ARNAUD DENJOY

Les continus cycliques et la représentation conforme

Bulletin de la S. M. F., tome 70 (1942), p. 97-124
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1942__70__97_0>

LES CONTINUS CYCLIQUES ET LA REPRÉSENTATION CONFORME;

PAR M. ARNAUD DENJOY.

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

Si une région finie décrite par le point Z *est représentée conformément sur le cercle* C($|z| < 1$) *par la fonction*

$$Z = f(z) = \sum_{n \geqq 0} a_n z^n,$$

la condition nécessaire et suffisante pour que la série converge uniformément sur la circonférence $\Gamma(|z| = 1)$ *est que la frontière* H *de* R *soit un continu cyclique* (¹).

Toute courbe fermée simple de Jordan étant un continu cyclique, la proposition précédente contient le théorème bien connu de Fejér (²). La démonstration de ce dernier théorème est incluse dans celle du fait que la condition énoncée est suffisante.

Nous commencerons par rappeler les notions essentielles concernant les continus cycliques. Nous nous familiariserons ensuite avec les propriétés de ces figures en démontrant que la condition énoncée dans le théorème est nécessaire. Nous terminerons en établissant qu'elle est suffisante.

DÉFINITIONS DES CONTINUS CYCLIQUES.

J'ai donné le nom de *continu cyclique* (³) à des ensembles continus plans satisfaisant aux conditions de l'une ou l'autre de

(¹) *Comptes rendus*, 213, 1941, p. 975.

(²) L. FEJÉR, *Comptes rendus*, 156, 1913, p. 46 et *Münchner Sitzungsberichte*, 1910. On trouvera la démonstration du théorème de M. Fejér dans les *Leçons sur les familles normales* de M. Montel (Gauthier-Villars, 1927, p. 118).

(³) *Comptes rendus*, 197, 1933, p. 571 et p. 1987.

deux définitions, la première de nature géométrique, la seconde de nature analytique, dont j'ai établi l'équivalence. Voici ces définitions :

I. *Un continu cyclique est un continu uniforme frontière d'une région* R.

La *continuité uniforme* de H est entendue au sens suivant : Si petit que soit ε positif donné, on ne peut former dans H qu'un nombre fini de continus deux à deux disjoints et de diamètre supérieur à ε. Une *région* est, comme dans les éléments de la géométrie (région intérieure, région extérieure d'une ellipse, d'une parabole), un ensemble *ouvert* connexe.

Un des exemples les plus simples de continu cyclique est fourni par la courbe simple de Jordan définie, du point de vue précédent, comme étant un continu uniforme frontière commune et totale de deux régions. Un arc simple de Jordan est un continu cyclique, mais il ne divise pas le plan.

II. Voici la définition analytique du continu cyclique.

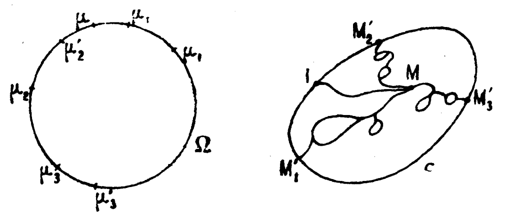
Le point M *décrivant le continu cyclique* H *est fonction d'un point* μ *parcourant un cercle* Ω *de façon que :*

1° M *est fonction uniforme et continue de* μ, *et l'ensemble* F(M) (éventuellement réduit à un point unique) constitué par les points μ de Ω correspondant à un même point M de H *est totalement discontinu*. F(M) est évidemment fermé.

2° *Si* M *et* M' *sont deux points distincts quelconques de* H, *l'ensemble* F(M') *est en totalité dans un arc de* Ω *contigu à l'ensemble* F(M), et réciproquement. (Il n'y a pas chevauchement des représentations de M et de M' sur Ω.)

3° *Si* μ_1, μ_2, μ_3 *sont trois points de* F(M), *extrémités d'arcs de* Ω *contigus à* F(M), deux de ces trois points pouvant se confondre avec un même point isolé de F(M), *si d'autre part les trois arcs-intervalles disjoints* $\mu_1\,\mu'_1$, $\mu_2\,\mu'_2$, $\mu_3\,\mu'_3$ *sont chacun en totalité sur un contigu à* F(M), *et s'il existe dans le plan de* H *une courbe simple de Jordan c* (par exemple un cercle de centre M) *contenant* M *dans sa région positive* (finie), *les images respectives* M'_1, M'_2, M'_3 *dans* H *de* μ'_1, μ'_2, μ'_3 *étant sur* c, *tandis que les images des arcs-intervalles*, $\mu_1\mu'_1$, $\mu_2\mu'_2$, $\mu_3\mu'_3$ de Ω *sont dans la région positive de* c, *si enfin la succession des points* μ'_1, μ'_2, μ'_3 *est directe sur* Ω, *la succession des points* M'_1, M'_2, M'_3 *est constamment rétrograde sur* c (ou constamment directe), indépendamment du choix des points M sur H, μ_1, μ_2, μ_3 sur F(M), μ'_1, μ'_2, μ'_3, vérifiant les autres conditions posées (*fig.* 1).

Fig. 1.



J'ai établi que cette troisième condition est indépendante du contour auxiliaire c, connaissant μ_1, μ_2, μ_3 et quand μ'_1, μ'_2, μ'_3 varient continûment sans cesser de satisfaire aux conditions posées ([1]).

On déduit de ces hypothèses que le lieu de M est un continu uniforme, frontière complète d'une région finie R (si la succession des points M'_1, M'_2, M'_3 sur c était directe en même temps que celle des arcs $\mu_1\mu'_1$, $\mu_2\mu'_2$, $\mu_3\mu'_3$ sur Ω, R serait infinie).

A tout point μ de Ω, il correspond à la fois un point M de H et un accès de ce point par un arc de Jordan IM, I étant sur c, l'arc IM étant intérieur à la fois à R sauf par son extrémité M et à la région finie de c, sauf par son extrémité I, de façon que, si $\mu_1\mu'_1$ et $\mu_2\mu'_2$ sont deux arcs de Ω du type indiqué plus haut [μ_1 et μ_2 sont dans F(M) et extrémités de contigus contenant μ'_1 et μ'_2 respectivement], séparés par le point μ (avec lequel peuvent coïncider μ_1 et μ_2), si enfin l'arc-intervalle $\mu_1\mu'_1$, le point μ, l'arc intervalle $\mu_2\mu'_2$ se succèdent dans cet ordre sur Ω parcouru dans

---

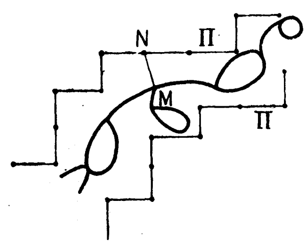
([1]) *Voir* la *Notice* sur mes travaux scientifiques, parue en 1934, p. 46 (Hermann, Paris).

le sens direct, il s'ensuit que les points M'_1, I, M'_2 se succèdent sur c dans le sens rétrograde (*fig.* 1).

La démonstration de ces propriétés demande trop de développements pour être exposée ici. Le lecteur, se reportant à mes Notes des *Comptes rendus* ([3]) reconstituera les raisonnements. Ceux-ci rappellent ceux dont j'ai usé dans l'une de mes démonstrations du théorème de Jordan sur les courbes fermées planes ([5]). Je me sers de ce lemme :

Si Π *est un polygone d'approximation* (formé de carrés fermés tous disjoints de H, tout carré frontière ayant un côté commun avec un carré fermé contenant un point de H) *simple, défini par un point fixe étranger à* H, *et qui parcouru dans le sens positif laisse* H *dans sa région négative* (infinie), *et si à chaque sommet* N *de* Π *on fait correspondre d'une part le point* M *de* H *le plus voisin de* N *parmi les points situés dans les carrés de sommet* N *et étrangers à* Π, *d'autre part le point unique* μ *de* Ω, *défini par le segment d'accessibilité* NM, *les points* μ *se succèdent sur* Ω *dans le même ordre que les sommets* N *sur* Π (*fig.* 2).

Fig. 2.

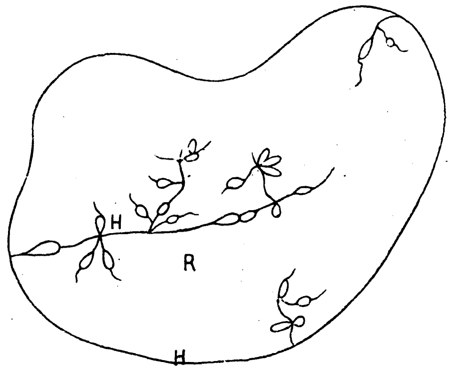


L'hydrographie suggère des images évoquant l'idée du continu cyclique. Celui-ci dessinera la carte d'une île contenant un ou divers bassins fluviaux deux à deux distants positivement. Dans chaque bassin un système de lignes du continu représente le fleuve, ses affluents, ses sous-affluents, chacun d'eux pouvant traverser une file de lacs, sans îles ni deltas (un affluent peut se

([5]) *Verslagenv. d. Kon. Akad. v. Wetenschappen te Amsterdam*, t. 7, juin 1918. Également *Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 389.

réduire à un lac), les rives de deux lacs quelconques étant sans contact, sauf éventuellement au point où un même cours d'eau passe de l'un des lacs dans l'autre, ou encore au point où deux affluents distincts traversant respectivement les deux lacs confluent pour se déverser dans un autre et même cours d'eau (*fig.* 3).

