BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI CARTAN

Sur les fondements de la théorie du potentiel

Bulletin de la S. M. F., tome 69 (1941), p. 71-96
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1941__69__71_0>

SUR LES FONDEMENTS DE LA THÉORIE DU POTENTIEL;

Par M. Henri Cartan.

Comme l'ont montré les recherches modernes sur le potentiel et le problème de Dirichlet (¹), la plupart des développements de la théorie découlent de quelques propriétés initiales très simples, par exemple du fait que l'intégrale d'énergie d'une distribution de masses est essentiellement positive et ne s'annule qu'avec les masses. De même, l'opération appelée « balayage » revient, suivant un principe dû à Gauss et remis en honneur par Frostman et De la Vallée Poussin, à la recherche du minimum d'une intégrale, liée directement à l'intégrale d'énergie. Les fondements de la théorie résident donc dans certaines propriétés de la fonction $\frac{1}{r}$ dans l'espace euclidien à trois dimensions (r désignant la distance de deux points), ou, plus généralement, de la fonction r^{2-n} dans l'espace à $n > 2$ dimensions (le cas du potentiel logarithmique dans le plan étant ici laissé de côté). Or la fonction r^{2-n} n'est pas seule à jouir de ces propriétés : Marcel Riesz a reconnu qu'une grande partie de la théorie du potentiel subsiste lorsqu'on remplace la fonction r^{2-n} par $r^{\alpha-n}$, α étant un exposant positif quelconque inférieur à n. La théorie des « potentiels d'ordre α » a été développée par M. Riesz et Frostman (²).

Mais si l'on analyse de plus près les fondements, on voit que l'espace euclidien lui-même ne joue pas un rôle essentiel, bien

(¹) *Voir* notamment : De La Vallée Poussin, *Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel*, etc. (*Actualités scient. et industr.*, n° 578, Paris 1937); O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles* (Thèse, Lund 1935); M. Riesz, *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels* (*Acta Szeged*, t. 9, 1938, p. 1-42). On trouvera une bibliographie dans l'exposé de G. C. Evans, *Dirichlet problems* (*Amer. math. Soc.*, 1938, p. 185-226).

(²) *Voir* les deux Ouvrages cités, et aussi Frostman, *Sur le balayage des masses* (*Acta Szeged*, t. 9, 1938, p. 43-51).

que les démonstrations de M. Riesz et Frostman fassent intervenir soit la notion de dérivabilité (par considération du laplacien), soit les propriétés classiques du potentiel newtonien ([3]). Nous verrons qu'on peut s'en passer. Que la théorie soit susceptible d'être transportée dans un espace topologique plus général, c'est là une idée qu'avait déjà eue Marcel Brelot; je lui dois de vifs remerciements pour m'avoir aimablement communiqué des notes et des résultats obtenus sur ce sujet par lui-même et J. Dieudonné.

En réalité, c'est la formule de composition due à M. Riesz ([1]) qui me paraît jouer un rôle de premier plan. Aussi me placerai-je dans l'espace d'un *groupe* topologique localement compact, pour avoir une opération de composition. J'ignore si une telle généralisation est susceptible de futures applications. Si je l'entreprends, c'est surtout pour mettre en lumière le mécanisme de départ qui rend possible une théorie du potentiel; c'est pour donner, des faits essentiels, des démonstrations aussi pures que possible, ne faisant pas appel à des contingences secondaires ou fortuites. Le présent exposé contient, outre une démonstration nouvelle du fait qu'un même potentiel ne peut provenir de deux distributions de masses différentes, un théorème que je crois nouveau, même dans le cas newtonien (Théorème IV); ce théorème nous fournira, de la possibilité du balayage, ou de l'existence d'une « distribution capacitaire », une démonstration nouvelle, complètement indépendante de tout axiome de choix.

Les deux premiers paragraphes sont consacrés à des rappels relatifs aux mesures de Radon dans un espace localement compact, et aux groupes topologiques. A ce sujet, on pourra consulter l'Ouvrage de A. Weil (*L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications;* n° 869 des *Actualités scientifiques*, Paris 1940).

I. Mesures de Radon ou distributions de masses. — Plaçons-nous dans un espace topologique E *localement compact*, c'est-à-dire

---

([3]) Par exemple page 32 de la Thèse de Frostman, lors de la démonstration du théorème fondamental relatif à l'intégrale d'énergie des potentiels d'ordre α.

dont tout point possède un voisinage compact (4). L'espace euclidien rentre, bien entendu, dans cette catégorie; rappelons que les sous-ensembles compacts de l'espace euclidien sont les sous-ensembles *bornés* et *fermés*. Nous désignerons par $\mathcal{C}_+$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles $\geqq 0$, définies et *continues* en tout point de E, et nulles en dehors d'un ensemble compact (cet ensemble n'est pas fixé à l'avance : chaque fonction de la famille $\mathcal{C}_+$ est assujettie à la condition qu'il existe un ensemble compact tel qu'elle soit nulle en tout point de son complémentaire).

Par définition, une ***mesure de Radon positive***, ou ***distribution de masses positives***, est une fonctionnelle $\mu(f)$, définie et additive sur l'ensemble $\mathcal{C}_+$, et à valeurs $\geqq 0$. On montre facilement que l'on a, pour toute constante $c \geqq 0$,

$$\mu(cf) = c\mu(f);$$

cela, joint à l'additivité, exprime que μ est une fonctionnelle ***linéaire***. Une telle fonctionnelle se prolonge d'une manière et d'une seule en une fonctionnelle linéaire sur l'ensemble $\mathcal{C}$ des différences de fonctions de $\mathcal{C}_+$, c'est-à-dire sur l'ensemble des fonctions continues réelles, nulles en dehors d'un compact.

Une mesure de Radon positive permet de définir une ***intégrale de Lebesgue-Stieltjes***, de la manière suivante. Désignons par $\mathcal{J}$ l'ensemble des fonctions réelles $\geqq 0$, *semi-continues inférieurement* (5) en tout point de E; par $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions réelles $\geqq 0$, nulles en dehors d'un compact, et *semi-continues supérieurement* (5 bis) en tout point de E. Posons, pour $f \in \mathcal{J}$,

$$\mu(f) = \sup \mu(g) \text{ pour les } g \in \mathcal{C}_+ \text{ telles que } g \leqq f;$$

(4) Rappelons qu'un espace topologique est dit *compact* (bicompact dans la terminologie d'Alexandroff-Urysohn) s'il est *séparé* (deux points distincts possèdent toujours deux voisinages sans point commun) et s'il possède la propriété de Borel-Lebesgue (tout recouvrement de l'espace avec une famille d'ensembles ouverts contient un recouvrement *fini*). Pour toutes ces notions de topologie, et pour la terminologie adoptée ici, *voir* N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique*, Livre III, Topologie générale (Hermann, 1940).

(5) Il s'agit ici de fonctions pouvant prendre la valeur $+\infty$.

(5 bis) Il s'agit de fonctions à valeurs essentiellement finies.

