BULLETIN DE LA S. M. F.

S. WACHS

Sur quelques propriétés des transformations pseudo-conformes avec un point frontière invariant

Bulletin de la S. M. F., tome 68 (1940), p. 177-198
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1940__68__177_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES TRANSFORMATIONS PSEUDO-CONFORMES AVEC UN POINT FRONTIÈRE INVARIANT;

PAR M. S. WACHS

(Paris).

1. Préliminaires. — On sait que la démonstration du théorème de M. Julia sur les transformations conformes changeant un cercle $\mathcal{B}^2$ en un domaine $\mathcal{G}^2 \subset \mathcal{B}^2$ et laissant invariant un point de la frontière est basée sur le lemme de Schwarz. La généralisation immédiate de ce lemme et du théorème de Riemann-Poincaré, qui permet d'étendre le théorème de M. Julia au cas d'un domaine simplement connexe quelconque, n'est pas possible dans la théorie des fonctions de deux variables complexes.

M. Bergmann a introduit dans la théorie des transformations pseudo-conformes (que nous désignerons désormais par abréviation par T. P.), c'est-à-dire des transformations bi-univoques par paire de fonctions de deux variables complexes, quelques notions utiles et indiqué des procédés qui peuvent dans plusieurs problèmes remplacer jusqu'à un certain point les théorèmes cités de la théorie des fonctions d'une variable complexe. En outre cette méthode permet d'étudier l'allure des T.P. changeant un domaine $\mathcal{B}$ en un domaine $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ et laissant invariant un point de la frontière. C'est à l'étude de ce problème que le présent travail est consacré ([1]).

2. Notations. — Par $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2, i = \sqrt{-1})$, nous désignerons l'une ou l'autre de deux variables complexes, $x_k\, y_k$ étant les coordonnées du point $\{z_1, z_2\}$ rapportées à l'espace euclidien-réel à quatre dimensions. Le conjugué de z_k sera

([1]) Les résultats de ce mémoire ont été exposés aux *C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1938, p. 1352-1355.

désigné par $\bar{z}$. Par Φ_z et $\Phi_{\bar{z}}$ nous entendons

$$\Phi_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right); \qquad \Phi_{\bar{z}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right).$$

Nous désignerons dans la suite les variétés par des caractères de ronde, l'indice supérieur indiquant la dimension de la variété; sauf avis contraire, nous supposerons toujours nos domaines univalents et entièrement situés à distance finie. Enfin, deux domaines seront dits équivalents l'un à l'autre, s'il existe une T. P. changeant l'un en l'autre.

3. **Quelques résultats de M. Bergmann** ([2]). — Nous allons résumer ici les principaux résultats de M. Bergmann sur lesquels sont basées nos considérations ultérieures.

M. Bergmann montre que, pour chaque domaine $\mathcal{B}$, il existe une fonction définie intrinséquement, dite « fonction noyau » du domaine, $K_{\mathcal{B}}(z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2)$, et que cette fonction possède des propriétés très utiles; $K_{\mathcal{B}}$ est une fonction réelle analytique des quatre variables z_1, z_2, $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$.

En posant

$$ds^2_{\mathcal{B}}(z_1 z_2) = \Sigma T_{m\bar{n}}\, dz_m\, d\bar{z}_n,$$

où

$$T_{m\bar{n}} = \frac{\partial^2}{\partial z_m \partial \bar{z}_n}\left[\operatorname{Log} K_{\mathcal{B}}(z\bar{z})\right],$$

on introduit une métrique hermitienne définie positive invariante par rapport aux T.P. (*voir* B_1, p. 5). De plus, M. Bergmann a

---

([2]) Pour plus de détails, on se reportera aux mémoires suivants de M. Bergmann qui seront désignés respectivement par B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 dans la suite du texte :

B_0. *Ueber Hermitesche unendliche Formen die zu einem Bereich gehören...* (*Math. Zeitsch.*, t. 29, 1929, p. 640-677).

B_1. *Ueber die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande* (*J. de Crelle*, t. 169, 1932, p. 1-40; t. 172, 1934, p. 89-128).

B_2. *Sur quelques propriétés des transformations par un couple de fonctions de deux variables complexes* [*Rendiconti D. R. A. Nazion. dei Lincei*, (6 *a*), t. 19, 1934, p. 474-478].

B_3. *Zur Theorie von pseudokonformen Abbildungen* (*Recueil mathématique*, 1, 43, 1936, p. 78-96).

B_4. *Ueber einige Abschatzungen bei pseudokonformen Albildungen* (*Comptes rendus de l'Acdadémie des Sciences de l'U. R. S. S.*, t. 16, 1937, p. 11-14).

montré que plusieurs grandeurs caractéristiques pour la métrique pouvaient se représenter comme des combinaisons linéaires de valeurs minima λ de l'intégrale $\int_{\mathcal{B}} |h|^2 \, d\omega$, $d\omega = dx_1 \, dx_2 \, dy_1 \, dy_2$, où h est une fonction de la classe $E(\mathcal{B})$ des fonctions dont le carré du module est sommable dans $\mathcal{B}$ et assujetties à des conditions auxiliaires appropriées. Par exemple, on demandera que h et ses dérivées prennent des valeurs données en un point $t \subset \mathcal{B}$. D'autre part, si $\lambda_{\mathcal{B}}$ et $\lambda_{\mathcal{G}}$ sont respectivement les valeurs minima des intégrales, $\int_{\mathcal{B}} |h|^2 \, d\omega$ et $\int_{\mathcal{G}} |h|^2 \, d\omega$, avec les mêmes conditions auxiliaires, en un point t, $t \subset \mathcal{B}$, $t \subset \mathcal{G}$ et si $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ on a évidemment $\lambda_{\mathcal{B}} \leqq \lambda_{\mathcal{G}}$, d'où l'on obtient des inégalités correspondantes pour les grandeurs caractéristiques de la métrique (*voir* B_1, B_2 et B_4).

Il est clair que l'étude de ces questions est plus simple dans certains domaines que dans des domaines tout à fait généraux; il y a des questions, comme celles dont nous allons nous occuper, où l'on considère l'allure des T.P. seulement au voisinage d'un point invariant de la frontière. M. Bergmann a montré que, pour l'étude locale des fonctions ou des T.P., on pouvait remplacer le voisinage de ce point, considéré comme appartenant à $\mathcal{B}$, par le voisinage du même point regardé comme appartenant à un domaine plus simple (méthode des domaines de comparaison, *voir* B_1, p. 13). Par cette méthode, M. Bergmann a été conduit à classer les points frontières d'après les domaines de comparaison qui leur sont attachés.