Fig. 3.



Considérons le plan du continu cyclique H et celui de la circonférence Ω comme parcourus par les affixes de deux variables complexes Z et z respectivement. Supposons que la circonférence Ω soit $|z| = 1$, que nous désignons par Γ. Donc μ est le point $e^{i\theta}$. L'affixe $Z = \varphi(\theta)$ d'un point M de H est une fonction continue de θ; $\varphi(\theta)$ peut être développé en série trigonométrique de θ. *A priori* on pourrait douter que cette série convergeât nécessairement quel que fût θ. Mais il n'y a plus d'incertitude, et la convergence de la série est en outre uniforme, si la correspondance (M, μ) est définie par la représentation conforme de la région R, limitée par H et supposée finie, sur l'intérieur C du cercle Γ.

La condition est nécessaire.

Nous devons établir que, la fonction $f(z) = \Sigma a_n z^n$ représentant conformément le cercle $C(|z| < 1)$ sur la région R de frontière H et décrite par $Z = f(z)$, *si la série* $\Sigma a_n e^{in\theta}$ *converge uniformément sur la circonférence* $\Gamma(|z| = 1)$, avec une somme égale à $\varphi(\theta)$ au point $\mu = e^{i\theta}$, *le lieu* H *du point* M, *affixe du nombre* $\varphi(\theta)$, *est un continu cyclique*. Nous écrirons $M = \varphi(\theta)$.

Nous montrerons d'abord que H satisfait à la définition géométrique des continus cycliques. Nous prouverons ensuite que H satisfait aussi à la définition analytique de ces figures.

Caractères géométriques de H. — Puisque la série $\Sigma a_n e^{in\theta}$ est uniformément convergente, le lieu H du point $M = \varphi(\theta)$ est un continu (nous considérons que tout continu doit être borné). H est la frontière de la région R. Donc H remplit la seconde condition géométrique des continus cycliques. Au surplus R, lieu du point $f(z)$, est une région finie, $f(z)$ étant évidemment bornée.

Il s'agit donc seulement de prouver que la continuité de H est uniforme. Cette propriété ne peut pas résulter de la seule continuité de la fonction $\varphi(\theta)$. La courbe de Hilbert passant par tous les points d'un carré Q montre que le lieu d'un point $\varphi(\theta)$ variant continûment avec l'argument θ d'un point de la circonférence Ω peut contenir une infinité même non dénombrable de continus deux à deux disjoints et tous supérieurs en diamètre à une même longueur ε (si dans l'exemple d'Hilbert ε est moindre que la diagonale du carré Q).

La continuité uniforme du continu H est une conséquence non seulement de la continuité de la fonction $\varphi(\theta)$, mais en outre de la propriété de H d'être la frontière d'une région R. Les raisonnements se simplifieront, dans le cas présent, grâce au fait que la correspondance de $\mu = e^{i\theta}$ et de $M = \varphi(\theta)$ est définie par la représentation conforme de R sur le cercle C.

D'après le théorème d'Abel, si z tend vers μ sur l'intervalle rectiligne radial (o, μ), le point

$$Z = f(z) = \Sigma a_n z^n$$

tend vers

$$M = \varphi(\theta) = \Sigma a_n e^{in\theta};$$

Z décrit un arc de Jordan AM, si A est le point $f(o) = a_0$ de R. Cet arc AM est un arc-intervalle simple [6] parce que $Z = f(z)$ est univalent en z. Pour la même raison, si μ et $\mu' = e^{i\theta'}$ sont

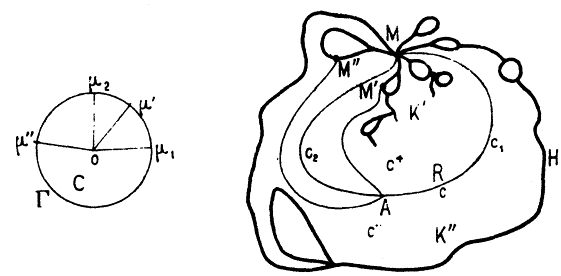
---

[6] Nous regardons l'*intervalle* rectiligne, l'*arc-intervalle* simple (c'est-à-dire sans point multiple) comme ne contenant pas ses extrémités, celles-ci appartenant au contraire au *segment* rectiligne, à l'*arc-segment* simple de Jordan.

distincts sur Γ et si $M' = \varphi(\theta')$, aux deux intervalles rectilignes (o, μ), (o, μ') correspondent deux arcs-intervalles simples AM, AM′ *disjoints*.

Supposons qu'aux deux points $\mu_1 = e^{i\theta_1}$, $\mu_2 = e^{i\theta_2}$ corresponde le même point $M = \varphi(\theta_1) = \varphi(\theta_2)$. La réunion des deux arcs-segments AM ou c_1 homologue de (o, μ_1) et AM ou c_2 homologue de (o, μ_2) est une courbe fermée simple de Jordan c. Cette courbe est entièrement intérieure à R sauf par le point M, seul point de c appartenant à H. Nous choisirons pour sens positif sur c celui qui correspond à la succession des rayons (μ_2, o) suivi de (o, μ_1) parcourus par z (*fig.* 4).

Fig. 4.



Soient K′ l'ensemble des homologues M′ des points $\mu' = e^{i\theta'}$ de l'arc-segment direct $\mu_1 \mu_2$ de Γ, et K″ l'ensemble des homologues M″ des points $\mu'' = e^{i\theta''}$ de l'arc-segment direct $\mu_2 \mu_1$ de Γ; K′ et K″ sont deux continus dont la réunion forme H. L'un et l'autre ont en commun le point M. C'est leur seul point commun avec c, puisque aucun point de H différent de M n'est sur c.

Le rayon (o, μ') se détache de la ligne brisée $\mu_2 o \mu_1$ (formée de deux rayons de C) du côté positif au point O; tandis que (o, μ'') se détache de la même ligne au même point du côté négatif.

Soient $M' = \varphi(\theta')$, $M'' = \varphi(\theta'')$. Les arcs-intervalles AM′, AM″ homologues respectifs de (o, μ') et de (o, μ'') sont disjoints de c et s'en séparent au point A, le premier du côté positif, le second du côté négatif. Donc l'arc-intervalle AM′ est dans la région positive c^+ de c, l'arc-intervalle AM″ est dans la région négative c^-. Si M′ n'est pas identique à M, seul point de K′ situé sur c, M′ est dans c^+. Donc *tous les points de* K′ *distincts de* M *sont dans* c^+. *De même, tous les points de* K″ *distincts de* M *sont dans* c^-.

Conséquences. — 1° *Si les deux points distincts* M *et* M′ *appartenant à* H *correspondent chacun à au moins deux points de* Γ, savoir $M = \varphi(\theta_1) = \varphi(\theta_2)$ *et* $M' = \varphi(\theta'_1) = \varphi(\theta'_2)$, *il n'est pas possible que le couple de points* $\mu_1 = e^{i\theta_1}$, $\mu_2 = e^{i\theta_2}$ *alterne sur* Γ *avec le couple* $\mu'_1 = e^{i\theta'_1}$, $\mu'_2 = e^{i\theta'_2}$.

Supposons que μ'_1 et μ'_2 alternent avec μ_1 et μ_2, ces deux derniers étant homologues du même point M.

L'un des deux points μ'_1 et μ'_2, par exemple μ'_1, est sur l'arc direct $\mu_1 \mu_2$ de Γ; le second point μ'_2 est dès lors sur l'arc direct $\mu_2 \mu_1$ de Γ. Donc, si le point $M'_1 = \varphi(\theta'_1)$ est distinct de M, il est dans c^+. Si $M'_2 = \varphi(\theta'_2)$ diffère de M, M'_2 est dans c^-. Il est donc impossible que M'_1 et M'_2 soient tous deux identiques à un même point M′ différent de M.

2° *Si le point* $M = \varphi(\theta_1) = \varphi(\theta_2)$ *de* H *correspond à deux points différents* $\mu_1 = e^{i\theta_1}$, $\mu_2 = e^{i\theta_2}$ *de* Γ *et si* K *est un continu inclus dans* H *et ne renfermant pas* M, *l'ensemble* F(K) *des points* $\mu = e^{i\theta}$ *de* Γ, *dont les homologues* $N = \varphi(\theta)$ *sont dans* K, *est en totalité dans l'un et le même des deux arcs directs* $\mu_1 \mu_2$ *et* $\mu_2 \mu_1$ *de* Γ.

