BULLETIN DE LA S. M. F.

R. FORTET

Remarques sur les espaces uniformément convexes

Bulletin de la S. M. F., tome 69 (1941), p. 23-46
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1941__69__23_0>

REMARQUES SUR LES ESPACES UNIFORMÉMENT CONVEXES (1);

Par M. R. Fortet.

1. Les projections normales dans les espaces uniformément convexes.

Soit B un espace vectoriel, complet, distancié (ou plus brièvement espace de Banach) à éléments réels ou imaginaires; soit V une variété linéaire complète de B, et X un point déterminé quelconque de B; x étant un élément variable de V, considérons la quantité (1bis) $|X - x|$; elle admet évidemment une borne inférieure $m \geqq 0$ ($m = 0$ signifiant que X appartient à V); si x dans V est tel que

$$|X - x| = m,$$

nous dirons que x est une *projection normale* de X sur V.

Rappelons que B est *strictement convexe* si, x et y étant deux éléments quelconques de B, la condition

$$|x + y| = |x| + |y|,$$

entraîne que $x = \lambda y$, où λ est nécessairement un nombre réel $\geqq 0$. On a alors

Lemme 1. — *Si* B *est strictement convexe, la projection normale x de* X *sur* V, *si elle existe, est unique.*

(1) Les propriétés établies dans ce Mémoire ne sont pas toutes nouvelles, comme on le verra en se reportant aux divers auteurs que nous citons en notes, ou encore au Mémoire suivant de Pettis : *A proof that every uniformly convex space is reflexive* (*Duke Math. Journal*, t. 5, 1939, p. 249). Mais il nous a paru intéressant de montrer comment ces propriétés pouvaient être établies par des procédés extrêmement élémentaires.

(1bis) Le symbole $|x|$ désigne indifféremment la *norme* de x ou la *valeur absolue* de x, suivant que x est un élément de B ou un nombre réel ou complexe ordinaire.

Supposons, en effet, qu'il existe deux projections normales distinctes x et x' de X sur V; on aurait

$$|X - x| = |X - x'| = m.$$

Cela est impossible si $m = 0$, car alors nécessairement

$$x = x' = X;$$

soit donc $m > 0$; on a évidemment

$$\left|\frac{X - x}{2} + \frac{X - x'}{2}\right| \leqq \left|\frac{X - x}{2}\right| + \left|\frac{X - x'}{2}\right| = m$$

ou

$$\left|X - \frac{x + x'}{2}\right| \leqq m,$$

$\frac{x + x'}{2}$ appartient à V comme x et x'; si donc on avait

$$\left|X - \frac{x + x'}{2}\right| < m,$$

m ne serait pas la borne inférieure de $|X - x|$ pour x variant dans V; on doit donc avoir :

$$\left|X - \frac{x + x'}{2}\right| = m \qquad \text{ou} \qquad |(X - x) + (X - x')| = |X - x| + |X - x'|,$$

d'où puisque B est strictement convexe

$$(X - x') = (X - x)\lambda \qquad \text{avec } \lambda = 1$$

ou

$$x' = x,$$

ce qui établit le lemme.

B est dit *uniformément convexe* ([2]), si, quels que soient x et y dans B, il existe une fonction $\delta_k(\varepsilon) > 0$ telle que les conditions

$$|x| \leqq |y| \leqq k \quad (k > 0); \qquad |x - y| \geqq \varepsilon > 0$$

entraînent

$$\left|\frac{x + y}{2}\right| \leqq |y| - \delta_k(\varepsilon),$$

nous appellerons $\delta_k(\varepsilon)$ le *module d'uniformité* de B.

([2]) CLARKSON, *Uniformly convex spaces* (*Trans. American Math. Soc.*, t. 40, p. 396-414).

On a alors le théorème suivant :

Théorème I. — *Si* B *est uniformément convexe, quels que soient* X *et* V, *la projection normale* x *de* X *sur* V *existe et est unique.*

Si x existe, son unicité résulte du lemme 1, car un espace uniformément convexe est nécessairement strictement convexe ([3]).

Prouvons que x existe. Il existe une suite $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de points de V tels que $|X - x_n|$ tende vers m lorsque n augmente indéfiniment. On peut extraire de la suite (x_n) une suite partielle (x'_n) telle que l'on ait de plus

$$|X - x'_{n+1}| \leqq |X - x'_n|,$$

quel que soit n. Si (x'_n) ne converge pas vers une limite x, on pourra trouver un nombre $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait pour certaines valeurs de n aussi grandes que l'on voudra, et pour certaines valeurs de p :

$$|x'_n - x'_{n+p}| > \varepsilon.$$

Mais alors on aurait

$$m \leqq \left| \frac{(X - x'_n) + (X - x'_{n+p})}{2} \right| = \left| X - \frac{x'_n + x'_{n+p}}{2} \right|,$$

et puisque B est uniformément convexe

$$\frac{1}{2} |(X - x'_n) + (X - x'_{n+p})| \leqq |X - x'_n| - \delta_k(\varepsilon),$$

puisque

$$|(X - x'_n) - (X - x'_{n+p})| = |x'_n - x'_{n+p}| > \varepsilon.$$

En prenant n assez grand pour que $|X - x'_n| < m + \frac{1}{2}\delta_k(\varepsilon)$, ceci entraînerait que

$$m \leqq m - \frac{1}{2}\delta_k(\varepsilon),$$

ce qui est absurde. Donc (x'_n) converge vers une certaine limite x, telle évidemment que $|X - x| = m$, ce qui établit le théorème.

---

(3) *Cf.* Clarkson, *loc. cit.*

Plaçons-nous alors dans un espace B uniformément convexe; la projection normale sur une variété linéaire V est une opération bien définie et univoque; de plus :

Lemme 2. — *Dans un espace* B *uniformément convexe, la projection normale sur une variété linéaire* V *quelconque est une opération continue.*

Soient X, Y deux éléments de B, x et y leurs projections sur V, soit $|x-y|=\varepsilon$, on a

$$|Y-y| \geqq |y-X| - |X-Y|,$$
$$|Y-x| \leqq |Y-X| + |X-x|,$$

et en vertu de l'uniforme convexité

$$|X-x| < \left|X - \frac{x+y}{2}\right| \leqq |X-y| - \delta_k(\varepsilon),$$

en prenant $k=|X-y|$.

Il en résulte

$$|Y-y| \geqq |Y-x| + \delta_k(\varepsilon) - 2|X-Y|.$$

Donc, puisque $|Y-x| > |Y-y|$

$$\delta_k(\varepsilon) \leqq 2|X-Y|.$$

Il en résulte aisément le lemme 2.