Nous étudierons ici les points dits du troisième degré pour lesquels les domaines de comparaison sont équivalents à des hypersphères.

Disons enfin qu'il est souvent nécessaire de connaître un domaine de comparaison $\mathcal{A}$ contenant entièrement $\mathcal{B}$ (appelé domaine de comparaison extérieur), et un domaine de comparaison $\mathcal{J}$ contenu tout entier dans $\mathcal{B}$ (dit domaine de comparaison intérieur).

4. Étude de la métrique attachée à une hypersphère. — Partons de l'hypersphère $E(|z_1|^2 + {}^1|z_2|^2 - 1 \leqq 0)$. La fonction noyau de ce domaine est

$$K(z\bar{z}) = \frac{2}{\pi^3[1 - |z_1|^2 - |z_2|^2]^3},$$

on déduit immédiatement la métrique

$$ds^2 = \frac{3}{[1 - |z_1|^2 - |z_2|^2]^2}$$
$$\{ (1-|z_2|^2)\, dz_1\, d\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_1\, dz_1\, dz_2 + z_1\bar{z}_2\, dz_2\, d\bar{z}_1 + (1-|z_1|^2)\, dz_2\, d\bar{z}_2 \}.$$

Cherchons alors la distance de deux points $A(z_1^{(0)} z_2^{(0)})$, $B(z_1^{(1)} z_2^{(1)})$. Il suffit de calculer la distance de l'origine $O(o, o)$ au point $C(X, o)$ où X est réel. En effet, si l'on connaît cette distance on connaît aussi celle de C à un point $P(z_1, z_2)$ quelconque, car une rotation complexe convenable, qui n'est autre qu'une T.P. laissant fixe l'origine, amènerait le point P au point C, et l'on aurait : $D(OP) = D(OC)$ (D désignant la distance mesurée avec la métrique) puisque la métrique est invariante par rapport aux T.P. Cela étant, une autre T.P. convenable changera le point A dans le point O et le point B dans le point P, et l'on aura

$$D(AB) = D(OP) = D(OC).$$

Calculons $D(OC)$; on a

$$ds^2 = 3[1 - x^2]^{-2} dx^2,$$

d'où

$$D(OC) = \int^{X} \sqrt{3}\,(1 - x^2)^{-1} dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{1+X}{1-X}\right).$$

La rotation complexe

$$z_1^* = e^{-i\varphi_1} z_1 \cos\theta + e^{-i\varphi_2} z_2 \sin\theta,$$
$$z_2^* = e^{-i\delta_1} z_1 \sin\theta + e^{-i\delta_2} z_2 \cos\theta,$$

où l'on a posé

$$\varphi_1 = \arg\zeta_1; \qquad \varphi_2 = \arg\zeta_2; \qquad \operatorname{tang}\theta = \left|\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right|;$$
$$-\delta_1 + \varphi_1 = -\delta_2 + \varphi_2$$

change le point $P(\zeta_1 \zeta_2)$ dans le point $C\left(\sqrt{|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2}, o\right)$ et laisse invariant O. Appliquons cette rotation aux points A et B, le point A devient le point $A^*\left(\sqrt{|z_1^{(0)}|^2 + |z_2^{(0)}|^2}, o\right)$ et B le point $B^*(z_1^*, z_2^*)$, et l'on a $D(AB) = D(A^*B^*)$. Appliquons maintenant l'homographie

$$\zeta_1 = \frac{a_1 z_1^* + a_2 z_2^* + a_3}{c_1 z_1^* + c_2 z_2^* + c_3},$$

$$\zeta_2 = \frac{b_1 z_1^* + b_2 z_2^* + b_3}{c_1 z_1^* + c_2 z_2^* + c_3},$$

où les a, b et c sont choisis tels que cette homographie laisse invariante l'hypersphère et amène le point A à l'origine. Un calcul sans difficultés montre qu'il suffit de prendre

$$a_1 = a_3 = b_2 = c_2 = 0; \qquad b_1 = c_3 = 1,$$

$$c_1 = b_3 = -a_2 = -\sqrt{1 - |z_1^{(0)}|^2 - |z_2^{(0)}|^2}.$$

On arrive ainsi à la formule suivante pour la distance des deux points A et B

$$\text{(4.1)} \qquad D(AB) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Log} \frac{1 + \mathcal{H}(z^{(0)}z^{(1)})}{1 - \mathcal{H}(z^{(0)}z^{(1)})},$$

avec

$$\text{(4.2)} \qquad \mathcal{H}(z^{(0)}z^{(1)}) = \frac{\sqrt{|z_1^{(1)} - z_1^{(0)}|^2 + |z_2^{(1)} - z_2^{(0)}|^2 - |z_1^{(0)}z_2^{(1)} - z_1^{(1)}z_2^{(0)}|^2}}{|1 - \overline{z_1^{(0)}}z_1^{(1)} - \overline{z_2^{(0)}}z_2^{(1)}|}$$

[la notation $(m.n)$ désigne la formule m du § n.]

5. Une évaluation pour les T. P. d'une hypersphère en un domaine partiel. — Le point de départ de nos considérations ultérieures sera le résultat suivant de M. Bergmann (B_4) :

Soit **V**

$$w_k = w_k(z_1, z_2) \qquad (k = 1, 2)$$

une T.P. changeant un domaine $\mathcal{H}$, équivalent à une hypersphère, en un domaine partiel $\mathcal{J} \subset \mathcal{H}$, on a, entre la distance non euclidienne de deux points quelconques A et B du domaine $\mathcal{H}$ et la distance non euclidienne de leurs images A^* et B^*, l'inégalité

$$\text{(5.1)} \qquad D_{\mathcal{H}}(A^*B^*) \leqq D_{\mathcal{H}}(AB)$$

(la notation $D_{\mathcal{H}}$ indiquant la distance mesurée avec la métrique relative au domaine $\mathcal{H}$).