$\mu(f)$ peut être infini. De même, posons, pour $f \in \mathfrak{S}$,

$$\mu(f) = \inf\ \mu(g) \text{ pour les } g \in \mathcal{C}_+ \text{ telles que } g \geqq f.$$

Une fonction $f \geqq 0$ quelconque, pouvant éventuellement prendre la valeur $+\infty$, sera dite *sommable* pour la mesure μ, ou μ-sommable, si la borne inférieure des $\mu(g)$ (g parcourant l'ensemble des fonctions de $\mathfrak{J}$ qui sont $\geqq f$) est *finie* et égale à la borne supérieure des $\mu(h)$ (h parcourant l'ensemble des fonctions de $\mathfrak{S}$ qui sont $\leqq f$). La valeur commune de ces bornes sera notée $\mu(f)$, ou encore

$$\int f(x)\, d\mu(x),$$

et nommée l'intégrale de f pour la mesure μ. Toute fonction de $\mathfrak{S}$ est sommable; toute fonction de $\mathfrak{J}$ dont le μ est fini est sommable. L'intégrale $\mu(f)$ est une fonctionnelle linéaire sur l'ensemble des fonctions $\geqq 0$ et sommables; ses valeurs sont $\geqq 0$ *et essentiellement finies*. Cette fonctionnelle se prolonge en une fonctionnelle linéaire sur l'ensemble des différences de fonctions sommables $\geqq 0$; une fonction réelle est dite sommable si elle est la différence de deux fonctions $\geqq 0$ et sommables. Pour qu'une fonction f soit sommable, il faut et il suffit que f^+ et f^- soient sommables [f^+ désigne $\sup(f, 0)$, f^- désigne $\sup(-f, 0)$].

Un ensemble A (il s'agit d'un sous-ensemble de E) est *mesurable* pour la mesure μ, si sa fonction caractéristique f est μ-sommable; l'intégrale de f se nomme alors la *mesure* de l'ensemble, et se note $\mu(A)$; c'est une quantité essentiellement finie. On dit aussi que $\mu(A)$ mesure la masse portée par A dans la distribution μ. Sur la famille des ensembles mesurables, $\mu(A)$ est une fonction additive. Parmi les ensembles *ouverts* de mesure nulle (pour une mesure de Radon donnée), il en est un qui contient tous les autres; son complémentaire est fermé et porte le nom de *noyau fermé de masses*. D'une manière générale, nous dirons qu'un ensemble porte toutes les masses de la distribution μ si son complémentaire est de mesure nulle. Observons encore que, pour toute mesure μ, tout ensemble compact est mesurable; tout ensemble ouvert contenu dans un ensemble compact est mesurable; plus généralement, tout ensemble dit « borélien », s'il est contenu dans un compact, est mesurable. Un ensemble ouvert a toujours un μ déterminé, fini ou infini; pour qu'un ensemble quelconque A soit μ-mesurable, il faut et il suffit que la borne inférieure des μ des ouverts qui contiennent A soit *finie* et égale à la borne supérieure des μ des compacts contenus dans A.

Outre les distributions positives, nous considérerons des *distributions de signe quelconque*, ou *mesures de Radon réelles*. Une telle distribution est définie par une fonctionnelle linéaire μ sur $\mathcal{C}_+$, qui puisse se mettre sous la forme de la différence de deux distributions positives μ_1 et μ_2. S'il en est ainsi, posons, pour $f \in \mathcal{C}_+$,

$$\mu^+(f) = \sup \quad \mu(g) \quad \text{pour les } g \in \mathcal{C}_+ \text{ telles que } g \leqq f,$$
$$\mu^-(f) = \sup\ [-\mu(h)] \text{ pour les } h \in \mathcal{C}_+ \text{ telles que } h \leqq f;$$

on a $\mu^+(f) \leqq \mu_1(f)$, $\mu^-(f) \leqq \mu_2(f)$ pour toute $f \in \mathcal{C}_+$; μ^+ et μ^- sont aussi des distributions positives dont la différence est égale à μ. Par définition, une fonction est sommable pour μ si elle est sommable pour μ^+ et pour μ^-, ou, ce qui revient au même, pour $\mu^+ + \mu^-$; son intégrale pour μ est la différence de ses intégrales pour μ^+ et pour μ^-. Le noyau fermé de la distribution μ est la réunion des noyaux fermés de μ^+ et de μ^-.

Définissons maintenant une topologie $\mathcal{T}$ sur l'ensemble $\mathcal{M}$ des mesures de Radon *positives* (pour les mesures de signe quelconque, cela entraînerait des complications dans le détail desquelles il est inutile d'entrer ici). Pour chaque $f \in \mathcal{C}$, $\mu(f)$ peut être considéré comme une fonction de $\mu \in \mathcal{M}$. La topologie $\mathcal{T}$ sera, par définition, la moins fine (6) rendant $\mu(f)$ continue sur $\mathcal{M}$, pour chaque $f \in \mathcal{C}$. En d'autres termes, pour qu'un ensemble V contenu dans $\mathcal{M}$ soit un « voisinage » d'une $\mu_0 \in \mathcal{M}$, il faut et il suffit qu'on puisse trouver des $f_i \in \mathcal{C}$ en nombre fini et une quantité $\varepsilon > 0$, telles que l'ensemble des μ satisfaisant aux inégalités

$$|\mu(f_i) - \mu_0(f_i)| < \varepsilon$$

soit contenu dans V (on pourrait se borner à prendre $\varepsilon = 1$ et $f_i \in \mathcal{C}_+$). On peut dire, d'une manière imagée, quoique un peu

(6) *Voir* Bourbaki, *loc. cit.*, p. 41.

vague ([7]), qu'une $\mu \in \mathcal{M}$ varie d'une manière *continue* si, pour chaque fonction fixe $f \in \mathcal{C}$, l'intégrale

$$\int f(x)\, d\mu(x)$$

varie d'une manière continue. Nous dirons aussi qu'une mesure μ non nécessairement positive varie d'une manière continue si μ^+ et μ^- varient d'une manière continue.

Voici, pour terminer, deux propositions relatives au cas où l'espace E est *compact*. $\mathcal{C}$ est alors l'ensemble des fonctions réelles continues sur E. Mettons sur $\mathcal{C}$ la topologie de la convergence uniforme [la « distance » de deux fonctions f_1 et f_2 étant $\sup\limits_{x \in E} |f_1(x) - f_2(x)|$]; les mesures de Radon de signe quelconque ne sont autres que les fonctions linéaires *continues* sur $\mathcal{C}$. Appliquons alors à $\mathcal{C}$ un théorème bien connu ([8]) relatif aux espaces vectoriels normés; il vient ici :

Proposition 1. — *Si $\mathcal{O}$ est un ensemble linéaire de fonctions continues, non partout dense dans $\mathcal{C}$, il existe au moins une mesure de Radon μ, non identiquement nulle, telle que l'intégrale*

$$\int f(x)\, d\mu(x)$$

soit nulle pour toute $f \in \mathcal{O}$.

Nous aurons aussi à faire usage du résultat suivant :

Proposition 2. — *Si une suite de distributions positives μ_n est telle que, pour toute f d'un ensemble partout dense de fonctions continues,*

$$\lim_{n \to \infty} \int f(x)\, d\mu_n(x)$$

existe, cette suite μ_n a pour limite, au sens de la topologie $\mathcal{T}$,

---

([7]) Il est possible de donner à ce langage vague un sens mathématique précis, en utilisant la notion de *filtre* (Bourbaki, *loc. cit.*, p. 20 et suiv.).

([8]) *Voir* par exemple S. Banach, *Théorie des opérations linéaires* (Varsovie, 1932), p. 57.

une distribution positive μ. *On a donc, pour toute* $f \in \mathcal{C}$,

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \lim_{n \to \infty} \int f(x)\, d\mu_n(x).$$

II. **Groupes localement compacts**. — Soit G un groupe abstrait, commutatif ou non. xy désignera le « produit » des éléments x et y de G; x^{-1} désignera l'inverse de x. Nous emploierons donc la notation multiplicative pour l'opération du groupe. Un groupe topologique est un groupe abstrait dans lequel a été définie une topologie telle que xy^{-1} soit une fonction continue par rapport à l'ensemble des variables x et y. Les éléments de G seront appelés *points*.