Car si F(K) a une partie F′ sur $\mu_1 \mu_2$, une partie F″ sur $\mu_2 \mu_1$ (F′ et F″ ne contiennent ni μ_1 ni μ_2 dont l'homologue M est étranger par hypothèse à K), les homologues des points μ' de F′ forment un ensemble k' situé dans c^+, les homologues des points μ'' de F″ forment un ensemble k'' situé dans c^-; K est la réunion de k' et k''; K n'est donc pas un continu. Nous aboutissons à une contradiction. La proposition énoncée est donc exacte.

3° *Si* K *et* K′ *sont deux continus disjoints inclus dans* H, *si* F(K) *est l'ensemble des points* $\mu = e^{i\theta}$ *de* Γ *dont les homologues* $M = \varphi(\theta)$ *sont dans* K, *si* F(K′) *est l'ensemble des points* $\mu' = e^{i\theta'}$ *de* Γ *dont les homologues* $M' = \varphi(\theta')$ *sont dans* K′, *chacun des ensembles fermés* F(K) *et* F(K′) *est en totalité dans un même arc-intervalle de* Γ *contigu à l'autre ensemble.*

La distance de F(K) et de F(K′) est positive puisqu'il en est ainsi par hypothèse de K et de K′. Donc F(K′) est dans un nombre fini p d'arcs de Γ contigus à F(K). Si la proposition énoncée est inexacte, il est possible que p vaille au moins 2. Admettons qu'il en soit ainsi. Les p arcs contigus à $F(K)$ contenant chacun une partie de $F(K')$ séparent p parties $F_1, F_2, \ldots, F_p$ de l'ensemble fermé $F(K)$. L'image dans H de $F_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ est un ensemble fermé K_i et K est la somme des p ensembles K_i. Ces ensembles K_i ne sont donc pas tous deux à deux disjoints. Au moins deux d'entre eux ont un point commun; par exemple K_i et K_j ont en commun le point M, image de μ_i dans F_i et de μ_j dans F_j; F_i et F_j, dont les images font K_i et K_j, sont séparés sur Γ par deux parties de $F(K')$ situées l'une F' entre F_i et F_j, l'autre F'' entre F_j et F_i, sur Γ parcouru dans le sens direct. Donc F' et F'', dont la réunion forme $F(K')$, sont séparées sur Γ par μ_i et μ_j ayant dans H le même homologue M.

Ceci est contraire à la dernière proposition établie, puisque M appartenant à K est étranger à K'.

4° *La continuité de* H *est uniforme.*

Soient ε un nombre positif inférieur au diamètre de H, et $K(\varepsilon)$ un continu quelconque inclus dans H et de diamètre au moins égal à ε. La fonction $\varphi(\theta)$ étant continue, l'inégalité fermée $|\varphi(\theta') - \varphi(\theta)| \geqq \varepsilon$ détermine pour $|\theta' - \theta|$ un certain minimum $\eta(\varepsilon)$ positif avec ε; $\eta(\varepsilon)$ est non décroissant (et même croît) quand ε croît.

Si $F(K)$ est l'ensemble des points $\mu = e^{i\theta}$ de Γ dont l'homologue $M = \varphi(\theta)$ appartient à $K(\varepsilon) = K$, si nous retranchons de Γ un quelconque des arcs-intervalles contigus à $F(K)$, il reste sur Γ un arc-segment $\sigma(K)$ contenant $F(K)$, ayant mêmes extrémités que $F(K)$ [nous qualifions cet arc-segment $\sigma(K)$ de *mineur* parce qu'il ne peut pas être amoindri] et la longueur de $\sigma(K)$ est au moins $\eta(\varepsilon)$.

Supposons tout d'abord qu'il existe une suite de p continus $K(\varepsilon)$ disjoints, savoir $K_1, K_2, \ldots, K_p$ tels que, σ_i étant un arc-segment $\sigma(K_i)$, σ_{i+1} soit contenu dans $\sigma_i (i = 1, 2, \ldots, p-1)$. Il est aisé de borner supérieurement p. En effet, F_i étant mis pour $F(K_i)$, F_{i+1} est en totalité d'une part dans σ_{i+1} (avec identité des points extrêmes de l'ensemble et du segment) donc en totalité dans σ_i, et d'autre part F_{i+1} est en totalité dans un arc-intervalle de Γ contigu à F_i. Soit u_i cet arc-intervalle; u_i est intérieur à σ_i et sépare sur σ_i deux arcs-segments σ_i', σ_i'', comprenant respectivement les deux parties F'_i, F''_i de F_i séparées sur σ_i par le contigu u_i à ce dernier ensemble F_i. Soient K'_i et K''_i les ensembles formés par les homologues dans H des points μ' de F'_i et des points μ'' de F''_i. Puisque $K'_i + K''_i$ est le continu K_i de diamètre au moins égal à ε, l'un au moins des deux ensembles K'_i, K''_i a un diamètre au moins égal à $\frac{\varepsilon}{2}$. Donc l'un au moins des deux arcs-segments σ'_i, σ''_i vaut au moins $\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ et

$$\sigma_i > \sigma_{i+1} + \eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

D'ailleurs $\sigma_p \geq \eta(\varepsilon)$. Donc

$$\sigma_1 > \eta(\varepsilon) + (p-1)\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

D'après $\sigma_1 < 2\pi$, p est borné supérieurement par la dernière inégalité.

Supposons maintenant que H ne soit pas uniformément continu. Il existe donc un nombre positif ε tel que H contient une famille infinie U dont les éléments K sont des continus deux à deux disjoints, ayant chacun un diamètre au moins égal à ε. Soit K_0 un continu quelconque de la famille U. D'après la conséquence 3°, K étant disjoint de K_0, tout ensemble F(K) formé des points de Γ dont les homologues dans H appartiennent à K est dans un arc-intervalle de Γ contigu à $F(K_0)$. Un tel arc-intervalle a donc une longueur supérieure à $\eta(\varepsilon)$. Les ensembles F(K) sont donc dans un nombre fini d'arcs de Γ contigus à $F(K_0)$, et l'un de ces arcs, soit ab (décrit de a en b dans le sens direct sur Γ), contient une infinité d'ensembles F(K).

Considérons les arcs-segments mineurs σ situés sur ab et dont chacun contient un ensemble F(K) relatif à un continu K de Γ. La totalité de l'arc-segment direct ba de Γ est dans un arc-intervalle contigu à F(K). Si les deux arcs-segments σ, σ' correspondent aux deux continus K, K′ de U, ou bien σ et σ' sont disjoints (si chacun d'eux est dans l'arc contigu à l'autre et contenant ba), ou bien l'un des deux est inclus dans l'autre. Comme la longueur de chacun des σ vaut au moins $\eta(\varepsilon)$, les σ^1 intérieurs à ab sans être contenus dans aucun autre arc-segment σ, sont en nombre fini. Puisque ab contient par hypothèse une infinité d'arcs-segments de la nature des σ, l'un des segments σ^1, nous le notons σ_1, contient une infinité de segments du type σ et que nous notons σ'; σ_1 est relatif à un continu K_1 et renferme $F(K_1)$.

Le raisonnement se répète. Les arcs-segments σ' contenus dans σ_1 sont tous en longueur au moins égaux à $\eta(\varepsilon)$. Un nombre fini d'entre eux, les arcs-segments σ^2, sont seuls à n'être contenus dans aucun des autres, et, parmi ces σ^2, l'un d'eux au moins, nous le désignons par σ_2, contient une infinité d'arcs-segments que nous notons σ''. Et ainsi de suite. On met en évidence une suite indéfinie d'arcs-segments $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p, \ldots$, tels que σ_i contient σ_{i+1} et renferme, avec identité des points extrêmes, l'ensemble $F(K_i)$ des points de Γ dont les homologues dans H forment un continu K_i de de la famille U. Or nous avons vu que i est borné au moyen de $\eta(\varepsilon)$ et de $\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Nous aboutissons donc à une contradiction en supposant infinie la famille U de continus $K(\varepsilon)$ deux à deux disjoints, inclus dans H, chacun d'eux ayant son diamétre au moins égal à ε. On limiterait d'ailleurs aisément, connaissant $\eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, le nombre maximum des continus K de la famille U.

Donc H est uniformément continu.

H est un continu cyclique, en vertu de la définition géométrique d'une telle figure.

Un type de démonstration analogue au précédent justifie cet énoncé :

Théorème. — *Si la série* $\sum_{n \geqq 0} a_n e^{in\theta}$ *est uniformément convergente et de somme* $\varphi(\theta)$, *si la fonction* $f(z) = \sum a_n z^n$ *est univalente dans le cercle* $C(|z| < 1)$, *les nombres u tels que l'équation* $u = \varphi(\theta)$ *ait au moins trois racines distinctes en* $\theta (0 \leqq \theta < 2\pi)$ *forment un ensemble dénombrable* (7).