Pour la commodité du lecteur nous répéterons ici la démonstration de cette importante proposition. A cet effet nous allons établir le lemme suivant :

Si $\mathbf{W}$ est une T.P. changeant l'hypersphère $\mathcal{K}: E(|z_1|^2+|z_2|^2<1)$ en un domaine partiel $\mathcal{J}\subset\mathcal{K}$ et laissant invariant le centre de l'hypersphère $\mathcal{K}$, chaque hypersphère $\mathcal{K}_R E(|z_1|^2+|z_2|^2<R^2)$, R étant suffisamment petit, est représentée sur un domaine $\mathcal{J}_R\subset\mathcal{K}_R$, c'est-à-dire dans le cas présent ([3]) :

$$(5.2)\qquad |w_1(z_1 z_2)|^2+|w_2(z_1 z_2)|^2\leqq |z_1|^2+|z_2|^2,$$

car deux rotations analytiques nous permettent de passer respectivement des points (z_1, z_2) et (w_1, w_2) aux points

$$\left(Z_1=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2},\ o\right) \qquad \text{et} \qquad \left(W_1=\sqrt{|w_1|^2+|w_2|^2},\ o\right).$$

La fonction w_1 $(Z_1\ o)$ possède manifestement les propriétés suivantes pour $|z_1|\leqq 1$,

$$|W_1(Z_1, o)|\leqq 1 \qquad \text{et} \qquad W_1(oo)=o,$$

par conséquent on peut lui appliquer le lemme de Schwarz

$$|W_1(Z_1, o)|\leqq Z_1,$$

ce qui établit notre lemme.

Si nous avons une représentation quelconque de $\mathcal{K}$ sur un domaine $\mathcal{B}$, nous pouvons trouver deux transformations :

$$\mathbf{Z}=[Z_k(z_1, z_2)] \qquad \text{et} \qquad \mathbf{W}^*=[W_k(w_1, w_2)] \qquad (k=1, 2)$$

qui changent respectivement les points (z_1, z_2) et (w_1, w_2) dans le point (o,o); la transformation $\mathbf{U}=\mathbf{W}^*\mathbf{V}\mathbf{Z}^{-1}$ laisse invariant le centre. Or, dans les transformations $\mathbf{V}$ et $\mathbf{Z}$ la longueur non euclidienne reste invariante, et comme la distance non euclidienne, $ds_{\mathcal{K}}(Z_1 Z_2)$, du point $(dz_1 dz_2)$ au centre est $c\sqrt{|d_{Z_1}|^2+|d_{Z_2}|^2}$, et de même $ds_{\mathcal{K}}(W_1, W_2)=C\sqrt{|dW_1|^2+|dW^2|^2}$, on a,

([3]) Pour cette inégalité, *voir* aussi K. Reinhardt, *Ueber Abbildungen durch analytische Funktionen zweier Veränderlichen* (*Math. Annalen*, t. 33, 1921, p. 211-255).

d'après (5.2),

$$(5.3)\qquad ds^2_{\mathcal{K}}(w_1, w_2) = C^2(|dW_1|^2 + |dW_2|^2) \leqq c^2(|dZ_1|^2 + |dZ_2|^2) = ds^2_{\mathcal{K}}(z_1, z_2).$$

Une T. P. laissant invariant l'élément linéaire non euclidien, (5.3) reste vrai, si l'on remplace $\mathcal{K}$ par un domaine équivalent à une hypersphère. Pour obtenir l'inégalité (5.1), il suffit d'intégrer la relation (5.3) le long de la géodésique de $\mathcal{H}$ joignant les deux points A et B.

6. Théorème I. — *Étant donné un domaine $\mathcal{B}$, un point* Q *du troisième ordre sur sa frontière et une* T. P. $\mathbf{W}_Q$

$$\mathbf{W}_Q = [w_k = w_k(z_1, z_2)] \qquad (k = 1, 2)$$

changeant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ et laissant Q *invariant, s'il existe une suite dénombrable de points $\{z^{(n)}\}$ convergeant vers* Q *et telle que le rapport*

$$(6.1)\qquad L_1^{(n)} = \frac{F(w_1^{*(n)} w_2^{*(n)})}{F(z_1'^{*(n)} z_2'^{*(n)})}$$

tende vers une limite finie et positive Γ_1 lorsque n augmente indéfiniment, on a pour tout point $\{z\}$, situé dans un voisinage de Q, $\mathbf{V}$(Q), *suffisamment petit mais indépendant de* $\mathbf{W}$,

$$(6.2)\qquad \Gamma_1 B(w_1^*, w_2^*) \geqq B(z_1'^*, z_2'^*),$$

en posant

$$(6.3)\qquad \begin{cases} B(u_1 u_2) = \dfrac{F(u_1 u_2)}{|u_1^2|}; \\ F(u_1 u_2) = \rho_1(u_1 + \overline{u_1}) - |u_1|^2 - |u_2|^2; \end{cases}$$

$$(6.4)\qquad \begin{cases} w_1^* = w_1\ (1 + \alpha_2 w_1)^{-1}, & w_2^* = w_2\ (1 + \beta_2 w_1)^{-1}; \\ z_1'^* = \rho_2 z_1(\rho_1 + a\ z_1)^{-1}, & z_2'^* = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} z_2(1 + \beta_1 z_1)^{-1} \end{cases}$$

avec $a = -\alpha_1\rho_1$. Dans ces formules z_1 et z_2 désignent les coordonnées normales du point $\{z\}$, c'est-à-dire que dans ce système le point Q *est l'origine et $z_1 + \overline{z}_1$ la normale intérieure à la frontière du domaine $\mathcal{B}$; les lettres α, β et ρ, avec ou sans indices, représentent ici, comme dans tout ce qui va suivre, des constantes ne dépendant que du domaine $\mathcal{B}$.*

Soient $\mathcal{A}$ un domaine de comparaison extérieur pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{I}$ un domaine de comparaison intérieur, tous deux équivalents à une hypersphère, puisque par hypothèse Q est du troisième ordre. Soit **T** une T. P. changeant $\mathcal{A}$ en $\mathcal{I}$, alors la T. P. $\mathbf{W}_1 = \mathbf{WT}$ change $\mathcal{A}$ en $\mathcal{L} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Appliquons alors l'inégalité (5.1)

$$D_{\mathcal{A}}(A'B') \leqq D_{\mathcal{A}}(AB). \tag{6.5}$$

En prenant convenablement A et B on arrive à l'inégalité de l'énoncé; c'est ce que va nous montrer le calcul.