Nous dirons que y est *normal à* x si le minimum de $|y-\lambda x|$ est atteint pour $\lambda=0$, c'est-à-dire si la projection de y sur x est 0. Plus généralement, et de manière analogue, on définit la normalité de y sur une variété linéaire complète V. B sera dit à *normalité réciproque* si, quels que soient x et y, le fait que y est normal à x entraîne que x est normal à y; il n'en est pas toujours ainsi, comme nous le verrons par l'exemple des espaces L^p.

L'espace B, uniformément convexe, sera dit à *norme régulière* si x et y étant tels que : $|y|>0$, y normal à x, on a

$$|y+\lambda x| = |y| + o(|\lambda|),$$

où $o(|\lambda|)$ est infiniment petit avec $|\lambda|$ d'ordre supérieur à 1.

Exemple des espaces L^p $(p > 1)$: Soit L^p l'espace des points x dont les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, satisfont à la condition

$$\sum_n |x_n|^p < +\infty \qquad (\text{avec } p > 1).$$

Cet espace est un espace B si l'on pose

$$|x| = \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On a démontré [1] que L^p est un espace uniformément convexe; $X(x_n)$ et $Y(y_n)$ étant deux points quelconques de l'espace L^p, montrons que, si $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2\sqrt{-1}$ (λ_1 et λ_2 réels), la fonction

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2) = |y + \lambda x| = \left(\sum_n |y_n + \lambda x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

admet des dérivées partielles $\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_1}$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_2}$ continues dans le champ $|\lambda| < H$, pourvu que $|y| > 0$ et que y ne soit pas de la forme $y = \lambda_0 x$.

Posons, en effet,

$$A_n = |y_n + \lambda x_n|^p; \qquad A = \sum_n A_n.$$

Dans les A_n distinguons trois catégories : ceux pour lesquels $x_n = y_n = 0$, qui en somme ne jouent aucun rôle; ceux pour lesquels $|y_n| = 0$, avec $|x_n| \neq 0$, soit $A_{n'}$; enfin ceux pour lesquels $|y_n| > 0$, soit $A_{n''}$.

Nous poserons

$$A' = \sum_{n'} A_{n'}; \qquad A'' = \sum_{n''} A_{n''}.$$

On a

$$\frac{\partial A_{n''}}{\partial\lambda_1} = \frac{p}{2}|y_{n''} + \lambda x_{n''}|^{p-2}\left(x_{n''}\bar{y}_{n''} + \bar{x}_{n''}y_{n''} + 2\lambda_1|x_{n''}|^2\right)$$

et une formule analogue pour $\frac{\partial A_{n''}}{\partial\lambda_2}$.

---

[1] *Cf.* Clarkson, *loc. cit.*

D'où l'on tire

$$\frac{\partial A_{n''}}{\partial \lambda_1} - \sqrt{-1}\,\frac{\partial A_{n''}}{\partial \lambda_2} = p\,x_{n''}\,|y_{n''} + \lambda x_{n''}|^{p-2}(\overline{y}_{n''} + \overline{\lambda}\,\overline{x}_{n''}) = B_{n''},$$

on a aussi

$$B_{n''} = p\,x_{n''}\,|y_{n''} + \lambda x_{n''}|^{p-1}\,\overline{\text{sign}}\,(y_{n''} + \lambda x_{n''}),$$

$\overline{\text{sign}}\, z$ désignant comme d'habitude $\frac{|z|}{z}$ (ou o si $z = 0$). Dans le domaine $|\lambda| < H$, $B_{n''}$ est, quel que soit n'', fonction continue de λ_1 et λ_2 ; comme la série

$$\sum_{n''} |B_{n''}| = p \sum_{n''} |x_{n''}|\,|y_{n''} + \lambda x_{n''}|^{p-1}$$

converge uniformément dans le domaine $|\lambda| < H$, il en résulte que, pour $|\lambda| < H$, A'' admet des dérivées partielles continues par rapport à λ_1 et λ_2.

Pour A' on vérifie aisément que

$$\frac{\partial A'}{\partial \lambda_1} = p\,|\lambda|^{p-1} \sum_{n'} |x_{n'}|^p \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}, \qquad \frac{\partial A'}{\partial \lambda_2} = p \sum_{n'} |x_{n'}|^p\,|\lambda|^{p-1} \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}},$$

qui sont bien définies et continues pour $|\lambda| < H$.

Ceci étant, $\frac{\partial A}{\partial \lambda_1}$ et $\frac{\partial A}{\partial \lambda_2}$ existent et sont continues pour $|\lambda| < H$ comme A n'est jamais nul, on aura

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} = \frac{1}{p} A^{\frac{1}{p}-1} \frac{\partial A}{\partial \lambda_1}$$

ce qui prouve que $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1}$ également existe et est continue et de même pour $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_2}$.

Quelle est alors la condition nécessaire et suffisante pour que $Y\,(|Y| > 0)$ soit normal à X ? C'est que, pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, on ait : $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_2} = 0$, ce qui donne

$$\sum_n |y_n|^{p-1}\,\overline{\text{sign}}\,y_n . x_n = 0,$$

ou

$$\sum_n |y_n|^{p-2}\,\overline{y}_n . x_n = 0.$$

Sauf dans le cas $p = 2$ (espace de Hilbert) cette condition n'est pas symétrique en x et y : donc, en général L^p n'est pas à normalité réciproque.

On voit par contre aisément que L^p est à norme régulière; il suffit pour cela d'utiliser les résultats précédents.

Nous allons chercher si, dans un espace B uniformément convexe, la projection normale est une *opération distributive*; c'est-à-dire si, X et Y étant deux points de B et V une variété complète de B, on a :

$$\text{proj norm}_V (X + Y) = \text{proj norm}_V X + \text{proj norm}_V Y.$$

Cela est exact d'abord dans le cas où X appartient à V. En posant dans le cas général

$$x = \text{proj norm}_V X; \qquad y = \text{proj norm}_V Y,$$

x et y appartiennent à V; on se ramène à établir la propriété dans le cas particulier où X et Y sont normaux à V, c'est-à-dire à établir que, si X et Y sont normaux à V, il en est de même de $X + Y$. Démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 3. — *Dans un espace* B *uniformément convexe et à norme régulière si* Z *est normal à* X *et à* Y, *il est normal à la variété linéaire* (X, Y).

L'hypothèse est que $|Z + \lambda' X|$ et $|Z + \lambda'' Y|$ atteignent leur minimum $|Z|$ pour $\lambda' = \lambda'' = 0$.