Tout ce que nous allons dire s'applique en particulier à l'espace euclidien, considéré comme espace du groupe de ses translations; dans ce cas les éléments x, y, z, ... peuvent être considérés comme des vecteurs d'origine fixe; xy désigne la somme des vecteurs x et y, x^{-1} le vecteur opposé à x.

D'une manière générale, dans un groupe quelconque, la notation e désignera l'élément-unité. On appelle *translation à gauche* définie par un élément $s \in$ G, la transformation biunivoque et bicontinue qui, à chaque $x \in$ G, fait correspondre sx. Étant donnée une fonction f sur G, on appelle translatée à gauche de f par s la fonction f_s définie par

$$f_s(x) = f(s^{-1}x).$$

La symétrie est la transformation biunivoque et bicontinue qui, à chaque $x \in$ G, fait correspondre x^{-1}. La symétrique d'une fonction f est la fonction f^* définie par

$$f^*(x) = f(x^{-1}).$$

Nous considérerons désormais un groupe topologique G *localement compact*. Sur un tel groupe on sait ([9]) qu'il existe une mesure de Radon positive, dite *mesure de Haar*, invariante par

([9]) *Voir* par exemple l'ouvrage de A. Weil cité dans l'Introduction; on y trouvera une bibliographie sur la question.

les translations à gauche, c'est-à-dire une mesure μ telle que l'on ait, pour toute $f \in \mathcal{C}_+$,

$$\mu(f_s) = \mu(f), \qquad \text{quel que soit } s \in \mathrm{G}.$$

Une telle mesure, supposée non identiquement nulle, est unique à un facteur constant (positif) près. Ce facteur étant choisi une fois pour toutes, l'intégrale d'une fonction sommable pour cette mesure sera notée

$$\int f(x)\, dx.$$

L'égalité

$$\int f(s^{-1}x)\, dx = \int f(x)\, dx,$$

dans le premier membre de laquelle on ferait le changement de variable $x = sy$, conduit à écrire $d(sx) = dx$, chacune de ces quantités désignant la mesure invariante (x est la variable, s un élément fixe).

$d(xs)$ désigne la mesure qui, à chaque fonction $f(x)$, fait correspondre $\int f(xs^{-1})\, dx$; c'est aussi une mesure invariante à gauche. Elle est donc proportionnelle à dx, ce qui donne

$$d(xs) = \rho(s)\, dx; \tag{1}$$

$\rho(s)$ est une fonction > 0, continue, qui satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\rho(s_1 s_2) = \rho(s_1).\rho(s_2),$$

d'où, en particulier,

$$\rho(s).\rho(s^{-1}) = 1, \qquad \rho(e) = 1.$$

Si le groupe G est commutatif, ou compact, $\rho(s)$ est une constante égale à 1, et la mesure dx est invariante aussi bien à droite qu'à gauche. Dans le cas général, $\frac{dx}{\rho(x)}$ est une mesure invariante à droite, et aussi $d(x^{-1})$. Il existe donc une constante $k > 0$ telle que

$$d(x^{-1}) = k \frac{dx}{\rho(x)}.$$

Si dans cette relation on remplace x par x^{-1}, on voit que $k = \frac{1}{k}$, donc $k = 1$, et par suite

$$(2) \qquad d(x^{-1}) = \frac{dx}{\rho(x)}.$$

Les fonctions sommables sont les mêmes pour la mesure dx et pour la mesure $d(x^{-1})$. Nous dirons qu'une fonction φ est *sommable sur tout compact* (sous-entendu : pour la mesure invariante) si, quelle que soit $f \in \mathcal{C}_+$, le produit $f\varphi$ est sommable. φ étant fixée, l'intégrale

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx$$

dépend linéairement de f, et définit donc une distribution de masses (*cf.* § I); si la fonction φ est $\geqq 0$, elle définit une distribution de masses positives. φ s'appelle la *densité* de la distribution (il s'agit d'une densité par rapport à la mesure invariante à gauche dx). La distribution sera notée $\varphi(x)\,dx$. Pour abréger le langage, nous appellerons distribution *continue* de masses toute distribution définie par une densité $\varphi \in \mathcal{C}$; toutes les masses d'une telle distribution sont portées par un ensemble compact.

Composition des mesures de Radon. — Soient μ et ν deux mesures de Radon, que nous supposerons d'abord positives. Pour toute $f \in \mathcal{C}_+$, considérons la fonction de deux variables $x \in G$ et $y \in G$

$$f(xy)$$

(xy désigne le produit des éléments x et y dans le groupe G). x étant fixé, considérons l'intégrale

$$\int f(xy)\,d\nu(y),$$

qui est une fonction continue $g(x) \geqq 0$. Cette fonction, considérée comme semi-continue inférieurement, possède un $\mu(g)$ bien déterminé, fini ou infini. On obtiendrait le même résultat en prenant d'abord

$$h(y) = \int f(xy)\,d\mu(x),$$

puis $\nu(h)$; cela résulte de la théorie des intégrales doubles. Si le résultat obtenu est *fini*, et cela quelle que soit $f \in \mathcal{C}_+$, il dépend linéairement de f, et définit donc une mesure de Radon, évidemment positive, dite *composée de μ et de ν*, et notée

$$[\mu, \nu].$$

Cette mesure composée existe certainement lorsque les masses de l'une des distributions μ et ν sont portées par un compact. Il faut prendre garde que l'on a, en général,

$$[\mu, \nu] \neq [\nu, \mu],$$

sauf bien entendu si le groupe est commutatif.

L'opération de composition est *associative* : si l'une des quantités

$$\big[\mu, [\nu, \lambda]\big] \quad \text{et} \quad \big[[\mu, \nu], \lambda\big]$$

a un sens, l'autre a aussi un sens et elles sont égales; on les désigne par $[\mu, \nu, \lambda]$.

L'opération de composition peut s'étendre à deux distributions de signe quelconque

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \qquad \nu = \nu^+ - \nu^-,$$

pourvu que les mesures composées

$$[\mu^+, \nu^+], \quad [\mu^+, \nu^-], \quad [\mu^-, \nu^+], \quad [\mu^-, \nu^-]$$

existent; cela arrivera certainement si toutes les masses de μ, ou de ν, sont portées par un ensemble compact.

La composition des mesures de Radon positives, dans le cas particulier où la masse totale est égale à 1, correspond à la composition des lois de probabilité.

Désignons une fois pour toutes par ε la distribution formée d'une masse ponctuelle $+1$ placée au point e (unité du groupe); une telle distribution est caractérisée par la relation

$$\int f(x)\, d\varepsilon(x) = f(e).$$

Cette distribution joue, vis-à-vis de la composition des mesures de Radon, le rôle d'élément-unité ; autrement dit, on a

$$[\varepsilon, \mu] = [\mu, \varepsilon] = \mu \qquad \text{quelle que soit } \mu.$$

Proposition 3. — *Si ν est une distribution fixe, dont les masses sont portées par un compact, et μ une distribution quelconque variable, la distribution composée est une fonction continue de μ.*

Dans cet énoncé, la continuité s'entend au sens de la topologie $\mathfrak{T}$ définie au paragraphe I. En toute rigueur nous devons donc supposer que les mesures considérées sont positives ; si μ n'était pas positive, nous supposerions que μ^+ et μ^- varient d'une manière continue.

