BULLETIN DE LA S. M. F.

ALEX FRODA

Mesures extérieure et intérieure des ensembles-image des fonctions multiformes ou uniformes de variables réelles

Bulletin de la S. M. F., tome 68 (1940), p. 83-108

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1940__68__83_0>

MESURES EXTÉRIEURE ET INTÉRIEURE DES ENSEMBLES-IMAGE DES FONCTIONS MULTIFORMES OU UNIFORMES DE VARIABLES RÉELLES;

PAR M. ALEX. FRODA.

Dans ce qui suit, on étudie le problème d'évaluer les mesures extérieure et intérieure, au sens de *Lebesgue*, de l'ensemble-image I d'une fonction multiforme ou uniforme ([1]).

Les résultats qu'on atteint s'appuient sur une analyse des relations qui existent entre ces mesures et celles de l'ensemble vertical V de $f(\mathrm{P})$ en chaque point.

L'utilisation de notions aussi transcendantes que les intégrales extérieure et intérieure d'une fonction $f(\mathrm{P})$, mesurable ou non ([2]), paraît indispensable à la solution des problèmes qu'on s'est posés.

1. Voici un premier résultat fondamental :

I. *Lorsqu'une fonction bornée* $f(\mathrm{P})$ *multiforme ou uniforme, à n variables réelles possède en chaque point* P *d'un intervalle-support* Δ_n *un ensemble vertical* V *de valeurs, tel que*

$$m_e \mathrm{V} \geqq k \qquad (\text{resp. } m_i \mathrm{V} \leqq k),$$

où $k > 0$, *on a, pour l'image* I *de* $f(\mathrm{P})$,

$$m_e \mathrm{I} \geqq k \operatorname{mes} \Delta_n \qquad (\text{resp. } m_i \mathrm{I} \leqq k \operatorname{mes} \Delta_n).$$

Convenons, dans ce qui suit, de désigner, sauf avis contraire, l'ensemble-image (E_{n+1} par exemple), qui a pour support un ensemble donné (E_n par exemple) et dont l'ensemble vertical est

---

([1]) La première tentative de résoudre ce problème date de 1912 (ALEX. FRODA, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, t. 194, p. 2016, séance du 6 juillet 1932). Les résultats énoncés alors ont été complètement révisés dans cette étude.

([2]) *Cf.* ALEX. FRODA, *Sur quelques fonctionnelles attachées à des fonctions uniformes de variables réelles, mesurables ou non. Intégrales extérieure et intérieure* [*Bulletin math. de la Soc. Roumaine des Sciences*, t. 39, (2), Bucarest, 1937, p. 71-85).

en chaque point $\mathfrak{T}$ identique à l'intervalle $[a, b]$ par la même lettre (E par exemple) que l'ensemble-support, mais en changeant l'indice inférieur n en $(n+1)$. On dira que E_n et E_{n+1} *se correspondent* l'un à l'autre.

Appelons, pour abréger, *ensemble σ_n des points exclus d'un intervalle-support quelconque Δ_n par rapport à un intervalle-support* J_n *donné* en Δ_n, l'ensemble ouvert des points de Δ_n, dont la projection sur l'un au moins des n axes de coordonnées se trouve à une distance strictement inférieure à une quantité λ, positive et non nulle, de la projection sur l'axe respectif d'une au moins des extrémités de l'intervalle J_n, contenu en Δ_n.

Il est clair qu'en extrayant d'un intervalle-support quelconque Δ_n l'ensemble σ_n, ainsi défini, l'intervalle Δ_n se trouve par cela même décomposé en une somme d'intervalles-supports non empiétants, que nous appellerons *somme* S_n *d'un nombre fini* (³) *d'intervalles fermés restant en* Δ_n *après l'extraction de* σ_n.

On peut enfin faire remarquer que λ peut toujours être choisi assez petit pour que l'on ait $\text{mes}\,\sigma_n < \varepsilon\,\text{mes}\,\Delta_n$, où ε est une quantité positive donnée. En effet, la mesure de l'ensemble σ_n des points exclus de Δ_n est inférieure à $2\lambda n L^{n-1}$, quantité que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut, si λ est assez petit, L désignant la plus grande projection de l'intervalle Δ_n sur l'un quelconque des axes.

Prouvons que

$$m_e \mathrm{I} \geqq k\,\text{mes}\,\Delta_n, \qquad \text{lorsque} \quad m_e \mathrm{V} \geqq k > 0.$$

Supposons, en effet, que le contraire ait lieu, c'est-à-dire

$$m_e \mathrm{I} < k\,\text{mes}\,\Delta_n.$$

Alors, si $\eta > 0$ est assez petit, il y a aussi

$$m_e \mathrm{I} < (k-\eta)\,\text{mes}\,\Delta_n.$$

Recouvrons I d'un ensemble-image ouvert Ω, de mesure assez voisine de $m_e\mathrm{I}$ pour que l'on ait encore

$$\text{mes}\,\Omega < (k-\eta)\,\text{mes}\,\Delta_n,$$

ce que l'on peut écrire, Δ_{n+1} étant l'intervalle-image qui cor-

---

(³) Ce nombre n'est pas supérieur à 3^n, ni nul.

respond à Δ_n et enferme l'image I de $f(\mathrm{P})$ et $\Omega < \Delta_{n+1}$, ce qui est toujours possible,

$$\delta = (k-\eta)\,\mathrm{mes}\,\Delta_n - \mathrm{mes}\,\Omega\,\Delta_{n+1} > 0.$$

L'ensemble-image ouvert Ω a la structure d'une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles fermés, non empiétants, sauf peut-être des points-frontière communs. Désignons ces intervalles-images fermés par

$$\mathrm{H}_{n+1}^1,\quad \mathrm{H}_{n+1}^2,\quad \ldots,\quad \mathrm{H}_{n+1}^q,\quad \ldots,$$

et soient $\mathrm{H}_n^1, \mathrm{H}_n^2, \ldots, \mathrm{H}_n^q, \ldots$ leurs intervalles-supports fermés ([1]).

Soit Δ_n l'intervalle-support fermé de $f(\mathrm{P})$, décomposé à l'aide de $\mathrm{J}_1 = \mathrm{H}_n^1$, en un ensemble ouvert σ_n^1 des points exclus de Δ_n par rapport à J_1, ainsi qu'en une somme S_n^1 d'intervalles Δ_n^1 restant en Δ_n, après l'extraction de σ_n^1. Il y a $\Delta_n = \Sigma\Delta_n^1 + \sigma_n^1$, donc

$$\mathrm{mes}\,\Delta_n = \mathrm{mes}\,\Sigma\,\Delta_n^1 + \mathrm{mes}\,\sigma_n^1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_n^1 = \Sigma\,\Delta_n^1.$$

Or, en donnant à Δ_{n+1}^1, σ_{n+1}^1 la signification indiquée ci-dessus, par rapport à Δ_n^1, σ_n^1, il y a

$$\mathrm{mes}\,\sigma_{n+1}^1 = (b-a)\,\mathrm{mes}\,\sigma_n^1; \qquad \Delta_{n+1} = \Sigma\,\Delta_{n+1}^1 + \sigma_{n+1}^1,$$

et identiquement

$$\mathrm{mes}\,\Omega\,\Sigma\,\Delta_{n+1}^1 = \sum \mathrm{mes}\,\Omega\,\Delta_{n+1}^1 = \sum \frac{\mathrm{mes}\,\Omega\,\Delta_{n+1}^1}{\mathrm{mes}\,\Delta_n^1}\,\mathrm{mes}\,\Delta_n^1.$$

Mais l'on ne peut avoir, pour chaque paire d'intervalles Δ_{n+1}^1, Δ_n^1,

$$\frac{\mathrm{mes}\,\Omega\,\Delta_{n+1}^1}{\mathrm{mes}\,\Delta_n^1} \geqq k-\eta,$$

car il en résulterait

$$(k-\eta)\,\Sigma\,\mathrm{mes}\,\Delta_n^1 - \mathrm{mes}\,\Omega\,\Sigma\,\Delta_{n+1}^1 \leqq 0,$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\delta &= (k-\eta)\ \mathrm{mes}\,\Delta_n - \mathrm{mes}\,\Omega\,\Delta_{n+1}\\
&= [(k-\eta)\,\Sigma\,\mathrm{mes}\,\Delta_n^1 - \mathrm{mes}\,\Omega\,\Sigma\,\Delta_{n+1}^1] + [(k-\eta)\,\mathrm{mes}\,\sigma_n^1 - \mathrm{mes}\,\Omega\,\sigma_{n+1}^1]\\
&\leqq (k-\eta)\ \mathrm{mes}\,\sigma_n^1 - \mathrm{mes}\,\Omega\,\sigma_{n+1}^1.
\end{aligned}$$

([1]) Il est clair que cette décomposition peut toujours être obtenue, de sorte qu'aucun des intervalles-supports H_n^q ne soit dégénéré (c'est-à-dire que H_n^q possède une mesure à n dimensions non nulle, puisque les points frontières des H_{n+1}^q peuvent être négligés, car ils forment au total un ensemble de mesure nulle).

Il résulterait

$$\delta \leqq [k + (b - a)]\varepsilon \operatorname{mes}\Delta_n.$$

Or, δ est une constante positive et non nulle, tandis que ε peut être pris aussi petit que l'on veut, en choisissant $\eta > 0$ en conséquence, de sorte que la dernière inégalité est absurde.