On sait que la transformation (*voir* B_1, p. 98)

$$(\mathbf{T}_1) \begin{cases} Z'_1 = z_1(1+\alpha_1 z_1)^{-1}; \\ Z'_2 = z_2(1+\alpha_1 z_1)\,[1+(\alpha_1+\beta_1)z_1]^{-1} \end{cases} \tag{6.6}$$

change l'hypersphère

$$|z_1-\rho_2|^2+|z_2|^2<\rho_2^2 \tag{6.7}$$

dans le domaine de comparaison intérieur $\mathcal{I}$, et que la transformation

$$(\mathbf{T}_2) \quad Z''_1 = z_1(1-\alpha_2 z_1)^{-1}; \qquad Z''_2 = z_2[1+(\beta_2-\alpha_2)z_1](1-\alpha_2 z_1)^{-1} \tag{6.8}$$

change l'hypersphère

$$|z_1-\rho_1|^2+|z_2|^2<\rho_1^2 \tag{6.9}$$

dans le domaine de comparaison $\mathcal{A}$.

La transformation

$$(\mathbf{T}_3) \quad z_1^* = \frac{\rho_1}{\rho_2} z_1; \qquad z_2^* = \frac{\rho_1}{\rho_2} z_2 \tag{6.10}$$

change $\mathcal{H}_2$ en $\mathcal{H}_1$. Donc la transformation $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2^{-1}$

$$\begin{cases} z_1^{**} = \rho_1 z_1(\rho_2+a'_4 z_1)^{-1}; \\ z_2^{**} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} z_2(1+\beta_2 z_1)^{-1}(\rho_2+a'_4 z_1)(\rho_2+a'_3 z_1)^{-1} \end{cases} \tag{6.11}$$

change $\mathcal{A}$ en $\mathcal{I}$; on a posé pour simplifier l'écriture

$$a'_3 = a'_4+\beta_1\rho_1 \quad \text{et} \quad a'_4 = \alpha_1\rho_1+\alpha_2\rho_2.$$

Cela étant, considérons la T. P. **W** dans le voisinage V(Q), de Q, suffisamment petit pour que $V(Q) \subset \mathcal{I}$. Si l'on convient de représenter par $\{w^{(k)}\}$ l'homologue du point $\{z^{(k)}\}$, on voit que, pour obtenir le point $\{w^{(k)}\}$ après la transformation $\mathbf{W}_1$, l'on doit partir du point $\mathbf{T}^{-1}\{z^{(k)}\}$. Pour avoir la distance des points $\{\zeta_h^{(1)}\}$ et $\{\zeta_h^{(2)}\}$ dans la métrique relative à $\mathfrak{A}$, il suffit de calculer la distance des points $\mathbf{T}_2^{-1}\{\zeta_h^{(1)}\}$ et $\mathbf{T}_2^{-1}\{\zeta_h^{(2)}\}$ dans la métrique relative à $\mathcal{H}_1$, distance qui nous est donnée par les formules (4.1) et (4.2), légèrement modifiées puisque nous opérons ici avec des coordonnées différentes de celles où ont été établies ces formules. Nous prendrons pour point A dans l'inégalité (6.5) le point $\mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}^{-1}\{z^{(n)}\}$, où $\{z^{(n)}\}$ est un point de la suite dénombrable de l'énoncé, et pour point B le point $\mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}^{-1}\{z\}$, $\{z\}$ étant un point quelconque de V(Q). Les points A′ et B′ de la même inégalité seront alors les points $A' = \mathbf{T}_2^{-1}\{w^{(n)}\}$ et $B' = \mathbf{T}_2^{-1}\{w\}$.

Posons pour simplifier

$$\mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}^{-1}(z_k^{(n)}) = z_k'^{\star(n)}, \qquad \mathbf{T}_2^{-1}(w_k^{(n)}) = w_k^{\star(n)};$$
$$\mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}^{-1}(z_k) = z_k'^{\star}, \qquad \mathbf{T}_2^{-1}(w_k) = w_k'^{\star};$$

on obtient facilement, d'après (6.8) et (6.11),

$$(6.12)\quad \begin{cases} z_1'^{\star} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}\dfrac{z_1}{1-\alpha_1 z_1}, & z_2'^{\star} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} z_2\,(1+\beta_1 z_1); \\ z_1'^{\star(n)} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}\dfrac{z_1^{(n)}}{1-\alpha_1 z_1^{(n)}}, & z_2'^{\star(n)} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} z_2^{(n)}(1+\beta_1 z_1^{(n)}); \end{cases}$$

$$(6.13)\quad \begin{cases} w_1^{\star} = \dfrac{w_1}{1+\alpha_2 w_1}, & w_2^{\star} = \dfrac{w_2}{1+\beta_2 w_1}; \\ w_1^{\star(n)} = \dfrac{w_1^{(n)}}{1+\alpha_2 w_1^{(n)}}, & w_2^{\star(n)} = \dfrac{w_2^{(n)}}{1+\beta_2 w_1^{(n)}}; \end{cases}$$

et, en portant (4.1) dans (6.5), il vient aisément

$$-1 + [\mathcal{H}(w^{\star(n)}, w^{\star})]^2 \leqq [\mathcal{H}(z'^{\star(n)}, z'^{\star})]^2 - 1,$$

puis en remplaçant dans cette dernière inégalité $\mathcal{H}$ par sa valeur tirée de (4.2), on voit, après un calcul un peu trop long pour être reproduit ici mais qui ne présente aucune difficulté, que l'on obtient

$$\frac{\left[\rho_1\left(w_1^{\star(n)} + \overline{w_1^{\star(n)}}\right) - |w_1^{\star(n)}|^2 - |w_2^{\star(n)}|^2\right]\left[\rho_1\left(w_1 + \overline{w_1}\right) - |w_1|^2 - |w_2|^2\right]}{\left|\rho_1\left(w_1 + w_1^{\star(n)}\right) - w_1^{\star}\overline{w_1^{\star(n)}} - \overline{w_2^{\star(n)}}\,w_2^{\star}\right|^2}$$
$$\geqq \frac{\left[\rho_1\left(z_1'^{\star(n)} + \overline{z_1'^{\star(n)}}\right) - |z_1'^{\star(n)}|^2 - |z_2'^{\star(n)}|^2\right]\left[\rho_1\left(z_1'^{\star} + \overline{z_1'^{\star}}\right) - |z_2'^{\star}|^2 - |z_2'^{\star}|^2\right]}{\left|\rho_1\left(z_1'^{\star} + \overline{z_1'^{\star(n)}}\right) - z_1'^{\star}\,\overline{z_1'^{\star(n)}} - z_2'^{\star}\,\overline{z_2'^{\star(n)}}\right|^2}.$$