Pour établir cette proposition, il faut prouver que pour chaque $f \in \mathcal{C}_+$, l'intégrale de f par rapport à la mesure composée varie continûment avec μ. Or cette intégrale est égale à

$$\int g(x)\, d\mu(x) \qquad \text{avec} \quad g(x) = \int f(xy)\, d\nu(y) ;$$

et comme la fonction continue $g(x)$ est nulle en dehors d'un ensemble compact (d'après l'hypothèse faite sur ν), la proposition est établie, d'après la définition même de la continuité selon la topologie $\mathfrak{T}$.

On montrerait de même :

Proposition 3 *bis*. — *Si ν est une distribution fixe quelconque, et si μ est une distribution variable dont les masses sont portées par un compact fixe, $[\mu, \nu]$ est une fonction continue de μ.*

Bien entendu, les résultats valables pour $[\mu, \nu]$ le sont aussi pour $[\nu, \mu]$.

Faisons tout de suite une application de la proposition 3 *bis*.

Soit μ une distribution quelconque ; pour chaque $\varphi \in \mathcal{C}_+$ telle que $\int \varphi(x)\, dx = 1$, les distributions $[\varphi\, dx, \mu]$ et $[\mu, \varphi\, dx]$ sont dites « régularisées de μ » (à gauche et à droite). Or associons, à chaque voisinage V de e (dans le groupe G), l'ensemble $\mathcal{C}_V$ des $\varphi \in \mathcal{C}_+$ telles que φ s'annule en dehors de V et que $\int \varphi(x)\, dx = 1$.

La distribution $\varphi(x)\,dx$ est aussi voisine qu'on veut de la distribution-unité ε, pourvu que φ appartienne à un $\mathcal{C}_V$ convenable. D'après la proposition 3 *bis*, les régularisées de μ par φ sont donc aussi voisines qu'on veut de μ, pourvu que φ appartienne à un $\mathcal{C}_V$ convenable. En particulier, si une μ est telle que

$$[\mu,\ \varphi(x)\,dx] = 0, \qquad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{C}_+,$$

la distribution μ est nulle (ou, comme on dit, ne comporte pas de masses).

III. **Potentiel et énergie.** — A la base d'une théorie du potentiel nous mettons une famille de distributions de masses positives ε_α dépendant d'un paramètre $\alpha \geqq 0$ et assez petit, et satisfaisant aux trois hypothèses suivantes :

1. La distribution ε_α *varie continûment avec* α (autrement dit, l'intégrale

$$\int \varphi(x)\,d\varepsilon_\alpha(x)$$

est, pour chaque $\varphi \in \mathcal{C}$, une fonction *continue* de α). Pour $\alpha = 0$, ε_α se réduit à la *distribution-unité* ε; pour $\alpha > 0$, ε_α a la forme $f_\alpha(x)\,dx$, la fonction $f_\alpha \geqq 0$ étant *semi-continue inférieurement et sommable sur tout compact*.

2. Lorsque α et β sont assez petits pour que $\varepsilon_{\alpha+\beta}$ soit défini, $[\varepsilon_\alpha,\ \varepsilon_\beta]$ existe, et l'on a

$$[\varepsilon_\alpha,\ \varepsilon_\beta] = \varepsilon_{\alpha+\beta}. \tag{3}$$

3. La distribution ε_α est *invariante par symétrie*; autrement dit

$$f_\alpha(x^{-1})\,d(x^{-1}) = f_\alpha(x)\,dx,$$

ce qui entraîne, en tenant compte de la relation (2) (§ II), la condition

$$f_\alpha(x^{-1}) = \rho(x).f_\alpha(x). \tag{4}$$

Les conditions 1 et 2 expriment que les distributions $\varepsilon_\alpha = f_\alpha\,dx$ forment une sorte de *groupe* continu vis-à-vis de la composition des mesures de Radon. Nous laissons ici de côté la question, pourtant intéressante, de savoir comment on peut construire de telles familles ε_α. Dans le cas où le groupe G est commutatif, c'est la transformation dite « de Fourier » (*voir* A. Weil, *loc. cit.*, p. 111-123) qui joue un rôle décisif dans cette construction. Bornons-nous ici à donner deux exemples.

Prenons d'abord le groupe des translations de la droite réelle, et la distribution de Gauss

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{\alpha}} dx$$

(e désigne, dans cette formule, la base des logarithmes népériens). Les conditions **1**, **2**, **3** sont bien remplies; ici, ε_α est définie pour tout α positif.

Le deuxième exemple est celui traité par M. Riesz ; il est à la base de la théorie des « potentiels d'ordre α » de Riesz : dans l'espace euclidien à $n > 2$ dimensions, où r désigne la distance du point x à l'origine (unité du groupe des translations), on définit ε_α, pour $\alpha < n$, par

$$f_\alpha(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \pi^{-n/2}\, 2^{-\alpha} r^{\alpha-n}.$$

Potentiel d'ordre α d'une distribution μ. — Partons d'une famille ε_α comme ci-dessus. Pour chaque distribution μ, positive ou non, considérons la distribution composée $[\varepsilon_\alpha, \mu]$, si elle existe. Pour éviter des complications, *nous supposerons toujours que les distributions μ envisagées ont leurs masses portées par un ensemble compact* (variable, bien entendu, avec la distribution considérée); de cette manière, nous serons assurés de l'existence de la mesure $[\varepsilon_\alpha, \mu]$. $[\varepsilon_\alpha, \mu]$ varie continûment avec α (proposition 3), et, pour chaque α, dépend continûment de μ lorsque μ varie en gardant toutes ses masses sur un ensemble compact fixe (proposition 3 *bis*).

Pour $\alpha > 0$, $[\varepsilon_\alpha, \mu]$ a la forme $U(x)\,dx$, avec

$$U(x) = \int \frac{f_\alpha(xy^{-1})}{\rho(y)} d\mu(y). \tag{5}$$

Pour le voir, rappelons que $[\varepsilon_\alpha, \mu]$ est la mesure qui, à chaque $\varphi \in \mathcal{C}_+$, associe l'intégrale $\int \psi(y)\, d\mu(y)$, avec

$$\psi(y) = \int \varphi(xy) f_\alpha(x)\, dx.$$

Dans cette dernière intégrale, remplaçons x par xy^{-1}; il vient, en tenant compte des relations (1) et (2) (§ II),

$$\psi(y) = \int \varphi(x) \frac{f_\alpha(xy^{-1})}{\rho(y)}\, dx,$$

et par suite l'intégrale de φ pour la mesure $[\varepsilon_\alpha, \mu]$ est égale à

$$\iint \varphi(x) \frac{f_\alpha(xy^{-1})}{\rho(y)}\, dx\, d\mu(y) = \int \varphi(x)\, \mathrm{U}(x)\, dx,$$

$\mathrm{U}(x)$ étant donné par la formule (5) ci-dessus. Ceci prouve que $[\varepsilon_\alpha, \mu] = \mathrm{U}(x)\, dx$. La fonction U est *sommable sur tout compact*. Nous l'appellerons *potentiel d'ordre α de la distribution* μ, et la noterons $\mathrm{U}_\alpha^\mu(x)$. Si μ est une distribution *continue*, c'est-à-dire de la forme $\varphi(x)\, dx$ (avec $\varphi \in \mathcal{C}$), le potentiel U_α^μ est une fonction *continue* de x, comme on le vérifie facilement. Pour une distribution μ *positive* quelconque, U_α^μ est *semi-continu inférieurement*.