Soient $M = \varphi(\theta)$, $\mu = e^{i\theta}$, Γ le cercle $|z| = 1$. Si le point $M = u = \varphi(\theta)$ vérifie l'hypothèse de l'énoncé, l'ensemble fermé $F(M)$, formé des points μ dont les arguments θ vérifient l'équation $u = \varphi(\theta)$, a au moins trois points distincts. Comme $F(M)$ est

(7) Ce théorème est une application au cas particulier traité ici d'une propriété générale de la représentation paramétrique des continus cycliques.

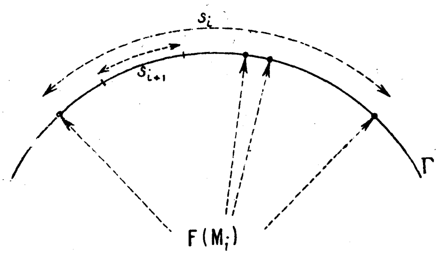
totalement discontinu, cet ensemble possède, sur Γ, au moins trois arcs-intervalles contigus. Je dis que, η *étant un nombre positif donné quelconque, les points* M *tels que* F(M) *ait au moins trois arcs contigus de longueur supérieure à* η *sont en nombre fini.*

Le raisonnement rappellera beaucoup celui de la démonstration de la continuité uniforme de H.

Le plus grand contigu (ou éventuellement l'un parmi les plus grands contigus) à F(M) vaut au moins η et au plus $2\pi - 2\eta$. Soit s l'arc-segment de Γ complémentaire de ce contigu. s renferme au moins deux arcs contigus à Γ et supérieurs en longueur à η; s a une longueur supérieure à 2η.

Supposons que H renferme p points $M_1, M_2, \ldots, M_p$ tels que l'arc s_i relatif à M_i contienne l'arc s_{i+1} relatif à M_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, p-1$) (*fig.* 5). L'ensemble $F(M_{i+1})$ étant sur s_i qui est limité à deux

Fig. 5.



points de $F(M_i)$, la totalité de $F(M_{i+1})$ est dans un même contigu à $F(M_i)$ situé sur s_i. Comme s_i renferme deux contigus au moins égaux à η, $s_i > s_{i+1} + \eta$. D'ailleurs $s_p > 2\eta$. Donc $s_1 > (p+1)\eta$. Donc p est limité.

On en conclut aisément, les arcs-segments s étant deux à deux soit disjoints, soit inclus l'un dans l'autre, l'impossibilité que, pour η donné, il existe une infinité de points M ayant trois arcs contigus plus grands que η. Le théorème énoncé en résulte immédiatement.

Nous allons maintenant établir directement que H satisfait aussi à la définition analytique du continu cyclique, en ce qui concerne la représentation des points M de H par les points $\mu = e^{i\theta}$ de la circonférence Γ.

Caractères de la représentation paramétrique du continu H. — Montrons que la correspondance $M = \varphi(\theta)$, $\mu = e^{i\theta}$, définissant H comme le lieu de M quand le point μ décrit Γ, satisfait aux trois conditions analytiques du continu cyclique.

Premier caractère. — M *est fonction continue de* μ *et l'ensemble fermé* F(M) *des points* μ *de* Γ *ayant pour homologue le même point* M *de* H *est totalement discontinu.*

La continuité de M en μ est identique à la continuité de la fonction φ, et celle-ci résulte de la convergence uniforme de la série $\sum a_n e^{in\theta}$. La somme $\varphi(\theta)$ de cette série n'est constante sur aucun arc-intervalle de Γ, sinon $f(z)$ serait constante. H présente donc le premier caractère des continus cycliques définis analytiquement.

Deuxième caractère. — *Si* M *et* M′ *sont deux points distincts quelconques de* H, *l'ensemble* F(M′) *est en totalité dans un arc de* Γ *contigu à l'ensemble* F(M) *et réciproquement.*

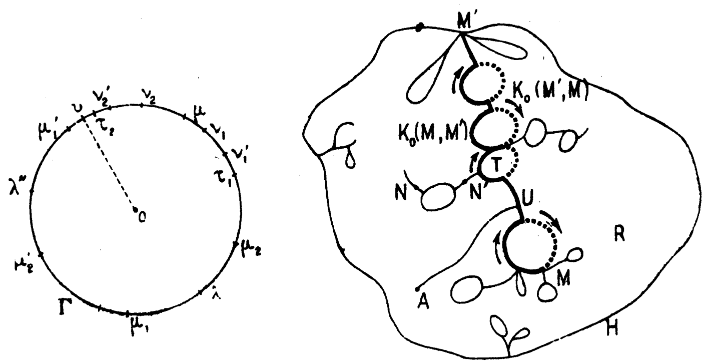
Nous avons déjà établi cette propriété. Nous en tirons diverses conséquences.

Soit K(H | M, M′) ou simplement K *un continu inclus dans* H, *contenant* M *et* M′ *et irréductible entre ces deux points.* (Dans la figure 6, K est formé de traits forts, pleins ou pointillés.)

Soit $\mu_2\,\mu_1$ l'arc-intervalle direct contigu à F(M) et contenant la totalité de F(M′); soit $\mu'_2\,\mu'_1$ l'arc-intervalle direct contigu à F(M′) et contenant la totalité de F(M). Soit F(K) l'ensemble des points ν de Γ dont les homologues sont dans K; F(K) contient évidemment F(M) et F(M′) puisque K contient par hypothèse M et M′. Je dis que tous les autres points de F(K) sont dans les arcs-intervalles $\mu_2\,\mu'_1$ et $\mu'_2\,\mu_1$. En effet, nous avons vu que, K contenant d'une part M, d'autre part le point M′ homologue de μ'_1 (et de μ'_2) qui est intérieur à l'intervalle $\mu_2\mu_1$ contigu à F(M), la partie de F(K) située sur l'arc-segment $\mu_2\mu_1$ a pour homologue une partie continue de K. Soit K″ cette partie; K″ contient M et M′, et K″ est continu. Donc K étant irréductible entre M et M′ est identique à K″. Mais si F(K) avait dans l'arc-intervalle $\mu_1\,\mu_2$ un point λ' étranger à F(M), ce point ne pourrait pas avoir le même homologue L qu'un point λ'' de l'arc-intervalle $\mu_2\,\mu_1$, puisque λ' et λ'' sont séparés par le couple (μ_1, μ_2) appartenant à F(M). Donc F(K) diminué des points de F(M) est en totalité sur l'arc-intervalle $\mu_2\mu_1$. De même F(K) diminué des points de F(M′) est en totalité sur l'arc-intervalle $\mu'_2\,\mu'_1$.

Donc la totalité de F(K), hormis les points de F(M) et de F(M′), est sur les deux arcs-intervalles $\mu_2\,\mu'_1$ et $\mu'_2\,\mu_1$.

Fig. 6.



Soit N un point de H distinct de M et de M′; F(N) est en totalité sur les arcs-intervalles $\mu_2\,\mu'_1$ et $\mu'_2\,\mu_1$. Si deux points ν_1 et ν_2 de F(N) sont situés l'un et l'autre sur $\mu_2\mu'_1$ ou l'un et l'autre sur $\mu'_2\mu_1$, supposons qu'ils soient tous deux sur $\mu_2\mu'_1$, l'arc $\nu_1\,\nu_2$ inclus dans $\mu_2\mu'_1$ étant direct sur Γ, comme l'est $\mu_2\mu'_1$, l'ensemble F(K) ne peut avoir sur l'arc-intervalle $\nu_1\nu_2$ aucun point, sauf éventuellement ceux de F(N) situés sur cet arc quand N appartient à K. Car la partie de K homologue de la partie de F(K) située sur l'arc direct $\nu_2\nu_1$ est continue et contient M et M′. Elle est donc identique à K. Le reste de F(K), qui serait situé sur l'arc-intervalle direct $\nu_1\nu_2$, ne peut donc posséder aucun point étranger à F(N).

Soit μ un point de l'arc-intervalle $\mu_2\,\mu'_1$. Considérons les points N de H dont l'ensemble F(N) contient deux points ν_1, ν_2 dont l'arc-intervalle séparateur direct $\nu_1\;\nu_2$ appartient à $\mu_2\,\mu'_1$ et renferme μ (*fig.* 6). A deux points N, N′ de cette espèce correspondent deux arcs majeurs $\nu_1\nu_2$, $\nu'_1\nu'_2$ dont l'un contient l'autre. En raison de la continuité de $\varphi(\theta)$, l'un de ces arcs est plus grand que tous les autres et les contient tous. Soit $\tau_1\tau_2$ cet arc-segment dont les extrémités ont un même homologue T dans H. Deux arcs-segments $\tau_1\tau_2$, $\tau'_1\tau'_2$ correspondant à deux points T, T' différents sont disjoints. Car leurs extrémités n'alternent pas, cela en vertu du second caractère de la correspondance (μ, M), et les deux arcs n'ont pas une extrémité commune puisque T et T' ne sont pas identiques. Les arcs-intervalles $\tau_1\tau_2$ retranchés de l'arc-segment $\mu_2\mu'_1$ laissent un ensemble parfait ϖ, totalement ou partiellement continu ou discontinu. Aux deux extrémités d'un arc-intervalle $\tau_1\tau_2$ correspond un même point T de H et à deux points υ, υ' de ϖ non-extrémités d'un même arc contigu à ϖ correspondent deux points U, U' de H différents l'un de l'autre. Car, si U était identique à U', ϖ n'aurait pas de point sur l'arc-intervalle $\upsilon\upsilon'$ (intérieur à $\mu_2\mu'_1$).

