dont tous les côtés sont égaux, B et E étant sur AF, et CD étant parallèle à AF (*fig.* 3).

Fig. 3.



Si l'on pose

$$\widehat{CBE} = \beta \qquad \text{et} \qquad AB = l',$$

on a

$$l = 3\,l' + 2\,l' \cos\beta,$$

Posons

$$\frac{5\,l'}{l} = 1 + \alpha.$$

On trouve

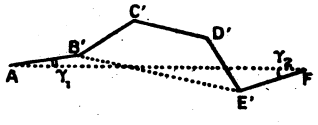
$$\left(2 \sin \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{5\alpha}{1+\alpha}.$$

Si l'on a pris $\alpha_0 < \frac{2}{3}$, il correspond alors à tout α_n de notre suite ci-dessus un angle aigu β_n qui tend vers o avec α_n. Quand α_n est petit, β_n est équivalent à $\sqrt{5\alpha_n}$, donc la série $\sum_n \beta_n$ diverge.

On va maintenant construire à partir de AF une ligne brisée AB′C′D′E′F dont les côtés sont égaux à la longueur l' ci-dessus, mais dont on impose la valeur des angles γ_1 et γ_2 de AB′ et E′F avec AF (γ_1 et γ_2 sont $\geqq$ ou $<$ o).

Les points B′ et E′ sont bien déterminés et l'on a B′E′ > BE; puis on construit C′ et D′ de façon que B′C′D′E′ soit un trapèze

Fig. 4.



isocèle. On a évidemment (*fig.* 4)

$$\hat{C}' = \hat{D}' > \hat{C} = \hat{D}$$

et

$$\widehat{AB'C'} = 2\pi - \left[\widehat{AB'E'} + \widehat{C'B'E'}\right] = \pi - \widehat{C'B'E'} + \pi - \widehat{AB'E'} > \hat{B} + \pi - \widehat{AB'E'}.$$

Donc

$$\pi - \widehat{AB'C'} < \pi - \hat{B} + \widehat{AB'E'} - \pi.$$

Or

$$\pi - \hat{B} = \beta \qquad \text{et} \qquad \left|\widehat{AB'E'} - \pi\right| = \widehat{B'AF} + \widehat{B'E', AF} \leqq \gamma_1 + \frac{l'(\gamma_1 + \gamma_2)}{l - 2l'},$$

d'où

$$\left|\pi - \widehat{AB'C'}\right| \leqq \beta + \gamma_1 + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{1 + 2\cos\beta} \leqq \beta + 3\gamma,$$

en désignant par γ la plus grande des valeurs absolues de γ_1 et γ_2.

On peut donc joindre A et F par une ligne polygonale de cinq côtés égaux à l' et telle que l'angle de deux côtés consécutifs ait un supplément au plus égal à $(\beta + 3\gamma)$.

Nous dirons que la ligne AB'C'D'E'F est la *ligne brisée construite sur* AF *et relative à* $(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$.

2° Nous supposons α_0 choisi de telle sorte que $\beta_0 < \frac{\pi}{14}$, ce qui est réalisé si $\alpha_0 < \frac{1}{100}$.

On se donne un segment AB de longueur d_0.

Le premier stade de la construction consiste à construire sur AB la ligne brisée relative à $(\alpha_1, 0, 0)$.

Supposons qu'au $n^{\text{ième}}$ stade de la construction, on obtienne une ligne polygonale L_n d'extrémités A et B, dont tous les côtés soient égaux, et dont tous les *angles de contingence* (supplément de l'angle de deux côtés consécutifs) soient inférieurs à $2\beta_0$.

Soient M un sommet de L_n, MM_1 et MM_2 les côtés qui y aboutissent. On a

$$\pi - 2\beta_0 < \widehat{M_1MM_2} \leqq \pi.$$

Traçons les deux demi-droites ML_1 et ML_2 qui ont même bissectrice intérieure que $\widehat{M_1MM_2}$ et pour lesquelles

$$\frac{\widehat{L_1ML_2}}{2} = \frac{\widehat{M_1MM_2}}{2} + \frac{\beta_{n+1}}{3},$$

à moins que $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{M_1MM_2}}{2}\right) < \frac{\beta_{n+1}}{3}$, auquel cas on prend pour ML_1

et ML_2 les deux demi-droites perpendiculaires à la bissectrice de $\widehat{M_1MM_2}$.