Remarque. — Nous venons de définir un *potentiel gauche*. On obtiendrait un potentiel *droit* en considérant la mesure $[\mu, \varepsilon_\alpha]$, qui a la forme $\mathrm{V}(x)\, d(x^{-1})$, avec

$$\mathrm{V}(x) = \int f_\alpha(x^{-1}y)\, \rho(y)\, d\mu(y).$$

Il est entendu que nous ne considérerons que des potentiels gauches, ce qui nous dispensera d'employer l'épithète *gauche*. Dans un groupe commutatif, les deux potentiels sont identiques.

Reprenons la formule (5). On a

$$\mathrm{U}_\alpha^\mu(x) = \int g_\alpha(x, y)\, d\mu(y) \tag{6}$$

avec

$$g_\alpha(x, y) = \frac{f_\alpha(xy^{-1})}{\rho(y)}. \tag{7}$$

Le noyau $g_\alpha(x, y)$ *est symétrique en* x *et* y, en vertu de la relation (4), qui donne ici

$$\frac{f_\alpha(xy^{-1})}{\rho(y)} = \frac{f_\alpha(yx^{-1})}{\rho(x)}.$$

En outre, la formule de composition (3) donne la relation fondamentale

$$g_{\alpha+\beta}(x, y) = \int g_\alpha(x, z) g_\beta(y, z)\, dz. \tag{8}$$

Intégrale d'énergie. — Soient μ_1 et μ_2 deux distributions que nous supposerons d'abord *positives*. Les deux intégrales

$$\int U_\alpha^{\mu_1}(x)\, d\mu_2(x) \qquad \text{et} \qquad \int U_\alpha^{\mu_2}(x)\, d\mu_1(x)$$

sont égales entre elles (loi de réciprocité), car elles sont toutes deux égales à l'intégrale double

$$\iint g_\alpha(x, y)\, d\mu_1(x)\, d\mu_2(y).$$

A vrai dire, ces intégrales n'existent peut-être pas, ou plus exactement sont peut-être infinies. On dira qu'une distribution positive μ a une énergie finie (pour l'ordre α), si l'intégrale

$$\int U_\alpha^{\mu}(x)\, d\mu(x) = \iint g_\alpha(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

a une valeur finie. Si μ_1 et μ_2 ont une énergie finie, leur « énergie mutuelle »

$$\int U_\alpha^{\mu_1}(x)\, d\mu_2(x) = \int U_\alpha^{\mu_2}(x)\, d\mu_1(x) = \iint g_\alpha(x, y)\, d\mu_1(x)\, d\mu_2(y)$$

est finie, comme on va le voir dans un instant.

L'énergie mutuelle d'ordre $\alpha + \beta$ satisfait à la relation

$$\iint g_{\alpha+\beta}(x, y)\, d\mu_1(x)\, d\mu_2(y) = \int U_\alpha^{\mu_1}(z) U_\beta^{\mu_2}(z)\, dz, \tag{9}$$

conséquence immédiate de la relation (8). En particulier, remplaçons dans (9) α et β par $\frac{\alpha}{2}$; il vient

$$\iint g_\alpha(x, y)\, d\mu_1(x)\, d\mu_2(y) = \int U_{\alpha/2}^{\mu_1}(z) U_{\alpha/2}^{\mu_2}(z)\, dz. \tag{10}$$

Cela prouve que μ a une énergie finie (pour l'ordre α) dans le cas et dans le seul cas où $U^{\mu}_{\alpha/2}$ est de *carré sommable* pour la mesure invariante. Il est bien connu que le produit de deux fonctions de carré sommable est sommable, d'où il résulte que l'énergie mutuelle de deux distributions d'énergie finie est finie.

Il est maintenant facile de considérer des distributions de signe quelconque. Une distribution μ sera dite d'énergie finie (pour l'ordre α) si elle est la différence de deux distributions d'énergie finie (pour le même ordre). L'intégrale

$$\int U^{\mu}_{\alpha}(x)\, d\mu(x) = \iint g_{\alpha}(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

est alors finie et bien déterminée; on l'appelle encore l'énergie de la distribution μ. On définit de même l'énergie mutuelle de deux distributions d'énergie finie; elle satisfait à la relation fondamentale (10). Écrivons explicitement ce que devient (10) lorsqu'on y fait $\mu_1 = \mu_2 = \mu$:

$$\iint g_{\alpha}(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) = \int \left[U^{\mu}_{\alpha/2}(z)\right]^2 dz. \tag{11}$$

Observons qu'une distribution *continue* (§ II) a toujours une énergie finie, pour tout ordre α.

IV. — Les théorèmes fondamentaux.

Théorème I. — *Pour une distribution μ d'énergie finie (pour l'ordre α), l'énergie d'ordre α est essentiellement positive, et ne peut être nulle que si la distribution μ ne comporte pas de masses.*

La première partie de l'énoncé résulte évidemment de la formule (11), qui prouve aussi que l'énergie de μ (pour l'ordre α) ne s'annule que si le potentiel d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ est *presque partout nul* [10]. Il reste à prouver que ceci entraîne l'absence de masses. Or ce fait va résulter, plus généralement, du théorème suivant, dans lequel aucune hypothèse n'est faite relativement à l'énergie :

---

[10] Ce début de démonstration se trouve déjà chez M. Riesz (*loc. cit.*, p. 6). C'est la suite de la démonstration qui est nouvelle; en effet Riesz démontre notre Théorème II en se servant du laplacien (p. 10 du mémoire cité).

Théorème II. — *Si une distribution μ est telle que son potentiel U_α^μ soit presque partout nul pour une valeur particulière de α, elle ne comporte pas de masses.*

En effet, l'hypothèse se traduit par la relation

$$[\varepsilon_\alpha, \mu] = 0.$$

Il faut montrer qu'elle entraîne $\mu = 0$.

Supposons d'abord que μ ait la forme $\varphi(x)\,dx$ avec $\varphi \in \mathcal{C}$. Alors μ a une énergie finie pour tout ordre $\beta > 0$. Si U_α^μ est presque partout nul, l'énergie d'ordre α

$$\int U_\alpha^\mu(x)\varphi(x)\,dx = \int \left[U_{\alpha/2}^\mu(z)\right]^2 dz$$

est nulle, et par suite le potentiel d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ est nul presque partout. En répétant ce raisonnement, on voit de proche en proche que l'on a

$$[\varepsilon_\beta, \varphi(x)\,dx] = 0$$

pour $\beta = \frac{\alpha}{2^n}$, quel que soit l'entier n; et comme $[\varepsilon_\beta, \mu]$ a pour limite μ quand β tend vers zéro, on trouve bien que la distribution $\varphi(x)\,dx$ est nulle; donc la fonction φ est identiquement nulle.

Dans le cas général, sans aucune restriction sur μ, montrons encore que $[\varepsilon_\alpha, \mu] = 0$ entraîne $\mu = 0$. Régularisons μ par une $\varphi \in \mathcal{C}_+$ (*cf.* fin du paragraphe II). Il vient

$$[\varepsilon_\alpha, \mu, \varphi\,dx] = 0,$$

c'est-à-dire

$$[\varepsilon_\alpha, \psi(x)\,dx] = 0 \tag{12}$$

avec

$$\psi(x)\,dx = [\mu, \varphi\,dx].$$

Mais $\psi \in \mathcal{C}$, donc la relation (12) entraîne $\psi = 0$, d'après ce qu'on vient de démontrer. Ainsi on a $[\mu, \varphi\,dx] = 0$, quelle que soit $\varphi \in \mathcal{C}_+$, et, par suite (§ II), $\mu = 0$.