en divisant par

$$\left[\rho_1\left(z_1'^{\star(n)}+\overline{z_1'^{\star(n)}}\right)-|z_1'^{\star(n)}|^2-|z_2'^{\star(n)}|^2\right]$$

les deux membres, en faisant augmenter n indéfiniment, et en remarquant que

$$\lim_{n=\infty} w_1^{\star(n)}=\lim_{n=\infty} w_2^{\star(n)}=\lim_{n=\infty} z_1'^{\star(n)}=\lim_{n=\infty} z_2'^{\star(n)}=0,$$

puisque l'on opère en coordonnées normales, et que $\mathbf{W}$ laisse invariant Q_3, on obtient à la limite

$$\Gamma_1\,\frac{\rho_1(w_1^\star+\overline{w_1^\star})-|w_1^\star|^2-|w_2^\star|^2}{|w_1^\star|^2}\geqq\frac{\rho_1(z_1'^\star+\overline{z_1'^\star})-|z_1'^\star|^2-|z_2'^\star|^2}{|z_1'^\star|^2}.$$

C'est là l'inégalité que nous voulions démontrer [4].

7. Théorème II. — *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème précédent où* $L_1^{(n)}$ *doit être remplacé par*

$$L_2^{(n)}=\frac{F(\eta_1^{(n)}\eta_2^{(n)})}{F(z_1'^{(n)}z_2'^{(n)})}, \tag{7.1}$$

et Γ_1 *par* Γ_2, *en supposant en outre qu'à l'intérieur de* $\mathcal{G}=\mathbf{W}\mathcal{B}$ *il existe une hypersphère* $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}=E[|z_1-\rho|^2+|z_2|^2-\rho^2\leqq 0],$$

on a

$$\Gamma_2 B(\eta_1\eta_2)\leqq B(z_1'z_2'), \tag{7.2}$$

où B, F, *sont les mêmes qu'au théorème précédent et où*

$$z_1'=\frac{z_1}{1+\alpha_2 z_1},\qquad z_2'=\frac{z_2}{1+\beta_2 z_1},\qquad \eta_1=\frac{\rho}{\rho_1}w_1,\qquad \eta_2=\frac{\rho}{\rho_1}w_2.$$

Démonstration. — Soit θ la transformation changeant $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}_1$, la transformation $\mathbf{W}^{-1}$ change $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}^\star$ et $\mathcal{H}^\star\subset\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$; alors la transformation $\mathbf{T}'=\mathbf{W}^{-1}\theta^{-1}\mathbf{T}_2^{-1}$ change $\mathcal{A}$ en $\mathcal{H}^\star$. Comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}^\star$ sont équivalents à des hypersphères, on peut appliquer la formule

$$D_{\mathcal{A}}\{A^\star, B^\star\}\geqq D_{\mathcal{A}}\{\mathbf{T}'A^\star, \mathbf{T}'B^\star\},$$

---

[4] La formule trouvée ici pour $Z_2^{1\star}$ est un peu différente de celle indiquée dans la Note aux *Comptes rendus*. Cela tient à une légère erreur de calcul.

en prenant pour A^* et B^* les points $\mathbf{T}_2\theta A'$, $\mathbf{T}_2\theta B'$ les points $\mathbf{T}'A^*$ et $\mathbf{T}'B^*$ deviennent les points A et B (comme précédemment A est le point $\{z^{(0)}\}$, B le point $\{z^{(1)}\}$, A' le point $\mathbf{W}A = \{w^{(0)}\}$ et B' le point $\mathbf{W}B = \{w^{(1)}\}$).

D'autre part,

$$D_{\mathfrak{A}}\{A^*, B^*\} = D_{\mathcal{H}_1}\{\mathbf{T}_2^{-1}A^*, \mathbf{T}_2^{-1}B^*\},$$

et de même

$$D_{\mathfrak{A}}\{\mathbf{T}'A^*, \mathbf{T}'B^*\} = D_{\mathcal{H}_1}\{\mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}'A^*, \mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}'B^*\},$$

ou, d'après ce que nous venons de dire,

$$\mathbf{T}_2^{-1}A^* = \mathbf{T}_2^{-1}(\mathbf{T}_2\theta A') = \theta A', \qquad \mathbf{T}_2^{-1}B^* = \mathbf{T}_2^{-1}(\mathbf{T}_2\theta B') = \theta B'$$

et

$$\mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}'A^* = \mathbf{T}_2^{-1}A, \qquad \mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{T}'B^* = B.$$

On a donc

$$D_{\mathcal{H}_1}\{\theta A', \theta B'\} \geqq D_{\mathcal{H}_1}\{\mathbf{T}_2^{-1}A, \mathbf{T}_2^{-1}B\}.$$

La transformation θ est définie par

$$\zeta_1 = \frac{\rho}{\rho_1} z_1, \qquad \zeta_2 = \frac{\rho}{\rho_1} z_2,$$

et la transformation $\mathbf{T}_2^{-1}$ est définie par

$$z'_1 = \frac{z_1}{1 + \alpha_2 z_1}, \qquad z'_2 = \frac{z_2}{1 + \beta_2 z_1}.$$

Les calculs s'achèvent alors comme au théorème précédent, en prenant pour A un point de la suite dénombrable de l'énoncé, pour B un point quelconque situé dans $\mathcal{H}$, et en passant à la limite.