Aux deux extrémités du segment MM_1, par exemple, sont attachées par deux constructions analogues deux demi-droites faisant avec MM_1 des angles γ, γ' au plus égaux à $\frac{\beta_{n+1}}{3}$. Sur MM_1 on construit alors la ligne brisée relative à $(\beta_{n+1}, \gamma, \gamma')$; les angles de contingence de cette ligne pentagonale sont au plus égaux à $(\beta_{n+1} + 3\gamma$ ou $3\gamma') \leqq 2\beta_{n+1}$; d'autre part $\widehat{L_1ML_2} > \widehat{M_1MM_2}$; donc si l'on désigne par L_{n+1} la somme des lignes brisées ainsi construites sur les côtés de L_n, on voit que tous les angles de contingence de L_{n+1} sont inférieurs à $2\beta_0$.

Je dis que lorsque $n_0 \to \infty$, le maximum des angles de contingence de L_{n_0+1} tend vers o. D'une part, en effet, tout angle de contingence de la ligne construite sur un côté de L_{n_0} est au plus égal à $2\beta_{n_0+1}$ et l'on sait que $\beta_n \to o$ avec $\frac{1}{n}$. D'autre part, si M est un sommet de L_{n_0}, soit σ_n l'angle de contingence de M sur L_n (pour $n \geqq n_0$); à chaque stade de la construction, σ_n diminue de $\frac{\beta_{n+1}}{3}$ ou bien devient et reste nul; comme la série des β_n est divergente, σ_n est donc nul à partir d'une certaine valeur de n. Comme sur L_{n_0} il n'y a qu'un nombre fini de sommets M, il existe un entier N tel que sur L_N, tous les angles de contingence soient au plus égaux à $2\theta_{n_0}$, θ_{n_0} étant le plus grand des angles β_i pour $i > n_0$; comme $\theta_{n_0} \to o$ avec $\frac{1}{n_0}$, le résultat annoncé est démontré.

3° Nous voulons montrer que les lignes L_n ont une limite qui est un arc simple.

Désignons par P_0 le losange somme des deux triangles équilatéraux de base AB et supposons défini P_n jouissant des propriétés suivantes :

P_n est une somme de quadrilatères ayant pour diagonales les côtés de L_n, ces quadrilatères étant disjoints deux à deux à moins qu'ils ne soient construits sur deux côtés consécutifs de L_n, auquel cas ils ont en commun un sommet de L_n; si M_1M_2 est un côté de L_n, le quadrilatère $\{M_1M_2\}$ construit sur M_1M_2 est la somme de deux triangles M_1PM_2 et $M_1P'M_2$ symétriques par rapport

à M_1M_2; le triangle M_1PM_2, ou bien est équilatéral, ou bien a un angle à la base égal à $\frac{\pi}{3}$, l'autre, $\widehat{PM_1M_2}$ par exemple, étant compris entre $\frac{\pi}{3}$ et $\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{14} + \frac{\sigma}{2}\right)$, σ étant l'angle de contingence de L_n en M.

P_{n+1} se définit ainsi : M_1M_2 étant un côté de L_n, considérons l'arc $\widehat{M_1M_2}$ de L_{n+1}; il se compose de cinq côtés; on construit sur les trois côtés médians des quadrilatères sommes de deux triangles équilatéraux; sur les autres côtés, prenons le côté M_1N par exemple, on construit un quadrilatère formé d'un triangle M_1QN et de son symétrique par rapport à M_1N, avec $\widehat{QNM_1} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{QM_1N} = \widehat{PM_1M_2} - \gamma$, γ étant la valeur absolue de l'angle de M_1N avec M_1M_2. Soit P_{n+1} la somme de tous les quadrilatères ainsi construits sur les côtés de L_{n+1}; il résulte aisément de la limitation de α_0 que les cinq quadrilatères de P_{n+1} construits sur les côtés de l'arc $\widehat{M_1M_2}$ de P_{n+1}, par exemple, sont situés dans le quadrilatère $\{M_1M_2\}$; on montre de même que P_{n+1} jouit des propriétés énoncées ci-dessus pour P_n. On pourra donc définir P_{n+2}, etc.

On a $P_{n+1} \subset P_n$. On pose $\Gamma = \prod_n (P_n)$. Il est immédiat, comme le diamètre des quadrilatères de P_n tend vers o avec $\frac{1}{n}$, que Γ est un arc simple d'extrémités A et B; c'est aussi l'ensemble limite des lignes L_n.