Il s'ensuit que, si l'on suppose

$$\delta_1 = (k - \eta) \operatorname{mes}\Delta_n - \operatorname{mes}\Omega\Delta_{n+1} > 0,$$

l'on doit avoir en même temps, pour au moins une paire d'intervalles Δ^1_{n+1}, Δ^1_n,

$$\frac{\operatorname{mes}\Omega\Delta^1_{n+1}}{\operatorname{mes}\Delta^1_n} < k - \eta,$$

c'est-à-dire, pour cette paire d'intervalles ainsi distingués (par un choix parmi un nombre fini, choix qu'il serait aisé de préciser), l'on a

$$\delta_2 = (k - \eta) \operatorname{mes}\Delta^1_n - \operatorname{mes}\Omega\Delta^1_{n-1} > 0.$$

Ajoutons la remarque que l'intervalle fermé Δ^1_n, ainsi distingué, est *strictement* intérieur à Δ_n.

Désignons maintenant par J_2 le premier des intervalles de mesure non nulle à n dimensions de la suite d'intervalles fermés

$$H^2_n\Delta^1_n, \quad H^3_n\Delta^1_n, \quad \ldots.$$

Or, la dernière inégalité entraîne, par application du même procédé, une décomposition de Δ^1_n en un ensemble ouvert σ^1_n des points exclus de Δ^1_n par rapport à J_2, ainsi qu'en une somme S^2_n d'intervalles Δ^2_n, restant en Δ^1_n, après l'extraction de σ^2_n.

On obtient, comme conclusion, une paire d'intervalles Δ^2_{n+1}, Δ^2_n, tels que

$$\delta_3 = (k - \eta) \operatorname{mes}\Delta^2_n - \operatorname{mes}\Omega\Delta^2_{n+1} > 0,$$

et l'intervalle Δ^2_n est *strictement* intérieur à Δ^1_n.

On voit que le procédé pent être continué indéfiniment. On obtient de la sorte une suite d'intervalles *strictement* emboîtés

$$\Delta_n > \Delta^1_n > \Delta^2_n > \ldots > \Delta^q_n > \ldots.$$

Divisons chaque côté de l'intervalle Δ^q_n en q intervalles égaux, de sorte que Δ^q_n se décompose en q^n intervalles égaux $\Delta^{q'}_n$ et Δ^q_{n+1} aussi en q^n intervalles égaux $\Delta^{q'}_{n+1}$ correspondants.

Puisque

$$\operatorname{mes}\Omega\,\Delta^{q}_{n+1} < (k-\eta)\operatorname{mes}\Delta^{q}_{n},$$

il est clair, en raisonnant comme ci-dessus, qu'il existe au moins une paire $\Delta^{q'}_{n}$, $\Delta^{q'}_{n+1}$, telle que

$$\operatorname{mes}\Omega\,\Delta^{q'}_{n+1} < (k-\eta)\operatorname{mes}\Delta^{q'}_{n}.$$

Or, la suite des intervalles strictement emboîtés $\Delta^{q'}_{n}$ tend vers un point-limite $\mathfrak{T}$, qui par construction, ne peut se trouver sur la frontière d'aucun des intervalles H^{q}_{n}, projections des intervalles constituant Ω.

Prouvons maintenant que ces résultats, obtenus en supposant par absurde $m_e I < (k-\eta)\operatorname{mes}\Delta_n$, sont incompatibles avec l'hypothèse d'avoir $m_e V \geqq k > 0$ en tout point P de Δ_n et en particulier au point $\mathfrak{T}$, que nous venons de distinguer.

En effet, l'ensemble ouvert Ω, recouvrant I, découpe sur la verticale du point $\mathfrak{T}$ un ensemble W d'intervalles linéaires non empiétants (au sens large) en nombre fini ou infini, et il y a évidemment $\operatorname{mes} W \geqq \operatorname{mes} V \geqq k > 0$.

Retenons, parmi ces intervalles, un nombre fini, formant un ensemble W' d'intervalles de manière que l'on ait encore, ce qui est toujours possible,

$$\operatorname{mes} W' \geqq k-\eta,$$

où η a la valeur indiquée ci-dessus.

Considérons parmi les intervalles-images H^{q}_{n+1} non empiétants, sauf peut-être des points frontières, les intervalles en nombre fini H'_{n+1}, qui découpent sur la verticale de $\mathfrak{T}$, les intervalles en nombre fini de W'. Considérons l'intervalle-support H, fermé, des points communs aux intervalles en nombre fini H'_{n}, supports des H'_{n+1}. Il est clair qu'il existe, et l'on peut choisir dans la suite des $\Delta^{q'}_{n}$ déterminés ci-dessus, un intervalle $\Delta^{q'}_{n}$ contenu dans l'intervalle-support H, que nous venons de définir et auquel le point $\mathfrak{T}$ doit être strictement intérieur [5]. Il en résulte que $\Omega\Delta^{q'}_{n+1}$ contient, pour cette valeur particulière de q, une somme d'intervalles-images non empiétants, définis comme ayant chacun pour support commun

[5] C'est là un point indispensable à la démonstration et dont nous avons dû nous assurer par l'exclusion successive des σ^{z}_{n}. Or, la distance de $\mathfrak{T}$ à l'ensemble des points-frontières des intervalles H'_{n} en nombre fini, ne peut être nulle, par construction.

l'intervalle choisi $\Delta_n^{q'}$ et pour projection sur l'axe des côtés, des intervalles égaux à ceux de W'. Cela permet d'écrire

$$\operatorname{mes}\Omega\Delta_{n+1}^{q'} \geqq \operatorname{mes}W' \operatorname{mes}\Delta_n^{q'},$$

et donc

$$\operatorname{mes}\Omega\Delta_{n+1}^{q'} \geqq (k-\eta)\operatorname{mes}\Delta_n^{q'},$$

contrairement au résultat antérieur, ce qui complète la démonstration.

Prouvons maintenant que $m_i \mathrm{I} \leqq k \operatorname{mes}\Delta_n$, lorsque $m_i \mathrm{V} \leqq k$, où $k > 0$. On utilise, à cet effet, la fonction $c(\mathrm{P})$, complémentaire de $f(\mathrm{P})$ en Δ_{n+i} (⁶). Désignons par V' l'ensemble vertical des valeurs de $c(\mathrm{P})$ au point P, quelconque en Δ_n.

Il y a, V et V' étant complémentaires sur le segment de verticale de mesure $(b-a)$,

$$m_e \mathrm{V}' + m_i \mathrm{V} = (b-a),$$

donc

$$m_e \mathrm{V}' = (b-a) - m_i \mathrm{V} \geqq (b-a) - k,$$

et par application des résultats précédents à $c(\mathrm{P})$, dont l'image est complémentaire de I en Δ_{n+1}, on a

$$m_e c\mathrm{I} \geqq [(b-a)-k]\operatorname{mes}\Delta_n.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} m_i \mathrm{I} &= \operatorname{mes}\Delta_{n+1} - m_e c\mathrm{I} = (b-a)\operatorname{mes}\Delta_n - m_e c\mathrm{I} \\ &\leqq (b-a)\operatorname{mes}\Delta_n - [(b-a)-k]\operatorname{mes}\Delta_n = k\operatorname{mes}\Delta_n. \end{aligned}$$

2\. II. *Lorsqu'une fonction bornée $f(\mathrm{P})$, multiforme ou uniforme, possède en chaque point* P *d'un ensemble-support ouvert O_n (ou fermé F_n) un ensemble vertical* V *de valeurs, tel que*

$$m_e \mathrm{V} \geqq \mathrm{K} \qquad (\text{resp. } m_i \mathrm{V} \leqq \mathrm{K}),$$

où $k > 0$, on a, pour l'image I *de $f(\mathrm{P})$ sur O_n (resp. sur F_n),*

$$m_e \mathrm{I} \geqq k \operatorname{mes}\mathrm{O}_n \qquad (\text{resp. } m_i \mathrm{I} \leqq k \operatorname{mes}\mathrm{F}_n).$$

En effet, l'ensemble-support O_n est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles-supports Δ_n^k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ fermés, non empiétants, sauf peut-être des points-frontières

(⁶) Rappelons que c'est, par définition, la fonction ayant pour image le complémentaire $c\mathrm{I}$ de l'image I de $f(\mathrm{P})$, par rapport à Δ_{n+1}.

$O_n = \sum_k \Delta_n^k$. Soient Δ_{n+1}^k l'intervalle-image, correspondant à Δ_n^k selon la convention posée ci-dessus, I_{n+1}^k l'ensemble-image d'une fonction multiforme $f_k(P)$ définie sur Δ_n^k et identique à $f(P)$ en tout point P de Δ_n^k. On a, par suite de $m_e V \geqq k$, en chaque point P de Δ_n^k (I),

$$m_e I_n^k \geqq K \operatorname{mes} \Delta_n^k,$$

et, en sommant, avec la remarque que chaque I_n^k est intérieur à un Δ_{n+1}^k distinct (sauf un ensemble-image de mesure nulle), il vient (7)

$$m_e I = \sum_k m_e I_{n+1}^k \geqq \sum_k k \operatorname{mes} \Delta_n^k = k \operatorname{mes} O_n.$$

C. Q. F. D.

La seconde inégalité se démontre à l'aide des complémentaires.

Considérons $f(P)$, telle que $m_i V \leqq k$ en chaque point de l'ensemble-support F_n. Soient $O_n = cF_n$, le complémentaire de F_n en Δ_n ; O_{n+1} et F_{n+1} les ensembles-images correspondants ayant pour supports O_n et F_n respectivement et pour projection commune sur l'axe des cotes l'intervalle $[a, b]$.