8. Quelques évaluations pour le jacobien des T. P.

THÉORÈME III. — *Avec les conditions des théorèmes* I *et* II, *et si l'on suppose que* $\mathbf{W}$ *transforme le cône*

$$\mathcal{C}_{mp}(z) = \mathrm{E}\left[0 \leqq z_1 + \bar{z}_1 \leqq p_1, \quad \frac{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}{z_1 + \bar{z}_1} \leqq m\right] \tag{8.1}$$

en un domaine intérieur au cône $\mathcal{C}_{m'p'}(w)$ $m, p, m'p'$ *étant convenablement choisis, on a pour tout point* $\{z\}$ *appartenant* *à $\mathcal{C}^{(z)}_{mp}$ l'inégalité*

$$0 < A \leqq \left| \frac{\partial(z_1 z_2)}{\partial(w_1 w_2)} \right| \leqq B < \infty. \tag{8.2}$$

Démonstration. — Afin de rendre plus claire la démonstration de ce théorème qui est assombrie par quelques calculs assez pénibles, nous allons tout de suite donner l'idée qui nous guidera. De l'inégalité donnée par le théorème I nous allons tirer une borne supérieure pour le rapport $\frac{w_1 + \overline{w}_1}{z_1 + z_1}$, et de même de l'inégalité fournie par le théorème II nous déduirons une borne inférieure pour ce même rapport. Nous appuyant ensuite sur les résultats donnés par M. Bergmann [5], nous obtiendrons, en partant des inégalités

$$\frac{K_{\mathcal{A}}(z\bar{z})}{K_{\mathcal{H}}(ww)} \leqq \left| \frac{\partial(w_1 w_2)}{\partial(z_1 z_2)} \right|^2 = \frac{K_{\mathcal{B}}(z\bar{z})}{K_{\mathcal{G}}(w\overline{w})} \leqq \frac{K_{\mathcal{J}}(z\bar{z})}{K_{\mathcal{A}}(w\overline{w})}, \tag{8.3}$$

et en tenant compte d'une part des limitations obtenues pour $K_{\mathcal{A}}$, $K_{\mathcal{J}}$, $K_{\mathcal{H}}$, d'autre part, de celles de $\frac{w_1 + \overline{w}_1}{z_1 + \bar{z}_1}$ qui résultent de nos hypothèses, le résultat que nous cherchions.

Par hypothèse, si le point $\{z\}$ est à l'intérieur du cône $\mathcal{C}_{mp}(z)$, le point transformé (w) est à l'intérieur de $\mathcal{C}_{m'p'}(w)$. Cela étant les transformations

$$\left\{ \begin{aligned} w_1^\star &= \frac{w_1}{1 + \alpha_2 w_1}; \\ w_2^\star &= \frac{w_2}{1 + \beta_2 w_1}; \end{aligned} \right. \tag{8.4}$$

$$\left\{ \begin{aligned} z_1'^\star &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{z_1}{1 - \alpha_1 z_1}; \\ z_2'^\star &= \frac{\rho_2}{\rho_1} z_2(1 + \beta_2 z_1) \end{aligned} \right. \tag{8.5}$$

permettent d'écrire l'inégalité du théorème I

$$\Gamma_1 \frac{\rho_1(w_1^\star + \overline{w_1^\star}) - |w_1^\star|^2 - |w_2^\star|^2}{|w_1^\star|^2} \geqq \frac{\rho_1(z_1'^\star + \overline{z_1'^\star}) - |z_1^\star|^2 - |z_2^\star|^2}{|z_1'^\star|^2}, \tag{8.5}$$

---

(5) *Voir* B_1, p. 4 et B_3, p. 20.

et comme ces transformations sont manifestement normées, on sait avec M. Bergmann que l'hypothèse $\{z\} \subset \mathcal{C}_{mp}(z)$ et $\{w\} \supset \mathcal{C}_{mp}(w)$ devient $\{z^*\} \subset \mathcal{C}_{m^*p^*}(z)$, et respectivement $\{w^*\} \subset \mathcal{C}_{m'^*p'^*}(w^*)$, les constantes m^*p^*, $m'^*p'^*$ne dépendant que des transformations (8.4) et (8.5) et de m, p, m', p', si toutefois on suppose que les expressions

$$\frac{|z_1|^2}{|1-\alpha_1 z_1|\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}} \quad \text{et} \quad \frac{|w_1|^2}{|1+\alpha_2 w_1|\sqrt{|w_1|^2+|w_2|^2}}$$

soient bornées supérieurement, ce qui a toujours lieu si l'on suppose $|z_1| < h$ et $|w_1| < k$, inégalités vérifiées au voisinage de l'origine [6].

Cela étant, l'inégalité (8.5) peut s'écrire

$$\Gamma_1 \frac{w_1^* + \overline{w_1^*}}{|w_1^*|^2}\left[\rho_1 - \frac{|w_1^*|^2+|w_2^*|^2}{w_1^*+\overline{w_1^*}}\right] \geqq \frac{z_1'^* + \overline{z_1'^*}}{|z_1'^*|^2}\left[\rho_1 - \frac{|z_1'^*|^2+|z_2'^*|^2}{z_1'^*+\overline{z_1'^*}}\right].$$

Or, on a évidemment

$$1 \geqq \frac{1}{2}\,\frac{w_1^*+\overline{w_1^*}}{|w_1^*|} \geqq \frac{1}{m'^*} \quad \text{et} \quad 1 \geqq \frac{1}{2}\,\frac{z_1'^*+z_1'^*}{|z_1'^*|} \geqq \frac{1}{m^*},$$

d'où

$$\frac{\Gamma_1}{m'^*}\cdot\frac{1}{|w_1^*|}\left[\rho_1 - \frac{|w_1^*|^2+|w_2^*|^2}{w_1^*+\overline{w_1^*}}\right] \geqq \frac{1}{|z_1'^*|}\left[\rho_1 - \frac{|z_1'^*|^2+|z_2'^*|^2}{z_1'^*+\overline{z_1'^*}}\right],$$

---

(6) On peut le voir de la façon suivante. Écrivons

$$\frac{|z_1|^2}{|1-\alpha_1 z_1|\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}} < \chi$$

ou, si $|z_1| < h$,

$$h^2 < \chi\,|1-\alpha_1 h|\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2},$$

or, des hypothèses

$$z_1+\overline{z}_1 < p, \qquad \frac{\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}}{z_1+\overline{z}_1} < m,$$

il résulte immédiatement que

$$\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2} < mp,$$

donc

$$h^2 < \chi\, mp\,|1-\alpha_1 h| \quad \text{ou} \quad \chi > \frac{h^2}{mp\,|1-\alpha_1 h|},$$

et il suffit de prendre $0 < h < \frac{1}{\alpha_1}$ pour que χ soit fini.

d'où encore

$$\left|\frac{w_1^\star}{z_1'^\star}\right| \leqq \frac{\Gamma_1}{m^\star}\cdot\frac{\rho_1 - \dfrac{|w_1^\star|^2+|w_2^\star|^2}{w_1^\star+\overline{w_1^\star}}}{\rho_1 - \dfrac{|z_1'^\star|^2+|z_2'^\star|^2}{z_1'^\star+\overline{z_1'^\star}}} < \frac{\Gamma_1\rho_1}{m'^\star\left(\rho_1 - m^\star\sqrt{|z_1'^\star|^2+|z_2'^\star|^2}\right)}.$$