4° L'arc Γ contient, pour tout n, les sommets de la ligne L_n. Soit M_1M_2 un côté de L_n; tout point de l'arc $\widehat{M_1M_2}$ de L_{n+1} est à une distance du segment M_1M_2 inférieure à

$$C_{n+1}\frac{\beta_{n+1}}{3} + C_{n+1}\left(2\beta_{n+1} + \frac{\beta_{n+1}}{3}\right) \leqq \frac{3C_n\beta_{n+1}}{5},$$

C_n et C_{n+1} étant respectivement les longueurs des côtés de L_n et L_{n+1}.

Le même raisonnement s'applique aux côtés de L_{n+1}, L_{n+2}, etc. Donc tout point de l'arc $\widehat{M_1M_2}$ de Γ est à une distance du seg-

ment $M_1 M_2$ inférieure à

$$\frac{3}{5} C_n \beta_{n+1} + \frac{3}{5} C_{n+1} \beta_{n+2} + \ldots + \frac{3}{5} C_{n+i} \beta_{n+1+i} + \ldots$$
$$< \frac{3}{5} k C_n \theta_n \left(1 + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{5^i} + \ldots\right),$$

θ_n désignant le plus grand des β_{n+i} ($i = 1, 2, \ldots$) et k un nombre positif fixe. L'écart relatif [1] de cet arc est donc inférieur à $\frac{3}{4} k \theta_n$.

Soient maintenant P, P′ deux points quelconques de Γ; soit n le plus petit entier tel que L_n ait deux sommets au moins sur $\widehat{PP'}$; L_n a alors neuf sommets au plus sur $\widehat{PP'}$; P et P′ sont donc sur un arc $\widehat{M_1 M_2}$ de Γ, $M_1 M_2$ étant un côté de L_{n-2}, et l'on a $PP' > \frac{M_1 M_2}{25}$.

Si donc P″ est un point quelconque de $\widehat{PP'}$, un calcul élémentaire montre que l'un des angles aigus du triangle PP′P″ a son sinus inférieur à $75\theta_{n-2}$. Or n tend uniformément vers l'infini lorsque $PP' \to 0$ puisque $M_1 M_2 < 25\, PP'$; d'autre part le diamètre du triangle PP′P″ tend vers O avec PP′ puisque Γ est un arc de Jordan; comme $\theta_{n-2} \to 0$ avec $\frac{1}{n}$, on peut donc affirmer que l'épaisseur des triangles inscrits dans Γ tend vers θ avec leur diamètre. *Donc* Γ *est un arc semi-plat.*

5° Montrons maintenant que la mesure selon $\varphi(d)$, de Γ est égale à $\varphi(d_0)$. Nous reprenons les notations du Chapitre IV, paragraphe 8.

Pour tout sous-ensemble $U_k(\eta)$ de Γ, on a

$$\text{diam.}[\overline{U_k(\eta)}] = \text{diam.}[U_k(\eta)] = d_k;$$

si a et b sont les extrémités de $\overline{U_k(\eta)}$ sur Γ, le diamètre δ_k de l'arc $\widehat{ab}$ est évidemment tel que $\frac{\delta_k}{d_k} \to 1$ lorsque $\eta \to 0$.

Donc si l'on s'astreint à choisir les $U_k(\eta)$ seulement parmi les sous-arcs de Γ, on ne modifie la fonction $\mathfrak{M}(\eta)$ que par un facteur qui tend vers 1 lorsque $\eta \to 0$; on ne modifie donc pas la mesure d'ordre $\varphi(d)$ de Γ.

---

[1] *Voir* la remarque du Chap. V, § 1.

D'autre part tout recouvrement de Γ par des sous-arcs contient un recouvrement fini; la mesure de Γ peut donc s'obtenir par des partitions de Γ en un nombre fini d'arcs ne se recouvrant pas.

Considérons une telle partition de Γ en arcs de diamètre $< \eta$, et soit $\widehat{PP'}$ l'un de ces arcs. On peut définir comme au n° 3 ci-dessus un arc $\widehat{M_1M_2}$ contenant $\widehat{PP'}$, tel que $\frac{1}{25} < \frac{PP'}{M_1M_2} < 1$, M_1 et M_2 étant deux sommets consécutifs d'une ligne L_{n-2}. D'après le lemme 1, on peut poser

$$\frac{\varphi(PP')}{\varphi(M_1M_2)} = \frac{PP'}{M_1M_2}(1+\varepsilon_1),$$

ε_1 tendant vers o avec η.