Si le point υ décrit ϖ de μ_2 en μ'_1, il est aisé de voir que le point correspondant U décrit un arc simple de Jordan.

On peut, en effet, établir une correspondance entre les points υ de ϖ et les points t du segment rectiligne $0 \leqq t \leqq 1$, cette correspondance étant uniforme et continue de υ en t, $t = 0$ correspondant à μ_2, $t = 1$ à μ'_1, les deux extrémités d'un même arc $(\tau_1, \tau_2)_i$ contigu à ϖ étant homologues d'un point unique t_i, enfin l'ordre mutuel d'antériorité des $(\tau_1, \tau_2)_i$ et des υ sur ϖ parcouru dans le sens direct étant le même que celui de leurs homologues t_i et t.

L'homologue U dans H de υ parcourant ϖ varie continûment avec le nombre t décrivant le segment $(0, 1)$. Comme à deux points t distincts correspondent deux points υ de ϖ distincts et non tous deux extrémités d'un même arc contigu à ϖ, donc deux points U de K distincts, le lieu de U est un arc simple de Jordan. Nous désignons cet ensemble par $K_0(M, M')$.

En résumé, si le continu $K(H \mid M, M') = K$ est irréductible entre M et M', tous les points de F(K) situés sur l'arc-segment $\mu_2\mu'_1$ appartiennent à l'ensemble parfait ϖ [accru des parties des ensembles F(T) situés sur les arcs-segments $\tau_1\tau_2$ contigus à ϖ, T étant dans H homologue des points τ_1 et τ_2 de ϖ].

Considérons le rayon $(0, \upsilon)$, υ décrivant ϖ. Ce rayon atteint l'arc-direct $\mu_2\mu'_1$ de Γ du côté positif. L'arc simple de Jordan AU atteindra de même l'arc $K_0(M, M')$ décrit de M en M' du côté positif. La région R aborde $K_0(M, M')$ du côté positif de cet arc.

L'arc simple de Jordan $K_0(M', M)$ sera parcouru par un point U' de H dont l'homologue ν' sur Γ décrit un ensemble parfait ϖ ayant pour origine μ'_2 et pour extrémité μ_1. Parcouru de M en M', cet arc $K_0(M', M)$ est atteint en un quelconque de ses points du côté négatif, par un chemin quelconque venant de R. La région R aborde $K_0(M', M)$ parcouru de M en M' du côté négatif.

Tout continu $K(H \mid M, M')$ inclus dans H, contenant M et M' et irréductible entre ces deux points, est un arc simple de Jordan formé d'arcs appartenant à $K_0(M, M') + K_0(M', M)$. Les points U, où $K(H \mid M, M')$ passe de $K_0(M, M')$ à $K_0(M', M)$ ou inversement, sont tels que F(U) a un point sur ϖ et un point sur ϖ'.

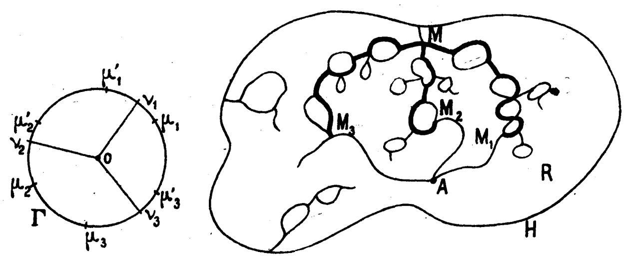
En tenant compte de ces résultats, on donne au troisième caractère de la représentation analytique la forme suivante :

Troisième caractère. — *Si trois arcs semi-segments simples de Jordan* $\overset{\frown}{MM'_1}$, $\overset{\frown}{MM'_2}$, $\overset{\frown}{MM'_3}$ (ne contenant pas leur origine commune M, mais renfermant leurs extrémités respectives M_1, M_2, M_3) *situés sur* H *sont deux à deux disjoints, les représentations* $F(\overset{\frown}{MM'_1})$, $F(\overset{\frown}{MM'_2})$, $F(\overset{\frown}{MM'_3})$ *de ces arcs sur* Γ *se succèdent dans le sens positif ou dans le sens négatif du parcours de* Γ *selon que la rotation des arcs* $\overset{\frown}{MM'_1}$, $\overset{\frown}{MM'_2}$, $\overset{\frown}{MM'_3}$ *autour de* M *est de sens rétrograde ou de sens direct.*

La représentation $F(\overset{\frown}{MM'_i})$ de l'arc $\overset{\frown}{MM'_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ appartient intégralement à un même intervalle contigu à F(M); à $F(\overset{\frown}{MM'_i})$ ajoutons son point d'accumulation μ_i appartenant à F(M) et situé par conséquent en l'une des extrémités de l'arc contigu renfermant $F(\overset{\frown}{MM'_i})$. Soit $\mu_i\mu'_i$ cet arc contigu à F(M) et qui, parcouru de μ_i en μ'_i, n'est pas nécessairement de sens direct sur Γ (*fig.* 7).

Il n'est pas possible que deux des couples (μ_i, μ'_i) soient identiques. Sinon, si par exemple $\mu_1 = \mu_2$ et $\mu'_1 = \mu'_2$, il y aurait, sur l'arc-intervalle $\mu_1\mu'_1$, des points infiniment voisins de μ_i et appartenant les uns à $F(\overset{\frown}{MM'_1})$, les autres à $F(\overset{\frown}{MM'_2})$. Donc il y aurait des points N de $\overset{\frown}{MM'_1}$ homologues de points ν intérieurs à un arc-intervalle $\tau\tau'$ contigu à $F(\widehat{MM_2'})$. Les extrémités τ et τ' appartiennent donc à $F(\widehat{MM_1'})$ comme elles appartiennent à $F(\widehat{MM_2'})$. Les deux arcs $\widehat{MM_1'}$ et $\widehat{MM_2'}$ ne sont pas disjoints, contrairement à l'hypothèse (ils ont même une infinité de points communs tendant vers M).

Fig. 7.



Si μ_1 est un point isolé de $F(M)$, il est possible que $\mu_1 = \mu_2$, μ_1' et μ_2' étant alors différents l'un de l'autre.

Mais il peut se faire que les deux arcs-intervalles $\mu_1\mu_1'$ et $\mu_2\mu_2'$ coïncident, si $\mu_1 = \mu_2'$ et $\mu_2 = \mu_1'$. Soient alors $\mu_1\nu_1$ et $\mu_2\nu_2$ les arcs-segments mineurs, l'un et l'autre inclus dans $\mu_1\mu_2$ et contenant respectivement $F(\widehat{MM_1'})$ et $F(\widehat{MM_2'})$. Je dis que $\mu_1\nu_1$ et $\mu_2\nu_2$ sont disjoints. ν_1 a pour homologue M_1 dans H et ν_2 a pour homologue M_2. Donc ν_1 et ν_2 ne sont pas identiques. Si les deux arcs-segments $\mu_1\nu_1$ et $\mu_2\nu_2$ de Γ empiétaient, ν_1 serait dans un arc contigu à $F(\widehat{MM_2'})$ et ν_2 dans un arc contigu à $F(\widehat{MM_1'})$. Les extrémités de ces arcs seraient communes à $F(\widehat{MM_1'})$ et à $F(\widehat{MM_2'})$. Les deux arcs MM_1 et MM_2 ne seraient pas disjoints.

Il suit de là que les trois arcs semi-segments de Γ, $\widehat{\mu_1\nu_1'}$, $\widehat{\mu_2\nu_2'}$, $\widehat{\mu_3\nu_3'}$ sont disjoints. Leur ordre mutuel sur Γ, parcouru dans le sens direct, est donc déterminé. Traçons les intervalles rectilignes $O\nu_1$, $O\nu_2$, $O\nu_3$. Leur ordre dans une rotation autour de O est celui des trois points ν_1, ν_2, ν_3 sur Γ. Les arcs-intervalles correspondants de R, savoir $\widehat{AM_1}$, $\widehat{AM_2}$, $\widehat{AM_3}$ sont deux à deux disjoints et ils sont disjoints des arcs $\widehat{MM_1}$, $\widehat{MM_2}$, $\widehat{MM_3}$. Les arcs-intervalles $\widehat{AM_1M}$, $\widehat{AM_2M}$, $\widehat{AM_3M}$ sont donc jordaniens, simples et deux à deux disjoints. Leur ordre de rotation autour de M est contraire à leur ordre de rotation autour de A. Donc l'ordre des arcs $\widehat{MM_1}$, $\widehat{MM_2}$, $\widehat{MM_3}$ de H dans une rotation autour de M est contraire à l'ordre des figurations de ces mêmes arcs sur Γ parcouru dans le sens direct.