Et l'on a, puisque B est à norme régulière,

$$|Z + \lambda' X| = |Z| + o(|\lambda'|),$$
$$|Z + \lambda'' Y| = |Z| + o(|\lambda'|).$$

Si l'on pose

$$\lambda' = \lambda'_1 + \sqrt{-1}\,\lambda'_2$$

et

$$\lambda'' = \lambda''_1 + \sqrt{-1}\,\lambda''_2,$$

$|Z + \lambda' X + \lambda'' Y|$ apparaît comme une fonction réelle des quatre variables réelles $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda''_1, \lambda''_2$; c'est une fonction convexe. Si, pour un « point » $[\lambda'^0_1, \lambda'^0_2, \lambda''^0_1, \lambda''^0_2]$ *non nul* (c'est-à-dire que $|\lambda'^0_1| + |\lambda'^0_2| + |\lambda''^0_1| + |\lambda''^0_2| \neq 0$), $|Z + \lambda' X + \lambda'' Y|$ atteignait son minimum m (nécessairement $< |Z|$), on aurait, pour ρ réel et négatif

$$(1)\quad |Z+\rho(\lambda_1'^0+\sqrt{-1}\,\lambda_1''^0)X+\rho(\lambda_1''^0+\sqrt{-1}\,\lambda_2''^0)|Y \geqq |Z| - \rho(|Z|-m).$$

Or nous avons

$$(2)\qquad |Z+2\rho(\lambda_1'^0+\sqrt{-1}\,\lambda_1'^0)X| = |Z| + o'(|\rho|)$$

$$(3)\qquad |Z+2\rho(\lambda_1''^0+\sqrt{-1}\,\lambda_1''^0)Y| = |Z| + o''(|\rho|)$$

pour ρ assez petit; (2) et (3) donnent

$$(4)\quad |Z+\rho(\lambda_1'^0+\sqrt{-1}\,\lambda_2'^0)X+\rho(\lambda_1''^0+\sqrt{-1}\,\lambda_2''^0)Y| \leqq |Z| + \frac{o'(|\rho|+o''(|\rho|)}{2};$$

(1) et (4) sont évidemment contradictoires. Ceci nous force à admettre que $|Z+\lambda'X+\lambda''Y|$ atteint son minimum pour $\lambda'=\lambda''=0$, ce qui établit le lemme 3. On remarquera qu'effectivement dans les espaces L^p qui satisfont aux conditions du lemme 3, la condition de normalité de y sur x vue précédemment est une fonctionnelle linéaire de x égalée à 0, ce qui confirme le lemme 3.

Il résulte du lemme 3 que l'ensemble des X auxquels Z est normal forme une variété linéaire, et cette variété est fermée, c'est-à-dire que si Z est normal à $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, qui tendent vers X, Z est aussi normal à X. Si Z n'était pas normal à X, on aurait pour une certaine valeur λ_0 réalisant le minimum de $|Z+\lambda X|$

$$(5)\qquad |Z+\lambda_0 X| < |Z|.$$

Or,

$$(6)\qquad \begin{aligned} |Z+\lambda_0 X| &\geqq |Z+\lambda_0 X_n| - |X-X_n|.|\lambda_0| \\ &\geqq |Z| - |\lambda_0|.|X-X_n|, \end{aligned}$$

(5) et (6) sont évidemment contradictoires (du moins pour n assez grand). Il est alors facile d'établir le théorème suivant :

Théorème II. — *Dans un espace* B *uniformément convexe, à norme régulière et à normalité réciproque, la projection normale sur une variété linéaire complète quelconque est une opération linéaire continue.*

En effet, on a déjà vu (lemme 2) que la projection normale est une opération continue; et, d'après le lemme 3 et la réciprocité de la normalité, l'opération est linéaire.

Remarque. — Il résulte aisément du théorème précédent que, dans un espace B à norme régulière, uniformément convexe et à normalité réciproque, et de plus *séparable*, on peut trouver une *base*, c'est-à-dire une suite de points $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de norme égale à 1, réciproquement normaux (deux à deux et autrement) et tel que tout point x de B soit représentable (d'une manière unique) par une « série » convergente de la forme

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n + \ldots,$$

les λ_n étant des nombres réels ou complexes.

Généralisation. — Étant donné dans un espace B un ensemble E fermé et linéairement convexe, c'est-à-dire tel que

$$x_1 \subset E, \quad x_2 \subset E, \qquad \text{entraînent} \quad \frac{x_1 + x_2}{2} \subset E,$$

on peut définir la projection d'un point x quelconque sur E. Si B est uniformément convexe, on voit facilement que cette projection existe et est unique.

2. Application à l'itération des opérations linéaires.

Soit, dans un espace B, une opération linéaire continue U. On peut attacher à U trois variétés linéaires :

la variété V des points y tels que $y = U(x) - x$; V n'est pas nécessairement fermée;

la variété V′ constituée par V et sa fermeture;

la variété W constituée par les points x tels que $U(x) = x$; W est fermée.

Enfin, on peut considérer l'ensemble E des points normaux à V, si l'espace B se prête à une définition de la normalité.

Nous poserons d'autre part

$$\mathrm{U}_{n,m} = \frac{\mathrm{U}^{n+1} + \mathrm{U}^{n+2} + \ldots + \mathrm{U}^{n+m}}{m}.$$

On remarquera que, si $y \subset \mathrm{V}'$,

$$\lim_{m \to +\infty} \mathrm{U}_{n,m}(y) = 0$$

quel que soit n, pourvu que les $\|\mathrm{U}^p\|$ soient bornées dans leur ensemble.

Cas des espaces B *strictement convexes*. — Si B est strictement convexe, nous disons que x est normal à V si, quel que soit $y \subset \mathrm{V}$, la condition $|y| > 0$, $|\lambda| > 0$ entraîne

$$|x - \lambda y| > |x|.$$

Théorème III. — *Si* B *est strictement convexe, et si* $\|\mathrm{U}\| = 1$, *l'ensemble* E *est identique à la variété* W.

a. Si x est dans E, comme on a

$$\mathrm{U}(x) = x + [\mathrm{U}(x) - x]$$

et que $\mathrm{U}(x) - x$ est dans V, si $|\mathrm{U}(x) - x|$ était > 0, on aurait

$$|\mathrm{U}(x)| > |x|,$$

ce qui est impossible puisque $\|\mathrm{U}\| = 1$. Donc tout point de E est dans W.

b. Si x est dans W et si x n'était pas normal à V, on pourrait trouver au moins un y dans V tel que l'on ait

$$|x - y| \leqq |x|,$$

car si l'on avait, quel que soit y dans V, $|x - y| > |x|$, x serait normal à V.