Or on peut supposer que l'on est dans un voisinage de l'origine suffisamment petit pour que

$$(8.6) \qquad \sqrt{|z_1'^\star|^2+|z_2'^\star|^2} < \frac{\rho_1}{2m^\star},$$

et l'on aura, dans ces conditions,

$$\left|\frac{w_1^\star}{z_1'^\star}\right| < \frac{2\Gamma_1}{m'^\star} = A'.$$

Or

$$\left|\frac{w_1^\star}{z_1'^\star}\right| = \left|\frac{w_1}{z_1}\right|\cdot\left|\frac{1-\alpha_1 z_1}{1+\alpha_2 z_1}\right|\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left|\frac{w_1}{z_1}\right|\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{1-\alpha_1 h}{1+\alpha_2 k},$$

donc

$$\left|\frac{w_1}{z_1}\right| < \frac{\rho_2}{\rho_1}\,\frac{1+\alpha_2 k}{1-\alpha_1 h}.A',$$

mais

$$\frac{w_1+\overline{w_1}}{z_1+\overline{z_1}} < \frac{|w_1|}{\dfrac{|z_1|}{m}} = m\left|\frac{w_1}{z_1}\right|,$$

on en conclut

$$(8.7) \qquad \frac{w_1+\overline{w_1}}{z_1+\overline{z_1}} < m\,\frac{\rho_2}{\rho_1}\,\frac{1+\alpha_2 k}{1-\alpha_1 h}\,A' = A_1.$$

Partons maintenant de l'inégalité donnée par le théorème II. Elle s'écrit

$$(8.9) \qquad \Gamma_2 B(\eta_1\eta_2) \leqq B(z_1', z_2').$$

En posant

$$(8.10) \qquad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{\rho}{\rho_1}\,w_1, \\[2mm] \eta_2 = \dfrac{\rho}{\rho_1}\,w_2; \end{cases}$$

$$(8.11) \qquad \begin{cases} z_1' = \dfrac{z_1}{1+\alpha_2 z_1}, \\[2mm] z_2' = \dfrac{z_2}{1+\beta_2 z_1}. \end{cases}$$

Ces deux transformations étant normées, elles changent respectivement le cône $\mathcal{C}_{m'p'}(w)$ dans le cône $\mathcal{C}_{m'_1p'_1}(\eta)$, le cône $\mathcal{C}_{mp}(z)$ dans le cône $\mathcal{C}_{m_1p_1}(z')$, et l'on a

$$m'_1 = m', \qquad p'_1 = \frac{\rho}{\rho_1} p',$$

m_1 et p_1 ne dépendant que de m et p et des coefficients de (8.11), cela n'ayant lieu toutefois que si l'expression

$$\frac{|z_1|^2}{|1+\alpha_2 z_1|\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}}$$

est bornée supérieurement, ce qui se produit toujours, comme nous l'avons vu, au voisinage de l'origine où $|z_1| < h$.

Cela étant, on verra comme précédemment que l'inégalité (8.9) donne

$$\left|\frac{\eta_1}{z'_1}\right| \geq \frac{\Gamma_2}{m'_1} \frac{\rho_1 - \dfrac{|\eta_1|^2+|\eta_2|^2}{\eta_1+\overline{\eta_1}}}{\rho_1 - \dfrac{|z'_1|^2+|z'_2|^2}{z'_1+\overline{z'_1}}} > \frac{\Gamma_2}{m'_1} \frac{\rho_1 - m'_1\sqrt{|\eta_1|^2+|\eta_2|^2}}{\rho_1},$$

ou en supposant que l'on est dans un voisinage de l'origine suffisamment petit pour que

$$\sqrt{|\eta_1|^2+|\eta_2|^2} < \frac{\rho_1}{2m'_1},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{|w_1|^2+|w_2|^2} < \frac{\rho_1^2}{2\rho m'_1}, \tag{8.12}$$

on aura

$$\left|\frac{\eta_1}{z'_1}\right| > \frac{\Gamma_2}{2m'_1} = \mathrm{B}';$$

or

$$\left|\frac{\eta_1}{z'_1}\right| = \left|\frac{w_1}{z_1}\right| \frac{\rho}{\rho_1} \frac{1}{|1+\alpha_2 z_1|} < \left|\frac{w_1}{z_1}\right| \cdot \frac{\rho}{\rho_1} \frac{1}{|1+\alpha_2 h|},$$

d'où

$$\left|\frac{w_1}{z_1}\right| > \frac{\rho_1}{\rho} \mathrm{B}'|1+\alpha_2 h|,$$

mais

$$\frac{w_1+\overline{w_1}}{z_1+\overline{z_1}} > \frac{\dfrac{|w_1|}{m'}}{|z_1|} = \frac{1}{m'}\left|\frac{w_1}{z_1}\right|.$$

D'où finalement

$$\frac{w_1+\overline{w_1}}{z_1+\overline{z_1}} > \frac{1}{m'} \frac{\rho_1}{\rho} \mathrm{B}'|1+\alpha_2 h| = \mathrm{B}_1 > 0. \tag{8.13}$$

On arrive ainsi à l'inégalité double

$$B_1 < \frac{w_1 + \overline{w_1}}{z_1 + \overline{z_1}} < A_1. \tag{8.14}$$

Rappelons maintenant un résultat de M. Bergmann [7] relatif aux fonctions noyaux des domaines $\mathcal{A} \supset \mathcal{B} \supset \mathcal{J}$ et $\mathcal{A} \supset \mathcal{G} \supset \mathcal{H}$, d'après lequel on a

$$K_{\mathcal{A}}(z) < K_{\mathcal{B}}(z) < K_{\mathcal{J}}(z)$$

et

$$K_{\mathcal{A}}(w) \leqq K_{\mathcal{G}}(w) \leqq K_{\mathcal{H}}(w).$$

On en conclut que

$$\frac{K_{\mathcal{A}}(z)}{K_{\mathcal{H}}(w)} \leqq \frac{K_{\mathcal{B}}(z)}{K_{\mathcal{G}}(w)} \leqq \frac{K_{\mathcal{J}}(z)}{K_{\mathcal{A}}(w)}. \tag{8.15}$$