Les trois caractères de la représentation analytique des continus cycliques sont donc vérifiés par la figuration du point M de H par les points μ de Γ.

L'équivalence des deux définitions géométrique et analytique du continu cyclique H est donc entièrement établie dans le cas particulier que nous venons d'étudier et où l'on suppose que : 1° la correspondance analytique (M, μ) (M décrivant H et μ une circonférence Ω) est déterminée par la représentation conforme de la région R limitée par H sur la région finie bornée par Ω; 2° cette correspondance (M, μ) s'exprime par un développement trigonométrique uniformément convergent donnant la position $\varphi(\theta)$ de M en fonction de l'argument angulaire θ de μ sur Ω.

La condition est suffisante.

Il s'agit de montrer que, la fonction $Z = f(z) = \sum_{n \geqq 0} a_n z^n$ représentant conformément le cercle $C[|z| < 1]$ sur la région finie R décrite par Z, *si la frontière* H *de* R *est un continu cyclique, la série* $\sum a_n e^{in\theta}$ *est uniformément convergente* dans tout le champ des nombres réels parcouru par la variable θ.

En fait nous démontrerons la validité de cette conclusion avec des hypothèses plus larges.

D'une part, *la région* R *étant supposée finie, son aire l'est également*, ce qui se traduit par la condition $\iint_C |f'(z)|^2 dS < \infty$, dS étant l'élément d'aire du plan des z. En remplaçant l'intégrale par son expression développée, nous trouvons

$$\sum_{n \geqq 0} n \, | a_n |^2 < \infty.$$

Mais cette dernière condition n'implique pas l'univalence de la fonction $f(z)$. Si $f(z)$ est multivalente, la convergence de la série $\sum n\,|a_n|^2$ exprime simplement que l'aire totale décrite par le point $Z=f(z)$, quand z décrit C, est finie, la partie de cette aire couverte p fois et p seulement étant comptée p fois dans l'aire totale.

D'autre part, le théorème de Carathéodory sur la représentation conforme nous dit que, $f(z)$ représentant conformément C sur R, si z variant dans C tend vers un point $\mu = e^{i\theta}$ du cercle Γ ($|z|=1$), l'ensemble des positions limites possibles du point $Z=f(z)$ est, soit un point unique, soit un « bout premier », ensemble d'accumulation de continus disjoints situés sur la frontière de R, la plus grande limite des diamètres de ces continus étant positive. Or, d'après la définition géométrique du continu cyclique, la frontière H de R n'a par hypothèse qu'un nombre fini de continus disjoints de diamètre supérieur à un nombre positif quelconque donné. Donc H ne renferme pas de bout premier et Z *tend vers un point limite unique* M *de* H *quand* z *intérieur à* C *tend vers un point quelconque* μ *de* Γ.

C'est par cette seule propriété qu'interviendra ci-après le caractère de H d'être un continu cyclique.

Nous établirons la proposition suivante, étenuant celle que nous devions démontrer :

Si la fonction $f(z)=\sum a_n z^n$ *est holomorphe dans le cercle* C$[|z|<1]$, *si l'aire totale couverte par le déplacement du point* $Z=f(z)$ *quand* z *décrit une fois* C *est finie et si la région* R *parcourue par* Z *est finie, si* enfin *le nombre* Z *possède une limite unique* $\varphi(\theta)$ *quand* z *intérieur à* C *tend vers un point quelconque* $\mu=e^{i\theta}$ *de la circonférence* $\Gamma[|z|=1]$, il résulte de ces hypothèses simultanées que *la série* $\Sigma a_n e^{in\theta}$ *est uniformément convergente*, indépendamment de θ.

Nous tirerons parti de l'inégalité de Schwarz sous cette forme : si les suites u_n et α_n sont formées de nombres non négatifs, elles vérifient l'inégalité fermée (égalité admise) suivante :

$$\left(\sum u_n\right)^2 \leqq \left(\sum \alpha_n u_n^2\right)\left(\sum \frac{1}{\alpha_n}\right).$$

Bien entendu, dans les trois sommations figurant dans cette relation, les indices n intervenant sont les mêmes. Si ces indices sont en infinité, la relation de Schwarz n'offre d'intérêt que si les trois séries considérées sont convergentes.

En posant $\alpha_n = \beta_n^2$, $b_n = \beta_n u_n$, $c_n = \frac{1}{\beta_n}$, la relation prend la forme habituelle

$$\left(\sum b_n c_n\right)^2 \leqq \left(\sum b_n^2\right) \left(\sum c_n^2\right).$$

Nous dirons qu'une série $\sum\limits_{n \geqq 0} u_n(\theta)$ est *localement uniformément convergente au point* θ, si à tout nombre positif ε donné correspondent deux nombres $\eta = \eta(\theta, \varepsilon)$ et $N = N(\theta, \varepsilon)$ tels que les inégalités $|\theta' - \theta| < \eta$, $n > N$, $n' > N$ entraînent

$$|s_n(\theta') - s_{n'}(\theta')| < \varepsilon.$$

On a posé $s_n(\omega) = u_0(\omega) + u_1(\omega) + \ldots + u_n(\omega)$, ω étant un nombre quelconque.

Cette condition entraîne la convergence de la série au point θ, mais non pas en un autre point θ'.

Si, la variable θ *décrivant un segment linéaire* σ (ou généralement un ensemble fermé), *la série* $\sum u_n(\theta)$ *est localement partout* (en chaque point) *uniformément convergente, cette série est uniformément convergente sur* σ (au sens habituel, indépendamment de θ).

En effet, ε étant un nombre positif donné, les intervalles $[\theta - \eta(\theta, \varepsilon), \theta + \eta(\theta, \varepsilon)]$ existent pour chaque valeur de θ sur σ. Leur réunion contient donc la totalité de σ. Donc un nombre fini d'entre eux couvre σ (Borel-Lebesgue). Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ leurs centres. Posons $\eta_i = \eta(\theta_i, \varepsilon)$, $N_i = N(\theta_i, \varepsilon)$ et soit $N = N(\varepsilon)$ le plus grand des nombres N_i. Soit enfin θ un point quelconque de σ; θ est sur un intervalle $(\theta_i - \eta_i, \theta_i + \eta_i)$ et, si n et n' surpassent N, n et n' surpassent *a fortiori* N_i. Donc $|s_n(\theta) - s_{n'}(\theta)| < \varepsilon$.

La série $\sum u_n(\theta)$ vérie sur σ la condition habituelle de convergence uniforme ([8]).

Pour $|z| < 1$, posons

$$S_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n,$$
$$R_n(z) = f(z) - S_n(z) = a_{n+1} z^{n+1} + \ldots,$$
$$s_n(\theta) = a_0 + a_1 e^{i\theta} + \ldots + a_n e^{in\theta}.$$

1° *Si* $n[1-|z|]$ *est borné inférieurement et si* $|z|$ *tend vers* 1, il en résulte que $R_n(z)$ *tend uniformément vers* 0.

En effet

$$|R_n(z)| < \sum_{m>n} |a_m| r^m \qquad \text{si} \quad |z| = r.$$

D'après l'inégalité de Schwarz

$$|R_n(z)|^2 < \sum_{m>n} m |a_m|^2 \times \sum_{m>n} \frac{r^{2m}}{m}.$$

([8]) La convergence uniforme *locale* de la série $\Sigma u_n(\theta)$ au point θ ne doit pas être confondue avec la convergence uniforme de la même série *dans le voisinage de* θ, c'est-à-dire dans un intervalle contenant θ.

Dans le cas où la série $\Sigma u_n(\theta)$ a ses termes réels et où $s_n(\theta)$ a (pour n infini) une seule valeur d'accumulation pouvant être infinie, mais de signe déterminé, on pourrait considérer, comme condition de convergence de la série en un point quelconque du segment, la condition qu'à ε positif indépendant de n et de θ il correspondît un nombre $N = N(\theta, \varepsilon)$, de façon que les inégalités simultanées $n > N$, $n' > N$ entraînent

$$\left| \frac{s_n(\theta)}{1+|s_n(\theta)|} - \frac{s_{n'}(\theta)}{1+|s_{n'}(\theta)|} \right| < \varepsilon.$$

Cela revient à substituer au champ $-\infty, +\infty$ des valeurs *a priori* possibles des nombres $v = s_n(\theta)$ le champ $(-1, +1)$ parcouru par $w = \frac{v}{1+|v|}$ $\Big[$ou par $w = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$, ou par toute fonction continue $w(v)$ croissant de -1 à $+1\Big]$. Les définitions de la convergence uniforme de la série $\sum u_n(\theta)$ avec ses diverses modalités admettent les extensions correspondantes.

Si u_n est complexe, il faudrait remplacer $s_n(\theta)$ par son image sur la sphère de Riemann et les différences $|s_n(\theta') - s_n(\theta)|$ par la distance des images de $s_n(\theta')$ et de $s_n(\theta)$, de façon à faire correspondre aux infinis de tout argument un point unique.