Alors, si l'on a

$$|x - y| < |x|$$

posons $x - y = z$; on a

$$\mathrm{U}_{n,m}(x) = x = \mathrm{U}_{n,m}(z) + \mathrm{U}_{n,m}(y)$$
$$|x| \leqq |\mathrm{U}_{n,m}(z)| + |\mathrm{U}_{n,m}(y)|$$
$$|x| \leqq |z| \qquad\qquad + |\mathrm{U}_{n,m}(y)|$$

et à la limite

$$|x| \leqq |z|,$$

ce qui est contradictoire.

Si l'on a $x - y = x$, sans pouvoir obtenir $|x - y| < |x|$, c'est que y est une « projection » de x sur V. Cette projection, qui existe par hypothèse, est d'ailleurs unique puisque B est strictement convexe.

En posant toujours

$$x - y = z,$$

formons $|z - \mu y'|$ avec y' quelconque dans V;

$$|z - \mu y'| = |x - (y + \mu y')|;$$

si $|\mu|$ et $|y'|$ sont différents de o, l'unicité de la projection de x entraîne que

$$|x - (y + \mu y')| > |x| = |z|.$$

Il en résulte que z est normal à V; donc z est dans E et dans W, et l'on a

$$\begin{aligned} U_{n,m}(x) &= U_{n,m}(z) + U_{n,m}(y), \\ x &= z \qquad\quad + U_{n,m}(y) \end{aligned}$$

et à la limite

$$x = z,$$

donc x est dans E comme z.

Cas de B *uniformément convexe.* — Si B est de plus uniformément convexe la normalité sur V équivaut à la normalité sur V'. Tout point x a une projection y sur V' et l'on peut écrire

$$x = z + y$$

avec $z \subset$ W.

Alors

$$U_{n,m}(x) = z + U_{n,m}(y),$$

donc

$$\lim_{m \to \infty} U_{n,m}(x) = z,$$

quel que soit m.

Posons $\overline{U}(x) = z$; l'opération ainsi définie est linéaire et continue; et l'on a (toujours sous l'hypothèse $\|U\| = 1$),

$$\|\overline{U}\| = 1$$

pourvu que W ne soit pas vide. D'ailleurs $\overline{U}$ et $(U - \overline{U})$ sont orthogonales. On peut alors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Dans un espace* B *uniformément convexe, toute opération linéaire continue* U *de norme égale à* 1 *est la somme de deux opérations linéaires continues orthogonales* $\overline{U}$ *et* $\overline{\overline{U}}$, *telles que*

$$\lim_{m \to \infty} U_{n,m} = \overline{U},$$

quel que soit n.

Ce théorème a été énoncé pour la première fois par G. Birkhoff [5].

3. Les fonctionnelles linéaires dans les espaces uniformément convexes.

Soit dans l'espace B uniformément convexe, une fonctionnelle linéaire continue quelconque, $\Phi(x)$. Soit V la variété linéaire complète formée par les points x tels que $\Phi(x) = 0$. Nous appellerons V la *variété caractéristique* de Φ. Si V est identique à B, Φ est identiquement nulle. En écartant ce cas, il existe au moins un x dans B extérieur à V et tel que $\Phi(x) = a \neq 0$. Je dis que B est le « produit » de la variété linéaire V par la variété (x), c'est-à-dire que tout point z de B peut se mettre (d'une façon unique d'ailleurs) sous la forme

$$z = \alpha x + y,$$

α nombre réel ou complexe et $y \subset V$. Cela est évident en effet, si z est dans V; si z est extérieur à V, on a

$$\Phi(z) = b \neq 0.$$

Soit t le point

$$t = x - \frac{a}{b} z.$$

([5]) *Cf.* G. BIRKHOFF, *The mean ergodic theorem* (*Duke Math. Journ.*, vol. 5, 1939, p. 19).

$\Phi(t)$ est nul, donc t est dans V ; or on a

$$z = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}t,$$

qui est de la forme $\alpha x + y$.

Il en résulte que, si x est normal à V, tout point normal à V est de la forme λx. Dans cette hypothèse, quand on pose

$$z = \alpha x + y,$$

y est la projection de z sur V ; on a d'ailleurs

$$\Phi(z) = \alpha\,\Phi(x).$$

En somme, *toute fonctionnelle linéaire exprime une certaine normalité.*

On a d'ailleurs

$$\|\Phi\| = b.s.\frac{|\Phi(z)|}{|z|} = b.s.\frac{|\alpha|\,|\Phi(x)|}{|z|},$$

et comme

$$|z| \geqq |\alpha|\,|x|,$$

on a

$$\|\Phi\| \leqq \frac{|\Phi(x)|}{|x|},$$

donc

$$\|\Phi\| = \frac{|\Phi(x)|}{|x|}.$$

On peut d'ailleurs toujours choisir x de façon à avoir

$$|x| = 1, \qquad \Phi(x) = \|\Phi\|.$$

Le x ainsi déterminé, qui est unique, sera dit le « sommet » de la fonctionnelle linéaire. Le point $\|\Phi\|.x$ sera dit le « sommet normé » de Φ : il caractérise *entièrement* la fonctionnelle.

Réciproquement, soit un espace B uniformément convexe et de plus, à norme régulière. x étant un point quelconque de B, l'ensemble des points y auxquels x est normal forme une variété linéaire fermée V; on montre sans difficultés que tout point normal à V est de la forme $\lambda.x$; z étant un point quelconque de B, y sa projection sur V, on a donc, d'une façon unique

$$z = \alpha x + y$$

avec α nombre réel ou complexe et $y \subset$ V.

Si alors on pose $x = \Phi(z)$, Φ est visiblement une fonctionnelle linéaire continue, dont V est la variété caractéristique, et dont la norme vaut $\frac{1}{|x|}$. Donc, en quelque sorte, *dans les espaces* B *uniformément convexes et à norme régulière, toute relation de normalité peut s'exprimer par une fonctionnelle linéaire.*

Soit, dans un espace B uniformément convexe, deux fonctionnelles linéaires continues Φ_1 et Φ_2, de sommets normés x_1 et x_2 et de variétés caractéristiques V_1 et V_2. Il est facile de voir que si $\|\Phi_1 - \Phi_2\|$ tend vers o, sans que $\|\Phi_1\|$ et $\|\Phi_2\|$ tendent toutes deux vers o, $|x_1 - x_2|$ tend également vers o avec une certaine uniformité. Pour préciser, supposons que $\|\Phi_1\| = \|\Phi_2\| = 1$.