Soient $\varphi(P)$ une fonction multiforme identique à $f(P)$ en chaque point de F_n et à l'intervalle linéaire $[O, k]$ en chaque point de $O_n = cF_n$; J l'image de $\varphi(P)$, qui est ainsi définie en chaque point de Δ_n ; J' l'image de $\varphi(P)$ sur l'ensemble-support O_n. On a $\operatorname{mes} J' = k \operatorname{mes} O_n$, comme il résulte du fait que l'image de $\varphi(P)$ sur chaque intervalle-support Δ_n^k, constituant O_n, est mesurable et a pour mesure $k \operatorname{mes} \Delta_n^k$.

D'autre part, $J = I + J'$, où I et J' sont disjoints. Il en résulte

$$m_i J = m_i I + \operatorname{mes} J'.$$

Or, en chaque point de Δ_n, l'ensemble vertical W des valeurs de $\varphi(P)$ est tel que $m_i W \leqq k$, donc, en vertu de la proposition précédente (I),

$$m_i J \leqq k \operatorname{mes} \Delta_n.$$

Donc

$$m_i I = m_i J - \operatorname{mes} J' = k \operatorname{mes} \Delta_n - k \operatorname{mes} O_n = k \operatorname{mes} F_n.$$

(7) *Cf.* Alex. Froda, *Sur quelques propriétés métriques des ensembles de points* [*Bulletin math. de la Soc. Roumaine des Sciences*, t. 38, (2), Bucarest, 1936, p. 88 (Remarque)].

3. On a aussi

III. *Lorsqu'une fonction bornée* $f(\mathrm{P})$ *multiforme ou uniforme possède, en chaque point* P *d'un ensemble-support* E *mesurable, un ensemble vertical* V *de valeurs, tel que*

$$m_e \mathrm{V} \geqq k \qquad (\text{resp. } m_i \mathrm{V} \leqq k),$$

où $k > 0$, *on a, pour l'image* I *de* $f(\mathrm{P})$ *sur* E,

$$m_e \mathrm{I} \geqq k \operatorname{mes} \mathrm{E} \qquad (\text{resp. } m_i \mathrm{I} \leqq k \operatorname{mes} \mathrm{E}).$$

Définissons les ensembles variables avec l'indice k, F_n^k fermés et O_n^k ouverts, tels que l'on ait, pour ε positif donné,

$$\mathrm{F}_n^k < \mathrm{E} < \mathrm{O}_n^k,$$

et dès que k est assez grand, puisque E est mesurable,

$$\operatorname{mes}(\mathrm{O}_n^k - \mathrm{E}) < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \operatorname{mes}(\mathrm{E} - \mathrm{F}_n^k) < \varepsilon.$$

Soient $\varphi(\mathrm{P})$ la fonction multiforme bornée, définie en Δ_n, comme étant identique à $f(\mathrm{P})$ en chaque point de E et prenant les valeurs de l'intervalle $[0, k]$ en chaque point du complémentaire $c\mathrm{E}$ de E en Δ_n; $[a', b']$ l'intervalle-cote contenant les valeurs que $\varphi(\mathrm{P})$ prend en Δ_n; J'_k et J''_k les images de $\varphi(\mathrm{P})$ sur F_n^k et O_n^k; W l'ensemble vertical des valeurs de $\varphi(\mathrm{P})$ en un point P; on a

$$\mathrm{J}'_k < \mathrm{I} < \mathrm{J}''_k.$$

Or, en vertu de la proposition précédente (II) et puisque

$$m_e \mathrm{W} \geqq k \qquad (\text{resp. } m_i \mathrm{W} \leqq k),$$

on a

$$m_e \mathrm{J}'_k \geqq k \operatorname{mes} \mathrm{O}_n^k \qquad (\text{resp. } m_i \mathrm{J}'_k \leqq k \operatorname{mes} \mathrm{F}_n^k).$$

D'autre part

$$m_e \mathrm{J}''_k \leqq m_e \mathrm{I} + m_e(\mathrm{J}''_k - \mathrm{I}); \qquad m_i \mathrm{I} \leqq m_i \mathrm{J}'_k + m_e(\mathrm{I} - \mathrm{J}'_k).$$

Or $(\mathrm{J}''_k - \mathrm{I})$ a pour support $(\mathrm{O}_n^k - \mathrm{E})$ et $(\mathrm{I} - \mathrm{J}'_n)$ a pour support $(\mathrm{E} - \mathrm{F}_n^k)$. Il s'ensuit, en vertu de résultats antérieurs [8]

$$m_e(\mathrm{J}''_k - \mathrm{I}) \leqq m_e^k(\mathrm{J}''_k - \mathrm{I}) = k \operatorname{mes}(\mathrm{O}_n^k - \mathrm{E}) < k\varepsilon,$$
$$m_e(\mathrm{I} - \mathrm{J}'_k) \leqq m_e^k(\mathrm{I} - \mathrm{J}'_k) \leqq (b' - a') \operatorname{mes}(\mathrm{E} - \mathrm{F}_n^k) < \varepsilon(b' - a'),$$

---

[8] *Cf.* ALEX. FRODA, *Sur la mesurabilité au sens restreint des ensembles-images des fonctions multiformes ou uniformes de variables réelles* (*Mathematica*, vol. XV

on obtient donc

$$m_e \mathrm{I} \geqq m_e \mathrm{J}''_k - m_e(\mathrm{J}''_k - \mathrm{I}) \geqq k \,\mathrm{mes}\, \mathrm{O}^k_n - k\varepsilon \geqq k \,\mathrm{mes}\, \mathrm{E} - k\varepsilon\,;$$

respectivement

$$m_i \mathrm{I} \leqq m_i \mathrm{J}'_k + m_e(\mathrm{I} - \mathrm{J}'_k) \leqq k \,\mathrm{mes}\, \mathrm{F}^k_n + \varepsilon(b' - a') \leqq k \,\mathrm{mes}\, \mathrm{E} + \varepsilon(b' - a'),$$

et, comme ε est aussi petit que l'on veut, l'énoncé se trouve démontré.

4. IV. *Lorsqu'une fonction finie* $f(\mathrm{P})$, *multiforme ou uniforme, possède en chaque point* P *d'un ensemble* E *mesurable ou non, un ensemble vertical* V *de valeurs, tel que*

$$m_e \mathrm{V} \geqq k \qquad (\text{resp. } m_i \mathrm{V} \leqq k),$$

où $k > 0$, *il y a, pour l'image* I *de* $f(\mathrm{P})$ *sur l'ensemble* E,

$$m_e \mathrm{I} \geqq k\, m_e \mathrm{E} \qquad (\text{resp. } m_i \mathrm{I} \leqq k\, m_i \mathrm{E}).$$

Supposons d'abord $f(\mathrm{P})$ bornée. Soient $m_i \mathrm{V} \leqq k$ et χ un noyau d'égale mesure de I [9], construit de manière qu'il soit mesurable B. Désignons par H sa projection, qui est aussi mesurable, comme ensemble analytique [10].

On a

$$\mathrm{mes}\,\chi = m_i \mathrm{I}\,; \qquad \chi < \mathrm{I} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H} < \mathrm{E}, \qquad \text{donc} \quad \mathrm{mes}\, \mathrm{H} \leqq m_i \mathrm{E}.$$

Soit W l'ensemble vertical de χ, correspondant à l'ensemble V de I, on a $\mathrm{W} < \mathrm{V}$, donc $\mathrm{mes}\, \mathrm{W} \leqq m_i \mathrm{V}$. En vertu de l'hypothèse

$$\mathrm{mes}\, \mathrm{W} \leqq k,$$

et, par application de (III), il vient

$$\mathrm{mes}\,\chi \leqq k \,\mathrm{mes}\, \mathrm{H},$$

donc, *a fortiori*,

$$m_i \mathrm{I} = \mathrm{mes}\,\chi \leqq k\, m_i \mathrm{E}.$$

C. Q. F. D.

Avant de donner la démonstration de l'autre inégalité, nous allons démontrer le résultat suivant, que nous allons utiliser.

---

(9) *Cf.* ALEX. FRODA, *op. cit.*, 1936, p. 79.

(10) *Cf.* N. LUSIN, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris, 1930, p. 144 et 152.

5. V. *Lorsqu'une fonction $f(\mathrm{P})$ multiforme a pour ensemble vertical en chaque point d'un ensemble-support* E, *mesurable ou non, un ensemble linéaire identique à l'intervalle-cote* $[a, b]$, *il vient pour l'image* I *de* $f(\mathrm{P})$ *sur l'ensemble* E,

$$m_e \mathrm{I} = (b - a)\, m_e \mathrm{E}\,; \qquad m_i \mathrm{I} = (b - a)\, m_i \mathrm{E}.$$

En effet, si G est l'enveloppe d'égale mesure de E ([11]), on définit la fonction multiforme $\varphi(\mathrm{P})$ à l'image J, dont l'intervalle vertical est $[a, b]$ en chaque point de G, alors $\varphi(\mathrm{P})$ est identique à $f(\mathrm{P})$ sur E.

On a ([12])

$$(b - a) \operatorname{mes} \mathrm{G} = m_i^{\mathrm{R}} \mathrm{J} \leqq m_i \mathrm{J} \leqq m_e \mathrm{J} \leqq m_e^{\mathrm{R}} \mathrm{J} = (b - a) \operatorname{mes} \mathrm{G},$$

donc J est mesurable, et il y a

$$\operatorname{mes} \mathrm{J} = (b - a) \operatorname{mes} \mathrm{G}.$$

Or

$$\operatorname{mes} \mathrm{J} = m_e \mathrm{I} + m_i (\mathrm{J} - \mathrm{I}).$$

Mais l'ensemble $(\mathrm{J} - \mathrm{I})$ a pour support $(\mathrm{G} - \mathrm{E})$ et pour ensemble vertical, en chaque point de $(\mathrm{G} - \mathrm{E})$, l'intervalle vertical $[a, b]$.