Or, convenons d'appeler « mesure provisoire » d'un arc quelconque $\widehat{ab}$ de Γ le nombre $\mu(\widehat{ab})$ ainsi défini : C'est la limite quand $n \to \infty$ de la somme $\Sigma\varphi(C_n)$ étendue à tous les côtés de L_n qui ont leurs sommets sur $\widehat{ab}$. Il résulte aisément de la définition des α_n et de la relation

$$\frac{1}{25} < \frac{PP'}{M_1M_2} < 1$$

que

$$\frac{\mu(\widehat{PP'})}{\mu(\widehat{M_1M_2})} = \frac{PP'}{M_1M_2}(1+\varepsilon_2),$$

ε_2 tendant vers o avec η. On a donc

$$\frac{\varphi(PP')}{\varphi(M_1M_2)} = \frac{\mu(\widehat{PP'})}{\mu(\widehat{M_1M^2})}\frac{(1+\varepsilon_1)}{(1+\varepsilon_2)}.$$

Or, par construction

$$\varphi(M_1M_2) = \mu(\widehat{M_1M_2}); \qquad \text{donc} \qquad \varphi(PP') = \mu(\widehat{PP'})\frac{(1+\varepsilon_1)}{(1+\varepsilon_2)}.$$

Donc, pour la partition considérée de Γ on a, compte tenu du fait que le diamètre des arcs infiniment petits de Γ est équivalent à leur corde

$$\sum_k \varphi(d_k) = \sum \mu(\widehat{PP'})\left(\frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2}\right)(1+\varepsilon_3) = (1+\varepsilon_4)\sum \mu(\widehat{PP'}),$$

les ε_3 et ε_4 tendant vers o avec η. Or

$$\sum \mu(\widehat{PP'}) = \mu(\Gamma) = \varphi(d_0).$$

L'égalité précédente montre donc que la mesure d'ordre $\varphi(d)$ de Γ vaut $\varphi(d_0)$ puisque cette mesure peut être approchée autant qu'on le veut par des sommes $\sum \varphi(d_k)$.

Le même raisonnement montre que la mesure de tout arc $\widehat{M_1M_2}$ de Γ est égale à sa mesure provisoire lorsque M_1 et M_2 sont deux sommets d'une ligne L_n; un passage à la limite montrerait qu'il en est de même de tout sous-arc de Γ.

On a vu que pour les arcs $\widehat{ab}$ infiniment petits, on a $\mu(\widehat{ab}) \sim \varphi(ab)$. Comme mesure de $\widehat{ab} = \mu(\widehat{ab})$, on a mesure de $\widehat{ab} \sim \varphi(ab)$; toutes les sommes $\sum \varphi(d_k)$ relatives à une partition quelconque de Γ en un nombre fini d'arcs, tendent donc vers la mesure de Γ lorsque la plus grande corde de ces arcs tend vers o.

Le théorème et son corollaire sont donc entièrement démontrés.

5. **Étude des tangentes aux arcs plans semi-plats.** — Soit C un arc plan semi-plat. Si C est un segment de droite, il possède une tangente en tout point.

Sinon, l'ensemble des directions des cordes des sous-arcs de C a la puissance du continu; soit alors MN une corde quelconque de C; il existe sur $\widehat{MN}$ un point P distinct de M et N en lequel la parallèle à MN laisse $\widehat{MN}$ tout entier d'un côté; comme $\widehat{MN}$ est semi-plat, ses contingents antérieur et postérieur au point P sont symétriques par rapport à P et, comme ils sont situés dans un même demi-plan, ils se réduisent à deux rayons opposés portés par la parallèle Δ à MN; $\widehat{MN}$ possède donc une tangente au point P. A deux cordes MN, de directions distinctes, correspondent deux points P distincts; comme d'autre part on peut répéter le même aisonnement sur tout arc de C, on peut énoncer :

Théorème IV. — *L'ensemble des points d'un arc plan semi-plat* C, *en lesquels* C *possède une tangente, est partout dense et a la puissance du continu sur tout sous-arc de* C.