On a

$$\|\Phi_1 - \Phi_2\| \geqq |\Phi_1(x_1) - \Phi_2(x_1)|$$

et en posant

$$x_1 = \alpha x_2 + y \qquad \text{avec } y \subset V_2, \quad |\alpha| > 1,$$
$$\|\Phi_1 - \Phi_2\| \geqq |1 - \alpha|,$$

or

$$\left|\alpha x_2 + \frac{y}{2}\right| \leqq |\alpha x_2 + y| - \delta_1(|y|),$$
$$\delta_1(|y|) \leqq 1 - \left|\alpha x_2 + \frac{y}{2}\right| < 1 - |\alpha x_2| = 1 - |\alpha| < |1 - \alpha|.$$

Observons que l'on peut, sans restriction, supposer $\delta_1(|y|)$ fonction croissante de $|y|$; en désignant par Δ_1 sa fonction inverse, on a

$$|y| \leqq \Delta_1(|1 - \alpha|).$$

Or

$$|x_1 - x_2| \leqq |1 - \alpha| + |y| \leqq \|\Phi_1 - \Phi_2\| + \Delta_1(\|\Phi_1 - \Phi_2\|),$$

ce qui établit la proposition annoncée.

Envisageons la réciproque, c'est-à-dire demandons-nous si le fait que $|x_1 - x_2|$ tend vers o entraîne que $\|\Phi_1 - \Phi_2\|$ tend vers o uniformément, toujours avec l'hypothèse $\|\Phi_1\| = \|\Phi_2\| = 1$. Nous pensons que ce fait n'est exact que moyennant une hypothèse supplémentaire sur la nature de l'espace B, du genre de la suivante : B *est à norme uniformément régulière.*

Définition. — Nous disons que l'espace B uniformément convexe est à norme uniformément régulière s'il existe une fonction

$o(\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) infiniment petite avec ε et d'ordre supérieur à 1, telle que l'on ait

$$|x + \lambda y| \leqq |x| + o(|\lambda|),$$

pourvu que $|x| = |y| = 1$ et que x soit normal à y.

Il y a là une condition plus stricte que pour les espaces à norme régulière, car pour ces derniers on accepte que $o(|\lambda|)$ dépende de x et de y.

Je dis alors que :

Lemme 4. — *Si* B *est un espace uniformément convexe à norme uniformément régulière, il existe une fonction* $\varphi(\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) *infiniment petite avec* ε, *telle que l'on ait, si* Φ_1 *et* Φ_2 *sont deux fonctionnelles linéaires définies dans* B, *de normes égales à* 1 *et de sommets* x_1 *et* x_2,

$$\|\Phi_1 - \Phi_2\| \leqq \varphi(|x_1 - x_2|).$$

En effet, z étant un point quelconque de B, posons

$$z = \alpha x_2 + y_2 \quad \text{avec} \quad y_2 \subset V_2, \quad \alpha = \Phi_2(z_2),$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_1(z) &= \Phi_1(x_2)\,\Phi_2(z) + \Phi_1(y_2), \\ \Phi_1(z) - \Phi_2(z) &= \Phi_2(z)\,[\Phi_1(x_2) - 1] + \Phi_1(y_2) \\ &= \Phi_2(z)\,\Phi_1(x_2 - x_1) + \Phi_1(y_2), \\ |\Phi_1(z) - \Phi_2(z)| &\leqq |z|\,|x_2 - x_1| + |\Phi_1(y_2)| \end{aligned} \right.$$

or, en posant

$$t = \frac{y_2}{|y_2|},$$

on a

$$(2) \qquad |\Phi_1(y_2)| \leqq |y_2|\,|\Phi_1(t)| \leqq 2\,|z|\,|\Phi_1(t)|,$$

car y_2, projection de z sur V_2, est tel que $|y_2| \leqq 2.|z|$. On a

$$|t| = 1 \quad \text{et} \quad t = \Phi_1(t)\,x_1 + y_1 \quad \text{avec} \quad y_1 \subset V_1,$$

nous poserons pour simplifier

$$\lambda = \Phi_1(t);$$

x_1 est normal à $(t - \lambda x_1)$, c'est-à-dire que, quel que soit μ, on a

$$|x_1 - \mu(t - \lambda x_1)| \geqq |x_1| = 1.$$

Posons

$$x_1 = x_2 + (x_1 - x_2) = x_2 + \varepsilon$$

avec

$$\varepsilon = x_1 - x_2.$$

Il vient

$$|x_2 + \mu\lambda x_2 - \mu t + \varepsilon + \mu\lambda\varepsilon| \geqq 1,$$

$$\left| x_2 - \frac{\mu}{1+\mu\lambda} t + \varepsilon \right| \geqq \frac{1}{|1+\mu\lambda|},$$

$$\left| x_2 - \frac{\mu}{1+\mu\lambda} t \right| + |\varepsilon| \geqq \frac{1}{|1+\mu\lambda|},$$

$$1 + o\left(\left| \frac{\mu}{1+\mu\lambda} \right| \right) + |\varepsilon| \geqq \frac{1}{|1+\mu\lambda|},$$

puisque B est à norme uniformément régulière.

Observons que $|\lambda| < 1$, prenons $\mu = -\sqrt{|\varepsilon|}\,\frac{|\lambda|}{\lambda}$, il vient

$$1 + o\left(\left| \frac{\sqrt{|\varepsilon|}}{1 - |\lambda|\sqrt{|\varepsilon|}} \right| \right) + |\varepsilon| \geqq 1 + |\lambda|\sqrt{|\varepsilon|},$$

d'où, du moins dès que $|\varepsilon| < 1$,

$$(3) \qquad |\lambda| \leqq \sqrt{|\varepsilon|} + \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}\, o(2\sqrt{|\varepsilon|}),$$

d'où l'on déduit aisément le lemme annoncé, en portant (3) et (2) dans (1).

Remarque. — Si l'on considère les deux variétés V_1 et V_2, on peut apprécier la façon dont elles diffèrent en posant par exemple :

$$\text{angle } (V_1 \text{ avec } V_2) = b.s. \frac{\text{dist. } y_1 \text{ à } V_2}{|y_1|}$$

lorsque y_1 varie dans V_1. Comme dist. y_1 à $V_2 = |\Phi_2(y_1)|$, on voit que (3) exprime que : si $|x_1 - x_2|$ tend vers o, l'angle de V_1 avec V_2 tend uniformément vers o. Observons que x_1 définit une « direction » commune à tous les points λx_1. De même pour x_2 : on peut poser

$$\text{angle dir. } x_1 \text{ avec dir. } x_2 = \text{dist. } x_1 \text{ à variété } (x_2).$$

Cet angle n'est pas altéré si l'on remplace x_1 par λx_1, avec $|\lambda| = 1$. On démontre comme précédemment que : *si l'angle de la direc-*

tion x_1 avec la direction x_2 tend vers o, *l'angle de* V_1 *avec* V_2 *tend uniformément vers* o.