En vertu de (IV), il y a, comme on vient de la voir,

$$m_i (\mathrm{J} - \mathrm{I}) \leqq (b - a)\, m_i (\mathrm{G} - \mathrm{E}) = 0,$$

car de $\operatorname{mes} \mathrm{G} = m_e \mathrm{E}$, on déduit $m_i(\mathrm{G} - \mathrm{E}) = 0$.

Il s'ensuit

$$m_e \mathrm{I} = \operatorname{mes} \mathrm{J} = (b - a) \operatorname{mes} \mathrm{G} = (b - a)\, m_e \mathrm{F}.$$

D'autre part, on a vu ci-dessus (IV) que

$$m_i \mathrm{I} \leqq (b - a)\, m_i \mathrm{E},$$

tandis que ([13])

$$m_i \mathrm{I} \geqq m_i^{\mathrm{R}} \mathrm{I} = (b - a)\, m_i \mathrm{E},$$

donc, en confrontant les deux inégalités

$$m_i \mathrm{I} = (b - a)\, m_i \mathrm{E}.$$

---

(11) *Cf.* ALEX. FRODA, *op. cit.*, 1936, p. 79.
(12) *Cf.* ALEX. FRODA, *op. cit.*, 1938.
(13) *Cf.* ALEX. FRODA, *op. cit.*, 1938.

6. Reprenons la démonstration de l'autre inégalité de notre proposition antérieure (IV), en supposant $f(\mathrm{P})$ bornée.

Soient $\Delta^{(n)}$ l'intervalle-support, contenant l'ensemble borné E et $m_e \mathrm{V} \geqq k$, en chaque point de E.

L'on peut enfermer l'ensemble-image I en un ensemble ouvert Ω.

L'ensemble-image ouvert Ω est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles-images $\Delta_p (p=1, 2, \ldots)$, non empiétants deux à deux, mais pouvant avoir des points-frontières communs,

$$\Omega = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_p + \ldots ; \qquad \operatorname{mes}\Omega = \Sigma \operatorname{mes}\Delta_p.$$

Nous allons définir un nouvel ensemble-image Ω' que nous déduirons de Ω par des opérations géométriques simples : décomposition des intervalles Δ_p en d'autres, et translations verticales, de sorte que l'on ait

$$\operatorname{mes}\Omega' = \operatorname{mes}\Omega.$$

Introduisons d'abord des conventions de langage afin d'abréger notre exposé.

Un ensemble-image ouvert Ω_λ sera appelé *de type* B s'il peut être considéré comme la somme d'un nombre fini d'intervalles-images Δ'_k non empiétants, sauf peut-être les frontières dont les *bases inférieures* (c'est-à-dire l'ensemble des points-frontières de plus petite cote, qui est un intervalle horizontal à n dimensions) sont contenues dans l'intervalle-support $\Delta^{(n)}$ (alors chaque intervalle-image ne contient que des points à cote non négative).

Appelons *chevauchement d'un intervalle-image* Δ *sur un ensemble-image ouvert* Ω *de type* B, l'opération qui consiste à adjoindre des intervalles à l'ensemble-image Ω_λ de type B, de manière à obtenir un nouvel ensemble de type B, en procédant comme suit : on considère les bandes verticales indéfinies $\mathcal{B}_r$ soit de mêmes bases que les intervalles Δ'_r constituant Ω_λ, soit de bases Δ^c_r complémentaires en $\Delta^{(n)}$ des bases des Δ'_r.

On décompose l'intervalle-image donné Δ en une somme d'intervalles partiels $\Delta . \mathcal{B}_r$ (partie de Δ contenue en chaque bande). On opère sur chaque $\Delta . \mathcal{B}_r$ une translation verticale, de sorte que l'intervalle obtenu Δ''_r vienne confondre sa base inférieure soit, si possible, avec la *base supérieure* de l'intervalle Δ'_r de Ω_λ

dont on s'est servi dans la définition du $\mathcal{B}_r$ respectif, soit avec un intervalle de $\Delta^{(n)}$, lorsque $\mathcal{B}_r$ a été défini à l'aide d'un Δ_r^c.

Il est facile voir que l'ensemble-image $\Omega_{\lambda+1}$, obtenu comme somme de Ω_λ et des Δ_r'', est toujours un ensemble-image ouvert, de type B et

$$\operatorname{mes}\Omega_{\lambda+1} = \operatorname{mes}\Omega_\lambda + \operatorname{mes}\Delta.$$

Procédons maintenant à la définition de Ω'. Considérons d'abord Δ_1. Il existe un intervalle-image Δ_1' constituant un Ω_1 ouvert, de type B, et il est clair que l'on obtient Ω_1 de Δ_1 par une translation.

On a donc

$$\operatorname{mes}\Omega_1 = \operatorname{mes}\Delta_1.$$

A l'aide d'un chevauchement de Δ_2 sur Ω_1, l'on obtient Ω_2, qui est du type B et

$$\operatorname{mes}\Omega_2 = \operatorname{mes}\Omega_1 + \operatorname{mes}\Delta_2 = \operatorname{mes}\Delta_1 + \operatorname{mes}\Delta_2,$$

En poursuivant de la même manière, on définira, par itération du procédé, une suite croissante d'ensembles-images ouverts $\Omega_1 < \Omega_2 < \ldots < \Omega_p < \ldots$, où

$$\operatorname{mes}\Omega_p = \sum_1^p \operatorname{mes}\Delta_p,$$

de sorte que

$$\Omega' = \lim \Omega_p = \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots$$

est un ensemble dont on sait que

$$\operatorname{mes}\Omega' = \Sigma \operatorname{mes}\Delta_p,$$

donc

$$\operatorname{mes}\Omega' = \operatorname{mes}\Omega.$$

Considérons une verticale en un point $\mathfrak{X}$ de E. Comme $\Omega > \mathrm{I}$, si l'on désigne par W l'ensemble vertical de Ω au point $\mathfrak{X}$, $m_e \mathrm{W} \geqq k$. Comme, d'autre part, chacun des intervalles-images de la suite des Δ_p, qui contiennent un segment de la verticale du point $\mathfrak{X}$, se retrouve en translation en Ω', il est clair que Ω' découpe sur la verticale du point $\mathfrak{X}$ un ensemble vertical W', tel que

$$m_e \mathrm{W}' = m_e \mathrm{W} \geqq k.$$

Or, il suffit de considérer l'ensemble-image J, ayant pour support E, et tel qu'en chaque point $\mathfrak{T}$ de E, J soit constitué par l'intervalle vertical W_0, identique à $[o, k]$, pour constater, d'une part, qu'il y a

$$\Omega' > J,$$

et de l'autre, en vertu de la proposition que l'on vient de démontrer (V), que

$$m_e J = k m_e E.$$

On a donc

$$\operatorname{mes}\Omega = \operatorname{mes}\Omega' \geqq m_e J = k m_e E,$$

et si l'on prend la borne inférieure au premier membre

$$m_e I \geqq k m_e E.$$

C. Q. F. D.

Supposons maintenant $f(P)$ finie, bornée ou non, I son image, p un entier donné dépassant k.

Définissons la fonction $\varphi_p(P)$, telle que son image I_p soit formée par l'ensemble des points M de I, de cotes contenues en $[-p, +p]$, mais seulement les points-images M tels que l'ensemble vertical V_p de $\varphi_p(P)$, contenant M, satisfasse à $m_e V_p \geqq k$; désignons par E_p l'ensemble-support de $\varphi_p(P)$. On a, puisque les suites des E_p et des I_p sont croissantes avec p et tendent pour $p = \infty$ vers E et I respectivement

$$m_e I = \lim m e I_p \qquad \text{et} \qquad m_e E = \lim m_e E_p.$$

Mais, puisque $\varphi_p(P)$ est bornée, on a vu ci-dessus qu'il y a $m_e I_p \geqq k m_e E_p$, et donc à la limite, $m_e I \geqq k m_e E$.

Définissons, d'autre part, la fonction $\psi_p(P)$, telle que son image J_p soit formée par l'ensemble des points M_0 de I, de cotes contenues en $[-p, +p]$, sans autre condition. Il est clair, en effet, que l'ensemble vertical W_p de $\psi_p(P)$, contenant M_0, satisfait à $m_i W_p \leqq k$, puisque $W_p < V$, par définition, et il y a $m_i W_p \leqq m_i V$; désignons par T_p l'ensemble-support de $\psi_p(P)$, il y a $T_p < E$. On a, puisque $(I - J_p)$ et J_p sont contenus en des ensembles mesurables distincts,

$$m_e(I - J_p) = m_e I - m_e J_p.$$

Or, la suite des J_p est croissante avec p et tend vers I, pour $p = \infty$. donc

$$m_e I = \lim m_e J_p.$$

Il s'ensuit

$$\lim m_e(\mathrm{I} - \mathrm{J}_p) = m_e\mathrm{I} - \lim m_e\mathrm{J}_p = 0.$$

Mais on peut écrire aussi

$$m_i\mathrm{I} \leqq m_i\mathrm{J}_p + m_e(\mathrm{I} - \mathrm{J}_p),$$

et, comme $\psi_p(\mathrm{P})$ est bornée, on a vu ci-dessus qu'il y a

$$m_i\mathrm{J}_p \leqq k\,m_i\mathrm{T}_p \leqq k\,m_i\mathrm{E}.$$

On a donc

$$m_i\mathrm{I} \leqq k\,m_i\mathrm{E} + m_e(\mathrm{I} - \mathrm{J}_p),$$

ce qui, à la limite, donne

$$m_i\mathrm{I} \leqq k\,m_i\mathrm{E}.$$

Conséquence. — *Lorsqu'une fonction finie $f(\mathrm{P})$ a une image* I *mesurable et si, en chaque point de son ensemble-support* E, *l'ensemble vertical* V *de $f(\mathrm{P})$ est mesurable et de même mesure positive k, l'ensemble* E *est lui-même mesurable.*

En effet

$$m_e\mathrm{I} \geqq k\,m_e\mathrm{E} \geqq k\,m_i\mathrm{E} \geqq m_i\mathrm{I},$$

et donc, puisque l'on a $m_e\mathrm{I} = m_i\mathrm{I}$, par hypothèse, il en résulte $m_e\mathrm{E} = m_i\mathrm{E}$, car $k > 0$ et finie, par hypothèse.