Le théorème II est donc entièrement démontré. Il prouve que les valeurs d'un potentiel (d'ordre α) déterminent entièrement la distribution qui lui donne naissance. Ce théorème de la *détermination des masses par les potentiels* peut être complété comme suit :

THÉORÈME II *bis*. — *Si deux distributions positives* μ_1 *et* μ_2, *dont les masses sont portées par un même ensemble compact* K, *donnent naissance à deux potentiels (d'ordre* α*) presque partout égaux sur un ensemble ouvert contenant* K, *elles sont identiques.*

On commence par montrer que si μ_1 et μ_2 ont une *énergie finie*, il suffit que $U_\alpha^{\mu_1}$ et $U_\alpha^{\mu_2}$ soient égaux sur un ensemble portant toutes les masses de μ_1 et de μ_2, pour qu'on puisse conclure $\mu_1 = \mu_2$. Cela résulte en effet du lemme :

LEMME. — *Si*, μ_1 *et* μ_2 *étant positives d'énergie finie, on a*

$$U_\alpha^{\mu_1}(x) \leqq U_\alpha^{\mu_2}(x) \quad \text{sur un noyau de la distribution } \mu_1,$$
$$U_\alpha^{\mu_2}(x) \leqq U_\alpha^{\mu_1}(x) \quad \text{sur un noyau de la distribution } \mu_2,$$

alors $\mu_1 = \mu_2$. En effet, les hypothèses entraînent

$$\int \left[U_\alpha^{\mu_1}(x) - U_\alpha^{\mu_2}(x)\right] (d\mu_1 - d\mu_2) \leqq 0,$$

et, par suite, d'après le théorème I, $\mu_1 - \mu_2 = 0$.

Cela posé, pour obtenir le théorème II *bis* dans le cas général, on régularise μ_1 et μ_2 par une même $\varphi \in \mathcal{C}_+$, ce qui ramène au cas particulier déjà étudié, et permet de conclure par un raisonnement analogue à celui employé pour le théorème II.

Dorénavant α *sera fixé une fois pour toutes*. Le potentiel U_α^μ sera noté simplement U^μ et appelé potentiel de la distribution μ.

THÉORÈME III. — *Soit* K *un ensemble compact fixe. Toute fonction réelle définie et continue sur* K *peut être uniformément approchée, sur* K, *par des potentiels de distributions continues* [c'est-à-dire de la forme $\varphi(x)\,dx$ avec $\varphi \in \mathcal{C}$; rappelons que de tels potentiels sont continus, et en particulier continus sur K]. *On peut d'ailleurs astreindre ces distributions à avoir toutes leurs masses sur un ensemble ouvert arbitraire fixe, pourvu que cet ensemble contienne* K.

Soit en effet $\mathcal{O}$ l'ensemble des potentiels de distributions de la forme $\varphi(x)\,dx$, où φ est continue et s'annule en dehors d'un ensemble ouvert fixe K′ contenant K. Si le théorème à démontrer était faux, il existerait (§ I, proposition 1) une distribution ν *non nulle*, portée par K, telle que

$$\int U^{\mu}(x)\,d\nu(x) = 0 \quad \text{pour tout potentiel } U^{\mu} \in \mathcal{O}.$$

Cette relation s'écrit aussi (loi de réciprocité)

$$\int U^{\nu}(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{C}$ qui s'annule en dehors de K′. Ceci exprime que la mesure $U^{\nu}(x)\,dx$ ne comporte pas de masses sur K′; mais alors la distribution ν, portée par K, est nulle d'après le théorème II *bis*. Cette contradiction achève la démonstration.

L'espace des distributions d'énergie finie.

α étant toujours fixé, notons $\|\mu\|$ la racine carrée de l'énergie d'une distribution μ, supposée d'énergie finie. On a, d'après (11),

$$\|\mu\|^2 = \int \left[U^{\mu}_{\alpha/2}(x)\right]^2 dx \qquad \text{et} \qquad \|\mu_1 + \mu_2\| \leq \|\mu_1\| + \|\mu_2\|.$$

Si à μ on fait correspondre son potentiel d'ordre $\frac{\alpha}{2}$, $\|\mu\|$ n'est autre chose que la *norme* dans l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions de carré sommable. L'espace $\mathcal{E}$ des distributions d'énergie finie apparaît ainsi comme isomorphe à un sous-espace d'un espace de Hilbert réel.

Or l'espace $\mathcal{H}$ est *complet*; autrement dit, si une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{H}$ est telle que

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to \infty}} \|f_n - f_p\| = 0 \qquad \text{(suite de Cauchy)},$$

alors il existe une $f \in \mathcal{H}$ (et une seule à un ensemble de mesure nulle près), telle que

$$\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\| = 0.$$

L'espace $\mathcal{E}$ lui-même, muni de la norme-énergie $\|\mu\|$ (qui définit comme « distance » de deux distributions μ_1 et μ_2 la quantité $\|\mu_1 - \mu_2\|$, cette distance n'étant nulle que si $\mu_1 = \mu_2$), est-il complet ? C'est peu probable. Toutefois, en nous bornant aux distributions *positives* sur un compact *fixe*, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème IV. — *L'espace* $\mathcal{E}_K$ *des distributions positives, d'énergie finie, dont toutes les masses sont portées par un compact fixe* K, *est complet lorsqu'on le munit de la norme-énergie.*

Pour le voir, prenons une suite de Cauchy μ_n. Les fonctions

$$f_n(x) = U_{\alpha/2}^{\mu_n}(x) \geqq 0$$

forment une suite de Cauchy dans l'espace $\mathcal{H}$, qui est complet. Soit $f \geqq 0$ la fonction-limite (au sens de la norme). Pour toute fonction g de carré sommable, on a (continuité du produit scalaire dans un espace de Hilbert)

$$\int f(x)g(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int f_n(x)g(x)\,dx.$$

En particulier, si $g \in \mathcal{C}$, la quantité

$$\int U_{\alpha/2}^{\mu_n}(x)\,g(x)\,dx$$

a pour limite $\int f(x)\,g(x)\,dx$. On trouve donc, par la loi de réciprocité, et en désignant par ν la mesure $g(x)\,dx$, que

$$\lim_{n \to \infty} \int U_{\alpha/2}^{\nu}(x)\,d\mu_n(x) \text{ existe et est égale à} \int f(x)\,g(x)\,dx.$$

Or, sur K, toute fonction continue peut être uniformément approchée par des $U_{\alpha/2}^{\nu}$ (théorème III), donc (§ I, proposition 2), les μ_n ont une limite [11] μ au sens de la topologie $\mathcal{T}$ (qu'il ne faut pas confondre avec la topologie déduite de la norme-énergie). Les

[11] Ici l'hypothèse que les μ_n sont *positives* joue un rôle essentiel, car la proposition 2 cesserait d'être exacte si on l'appliquait à des distributions non positives.

masses de μ sont évidemment portées par K. Reste à voir que μ est aussi limite des μ_n au sens de la distance $\|\mu - \mu_n\|$. On a en tout cas

$$\int \mathrm{U}^{\nu}_{\alpha/2}(x)\, d\mu(x) = \lim_{n \to \infty} \int \mathrm{U}^{\nu}_{\alpha/2}(x)\, d\mu_n(x) = \int f(x)\, g(x)\, dx,$$

c'est-à-dire (loi de réciprocité)

$$\int \mathrm{U}^{\mu}_{\alpha/2}\, g(x)\, dx = \int f(x)\, g(x)\, dx \qquad \text{pour toute} \quad g \in \mathcal{C}.$$

Ceci signifie que les mesures $\mathrm{U}^{\mu}_{\alpha/2}(x)\, dx$ et $f(x)\, dx$ sont identiques, donc que $\mathrm{U}^{\mu}_{\alpha/2} = f$ presque partout. Ainsi $\mathrm{U}^{\mu}_{\alpha/2}$ est limite de $\mathrm{U}^{\mu_n}_{\alpha/2}$ au sens de la norme dans $\mathcal{H}$, donc μ est limite de μ_n au sens de la norme-énergie. C. Q. F. D.