On a alors :

THÉORÈME V. — *L'espace conjugué* $\overline{B}$ *d'un espace* B *uniformément convexe, et à norme uniformément régulière, est lui-même uniformément convexe.*

Soit en effet z un point quelconque de B, tel que $|z| = 1$. Posons

$$z = x_1 \Phi_1(z) + y_1 = x_2 \Phi_2(z) + y_2,$$
$$|\Phi_1(z)| = |z - y_1|, \qquad |\Phi_2(z)| = |z - y_2|,$$

B étant uniformément convexe, on a

$$|z - y_1| \leqq \left| z - \frac{y_1}{2} \right| \leqq |z| - \delta_1(|y_1|),$$
$$|z - y_2| \leqq \left| z - \frac{y_2}{2} \right| \leqq |z| - \delta_1(|y_2|),$$

D'où

$$\frac{|\Phi_1(z) + \Phi_2(z)|}{2|z|} \leqq 1 - \frac{1}{2}[\delta_1(|y_1|) + \delta_1(|y_2|)]. \tag{4}$$

Supposons que Φ_1 et Φ_2 satisfassent à la condition

$$\|\Phi_1 - \Phi_2\| > \varepsilon > 0.$$

Comme on a évidemment en général

$$|\Phi_1(z) - \Phi_2(z) \leqq |z|\,|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

On a ici, avec $|z| = 1$,

$$\varepsilon \leqq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|. \tag{5}$$

On peut alors distinguer deux cas :

1$^{\text{er}}$ cas : $|y_1 - y_2| \geqq \frac{\varepsilon}{2}$; alors $|y_1|$ ou $|y_2|$ est $> \frac{\varepsilon}{4}$ et l'on tire de (4)

$$\frac{\|\Phi_1 + \Phi_2\|}{2} \leqq 1 - \frac{1}{2}\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{4}\right); \tag{6}$$

2$^{\text{ème}}$ cas : $|y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{2}$; alors $|x_1 - x_2|$ est $> \frac{\varepsilon}{2}$; distinguons deux sous-cas :

α. angle dir. x_1 avec dir. $x_2 > \frac{1}{2}\varphi'(\varepsilon^3)$ [nous désignons par $\varphi'(\varepsilon)$ la fonction universe de $\varphi(\varepsilon)$]; alors, en posant $\frac{1}{2}\varphi'(\varepsilon^3) = y$, on prouve sans difficultés que l'on a

$$|y_1| + |y_2| \geqq h(y),$$

h étant une certaine fonction qu'il est inutile de préciser; il résulte alors de (4) que

$$\frac{\|\Phi_1 + \Phi_2\|}{2} \leqq 1 - \frac{1}{2}\delta_1\left[\frac{1}{2}h(y)\right]. \tag{7}$$

β. angle dir. x_1 avec direct. $x_2 < \varphi'(\varepsilon^3)$. Soit ρx_2 la projection de x_1 sur la variété x_2; l'hypothèse est donc que

$$|x_1 - \rho x_2| < \eta.$$

Considérons

$$\left|x_1 - \frac{\rho}{|\rho|}x_2\right| = \left|(x_1 - \rho x_2) + \rho\left(1 - \frac{1}{|\rho|}\right)x_2\right| < y + \rho\left|\frac{1}{|\rho|} - 1\right|, \tag{8}$$

car $|\rho| < 1$. D'ailleurs $|\rho| > 1 - y$ de sorte que (8) donne

$$\left|x_1 - \frac{\rho}{|\rho|}x_2\right| < \eta\left[1 + \frac{1}{1-y}\right] = y \sim 2\eta.$$

Posons $\Phi'_2 = \frac{\rho}{|\rho|}\Phi_2$; $\frac{\rho}{|\rho|}x_2$ est le sommet de Φ'_2; on a

$$\|\Phi_1 - \Phi'_2\| < \varphi\left(\left|x_1 - \frac{\rho}{|\rho|}x_2\right|\right) \leqq \varphi(\eta') \sim \varepsilon^3.$$

Or

$$\varepsilon < \|\Phi_1 - \Phi_2\| < \|\Phi_1 - \Phi'_2\| + \|\Phi'_2 - \Phi_2\|,$$

$$\varepsilon - \varepsilon^3 < \left|\frac{\rho}{|\rho|} - 1\right|. \tag{9}$$

On déduit

$$\frac{\left|1 + \frac{\rho}{|\rho|}\right|}{2} \sim 1 - K(\varepsilon) \quad (^6)$$

avec

$$K(\varepsilon) \sim \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

([6]) Nous remplaçons, pour simplifier, certaines égalités ou inégalités par leurs expressions asymptotiques pour $\varepsilon \to 0$. Cela est suffisant.

Mais on a

$$(10)\qquad \left\|\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right\| = \left\|\frac{\Phi_1-\Phi'_2}{2}+\frac{\Phi_2+\Phi'_2}{2}\right\| \leqq \left\|\frac{\Phi_1-\Phi'_2}{2}\right\| + \frac{1}{2}\|\Phi_2+\Phi'_2\|$$
$$\leqq 1-\mathrm{K}(\varepsilon)+\frac{\varepsilon^3}{2}\sim 1-\frac{\varepsilon^2}{4}.$$

(6), (7) et (10) établissent le théorème annoncé.