7. *Remarque.* — Il est essentiel de constater maintenant que *la réciproque de la proposition* I *n'est pas vraie*, c'est-à-dire une fonction $f(\mathrm{P})$ peut être telle que l'on ait $m_e\mathrm{I} \geqq k \operatorname{mes} \Delta_n$ (respectivement $m_i\mathrm{I} \leqq k \operatorname{mes} \Delta_n$) et tout de même $m_e\mathrm{V} < k$ (respectivement $m_i\mathrm{V} > k$) en chaque point $\mathfrak{T}$ de Δ_n.

Voici l'exemple d'une telle fonction. On définit $f(\mathrm{P})$ égale en chaque point de l'ensemble non mesurable H_n de Δ_n à l'intervalle $\left[0,\ 1 - \frac{\nu}{2}\right]$ et en chaque point de l'ensemble complémentaire $c\mathrm{H}_n$ en Δ_n à $\left[-1 + \frac{\nu}{2},\ 0\right]$, où ν est le degré de non-mesurabilité de H_n ([14]), et l'on suppose $\operatorname{mes} \Delta_n = 1$, $\nu < 1$.

Alors, il y a $f(\mathrm{P}) > 0$ en chaque point de H_n, $f(\mathrm{P}) < 0$ en

([14]) C'est-à-dire $\nu = m_e\mathrm{H}_n - m_i\mathrm{H}_n$, par définition (*cf.* Alex. Froda, *op. cit.*, 1936, p. 90).

chaque point de cH_n, et si l'on désigne par I'_{n+1}, I''_{n+1} les images de $f(P)$ sur H_n, cH_n, par Δ'_{n+1}, Δ''_{n+1} deux intervalles-images à support Δ_n et se projetant sur l'axe des cotes en $[0, 1]$, $[-1, 0]$ respectivement, comme Δ'_{n+1} et Δ''_{n+1} n'ont en commun que l'intervalle Δ_n, qui est de mesure à $(n+1)$ dimensions nulle, il est clair que l'on a, puisque $I'_{n+1} < \Delta'_{n+1}$ et $I''_{n+1} < \Delta''_{n+1}$,

$$m_e I = m_e(I'_{n+1} + I''_{n+1}) = m_e I'_{n+1} + m_e I''_{n+1}.$$

Or, en appliquant les résultats de la proposition (IV),

$$m_e I'_{n+1} \geqq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) m_e H_n; \qquad m_e I''_{n+1} \geqq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) m_e(cH_n),$$

donc

$$m_e I \geqq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) [m_e H_n + m_e cH_n] = \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) (\text{mes}\,\Delta_n + \nu)$$
$$= \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)(1 + \nu) = 1 + \frac{\nu}{2}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) > 1.$$

Il y a donc, pour $k = 1$, $\text{mes}\,\Delta_n = 1$,

$$m_e I > k\,\text{mes}\,\Delta_n,$$

malgré le fait que $mes\,V < k$, en chaque point de Δ_n.

En ce qui concerne les mesures intérieures, il y a de même, puisque $I'_{n+1} < \Delta'_{n+1}$ et $I''_{n+1} < \Delta''_{n+1}$,

$$m_i I = m_i(I'_{n+1} + I''_{n+1}) = m_i I'_{n+1} + m_i I''_{n+1},$$

et, compte tenu des résultats de la proposition (IV),

$$m_i I'_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) m_i H_n; \qquad m_i I''_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) m_i(cH_n),$$

donc

$$m_i I \leqq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) [m_i H_n + m_i(cH_n)] = \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) [\text{mes}\,\Delta_n - (m_e H_n - m_i H_n)]$$
$$= \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)(1 - \nu) < (1 - \nu).$$

On a donc, pour $k = 1 - \nu$, $\text{mes}\,\Delta_n = 1$,

$$m_i I < k\,\text{mes}\,\Delta_n,$$

malgré le fait que $mes\,V > k$, en chaque point de Δ_n.

8. Avant d'aller plus loin, il nous faut démontrer deux propositions préliminaires indispensables.

Dorénavant, nous désignerons, en général, afin d'abréger, par $\overline{A}$ l'ensemble-image ayant pour support l'ensemble A et pour ensemble vertical, en chaque point de A, le même intervalle linéaire $[a, b]$.

On appelle $\overline{A}$ *ensemble-image au support* A *à chaque cote de* $[a, b]$.

On a, en général, $(\overline{A_1 A_2}) = \overline{A}_1 \overline{A}_2$.

Soient donnés un ensemble-image I, à support E et l'ensemble-support A, tels que $A < E$; nous conviendrons d'appeler $m_e I \overline{A}$, $m_i I \overline{A}$ et mes $I \overline{A}$ respectivement les *mesures extérieure, intérieure ou mesure de* I *sur l'ensemble-support* A.

VI. *Un ensemble-image* I *de l'espace à* $(n+1)$ *dimensions, ayant pour support un ensemble* E *de l'espace à n dimensions possède une enveloppe* Γ *d'égale mesure de* I, *ayant pour support une enveloppe* G *d'égale mesure de* E ([15]).

Considérons, en effet, une enveloppe Γ′ d'égale mesure de I, construite de manière qu'elle soit mesurable B. Il y a, par définition, $\Gamma' > I$ et

$$\text{mes}\, \Gamma' = m_e I.$$

Désignons par G′ l'ensemble-support de Γ′, qui n'est autre que sa projection dans l'espace à n dimensions. Il est par conséquent mesurable comme ensemble analytique (projection d'ensemble mesurable B).

Soit G_1 une enveloppe d'égale mesure de E,

$$\text{mes}\, G_1 = m_e E; \qquad G_1 > E.$$

([15]) On voit directement que la proposition ne saurait être vraie pour toute enveloppe Γ d'égale mesure de I. Il suffit d'ajouter par exemple à Γ, enveloppe d'égale mesure de I, un ensemble-image J (de mesure nulle) *horizontal* (dont tous les points ont une même cote) et ayant pour support un ensemble non mesurable donné k, contenu en cG, complémentaire du support G de Γ. Alors $\Gamma' = \Gamma + J$ est aussi enveloppe d'égale mesure de I, car mes $J = c$. Mais le support G′ de Γ′ est tel que $G' = G + k$, ensemble non mesurable, qui ne peut plus être enveloppe d'égale mesure de l'ensemble E, support de I, mais diffère de toute enveloppe G_1 d'égale mesure de E d'un ensemble non mesurable.

Pour les définitions, *cf.* Alex. Froda, *op. cit.*, 1936, p. 79.

L'ensemble $\overline{G}_1$ est mesurable, car il y a (V)

$$\text{mes}\,\overline{G}_1 = (b-a)\,\text{mes}\,G_1.$$

Il s'ensuit que $\overline{G}_1 . \Gamma'$ est mesurable et il y a

$$\Gamma' > \overline{G}_1\,\Gamma' > I,$$

donc

$$\text{mes}\,\Gamma' \geqq \text{mes}\,\overline{G}_1\,\Gamma' \geqq m_e I = \text{mes}\,\Gamma',$$

dont il résulte que si l'on désigne par Γ l'ensemble $\overline{G}_1\,\Gamma'$, il y a $\text{mes}\,\Gamma = m_e I$ et comme $\Gamma > I$, Γ est aussi une enveloppe d'égale mesure de I. Quant à sa projection, c'est $G_1\,G'$, qui est aussi mesurable, et il y a

$$G_1 > G_1\,G' > E,$$

donc

$$\text{mes}\,G_1 \geqq \text{mes}\,G_1\,G' \geqq m_e E = \text{mes}\,G_1,$$

et il résulte

$$\text{mes}\,G_1 = \text{mes}\,G_1\,G' = m_e E.$$

Si donc G est l'ensemble $G_1\,G'$, G est la projection de Γ, et c'est une enveloppe d'égale mesure de E. C. Q. F. D.

VII. *Lorsqu'un ensemble-image* I *de l'espace à* $(n+1)$ *dimensions ayant pour support un ensemble* E *de l'espace à n dimensions est de mesure intérieure non nulle sur tout sous-ensemble mesurable et de mesure non nulle de* E, *tout noyau* χ *d'égale mesure de* I, *a pour support un ensemble* H, *qui est un noyau d'égale mesure de* E.

En effet, soit H le support de χ, il est clair que $H < E$, puisque $\chi < I$.

D'autre part, il y a $\chi < \overline{H}$ et $\chi < I$, donc

$$\chi < I\,\overline{H} < I.$$

Il s'ensuit

$$\text{mes}\,\chi \leqq m_i I\,\overline{H} \leqq m_i I,$$

et comme $\text{mes}\,\chi = m_i I$, il résulte $m_i I\,\overline{H} = m_i I$.