Or

$$\sum_{m>n} \frac{r^{2m}}{m} < \frac{1}{n} \sum_{m>n} r^{2m} = \frac{r^{2n+2}}{n(1-r^2)} < \frac{1}{n(1-r)}.$$

Soit $\varepsilon_n^2 = \sum_{m>n} n\,|a_n|^2$; ε_n tend vers o quand n croît. Si $n(1-|z|) > \alpha^2$, α étant indépendant de n et de z,

$$|R_n(z)| < \varepsilon_n \alpha^{-1}.$$

Donc $R_n(z)$ tend uniformément vers o quand $|z|$ tend vers 1. Car le minimum $\alpha(1-|z|)^{-1}$ de n croît indéfiniment.

2° Si $n\,|z-e^{i\theta}|$ *est borné supérieurement,* $S_n(z) - s_n(\theta)$ *tend uniformément vers* o *quand* z *tend vers* $e^{i\theta}$.

En effet

$$|S_n(z) - s_n(\theta)| = \left|\sum_{m \leqq n} a_m(z^m - e^{im\theta})\right| < |z-e^{i\theta}| \sum_{m \leqq n} m\,|a_m|;$$

p étant un entier positif quelconque, posons

$$\sum_{m \leqq p} m\,|a_m| = A_p.$$

Donc, si $n > p$,

$$\sum_{m \leqq n} m\,|a_m| < A_p + \sum_{p+1}^{n} m\,|a_m|.$$

(Pour $n < p$, on réduirait le second membre à A_p.)

Par l'inégalité de Schwarz

$$\left(\sum_{p+1}^{n} m\,|a_m|\right)^2 < \left(\sum_{p+1}^{n} m\,|a_m^2|\right) \times \left(\sum_{p+1}^{n} m\right) < \varepsilon_p^2 n^2.$$

Donc, si $n\,|z-e^{i\theta}| < \beta$, β étant indépendant de n, de z, de θ :

$$|S_n(z) - s_n(\theta)| < A_p\,|z-e^{i\theta}| + \varepsilon_p \beta.$$

Donc, si $\eta = \frac{\varepsilon_p \beta}{A_p}$, les inégalités $|z-e^{i\theta}| < \eta$, $n\,|z-e^{i\theta}| < \beta$ entraînent $|S_n(z) - s_n(\theta)| < 2\varepsilon_p \beta$.

Or ε_p peut être supposé aussi petit qu'on le veut. Sous les conditions posées, $S_n(z) - s_n(\theta)$ tend uniformément vers zéro avec $z - e^{i\theta}$, indépendamment de θ et de $z(|z| < 1)$.

Réunissons les résultats obtenus. *Si*

$$w(\theta, z, n) = \frac{1}{n(1 - |z|)} + n\,|z - e^{i\theta}|$$

est borné supérieurement indépendamment de n, de z, de θ, il en résulte que $f(z) - s_n(\theta)$ tend uniformément vers zéro quand $|z|$ tend vers $1\,(|z| < 1)$.

D'après $|w| \geq 2\sqrt{\dfrac{|z - e^{i\theta}|}{1 - |z|}}$, l'hypothèse énoncée exige que le rapport écrit sous le radical soit lui-même borné. L'angle du rayon $(0, \mu)$ $(\mu = e^{i\theta})$ avec le vecteur (μ, z) doit rester en valeur absolue inférieur à un nombre $\frac{\pi}{2} - \omega\left(0 < \omega < \frac{\pi}{2}\right)$, ω étant indépendant de θ et de z. Si cette condition est vérifiée et si B, C sont deux nombres positifs indépendants de n, μ, z, ω avec $B < C$, si n est compris entre $\frac{B}{|\mu - z|\,\omega}$ et $\frac{C}{|\mu - z|\,\omega}$, $f(z) - s_n(\theta)$ tend uniformément vers zéro quand z tend vers $e^{i\theta}$. En conséquence :

Si $f(z)$ est une fonction holomorphe dans le cercle $C\,(|z| < 1)$, *et si l'aire totale décrite par le point $Z = f(z)$ quand z décrit* C *est finie :*

1° *Les valeurs limites de $f(z)$, quand z tend vers $\mu = e^{i\theta}$ suivant le rayon $(0, \mu)$, sont les mêmes que celles de la suite $s_n(\theta)$ quand l'entier n croît;*

2° *Si les rapports $\frac{n}{n'}$ et $\frac{n'}{n}$ sont bornés, la différence $s_{n'}(\theta) - s_n(\theta)$ tend vers zéro* (uniformément en θ) *quand n et n' croissent;*

3° *Si les nombres $\omega\left(0 < \omega < \frac{\pi}{2}\right)$, $h > 1$, sont indépendants de θ, de z et de ρ, l'oscillation de la fonction $f(z)$ dans le secteur circulaire $\sigma(\theta, \omega, h, \rho)$ de sommet $\mu = e^{i\theta}$, bissecté par le rayon $O\mu$, d'ouverture $\pi - 2\omega$, de rayons extrêmes ρ et $h\rho$ tend uniformément vers zéro avec ρ.*

A la première hypothèse que l'aire totale couverte par le point $Z = f(z)$ est finie, ajoutons l'hypothèse concernant les valeurs limites de $f(z)$ quand z tend vers un point de $\Gamma(|z| = 1)$.

Si, en outre de la condition $\sum n\,|a_n|^2 < \infty$, *quelle que soit la façon dont le point z variant dans* C *tend vers* $\mu = e^{i\theta}$, $f(z)$ *tend vers une limite unique finie* $\varphi(\theta)$, *la série* $\sum a_n e^{in\theta}$ *est localement uniformément convergente au point* θ, avec $\varphi(\theta)$ pour somme.

En effet, par hypothèse, à tout nombre ε positif donné il correspond un nombre η tel que l'inégalité $|z' - \mu| < 2\eta$ entraîne $|f(z') - \varphi(\theta)| \lessdot \varepsilon$.

Soit θ' un nombre quelconque de l'intervalle $(\theta' - \eta, \theta' + \eta)$ et $\mu' = e^{i\theta'}$. Soit $N = \frac{1}{\eta}$ et $n' > N$. Soit z' le point $z' = e^{i\theta'}\left(1 - \frac{1}{n'}\right)$. La distance de z' à μ' est $\frac{1}{n'}$. Elle est inférieure à η. Donc la distance de z' à μ est inférieure à 2η. D'ailleurs

$$|z' - \mu'| = 1 - |z'| = \frac{1}{n'}, \qquad \text{donc} \quad |f(z') - s_{n'}(\theta')| < \varepsilon'(\eta);$$

$\varepsilon'(\eta)$, indépendant de n', de z', de θ', est une fonction de η tendant vers o avec η, et η est une fonction de ε tendant vers zéro avec ε. Donc $\varepsilon'(\eta)$ est une fonction de ε tendant vers zéro avec ε.

Soit n'' un second nombre entier quelconque plus grand que N et

$$z'' = e^{i\theta'}\left(1 - \frac{1}{n''}\right).$$

Donc $|f(z'') - s_{n''}(\theta')| < \varepsilon'(\eta)$ et $|z'' - e^{i\theta}| < 2\eta$. Finalement

$$\begin{aligned} &|s_{n'}(\theta') - s_{n''}(\theta')| \\ &\leqq |s_{n'}(\theta') - f(z')| + |s_{n''}(\theta') - f(z'')| + |f(z') - \varphi(\theta)| + |f(z'') - \varphi(\theta)|. \end{aligned}$$

Donc

$$|s_{n'}(\theta') - s_{n''}(\theta')| < 2\varepsilon'(\eta) + 2\varepsilon$$

si les conditions

$$n' > \frac{1}{\eta}, \qquad n'' > \frac{1}{\eta}, \qquad |\theta' - \theta| < \eta$$

sont simultanément vérifiées.

η et $\varepsilon'(\eta)$ étant des fonctions de ε tendant vers zéro avec ε, la série $\sum a_n e^{in\theta}$ est localement uniformément convergente au point θ.

Si l'hypothèse $\lim\limits_{z \to \mu} f(z) = \varphi(\theta)$ vaut en tout point $\mu = e^{i\theta}$ de Γ, la série $\sum a_n e^{in\theta}$ est uniformément convergente sur tout le champ réel des nombres θ. Sa somme est $\varphi(\theta)$.

En particulier, si la fonction $f(z)$ représente conformément le cercle C sur la région finie R limitée par le continu cyclique H, la série $\sum a_n e^{in\theta}$ est uniformément convergente.

Le théorème est entièrement établi.

Les raisonnements développés dans cet article permettent, moyennant les adaptations exigées par l'extension des hypothèses, d'établir ce théorème :

$Z = f(z) = \sum a_n z^n$ *étant holomorphe dans le cercle* C ($|z| < 1$), *en sorte que, si z décrit* C, *le point* Z *décrit une région* R *d'une surface de Riemann* S; *si la région* R *et son aire totale sont finies, la condition nécessaire et suffisante de convergence uniforme de la série* $\sum a_n e^{in\theta}$ *est que la frontière* H *de* R *soit un continu cyclique de* S.