Remarque. — Cette démonstration prouve en même temps que, sur $\mathcal{E}_K$, la topologie définie par la norme-énergie est *plus fine* que la topologie $\mathcal{T}$: tout $\mathcal{T}$-voisinage d'une μ_0 est *a fortiori* voisinage de μ_0 selon la norme-énergie.

V. **Le balayage.** — Le théorème qui vient d'être démontré joue un rôle fondamental dans le problème du « balayage » d'une distribution de masses positives, supposée d'énergie finie.

Soit K un ensemble compact fixe. L'ensemble $\mathcal{E}_K$ des distributions *positives*, d'énergie finie, *portées par* K, est un sous-ensemble *convexe* de l'espace $\mathcal{E}$ de toutes les distributions d'énergie finie; autrement dit, si μ_1 et μ_2 appartiennent à $\mathcal{E}_K$, $a\mu_1 + b\mu_2$ appartient à $\mathcal{E}_K$ quelles que soient les constantes positives a et b telles $a + b = 1$.

D'autre part, le théorème IV affirme que l'ensemble $\mathcal{E}_K$ est non seulement convexe, mais *complet*. Cela étant, une méthode bien connue, due à F. Riesz (*Acta Szeged*, t. 7, 1934), permet de démontrer qu'étant donnée une distribution positive quelconque μ *d'énergie finie*, il existe dans $\mathcal{E}_K$ une μ' *et une seule* pour laquelle la distance $\|\mu - \mu'\|$ est minimum. L'opération qui fait passer de μ à μ' s'appelle ici *balayage de la distribution* μ *sur l'ensemble compact* K.

Rappelons en quelques mots en quoi consiste la méthode de F. Riesz. On prend une suite de distributions $\mu'_n \in \mathcal{E}_K$ telles que leur distance à μ ait pour limite le minimum de la distance de μ à un élément de $\mathcal{E}_K$. On prouve que c'est une suite de Cauchy, grâce à la relation

$$\|\mu'_p - \mu'_n\|^2 = 2\|\mu'_p - \mu\|^2 + 2\|\mu'_n - \mu\|^2 - 4\left\|\frac{\mu'_p + \mu'_n}{2} - \mu\right\|^2.$$

μ'_n converge donc au sens de la norme vers une $\mu' \in \mathcal{E}_K$ (puisque $\mathcal{E}_K$ est complet). Cette μ' réalise le minimum de la distance; l'unicité résulte encore de l'identité ci-dessus.

Empruntant le langage de l'espace de Hilbert, appelons *produit scalaire* de deux distributions (d'énergie finie) l'énergie mutuelle de ces distributions [*cf.* relation (10) du § III]. Le minimum de la distance d'un point μ à un ensemble convexe $\mathcal{E}_K$ étant atteint pour un point $\mu' \in \mathcal{E}_K$, ce point est caractérisé par la propriété que le vecteur ayant ce point μ' comme origine et un point arbitraire de $\mathcal{E}_K$ pour extrémité, a, avec le vecteur d'origine μ' et d'extrémité μ, un produit scalaire *négatif ou nul.* Le résultat μ' du balayage de μ sur K est donc caractérisé par la condition

$$\int (U^{\mu} - U^{\mu'})(d\nu - d\mu') \leqq 0 \qquad \text{pour toute} \quad \nu \in \mathcal{E}_K;$$

autrement dit, on doit avoir

$$\int (U^{\mu} - U^{\mu'})\, d\lambda \leqq 0 \tag{13}$$

pour toute distribution λ sur K, telle que la distribution $\lambda + \mu'$ soit positive. Or une telle λ est la différence de deux distributions positives λ^+ et λ^- (sur K), telles que la seconde soit $\leqq \mu'$ [12]. La condition (13) équivaut donc aux deux suivantes

$$\int (U^{\mu} - U^{\mu'})\, d\lambda \leqq 0 \qquad \text{pour toute} \quad \lambda \in \mathcal{E}_K,$$

$$\int (U^{\mu} - U^{\mu'})\, d\lambda \geqq 0 \qquad \text{pour toute} \quad \lambda \in \mathcal{E}_K \quad \text{telle que } \lambda \leqq \mu'.$$

Dans la seconde condition, on peut, en tenant compte de la première, remplacer $\geqq 0$ par $= 0$.

Ces deux conditions sont, à leur tour, équivalentes aux suivantes :

---

(12) En effet, $-\lambda \leqq \mu'$ entraîne $\lambda^- \leqq \mu'$.

1° On a $U^{\mu'}(x) \geqq U^{\mu}(x)$ pour tout $x \in K$, sauf sur un ensemble dont la mesure est nulle pour toute distribution positive d'énergie finie; nous dirons que l'inégalité a lieu *quasi-partout* sur K;

2° On a $U^{\mu'}(x) = U^{\mu}(x)$ sur un noyau de masses de la distribution μ'.

Nous venons de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Soient donnés une distribution positive* μ, *d'énergie finie, et un ensemble compact* K. *Parmi les distributions positives* μ' *d'énergie finie portées par* K, *il en existe une et une seule qui satisfait aux conditions* 1° *et* 2° *ci-dessus. C'est celle qui minimise l'énergie* $\|\mu - \mu'\|^2$.

Remarque. — Comme il est bien connu, μ' minimise en même temps l'intégrale $\int (U^{\mu'} - 2U^{\mu})\, d\mu'$. Cette remarque permet d'étendre le procédé ci-dessus à des cas où l'on part non plus d'un potentiel U^{μ}, mais d'une fonction positive plus générale.

Appliquons maintenant le théorème IV à la recherche de la distribution dite « capacitaire » sur un ensemble compact K. Si, pour toute distribution positive d'énergie finie, K a une mesure nulle, nous dirons que l'ensemble compact K est de *capacité nulle*. Écartons ce cas; alors l'ensemble des distributions positives d'énergie finie, de *masse totale égale à un portée par* K, n'est pas vide et est convexe; d'après le théorème IV, il est *complet* pour la norme-énergie. Donc (méthode de F. Riesz) il existe une distribution μ et une seule qui minimise l'énergie. c désignant le minimum (non nul) de l'énergie, la *distribution capacitaire* est $\nu = \frac{1}{c}\mu$; on montre facilement qu'elle est caractérisée par les deux conditions :

1° $U^{\nu}(x) \geqq 1$ quasi-partout sur K;

2° $U^{\nu}(x) = 1$ sur un noyau de masses de la distribution ν ([13]).