Or

$$m_i I = m_i I\,\overline{H} + m_i I . \overline{cH},$$

puisque les ensembles mesurables $\overline{H}$ et $\overline{cH}$ sont disjoints. Donc,

$$m_i(I . \overline{cH}) = 0.$$

Il s'ensuit que l'on ne peut avoir

$$m_i(\mathrm{E}.c\mathrm{H}) > 0,$$

car il existerait en ce cas un ensemble mesurable $\mathrm{K} < \mathrm{E}.c\mathrm{H}$, tel que mes$\mathrm{K} > 0$, tandis que $m_i \mathrm{I}\, \overline{k} \leqq m_i \mathrm{I}.c\overline{\mathrm{H}} = 0$, I serait de mesure intérieure nulle sur K, qui est de mesure non nulle et sous-ensemble de E, ce qui contredit l'hypothèse énoncée au sujet de I. On doit donc avoir $m_i \mathrm{E}.c\mathrm{H} = 0$, c'est-à-dire

$$m_i(\mathrm{E} - \mathrm{EH}) = m_i(\mathrm{E} - \mathrm{H}) = m_i \mathrm{E} - \mathrm{mes}\,\mathrm{H} = 0.$$

Donc, $m_i\mathrm{E} = \mathrm{mes}\ \mathrm{H}$, et, comme $\mathrm{H} < \mathrm{E}$, H est un noyau d'égale mesure de E. C. Q. F. D.

9. **Mesure de l'image d'une fonction multiforme à l'aide des fonctions caractéristiques de la mesurabilité verticale.** — Soient I l'image de $f(\mathrm{P})$, fonction multiforme ou uniforme, sur un ensemble mesurable E, V l'ensemble vertical de $f(\mathrm{P})$ en chaque point P, $v_e(\mathrm{P})$ et $v_i(\mathrm{P})$ les deux fonctions uniformes ayant, en chaque point P, respectivement, pour valeurs $m_e\mathrm{V}$ et $m_i\mathrm{V}$; on les appellera *fonctions caractéristiques de la mesurabilité verticale extérieure et intérieure de* $f(\mathrm{P})$.

Désignons par $\gamma(v_e, \mathrm{E})$ et $\gamma(v_i, \mathrm{E})$ les mesures du contact extérieur en support des fonctions $v_e(\mathrm{P})$ et $v_i(\mathrm{P})$ respectivement ([16]), par B l'oscillation de la fonction $f(\mathrm{P})$ sur E ([17]), ensemble mesurable donné.

VIII. *Une fonction multiforme ou uniforme bornée* $f(\mathrm{P})$ *étant donnée sur un ensemble mesurable* E, *il y a*

$$m_e \mathrm{I} \geqq \int_{\mathrm{E}}^{e} v_e(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} - \mathrm{B}\gamma(v_e, \mathrm{E}); \qquad m_i \mathrm{I} \leqq \int_{\mathrm{E}}^{i} v_i(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} + \mathrm{B}\gamma(v_i, \mathrm{E}).$$

Considérons une suite normale S de divisions s de l'intervalle-cote $[a, b]$ contenant, au sens strict, les valeurs de $f(\mathrm{P})$. On a q intervalles $\delta_t = [l_t, l_{t+1}]$ et $[a, b] = \Sigma\delta_t$.

Définissons les ensembles-supports

$$\mathrm{E}'_t = \mathrm{E}\,[l_t \leqq v_e(\mathrm{P}) < l_{t+1}] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}''_t = \mathrm{E}[l_t < v_i(\mathrm{P}) \leqq l_{t+1}].$$

([16]) *Cf.* ALEX. FRODA, *op. cit.*, 1937, p. 76-78.

([17]) C'est la mesure du plus petit intervalle-cote, contenant l'ensemble des valeurs que $f(\mathrm{P})$ prend sur E.

Soient G'_l, G''_l des enveloppes d'égale mesure de E'_l, E''_l respectivement, I'_l, I''_l les ensembles-images des points de I ayant E'_l, E''_l pour supports, L'_l, Γ''_l des enveloppes d'égale mesure des ensembles-images I'_l, I''_l respectivement.

On a $I = \Sigma I'_l$ et $I = \Sigma I''_l$ et, par application des notations et résultats antérieurs ([18]), on a, compte tenu du fait que les I'_l sont disjoints deux à deux et de même les I''_l deux à deux,

$$m_e I = \Sigma m_e I'_l - \gamma(\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots, \Gamma'_l, \ldots, \Gamma'_q),$$
$$m_i I \leqq \Sigma m_i I''_l + \gamma(\Gamma''_1, \Gamma''_2, \ldots, \Gamma''_l, \ldots, \Gamma''_q).$$

Or, il y a, par définition, en chaque point P de E'_l,

$$m_e V = v_e(P) \geqq l_l; \qquad \text{donc} \quad m_e I'_l \geqq l_l\, m_e I'_l,$$

et, en chaque point P de E''_l,

$$m_i V = v_i(P) \leqq l_{l+1}, \qquad \text{donc} \quad m_i I''_l \leqq l_{l+1}\, m_i E''_l,$$

résultats que l'on obtient par application directe de la proposition antérieure (IV).

D'autre part, chaque ensemble mesurable Γ'_l et Γ''_l peut être choisi tel qu'il possède pour support un G'_l et G''_l respectivement (VI).

L'ensemble vertical, en chaque point, tant pour Γ'_l que pour Γ''_l ne représente que des cotes, contenues en $[a, b]$ intervalle choisi de sorte que $\text{mes}[a, b] = B + \varepsilon$, où ε est aussi petit que l'on veut.

Or, il est clair ([19]) que le support de l'ensemble

$$\Gamma'_l(\Gamma'_1 + \Gamma'_2 + \ldots + \Gamma'_{l+1})$$

est contenu en

$$G'_l(G'_1 + G'_2 + \ldots + G'_{l-1}),$$

donc (III)

$$\text{mes}\,\Gamma'_l(\Gamma'_1 + \Gamma'_2 + \ldots + \Gamma'_{l+1}) \leqq (B + \varepsilon)\,\text{mes}\,G'_l(G'_1 + G'_2 + \ldots + G'_{l+1}),$$

et, en sommant, il y a

$$\gamma(\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots, \Gamma'_q) \leqq (B + \varepsilon')\,\gamma(G'_1, G'_2, \ldots, G''_q),$$

et de même

$$\gamma(\Gamma''_1, \Gamma''_2, \ldots, \Gamma''_q) \leqq (B + \varepsilon)\,\gamma(G''_1, G''_2, \ldots, G''_q).$$

---

(18) *Cf.* ALEX. FRODA, *op cit.*, 1936, p. 87-88.

(19) Car si pM désigne la projection (support) d'un ensemble (image) quelconque M, il y a $p(M + N) = pM + pN$; $p(MN) < pM\,pN$ et si $M < N$, il y a $pM < pN$

En utilisant les inégalités ci-dessus, il résulte

$$m_e \mathrm{I} \geqq \Sigma l_t \quad m_e \mathrm{E}'_t - (\mathrm{B} + \varepsilon)\,\gamma(\mathrm{G}'_1, \mathrm{G}'_2, \ldots, \mathrm{G}'_q),$$
$$m_i \mathrm{I} \leqq \Sigma l_{t+1} m_i \mathrm{E}''_t + (\mathrm{B} + \varepsilon)\,\gamma(\mathrm{G}''_1, \mathrm{G}''_2, \ldots, \mathrm{G}''_q).$$

Or, si l'on choisit la suite normale S de divisions convenablement ([20]) pour chacune de ces inégalités, de sorte que l'on ait

$$\gamma(v_e, \mathrm{E}) = \lim \gamma(\mathrm{G}'_1, \mathrm{G}'_2, \ldots, \mathrm{G}'_q),$$
$$\gamma(v_i, \mathrm{E}) = \lim \gamma(\mathrm{G}''_1, \mathrm{G}''_2, \ldots, \mathrm{G}''_q),$$

on a en même temps

$$\lim \Sigma l_t m_e \mathrm{E}'_t = \int_{\mathrm{E}}^{e} v_e(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} \qquad \text{et} \qquad \lim \Sigma l_{t+1} m_i \mathrm{E}''_t = \int_{\mathrm{E}}^{i} v_i(\mathrm{P})\, d\mathrm{P},$$

ce qui, finalement, justifie l'énoncé, puisque ε est aussi petit que l'on veut.

10. Voici enfin un dernier résultat.

IX. *Une fonction multiforme ou uniforme bornée* $f(\mathrm{P})$ *étant donnée sur un ensemble mesurable de mesure non nulle* E, *il y a*

$$m_e \mathrm{I} \geqq \int_{\mathrm{E}}^{i} v_e(\mathrm{P})\, d\mathrm{P}; \qquad m_i \mathrm{I} \leqq \int_{\mathrm{E}}^{e} v_i(\mathrm{P})\, d\mathrm{P},$$

où I *est l'ensemble-image de* $f(\mathrm{P})$, $v_e(\mathrm{P})$ *et* $v_i(\mathrm{P})$ *les fonctions caractéristiques de la mesurabilité verticale de* $f(\mathrm{P})$.

Soit $[a, b]$ un intervalle contenant les valeurs que $f(\mathrm{P})$ prend sur E, de manière que, B étant l'oscillation de $f(\mathrm{P})$ sur E, il y ait $\mathrm{mes}[a, b] = \mathrm{B} + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$.