Application. — Soit un espace $L^{(p)}$ $(p>1)$, supposons le point y normal au point x, avec $|y|=|x|=1$ et étudions la différence

$$D(\lambda)=|y+\lambda x|-|y|.$$

Commençons par étudier

$$d(\lambda)=\Sigma_n|y_n+\lambda x_n|^p-\Sigma_n|y_n|^p.$$

Il résulte de calculs précédents que $d(\lambda)$ a une dérivée continue par rapport à λ_1 et λ_2, si l'on pose

$$\lambda=\lambda_1+\lambda_2\sqrt{-1}.$$

Pour simplifier nous supposerons λ réel, donc égal à λ_1. Nous supposerons d'abord qu'aucun des y_n n'est nul. On a alors, d'après ce que l'on a vu,

$$d'(\lambda)=p\,\Sigma_n x_n|y_n+\lambda x_n|^{p-2}(\overline{y_n+\lambda x_n}).$$

Il en résulte que, θ désignant un nombre compris entre 0 et 1, l'on a

$$d(\lambda)=\lambda p\,\Sigma_n x_n|y_n+\theta\lambda x_n|^{p-2}(\overline{y_n+\theta\lambda x_n}).$$

Dans le cas de $p<2$, cette écriture ne serait pas valable pour $y_n+\theta\lambda x_n=0$; mais, dans ce cas, il faudrait écrire

$$x_n|y_n+\theta\lambda x_n|^{p-1}\,\overline{\mathrm{sign}}\,(y_n+\theta\lambda x_n)$$

qui est nul, de sorte que ce qui suit reste valable. Mais on a

$$|y_n+\theta\lambda x_n|^{p-2}=|y_n|^{p-2}+\theta\lambda(p-2)x_n|y_n+\theta'\theta\lambda x_n|^{p-3}\,\overline{\mathrm{sign}}\,(y_n+\theta'\theta\lambda x_n),$$

θ' désignant un certain nombre compris entre 0 et 1.

D'autre part, y étant normal à x, on a

$$\Sigma|y_n|^{p-2}\overline{y_n}\,x_n=0.$$

De sorte que $d(\lambda)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} d(\lambda) &= \lambda p \Sigma_n x_n \{ |y_n|^{p-2} \theta\lambda x_n + \theta\lambda(p-2) x_n (\overline{y_n + \theta\lambda x_n}) \\ &\qquad \times \overline{\text{sign}}\,(y_n + \theta'\theta\lambda x_n) \times |y_n + \theta'\theta\lambda x_n|^{p-3} \} \\ &= \theta\lambda^2 p [A + (p-2) B(\theta'\theta\lambda)], \end{aligned}$$

en posant

$$A = \Sigma_n |y_n|^{p-2} x_n^2,$$

$$B(\theta'\theta\lambda) = \Sigma_n |y_n + \theta'\theta\lambda x_n|^{p-3} \overline{(y_n + \theta\lambda x_n)}\, \overline{\text{sign}}\,(y_n + \theta'\theta\lambda x_n)\, x_n^2.$$

Comme les séries $\Sigma_n |x_n^2|^{\frac{p}{2}}$ et $\Sigma_n \{ |y_n|^{p-2} \}^{\frac{\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}-1}}$ convergent, on voit facilement que

$$|A| \leqq 1.$$

On a, d'autre part,

$$|B| \leqq \Sigma_n |y_n + \theta'\theta\lambda x_n|^{p-3} |y_n + \theta\lambda x_n| |x_n|^2.$$

Posons

$$z_n = |y_n + \theta\lambda x_n| |x_n|^2,$$
$$t_n = |y_n + \theta'\theta\lambda x_n|^{p-3},$$

$$\sum_n t_n^{\frac{\frac{p}{3}}{\frac{p}{3}-1}} = \sum_n t_n^{\frac{p}{p-3}} = \sum_n |y_n + \theta'\theta\lambda x_n|^p < 2^p,$$

$$\sum_n z_n^{\frac{p}{3}} = \sum_n |y_n + \theta\lambda x_n|^{\frac{p}{3}} |x_n|^{\frac{2p}{3}}.$$

Si

$$u_n = |y_n + \theta\lambda x_n|^{\frac{p}{3}}, \qquad v_n = |x_n|^{\frac{2p}{3}},$$

on a

$$\Sigma u_n^3 = \Sigma |y_n + \theta\lambda x_n|^p < 2^p,$$

$$\Sigma v_n^{\frac{3}{2}} = \Sigma |x_n|^p = 1.$$

De sorte que

$$\Sigma_n z_n^{\frac{p}{3}} \leqq |\Sigma u_n v_n| \leqq (\Sigma u_n^3)^{\frac{1}{3}} \left(\Sigma v_n^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{p}{3}}.$$

Finalement

$$|B| \leqq \Sigma z_n t_n \leqq \left(\Sigma_n t_n^{\frac{p}{p-3}}\right)^{\frac{p-3}{p}} \left(\Sigma_n z_n^{\frac{p}{3}}\right)^{\frac{3}{p}} < 2^{p-3} \times 2 = 2^{p-2}.$$

On en conclut

$$|d(\lambda)| \leqq |\lambda|^2 p [1 + |p-2| 2^{p-2}].$$

Autrement dit, $[d(\lambda)]$ est un infiniment petit avec $|\lambda|$ d'ordre supérieur à 1, uniformément par rapport à x et y. Ce résultat subsiste si certains $(y_n + \theta'\theta\lambda x_n)$ s'annulent, si certains y_n s'annulent et enfin il s'étend au cas de λ complexe. On en déduit facilement le même résultat pour $D(\lambda)$, et il en résulte que :

THÉORÈME VI. — *Les espaces* $L^{(p)}$ *avec* $p > 1$ *sont à norme uniformément régulière.*

Nous pouvons compléter le théorème V par divers énoncés :

THÉORÈME VII. — *Si* B *est uniformément convexe et à norme régulière,* $\overline{B}$ *est strictement convexe.*

En effet, si $\|\Phi_1 + \Phi_2\| \equiv \|\Phi_1\| + \|\Phi_2\|$, et si z désigne le sommet de $\Phi_1 + \Phi_2$, on doit avoir

$$|\Phi_1(z)| = \|\Phi_1\|, \qquad |\Phi_2(z)| = \|\Phi_2\|.$$

D'où nécessairement

$$z = \lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2 \qquad \text{avec} \quad |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1,$$

d'où résulte que $x_1 = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2$ et par suite que

$$\Phi_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\|\Phi_1\|}{\|\Phi_2\|} \Phi_2,$$

$$\|\Phi_1 + \Phi_2\| = \|\Phi_2\| \left| 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\|\Phi_1\|}{\|\Phi_2\|} \right| = \|\Phi_2\| \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| \frac{\|\Phi_1\|}{\|\Phi_2\|} + \|\Phi^2\|,$$

d'où l'on tire sans difficultés que $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ est réel positif, ce qui établit le théorème.