([13]) On peut préciser cette condition 2°. En effet, $U^{\nu}(x)$ est une fonction semi-continue inférieurement, donc l'ensemble des x tels que $U^{\nu}(x) > 1$ est *ouvert*. D'après 2°, il est de mesure nulle pour ν; donc le *noyau fermé* (*cf.* § I) de la distribution ν est contenu dans l'ensemble des x tels que $U^{\nu}(x) \leqq 1$. Comme il est aussi contenu dans K, on voit, d'après 1°, que *l'on a* $U^{\nu}(x) = 1$ *quasi-partout sur le noyau fermé de* ν.

La quantité (finie) $\frac{1}{c} = \gamma$ se nomme la *capacité* de l'ensemble compact K; elle mesure la masse portée par K dans la distribution capacitaire. On voit facilement que *la capacité* γ *est égale à la borne supérieure de la masse portée par* K *pour toutes les distributions de la famille* $\mathfrak{T}$; $\mathfrak{T}$ *désigne l'ensemble des distributions positives* λ *telles que le potentiel* U^λ *soit* $\leqq 1$ *sur le noyau fermé de* λ. Cette nouvelle définition s'applique aussi au cas où K est de capacité nulle; elle a l'avantage de mettre en évidence le fait que la capacité de la réunion de deux ensembles compacts est au plus égale à la somme de leurs capacités, puisque la famille $\mathfrak{T}$ est indépendante de K. On remarquera aussi que cette définition est valable indépendamment du « principe du maximum » (*voir* le paragraphe suivant). Notons enfin que la distribution capacitaire est la seule distribution de la famille $\mathfrak{T}$ pour laquelle toute la masse est portée par K et *égale à* γ. Cela résulte aussi du fait que la distribution capacitaire minimise l'intégrale $\int (U^\nu - 2)d\nu$ parmi les ν positives portées par K (*cf.* DE LA VALLÉE POUSSIN, Mémoire cité en (1))].

Nous développerons dans un autre travail des considérations plus détaillées sur la capacité des ensembles, compacts ou non, et en particulier sur les ensembles de capacité nulle, en relation avec la notion de « quasi-partout ».

VI. **Le principe du maximum.** — Le lecteur a déjà observé que nous n'avons pas obtenu, pour le problème du balayage ou celui de la distribution capacitaire, tous les résultats valables dans le cas classique du potentiel newtonien. On sait que, dans ce cas, et plus généralement dans le cas des potentiels d'ordre $\alpha \leqq 2$ de M. Riesz, la distribution μ' obtenue par balayage de μ satisfait aux deux conditions suivantes, plus précises respectivement que 1° et 2° :

1 *bis*. On a $U^{\mu'}(x) = U^{\mu}(x)$ quasi-partout sur K_3;
2 *bis*. On a $U^{\mu'}(x) \leqq U^{\mu}(x)$ en tout point x de l'espace (14).

(14) μ positive d'énergie finie étant donnée, il ne peut exister qu'une distribution positive μ' portée par K et satisfaisant à 1 *bis* et 2 *bis*; car 2 *bis* entraîne que l'énergie de μ' est finie puisque

$$\int U^{\mu'} d\mu' \leqq \int U^{\mu} d\mu' = \int U^{\mu'} d\mu \leqq \int U^{\mu} d\mu;$$

ensuite 1 *bis* entraîne les conditions 1° et 2° du théorème V, qui assurent l'unicité.

De même, la distribution capacitaire ν a un potentiel égal à 1 quasi-partout sur K, et $\leqq 1$ partout; on l'appelle alors « distribution d'équilibre ».

Le fait que les résultats du balayage peuvent être précisés est intimement lié à ce que nous appellerons le « principe du maximum », principe qui est exact, par exemple, dans le cas des potentiels de Riesz d'ordre $\alpha \leqq 2$, et qui ne l'est pas dans le cas des potentiels déduits de la loi de probabilité de Gauss (*voir* début du paragraphe III).

Principe du maximum. — Étant données deux distributions positives μ_1 et μ_2 (μ_1 étant d'énergie finie), si l'on a $U^{\mu_1}(x) \leqq U^{\mu_2}(x)$ *en tout point d'un noyau de masses de μ_1, on a la même inégalité en tout point de l'espace.*

Si ce principe est vrai, il entraîne le théorème du balayage sous sa forme précise : car 2 *bis* résulte de 2° et du principe du maximum, puis 1 *bis* résulte de 2 *bis* et de 1°.

Inversement, le théorème du balayage sous sa forme précise me semble entraîner le principe du maximum, ou en tout cas un principe d'une forme très voisine. Sans nous attarder à cette question sur laquelle nous reviendrons peut-être dans un autre travail, notons ici l'intérêt qu'il y aurait à étudier de près les circonstances dans lesquelles est valable le principe du maximum.

Dans cet ordre d'idées, nous montrerons simplement que le principe du maximum est vrai chaque fois que se trouve remplie la condition suivante :

μ_1 et μ_2 désignant deux distributions positives sur un compact, la fonction $V(x) = \inf(U^{\mu_1}, U^{\mu_2})$, *égale en chaque point x à la plus petite des quantités* $U^{\mu_1}(x)$ *et* $U^{\mu_2}(x)$, *est le potentiel d'une distribution positive.*

Cette hypothèse se trouve vérifiée, par exemple, dans le cas du potentiel newtonien; elle est liée à la représentation potentielle des fonctions surharmoniques [15]. [D'ailleurs, d'une manière générale,

[15] *Voir* F. Riesz, *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel* (*Acta Math.*, 48, 1926, p. 329-343, et 54, 1930, p. 321-360).

la possibilité d'une théorie des fonctions dites « surharmoniques » semble liée à la validité du principe du maximum [16].]

Montrons que l'hypothèse ci-dessus entraîne le principe du maximum. Supposons que l'on ait $U^{\mu_1}(x) \leqq U^{\mu_2}(x)$ sur un noyau de la distribution μ_1 d'énergie finie, et soit μ la distribution dont le potentiel est $\inf(U^{\mu_1}, U^{\mu_2})$. L'énergie de μ est finie, d'après

$$\int U^{\mu}(x)\, d\mu(x) \leqq \int U^{\mu_1}(x)\, d\mu(x) = \int U^{\mu}(x)\, d\mu_1(x) \leqq \int U^{\mu_1}(x)\, d\mu_1(x).$$

μ et μ_1 sont donc deux distributions positives d'énergie finie qui vérifient

$$U^{\mu}(x) \leqq U^{\mu_1}(x) \text{ partout (et en particulier sur un noyau de } \mu);$$
$$U^{\mu_1}(x) = U^{\mu}(x) \text{ sur un noyau de } \mu_1 \text{ (par hypothèse).}$$

Ceci entraîne (§ IV, lemme) $\mu = \mu_1$, et $U^{\mu} = U^{\mu_1}$, c'est-à-dire

$$\inf(U^{\mu_1}, U^{\mu_2}) = U^{\mu_1}, \qquad \text{ou encore} \qquad U^{\mu_1} \leqq U^{\mu_2}.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — On pourrait appeler « principe restreint du maximum » le principe suivant :

Si une distribution positive μ est telle que l'on ait $U^{\mu}(x) \leqq 1$ sur un noyau de masses de μ, l'inégalité a lieu partout.

Lorsque ce principe est valable, la distribution capacitaire devient une distribution d'équilibre.

---

[16] *Voir* Frostman, *Sur les fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire* (*Arkiv för Matematik*, 26, 1938).