Désignons par $\overline{\mathrm{E}}$ l'ensemble-image ayant pour support à chaque cote de $[a, b]$, l'ensemble $\mathrm{E}(\delta)$; par $c(\mathrm{P})$ une fonction *complémentaire* de $f(\mathrm{P})$, ayant, par définition, pour image I_0, complémentaire de I par rapport à l'ensemble-image $\overline{\mathrm{E}}$; par $w_e(\mathrm{P})$ et $w_i(\mathrm{P})$ les fonctions caractéristiques de la mesurabilité verticale de $c(\mathrm{P})$.

Considérons une suite normale S′ de divisions s'_q de l'intervalle-cote $[a, b]$ en q intervalles $\delta'_t = (l'_t, l'_{t+1})$ et désignons par E'_t, E''_t les

([20]) *Cf.* ALEX. FRODA, *op. cit.*, (II), 1937, p. 77.

ensembles-supports

$$E'_t = E[l'_t < w_e(P) \leqq l'_{t+1}] \qquad \text{et} \qquad E''_t = E[l'_t < w_i(P) \leqq l'_{t+1}].$$

Les E'_t sont disjoints deux à deux, les E''_t sont aussi disjoints deux à deux.

Soient I'_t, I''_t les ensembles-images des valeurs que $c(P)$ prend sur E'_t, respectivement sur E''_t. Il y a

$$I_0 = \Sigma I'_t = \Sigma I''_t,$$

les I'_t étant disjoints deux à deux, les I''_t sont aussi disjoints deux à deux.

On démontre la première égalité énoncée en procédant comme suit :

On attache à chaque ensemble-image I''_t un noyau d'égale mesure χ''_t, de même à I_0 on attache un noyau d'égale mesure χ. Désignons par H''_t et H les supports des χ''_t et χ respectivement.

Soit $[\alpha, \beta]$ le plus petit intervalle-cote contenant les valeurs que prend $c(P)$ sur E. Par définition de $[a, b]$, $\text{mes}[a, b] = \text{mes}[\alpha, \beta] + \varepsilon$ et chaque ensemble vertical W des valeurs que prend $c(P)$ en un point $\mathfrak{P}$ de E contient deux petits intervalles-cotes δ' et δ'', tels que $\text{mes}\,\delta' + \text{mes}\,\delta'' = \varepsilon$ et ces intervalles ne varient pas avec le point $\mathfrak{P}$ sur E.

Il s'ensuit que si A désigne un ensemble-support mesurable, de mesure non nulle, contenu en E, il y a

$$m_i I \overline{A} > 0,$$

car si $J_{\delta'}$, $J_{\delta''}$ sont des ensembles-images constitués par les points des δ' et δ'', il y a, en vertu de (V),

$$\text{mes}\, J_{\delta'} \overline{A} = \text{mes}\,\delta' \,\text{mes}\, A; \qquad \text{mes}\, J_{\delta''} \overline{A} = \text{mes}\,\delta'' \,\text{mes}\, A,$$

donc, comme $I > J_{\delta'} + J_{\delta''}$ et que $\text{mes}\, A > 0$,

$$m_i I \overline{A} \geqq \text{mes}\, J_{\delta'} \overline{A} + \text{mes}\, J_{\delta''} \overline{A} = \varepsilon \,\text{mes}\, A > 0.$$

La même propriété appartient aussi aux I''_t, lorsque $m_i E''_t > 0$, car si $A < E''_t$, il y a (A étant mesurable et de mesure non nulle),

$$I \overline{A} = I(\overline{E''_t A}) = I \overline{E''_t}\, \overline{A} = I''_t \overline{A},$$

donc, en vertu du résultat obtenu,

$$m_i \mathrm{I}''_l \, \mathrm{A} > 0.$$

Donc, d'une part, H est aussi un noyau d'égale mesure de E, c'est-à-dire $\operatorname{mes} \mathrm{H} = \operatorname{mes} \mathrm{E}$, d'autre part, H''_l est un noyau d'égale mesure de E''_l, c'est-à-dire $\operatorname{mes} \mathrm{H}''_l = m_i \mathrm{E}''_l$, chaque fois que $m_i \mathrm{E}''_l > 0$ (VII).

Mais, lorsque $m_i \mathrm{E}''_l = 0$, l'on a aussi $\operatorname{mes} \mathrm{H}''_l = 0$, puisque de $\chi''_l < \mathrm{I}''_l$ l'on déduit $\mathrm{H}''_l < \mathrm{E}''_l$, de sorte qu'aussi, dans ce cas, H''_l est un noyau d'égale mesure de E''_l.

Soit $\overline{\mathrm{H}}''_l$ l'ensemble-image au support H''_l à chaque cote de $[a, b]$ (8).

Il est clair que $\chi \overline{\mathrm{H}}''_l$ se projette suivant un ensemble-support $\mathrm{H}\mathrm{H}''_l < \mathrm{H}''_l$, tandis que $\chi \overline{\mathrm{H}}''_l < \chi$.

On voit que l'ensemble-support de $(\chi - \Sigma \chi \overline{\mathrm{H}}''_l)$ est contenu en $(\mathrm{E} - \Sigma \mathrm{H}''_l)$.

Il en résulte (V) *a fortiori* que

$$\operatorname{mes}(\chi - \Sigma \chi \mathrm{H}''_l) \leqq (\mathrm{B} + \varepsilon) \operatorname{mes}(\mathrm{E} - \Sigma \mathrm{H}''_l).$$

Il s'ensuit

$$\operatorname{mes} \chi - \operatorname{mes} \Sigma \chi \mathrm{H}''_l) \leqq (\mathrm{B} + \varepsilon) \operatorname{mes} \mathrm{E} - (\mathrm{B} + \varepsilon) \operatorname{mes} \Sigma \mathrm{H}''_l.$$

Or, $\operatorname{mes} \chi = m_i \mathrm{I}_0$, donc l'inégalité devient

$$(\mathrm{B} + \varepsilon) \operatorname{mes} \mathrm{E} - m_i \mathrm{I}_0 \geqq (\mathrm{B} + \varepsilon) \operatorname{mes} \Sigma \mathrm{H}''_l - \operatorname{mes} \Sigma (\chi \overline{\mathrm{H}}''_l).$$

Mais il y a, d'une part,

$$m_i \mathrm{I}_0 + m_e \mathrm{I} = (\mathrm{B} + \varepsilon) \operatorname{mes} \mathrm{E} = \operatorname{mes} \overline{\mathrm{E}},$$

par suite de la définition de I_0, puisque $(\mathrm{B} + \varepsilon) \operatorname{mes} \mathrm{E} = \operatorname{mes} \overline{\mathrm{E}}$ (V). D'autre part, on peut remarquer que la projection de $\chi \overline{\mathrm{H}}''_l$ étant contenue dans l'ensemble-support H''_l et puisque l'ensemble vertical W en chaque point de $\chi < \mathrm{I}_0$ est tel que $m_i \mathrm{W} \leqq l'_{l+1}$, il en résulte (IV) *a fortiori* que

$$\operatorname{mes} \chi \overline{\mathrm{H}}''_l \leqq l'_{l+1} \operatorname{mes} \mathrm{H}''_l \qquad \text{et donc} \qquad \operatorname{mes} \Sigma \chi \overline{\mathrm{H}}''_l \leqq \Sigma \, l'_{l+1} \operatorname{mes} \mathrm{H}''_l.$$

Par suite, comme

$$\operatorname{mes} \Sigma \mathrm{H}''_l = \Sigma \operatorname{mes} \mathrm{H}''_l,$$

il y a

$$m_e \mathrm{I} \geqq (\mathrm{B} + \varepsilon) \Sigma \operatorname{mes} \mathrm{H}''_l - \Sigma \, l'_{l+1} \operatorname{mes} \mathrm{H}''_l = \Sigma [(\mathrm{B} + \varepsilon) - l''_{l+1}] \operatorname{mes} \mathrm{H}''_l.$$

Or

$$\operatorname{mes} H''_t = m_i E''_t,$$

et l'on a

$$v_e(P) + w_i(P) = \operatorname{mes}[a, b] = B + \varepsilon,$$

donc l'on peut écrire, en posant

$$l_t = (B + \varepsilon) - l'_{t+1}; \qquad l_{t+1} = (B + \varepsilon) - l'_t;$$

$$E''_t = E[(B + \varepsilon) - l'_{t+1} \leqq v_e(P) < (B + \varepsilon) - l'_t] = E[l_t \leqq v_e(P) < l_{t+1}],$$

et, avec cette nouvelle signification de E''_t, on aura

$$m_e I \geqq \Sigma\, l_t\, m_i E''_t.$$

Or, à la suite normale S' de divisions s'_q de $[a, b]$ en intervalles $\delta'_t = (l'_t, l'_{t+1})$ correspond, par les égalités que l'on vient d'écrire, une suite normale S de divisions s_q de $[a, b]$ en intervalles $\delta_t = (l_t, l_{t+1})$ et, à la limite, on a

$$m_e I \geqq \int_E^i v_e(P)\, dP.$$

C. Q. F. D.

Pour la démonstration de la seconde inégalité, on procède comme suit :

On attache à chaque ensemble-image I'_t une enveloppe d'égale mesure Γ'_t, de même à I_0, on attache une enveloppe d'égale mesure Γ_0. Désignons par G'_t et G les supports des Γ'_t et Γ, respectivement.

On a vu (VI), que l'on peut choisir Γ'_t et Γ enveloppes d'égale mesure des I'_t et I_0 respectivement, de manière que leurs supports G'_t et G respectivement, soient aussi des enveloppes d'égale mesure des E'_t et E, respectivement, support des I'_t et I_0 respectivement.