Supposons B à norme uniformément régulière, et considérons Φ_1 et Φ_2, telles que $\|\Phi_1\| = \|\Phi_2\| = 1$. Étudions $\|\Phi_1 + \lambda\Phi_2\|$. Soit z le sommet de $\Phi_1 + \lambda\Phi_2$, posons

$$z = \alpha x_1 + y_1 \qquad \text{avec} \quad \alpha = \Phi_1(z);$$

en remplaçant au besoin $\Phi_1 + \lambda\Phi_2$ par

$$(\Phi_1 + \lambda\Phi_2) \times \overline{\operatorname{sign} \alpha},$$

ce qui ne change pas $\|\Phi_1+\lambda\Phi_2\|$, on peut supposer α réel et positif; d'ailleurs $\alpha<1$. On a déjà vu que $(1-\alpha)$ et $|y_1|$ sont uniformément infiniment petits avec $|\lambda|$. On peut poser

$$y_1=[\Phi_1(y_1)+\lambda\Phi_2(y_1)]z+y,$$

où z est normal à y; d'ailleurs $\Phi_1(y_1)=0$, donc

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda\Phi_2(y_1)z+y, \\ z &= \alpha x_1+\lambda\Phi_2(y_1)z+y, \\ z-y &= \alpha x_1+\lambda\Phi_2(y_1)z, \end{aligned}$$

z étant normal à y, on en déduit :

$$(1)\qquad \begin{cases} 1 \leqq |\alpha x_1+\lambda\Phi_2(y_1)z| \leqq |\alpha|+|\lambda||y_1|. \\ 1-\alpha \leqq |\lambda||y_1|. \end{cases}$$

On a alors

$$(2)\qquad \begin{aligned} \|\Phi_1+\lambda\Phi_2\| &= \Phi_1(z)+\lambda\Phi_2(z)=\alpha+\lambda\alpha\Phi_2(x_1)+\lambda\Phi_2(y_1) \\ &= 1-(1-\alpha)+\lambda\Phi_2(x_1)+\lambda(\alpha-1)\Phi_2(x_1)+\lambda\Phi_2(y_1) \end{aligned}$$

$(1-\alpha)$ étant infiniment petit d'ordre supérieur à 1 d'après (1) le second membre de (2) ne peut être minimum, pour $\lambda=0$, que si $\Phi_2(x_1)=0$. On démontre facilement que cela suffit; on a donc :

Théorème VIII. — B *étant uniformément convexe et à norme uniformément régulière, pour que la fonctionnelle* Φ_1 *soit normale à* Φ_2, *il faut et il suffit que le sommet* x_2 *de* Φ_2 *soit normal au sommet* x_1 *de* Φ_1.

Lorsque $\Phi_2(x_1)=0$, il résulte alors de (2) que

$$\|\Phi_1+\lambda\Phi_2\|-|\Phi_1|\leqq o(|\lambda|),$$

où $o(|\lambda|)$ est uniformément un infiniment petit d'ordre supérieur à 1. Il en résulte que :

Théorème IX. — B *étant uniformément convexe et à norme uniformément régulière,* $\overline{\mathrm{B}}$ *est également, non seulement uniformément convexe, mais encore à norme uniformément régulière.*

Conclusion. — Lorsque B est uniformément convexe et à norme uniformément régulière, si à tout point x de B on fait correspondre le point Φ de $\overline{B}$ dont x est le sommet normé, et réciproquement, on établit entre B et $\overline{B}$ une correspondance qui jouit des propriétés suivantes :

a. elle est réciproque, biunivoque et bicontinue;
b. elle conserve la norme;
c. elle inverse la normalité.

Cette correspondance n'est pas en général linéaire.

Remarque. — $\overline{\overline{B}}$ désignant le conjugué de $\overline{B}$, la correspondance précédente appliquée entre B et $\overline{B}$ d'une part, entre $\overline{B}$ et $\overline{\overline{B}}$ d'autre part, établit entre B et $\overline{\overline{B}}$ une correspondance qui possède les propriétés précédentes et dont on vérifie facilement qu'elle est linéaire. B *et* $\overline{\overline{B}}$ *sont donc identiques à une isomorphie près* (7).

4. Espaces à normalité réciproque.

Soit un espace B, uniformément convexe, et à normalité réciproque. On a le résultat suivant :

Dans un espace B *uniformément convexe et à normalité réciproque, l'ensemble des points y auxquels est normal le point x forme une variété linéaire complète.*

On vérifie facilement qu'il s'agit d'une variété complète; il faut montrer qu'elle est linéaire, c'est-à-dire que, si x est normal à y_1 et à y_2, il est aussi normal à $y_1 + y_2$. S'il n'en est pas ainsi, il existe une valeur de λ telle que l'on ait

$$|x - \lambda(y_1 + y_2)| < |x|.$$

Si donc on considère le sous-espace B′ à trois dimensions (x, y_1, y_2), dans ce sous-espace, x est normal à y_1 et à y_2, mais

(7) *Cf.* Pettis, *loc. cit.*

non à $(y_1 + y_2)$, car $x - \lambda(y_1 = y_2)$ est un point de B'. De sorte que tout revient en somme à démontrer le théorème pour un espace uniformément convexe à trois dimensions, B'. On peut supposer $|x| = |y_1| = |y_2| = 1$. Soit alors un espace *euclidien* à trois dimensions B'', rapporté à trois vecteurs rectangulaires X, Y_1, Y_2. Un point de B', $z = \alpha x + \beta y_1 + \gamma y_2$ correspondra au point Z de B'', de coordonnées α, β, γ. La surface lieu des Z tel que $|z| = 1$ sera une certaine surface Σ continue et *convexe* (uniformément convexe même, c'est-à-dire qu'elle ne contient aucun segment de droite).

Soit Z un point de Σ. Les vecteurs y auxquels z est normal ont pour correspondants dans B'' des vecteurs Y parallèles aux droites qui touchent Σ en Z sans pénétrer à l'intérieur de Σ, donc qui sont dans le cône des tangentes à Σ en Z. Je dis que ce cône se réduit à un plan. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver un plan contenant l'origine, Z, coupant Σ suivant une certaine courbe uniformément convexe Γ et tel que Γ admette en Z deux tangentes (une à droite, une à gauche) non confondues. Soient Z_1 et Z_2 deux vecteurs respectivement parallèles à ces deux tangentes et tels que $|z_1| = |z_2| = 1$. En vertu de la normalité réciproque, z_1 et z_2 sont normaux à z, et d'ailleurs Z_1 et Z_2 appartiennent à Γ. Donc il existe deux droites D_1 et D_2 parallèles à Z qui touchent sans la traverser Γ en Z_1 et Z_2 ; Γ étant uniformément convexe, ceci n'est possible que si D_1 et D_2 sont confondues et par suite aussi Z_1 et Z_2, z_1 et z_2, ce qui est contradictoire.

On en déduit que le théorème II est valable même si l'espace à normalité réciproque n'est pas à norme régulière.