Il résulte d'un théorème de M. A. S. Besicovitch (1) que l'ensemble des points d'un ensemble plan E, en lesquels E possède une tangente, est de longueur finie ou dénombrablement infinie (2). Ce théorème est directement applicable aux arcs semi-plats C. En tenant compte du fait qu'un ensemble de longueur finie a une mesure d'ordre $\varphi(d)$ nulle lorsque $\varphi(d)$ est normale, on peut énoncer :

Pour chacun des arcs Γ *construits au paragraphe* 4, *l'ensemble des points où* Γ *a une tangente a une mesure d'ordre* $\varphi(d)$ *nulle* (3).

Ce résultat souligne la complexité de ces arcs Γ semi-plats.

6. **Exemple singulier d'arc plan rectifiable semi-plat.** — Sur tout arc simple γ rectifiable, on sait que l'ensemble des points où γ n'a pas de tangente a une mesure nulle; mais cet ensemble peut être topologiquement très touffu, pendant que son complémentaire sera topologiquement très rare, même si l'arc γ est semi-plat. Nous allons le montrer par un cas extrême.

Théorème V (4). — *Il existe des arcs simples plans rectifiables semi-plats, dont les arcs infiniment petits sont équivalents à*

---

(1) Besicovitch, *On tangents to general sets of points* (*Fund. Math.*, 22, p. 49-53).

(2) Un ensemble est de longueur dénombrablement infinie s'il est la somme d'une suite dénombrable d'ensembles de longueur finie

(3) Il semble que sur tout arc plan semi-plat $\widehat{AB}$, l'ensemble des points où $\widehat{AB}$ a une tangente ait une longueur au moins égale à AB; cela serait à vérifier.

(4) Ce théorème donne une réponse à une question posée par M. Bouligand : il montre qu'on ne peut pas limiter l'ensemble des points où manque la tangente sur une courbe rectifiable dodt l'arc est un infiniment petit équivalent à la corde (*voir* Bouligand, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, p. 222, problème IV). Dans la IIe partie nous préciserods cette réponse en imposant à la courbe des conditions plus restrictives.

leur corde, et sur lesquels l'ensemble des points sans tangente forme tout un résiduel (¹).

Nous n'entrerons pas dans tous les détails de la construction, qui est analogue à celle des courbes Γ du paragraphe 4.

Appelons *arc élémentaire* (n, α), l'arc $\widehat{PQ}$ ainsi construit : Sur la spirale d'équation polaire $\rho = e^{-\theta^2}$, soit p le premier point à partir du pôle O, tel que l'arc $\widehat{Op}$ ait l'épaisseur α; puis, sur $\widehat{Op}$, soit P le premier point à partir de p en lequel la tangente soit perpendiculaire à la tangente en p.

La tangente en p étant orientée dans le sens de parcours de P vers p, portons sur cette tangente une longueur $pq = n.Pp$ (n entier positif) et soit $\widehat{qQ}$ le symétrique de $\widehat{pP}$ par rapport à la médiatrice de pq. L'arc simple $\widehat{PQ} = \widehat{Pp} + \widehat{pq} + \widehat{qQ}$ coupe orthogonalement l'Q. On voit aisément que l'épaisseur de $\widehat{PQ}$ tend vers o avec $\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)$.

A partir de $\widehat{PQ}$, on peut construire une courbe infinie de forme sinusoïdale : Il suffit de prendre le symétrique $\widehat{QP'}$ de $\widehat{PQ}$ par rapport à Q, et tous les arcs qui se déduisent de $\widehat{PQP'}$ par des translations de la forme $\pm k.\overrightarrow{PP'}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Prenons pour axes de coordonnées les droites : Px portée par PQ, et Py perpendiculaire à Px; soit $y = f_{(n,\alpha)}(x)$ l'équation de la courbe infinie construite.

L'arc semi-plat cherché L sera l'ensemble limite des arcs L_1, L_2, ..., L_n, ... d'extrémités A et B et ainsi définis :

L_i étant supposé construit, soit l_i sa longueur et r_i le minimum de son rayon de courbure aux points où il est défini; en tout point de L_i, on peut définir une normale orientée par continuité à partir de la normale en A orientée arbitrairement; si M est un point de L_i, tel que $\widehat{AM} = x$, et N un point de la normale en M à L_i, tel que $\overline{MN} = y$, on dira que N a pour coordonnées (x, y) par

(¹) Complémentaire d'un ensemble de première catégorie au sens de Baire.

rapport à L_i. Désignons d'autre part le diamètre de l'arc élémentaire $\left(i, \frac{1}{i}\right)$ par d_i; et par $\{x\}$ le plus petit entier au moins égal à x.