La définition géométrique d'un continu cyclique de S est que cette figure soit uniformément continue et identique à la frontière d'une région R de S. L'aire de R est l'aire totale de sa projection sur le plan complexe des $Z = f(z)$; R n'est plus nécessairement finie, si l'on convient d'étendre, comme il a été dit plus haut, la notion de convergence uniforme d'une série au cas où la somme de celle-ci ne reste pas finie. Il s'agit d'une convergence uniforme de $s_n(\theta)$ vers $\varphi(\theta)$ sur la sphère de Riemann.

En revanche, on ne peut pas s'affranchir d'une hypothèse sur l'aire de R. La fonction $f(z) = \sum z^n = \frac{1}{1-z}$ représente conformément C sur le demi-plan $\alpha > \frac{1}{2}$ si $Z = \alpha + i\beta$. Mais la série $\sum e^{in\theta}$ ne converge pas, même sur la sphère de Riemann.

Autre application de l'inégalité de Schwarz à la représentation conforme. — Nous supposons finie l'aire $\sum n\,|a_n|^2 = A$ de la région R décrite par le point $Z = f(z)$. Soient $\mu = e^{i\theta}$ un point quelconque de la circonférence $\Gamma(|z| = 1)$ et $L(\rho, \theta)$ (si $0 < \rho < 2$) la longueur de la ligne de R transformée de l'arc $\gamma(\rho, \theta)$ intérieur à $C(|z| < 1)$ et appartenant à la circonférence $|z - e^{i\theta}| = \rho$. Si le transformé de $\gamma(\rho, \theta)$ n'est pas rectifiable, nous posons $L(\rho, \theta) = \infty$. D'après la formule de Schwarz, et comme M. J. Wolff a été sans doute le premier à le remarquer ([9]),

$$L^2(\rho, \theta) = \left[\int_\gamma |f'(z)|\,\rho\, d\theta\right]^2 < \int_\gamma |f'^2(z)|\,\rho\, d\theta \times \int_0^{2\pi} \rho\, d\theta$$
$$= 2\pi\rho \int_\gamma |f'^2(z)|\,\rho\, d\theta;$$

$p \geqq -1$ étant entier, soit ω_p la région intérieure à C et comprise entre les deux arcs de cercles $\gamma(2^{-p}, \theta)$ et $\gamma(2^{-p-1}, \theta)$ (*fig.* 8). On a la relation

$$\int_{2^{-p-1}}^{2^{-p}} L^2(\rho, \theta)\frac{d\rho}{\rho} = \int_1^2 L^2(u.2^{-p-1}, \theta)\frac{du}{u} < 2\pi \iint_{\omega_p} |f'^2(z)|\,\rho\, d\theta\, d\rho$$

et, puisque $C = \sum\limits_{p \geqq -1} \omega_p$,

$$\int_1^2 \left[\sum_{p \geqq 0} L^2(u.2^{-p}, \theta)\right] du < 4\pi \times \text{aire de R} = 4\pi A.$$

Donc l'*ensemble des points u de l'intervalle* (0, 2), *pour lesquels la série* $\sum\limits_{p \geqq 0} L^2(u.2^{-p}, \theta)$ *diverge, est de mesure nulle.* Donc sur une plénitude $E(\theta)$ de l'intervalle $0 < \rho < 2$, la série

$$L^2(\rho, \theta) + L^2\left(\frac{\rho}{2}, \theta\right) + \ldots + L^2(\rho.2^{-p}, \theta) + \ldots$$

converge. Soit $M(\rho, \theta)$ sa somme, $M(\rho, \theta)$ étant $+\infty$ aux points de C où la série diverge.

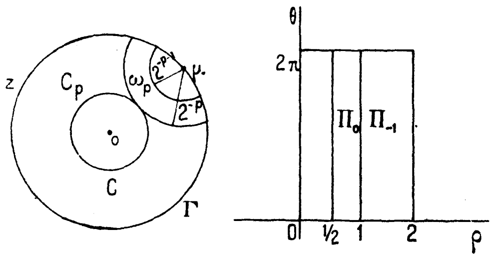
([9]) *Proceedings de l'Académie d'Amsterdam*, 33, 1930, p. 1.

Si ρ est dans $E(\theta)$, la longueur $L(\rho . 2^{-p}, \theta)$ tend vers zéro quand p croît. *L'oscillation de* $f(z)$ *sur* $\gamma(\rho . 2^{-p}, \theta)$ *tend vers zéro quand* p *croît, si* ρ *est dans* $E(\theta)$. Ceci est à rapprocher du fait que, dans le secteur

$$2^{-p-1} < |z - \mu| < 2^{-p}, \qquad \left|\operatorname{Arg} \frac{\mu - z}{\mu}\right| < \frac{\pi}{2} - \omega$$

(ω indépendant de μ et de z), l'oscillation de $f(z)$ tend vers zéro quand p croît. Mais ceci a lieu uniformément en $\mu = e^{i\theta}$ décrivant Γ, tandis que le complément ajouté au secteur précédent et à tous ses homothétiques par rapport à μ par les arcs $\gamma(u . 2^{-p}, \theta)$ dépend de θ.

Fig. 8.



Observons que si ρ est dans $E(\theta)$, *a fortiori* $\rho . 2^{-n}$ est aussi dans $E(\theta)$ quel que soit l'entier $n \geqq 1$.

Il est aisé de voir que *la fonction* $M(\rho, \theta)$ *est semi-continue inférieurement par rapport à l'ensemble des variables* ρ et θ. Car, si l'on borne les arcs $\gamma(\rho . 2^{-p}, \theta)$ à leur partie située dans le cercle tangent intérieurement au point μ à Γ et de diamètre $2 - \frac{1}{n}$, en même temps que l'on réduit la série $\sum L^2(\rho . 2^{-p}, \theta)$ à ses n premiers termes ($p < n$), la somme finie restante, soit $M_n(\rho, \theta)$, est en ρ et θ une fonction analytique, *a fortiori* une fonction continue, pour n invariable. Or, quand n croît, $M_n(\rho, \theta)$ tend en croissant vers $M(\rho, \theta)$. Donc $M(\rho, \theta)$ est semi-continue inférieurement. Donc, *quel que soit k positif fini* (suffisamment grand), *l'ensemble* $M(\rho, \theta) \leqq k$ *est fermé* dans le rectangle semi-ouvert $\Pi(0 < \rho \leqq 2, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$. Soit C_p ($p \geqq 0$) la couronne $1 - 2^{-p} < |z| < 1$, A_p l'aire correspondante de la région R ($C = C_0$, $A = A_0$); A_p tend vers zéro quand p croît. Soit Π_p le rectangle

$$[2^{-p-1} < \rho < 2^{-p}, \ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi] \qquad (p \geqq -1) \quad (\textit{fig. } 8).$$

Évidemment, si $p \geqq 0$ et pour chaque valeur de θ, $\sum_{n \geqq p} \omega_p < C_p$,

$$\int_1^2 M(\rho, \theta)\, d\rho < 4\pi A, \qquad \int_{2-p-1}^{2-p} M(\rho, \theta)\, d\rho < 4\pi A_p \qquad (p \geqq 0),$$

$$\iint_{\Pi_{-1}} M(\rho, \theta)\, d\rho\, d\theta < 8\pi^2 A, \qquad \iint_{\Pi_p} M(\rho, \theta)\, d\rho\, d\theta < \pi^2 A_p \qquad (p \geqq 0) \text{ (}^{10}\text{)}.$$

L'ensemble $e[M(\rho, \theta) = \infty]$, ayant une longueur nulle sur chaque droite $\theta =$ const., a une aire nulle. Aussi les nombres ρ_0, pour lesquels la mesure linéaire (en θ) de e sur la droite $\rho = \rho_0$ est positive, forment un ensemble mince. Donc, *pour chaque nombre* ρ *d'une plénitude* E *de l'intervalle* $0 < \rho < 2$, *il existe une plénitude* $E'(\theta)$ *de valeurs de* θ *telles que* $M(\rho, \theta)$ *est fini.*

Ce résultat semble pouvoir être utilisé, avec profit, dans l'étude de la représentation conforme [11].

---

[10] Pour être assuré que $\iint_{\Pi} M(\rho, \theta)\, d\rho\, d\theta$ est fini, il faudrait que la série $\sum A_p$ convergeât, condition équivalente à $\sum n \log n \,|\, a_n \,|^2 < \infty$.

[11] On consultera avec intérêt les Notes ou Mémoires récents de M. J. Wolff, Mlle J. Ferrand, M. Dufresnoy sur les propriétés de la représentation conforme du cercle $|z| < 1$ ou du demi-plan $R(z) > 0$ au voisinage de la frontière. (*Voir* également mes Notes aux *Comptes rendus* sur le même sujet : t. 212, p. 1071; t. 213, p. 15 et 115.)

(Manuscrit reçu le 4 janvier 1943.)