Nous nous appuierons aussi sur la proposition antérieure (VIII).

Puisque $I_0 = \Sigma I'_t$, il y a [21],

$$m_e I_0 = \Sigma\, m_e I'_t - \gamma[\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots, \Gamma'_q),$$

où, par définition,

$$\gamma(\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots, \Gamma'_q) = \Sigma \operatorname{mes} \Gamma'_t\, (\Gamma'_1 + \Gamma'_2 + \ldots + \Gamma'_{t-1}),$$

la somme étant étendue aux valeurs de t, de 2 à q.

---

[21] ALEX. FRODA, *op. cit.*, 1936, p. 88.

Mais le support de $\Gamma'_t(\Gamma'_1 + \Gamma'_2 + \ldots + \Gamma'_{t-1})$ est contenu dans l'ensemble-support $G'_t\,(G'_1 + G'_2 + \ldots + G'_{t-1})$ puisque chaque Γ'_t a G'_t pour support. Or, l'ensemble-cote des points de Γ'_t est contenu en $[a,\, b]$, quel que soit t. Donc, en vertu d'un résultat antérieur (V), on a, *a fortiori*,

$$\operatorname{mes}\Gamma'_t\,(\Gamma'_1 + \Gamma'_2 + \ldots + \Gamma'_q) \leqq (B + \varepsilon)\operatorname{mes} G'_t\,(G'_1 + G'_2 + \ldots + G'_q),$$

et donc, en sommant, il y a

$$\gamma(\Gamma'_1,\, \Gamma'_2,\, \ldots,\, \Gamma'_q) \leqq (B + \varepsilon)\,\gamma(G'_1,\, G'_2,\, \ldots,\, G'_q).$$

Or, d'autre part, on a (22), puisque $E = \Sigma E'_t$,

$$\operatorname{mes} E = \Sigma\, m_e E'_t - \gamma(G'_1,\, G'_2,\, \ldots,\, G'_q).$$

Il s'ensuit

$$\lambda(G'_1,\, G'_2,\, \ldots,\, G'_q) = (\Sigma\, m_e E'_t) - \operatorname{mes} E,$$

donc, avec ce qui précède,

$$\begin{aligned} m_e I_0 &\geqq \Sigma\, m_e I'_t - (B + \varepsilon)\gamma(G'_1,\, G'_2,\, \ldots,\, G'_q) \\ &= \Sigma\, m_e I'_t - (B + \varepsilon)\Sigma\, m_e E'_t + (B + \varepsilon)\operatorname{mes} E. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$m_i I = (B + \varepsilon)\operatorname{mes} E - m_e I_0 \leqq (B + \varepsilon)\Sigma\, m_e E'_t - \Sigma\, m_e I'_t.$$

Or, en chaque point de E'_t, l'ensemble vertical W de $c(P)$ a la mesure extérieure $m_e W = \varpi_e(P) \geqq l'_t$, et, en vertu de (IV), il y a

$$m_e I'_t \geqq l'_t\, m_e E'_t.$$

Donc

$$m_i I \leqq (B + \varepsilon)\Sigma\, m_e E'_t - \Sigma\, l'_t m_e E'_t = \Sigma[(B + \varepsilon) - l'_t]\, m_e E'_t.$$

Posons, comme ci-dessus,

$$l_t = (B + \varepsilon) - l'_{t+1}; \qquad l_{t+1} = (B + \varepsilon) - l'_t;$$

on aura, puisque

$$v_i(P) + \varpi_e(P) = \operatorname{mes}[a,\, b] = B + \varepsilon,$$

une nouvelle signification de E'_t

$$E'_t = E[(B + \varepsilon) - l'_{t+1} \leqq v_i(P) \leqq (B + \varepsilon) - l'_t] = E[l_t \leqq v_i(P) < l_{t+1},$$

et

$$m_i I \leqq \Sigma\, l_t\, m_e E'_t.$$

---

(22) *Ibid.*, p. 88.

Il s'ensuit qu'à la suite normale S' de divisions s'_q de $[a, b]$ en intervalles $\delta'_t = (l'_t, l'_{t+1})$ correspond, par les égalités ci-dessus, une suite normale S de divisions s_q de $[a, b]$ en q intervalles $\delta_t = (l_t, l_{t+1})$ et que l'inégalité démontrée devient, à la limite,

$$m_i \mathrm{I} \leqq \int_{\mathrm{E}}^{e} v_i(\mathrm{P})\, d\mathrm{P}.$$

C. Q. F. D.

11. Conséquences. — Notons quelques conséquences directes simples des deux dernières propositions.

Appelons *verticalement mesurable* une fonction multiforme ou uniforme $f(\mathrm{P})$ bornée, telle que l'on ait, en chaque point P, $v_e(\mathrm{P}) = v_i(\mathrm{P})$ et de plus que la fonction caractéristique unique $v(\mathrm{P})$ de la mesurabilité verticale $v(\mathrm{P}) = v_e(\mathrm{P}) = v_i(\mathrm{P})$ soit mesurable (en support).

Il y a, avec l'intégrale prise au sens de Lebesgue,

$$m_e \mathrm{I} \geqq \int_{\mathrm{E}} v(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} \geqq m_i \mathrm{I}.$$

Un exemple effectif du cas, où les signes d'égalité doivent être pris au sens strict, est celui de $f(\mathrm{P})$ définie sur l'intervalle-support $[0, 1]$ et égale à $[0, 1]$ en chaque point d'un ensemble E non mesurable et à $[-1, 0]$ en chaque point de $c\mathrm{E}$.

Alors

$$v(\mathrm{P}) = 1; \qquad m_e \mathrm{I} = m_e \mathrm{E} + m_e c\mathrm{E}; \qquad m_i \mathrm{I} = m_i \mathrm{E} + m_i c\mathrm{E}.$$

Donc

$$m_e \mathrm{E} + m_e c\mathrm{E} > 1 > m_i \mathrm{E} + m_i c\mathrm{E},$$

ce qui est évident, E étant non mesurable.

Lorsque $f(\mathrm{P})$ est une fonction uniforme, $v(\mathrm{P}) = 0$, donc *toute fonction uniforme est verticalement mesurable*. De plus, puisque $\int v(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} = 0$, il résulte aussi $m_i \mathrm{I} = 0$. Donc, *la mesure intérieure de l'image d'une fonction uniforme est nulle*, même lorsqu'elle n'est pas mesurable.

D'autre part, *si l'image* I *d'une fonction bornée* $f(\mathrm{P})$ *multiforme ou uniforme est mesurable*, *tandis que* $f(\mathrm{P})$ *est verticalement mesurable*, *il y a*

$$\operatorname{mes} \mathrm{I} = \int v(\mathrm{P})\, d\mathrm{P}.$$

Il est clair d'ailleurs que I peut être mesurable, tandis que, du moins sur un ensemble-support de mesure nulle, l'on puisse avoir des points-supports P, où $v_e(\mathrm{P}) > v_i(\mathrm{P})$, car il n'y a qu'à modifier un I, donné comme image d'une fonction $f(\mathrm{P})$ verticalement mesurable, sur un ensemble-support de mesure nulle, ce qui n'altère pas la mesurabilité de I, $f(\mathrm{P})$ cessant toutefois d'être verticalement mesurable.

Appelons *verticalement quasi mesurable* une fonction multiforme ou uniforme $f(\mathrm{P})$, telle que les deux fonctions caractéristiques de la mesurabilité verticale $v_e(\mathrm{P})$ et $v_i(\mathrm{P})$ soient mesurables (en support).

Il y a

$$m_e \mathrm{I} \geqq \int v_e(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} \geqq \int v_i(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} \geqq m_i \mathrm{I}.$$

On voit aisément que *si l'image* I *d'une fonction bornée* $f(\mathrm{P})$ *multiforme ou uniforme est mesurable, tandis que* $f(\mathrm{P})$ *est verticalement quasi mesurable, il y a, sauf au plus sur un ensemble de mesure nulle de points-supports* P,

$$v_e(\mathrm{P}) = v_i(\mathrm{P}) \qquad \text{et donc} \qquad \operatorname{mes} \mathrm{I} = \int_{\mathrm{E}} v_e(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} = \int_{\mathrm{E}} v_i(\mathrm{P})\, d\mathrm{P}.$$

En effet, on a, en particulier,

$$\int [v_e(\mathrm{P}) - v_i(\mathrm{P})]\, d\mathrm{P} \leqq m_e \mathrm{I} - m_i \mathrm{I},$$

et, comme $[v_e(\mathrm{P}) - v_i(\mathrm{P})] \geqq 0$, l'on voit que la fonction $[v_e(\mathrm{P}) - v_i(\mathrm{P})]$ ne peut être différente de zéro que sur un ensemble de mesure nulle, au plus. On pourrait appeler une telle fonction *verticalement presque mesurable*, puisqu'elle possède un ensemble vertical, mesurable presque partout.

Enfin, une fonction $f(\mathrm{P})$ pourrait être telle que l'on ait simplement $v_e(\mathrm{P}) = v_i(\mathrm{P}) = v(\mathrm{P})$ en chaque point P, $v(\mathrm{P})$ étant non mesurable. Elle pourrait être appelée *également non mesurable verticalement.*

Tel serait le cas de $f(\mathrm{P})$ égale verticalement à $[0, 1]$ en chaque point d'un ensemble non mesurable E, nulle en cE. La fonction $v(\mathrm{P})$ est égale à 1 sur E; à zéro sur cE, elle est non mesurable.