L_1 est l'arc élémentaire (1, 1) dont on désigne les extrémités par A, B. L_i étant supposé défini, L_{i+1} a pour équation par rapport à L_i

$$y = \frac{r_i}{i.d_{i+1}} f_{\left(i+1, \frac{1}{i+1}\right)} \left[x \frac{d_{i+1}}{l_i} \left\{ \frac{i.l_i}{r_i} \right\} \right].$$

Nous admettrons, la démonstration en étant longue et facile, que les arcs L_i ont un arc limite L. D'autre part un calcul simple montre que les l_i sont bornées supérieurement; donc L a une longueur finie, d'après un théorème classique de Hilbert [1]. On montre aussi que tout arc infiniment petit de L est équivalent à sa corde : D'après une remarque du Chapitre IV, paragraphe 1, L est donc un arc semi-plat.

Étudions l'ensemble des points où L a une tangente.

Sur l'arc L_i, soient M', M, M'' trois points d'intersection consécutifs de L_i et L_{i+1}. L'arc $\widehat{MM'}$ de L_i a une forme voisine de celle de l'arc élémentaire $\left(i, \frac{1}{i}\right)$; soit m_1 le premier point de $\widehat{MM'}$ à partir de M où la tangente fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec la tangente en M au même arc; soit m_2 le point analogue sur $\widehat{MM''}$. Si P est un point fixe quelconque de $\widehat{m_1 m_2}$ et Q un point variable sur $\widehat{MM'}$, la variation angulaire du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est au moins de $\frac{\pi}{4}$ lorsque Q parcourt $\widehat{MM'}$.

Or l'arc L_i converge très vite vers L; il y a donc des points de L dont la distance à P (ou à Q) est petite par rapport à $m_1 m_2$; si p et q sont deux tels points de L voisins de P et Q respectivement, le vecteur $\overrightarrow{pq}$ tourne d'un angle supérieur à $\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right)$ lorsque q varie sur L en restant à une distance de p inférieure à pM', ε tendant vers o avec $\frac{1}{i}$.

---

[1]) *Voir* Bouligand, *loc. cit.*

On voit donc que pour qu'en un point p de L il y ait une tangente, p ne doit pas être voisin, au sens précédent, d'arcs $\widehat{m_1 m_2}$ relatifs à une infinité de courbes L_i.

Revenons à l'arc $\widehat{m_1 m_2}$ de L_i, et soit n_1 (resp. n_2) l'un des points de L qui sont les plus voisins de m_1 (resp. m_2); pour tout nombre i, L contient ainsi un nombre fini d'arcs $\widehat{n_1 n_2}$ deux à deux disjoints, dont les longueurs ainsi que celles des arcs complémentaires tendent vers o avec $\frac{1}{i}$.

Pour i donné, soit m_i le minimum et M_i le maximum des diamètres des arcs $\widehat{n_1 n_2}$ et des arcs complémentaires; par construction $\frac{M_{i+1}}{m_i}$ tend vers o avec $\frac{1}{i}$; donc l'ensemble des points de L qui, à partir d'une valeur i_0 de i, ne sont situés sur aucun des arcs ouverts $\widehat{n_1 n_2}$ relatifs à L_i ($i > i_0$) est un ensemble fermé totalement discontinu.

Or une remarque faite ci-dessus montre qu'un point p de L en lequel L a une tangente ne peut être situé sur une infinité d'arcs $\widehat{n_1 n_2}$. Donc l'ensemble des points où L a une tangente est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles fermés totalement discontinus : c'est donc un ensemble de première catégorie et son complémentaire est bien un résiduel.

Remarque. — C'est la forme locale des courbes L_i qui entraîne les propriétés de L; L_i se présente sous forme d'une courbe formée d'arcs relativement longs et presque rectilignes réunis par de très petits arcs à forte courbure. La longueur des premiers éléments explique la densité métrique de l'ensemble des points avec tangente, mais la présence perturbatrice des seconds éléments empêche une structure topologique touffue pour cet ensemble.

(Manuscrit reçu le 2 novembre 1943.)