D'autre part, puisque $\mathcal{G} = \mathbf{W}\mathcal{B}$, on a

$$\frac{K_{\mathcal{B}}(z)}{K_{\mathcal{G}}(w)} = \left| \frac{\partial(w_1 w_2)}{\partial(z_1 z_2)} \right|^2.$$

Or on sait que

$$K_{\mathcal{H}}(z) = \frac{2}{\pi^3 \left[\rho(z_1 + \overline{z_1}) - |z_1|^2 - |z_2|^2\right]^3}$$

et que

$$K_{\mathcal{A}}(z) = \frac{2 |A^{(\mathcal{A})}|^2}{\rho_1 [E^{(\mathcal{A})}]^3 \pi^2} \qquad \text{et} \qquad K_{\mathcal{J}}(z) = \frac{2 |A^{(\mathcal{J})}|^2}{\rho_2 \pi^2 [E^{(\mathcal{J})}]^3}$$

avec

$$A^{(\mathcal{J})} = (1 - \alpha_1 z_1)(1 + \beta_1 z_1); \tag{8.16}$$

$$A^{(\mathcal{A})} = (1 + \alpha_2 z_1)(1 + \beta_2 z_1)^2; \tag{8.17}$$

$$E^{(\mathcal{J})} = z_1 + \overline{z_1} - \left(2\alpha_1 + \frac{1}{\rho_2}\right) |z_1|^2 - \frac{1}{\rho_2} |z_2[1 + (\beta_1 - \alpha_1) z_1 - \alpha_1 \beta_1 z_1^2]|^2; \tag{8.18}$$

$$\begin{aligned} E^{(\mathcal{A})} = {} & z_1 + \overline{z_1} - \left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1}\right) |z_1|^2 - \frac{1}{\rho_1} |z_2|^2 + \beta_2 (z_1 + \overline{z_1})^2 \\ & + |z_1|^2 \left\{ (z_1 + \overline{z_1}) \left[\beta_2^2 + \beta_2 \left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1}\right)\right] \right\} \\ & - \frac{\alpha_2}{\rho_1} (z_1 + \overline{z_1}) |z_1|^2 + \beta_2^2 \left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1}\right) |z_1|^4 - \frac{1}{\rho_1} \alpha_2^2 |z_1 z_2|^2. \end{aligned} \tag{8.19}$$

---

(7) *Voir* B_1, p. 3.

Considérons la première inégalité de (8.15). Nous allons chercher une borne inférieure du rapport $\frac{K_{\mathfrak{A}}(z)}{K_{\mathcal{K}}(w)}$. Pour cela nous devrons trouver une borne inférieure pour $K_{\mathfrak{A}}(z)$ et une borne supérieure pour $K_{\mathcal{K}}(w)$.

Or

$$K_{\mathcal{K}}(w) = \frac{2}{\pi^3} \frac{1}{(w_1+\overline{w_1})^3} \cdot \frac{1}{\left[\rho_1 - \frac{|w_1|^2+|w_2|^2}{w_1+\overline{w_1}}\right]^3}$$

$$< \frac{2}{\pi^3} \frac{1}{(w_1+\overline{w_1})^3} \frac{1}{\left[\rho_1 - m'\sqrt{|w_1|^2+|w_2|^2}\right]^3}.$$

Mais, d'après $\sqrt{|w_1|^2+|w_2|^2} < \frac{\rho_1^2}{2\rho m'}$, on a

$$K_{\mathcal{K}}(w) < \frac{a}{(w_1+\overline{w_1})^3} \tag{8.20}$$

avec

$$a = \frac{2}{\pi^3} \frac{1}{\rho_1^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho_1}{2\rho}\right)^3}. \tag{8.21}$$

Pour avoir une borne inférieure de $K_{\mathfrak{A}}(z)$, il faut trouver une borne inférieure de $A^{(\mathfrak{A})}$ et une borne supérieure de $E^{(\mathfrak{A})}$. Il est clair que $|A^{(\mathfrak{A})}|^2 > 1$, et l'on a

$$\begin{aligned} E^{(\mathfrak{A})} = (z_1+\overline{z_1}) \Big\{ 1 &- \left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1}\right) \frac{|z_1|^2}{z_1+\overline{z_1}} - \frac{1}{\rho_1} \frac{|z_2|^2}{z_1+\overline{z_1}} \\ &+ \beta_2(z_1+\overline{z_1}) + |z_1|^2 \left[\beta_2^2 + \beta_2\left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1}\right)\right] \\ &- \frac{\alpha_2}{\rho_1}|z_1|^2 + \beta_2^2\left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1}\right) \frac{|z_1|^4}{z_1+\overline{z_1}} - \frac{1}{\rho_1}\alpha_2^2 |z_1 z_2|^2 \frac{1}{z_1+\overline{z_1}} \Big\} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} E^{(\mathfrak{A})} < (z_1+\overline{z_1}) \Big\{ 1 &+ \beta_2(z_1+\overline{z_1}) \\ &+ |z_1|^2 \left[\beta_2^2 + \beta_2\left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1}\right)\right] + \beta_2^2 \left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1}\right) \frac{|z_1|^4}{z_1+\overline{z_1}} \Big\}. \end{aligned}$$

Mais, d'après nos hypothèses, $z_1+\overline{z}_1 < p$, $|z_1| < h$; on a donc

$$E^{(\mathfrak{A})} < (z_1+\overline{z_1}) \left\{ 1 + \beta_2 p + h^2 \left[\beta_2^2 + \beta_2\left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1}\right)\right] + \beta_2^2 \left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1}\right) h^3 m \right\},$$

et finalement

$$K_{\mathfrak{A}}(z) > \frac{2}{\rho_1 \pi^2 b} \frac{1}{(z_1 + \bar{z}_1)^3},$$

en posant

$$(8.22) \quad b = \left\{ 1 + \beta_2 p + h^2 \left[\beta_2^2 + \beta_2 \left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1} \right) \right] + \beta_2^2 \left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1} \right) h^3 m \right\}^3.$$

D'où

$$(8.23) \qquad C \left(\frac{w_1 + \bar{w}_1}{z_1 + \bar{z}_1} \right)^3 < \frac{K_{\mathfrak{A}}(z)}{K_{\mathfrak{K}}(w)} < \left| \frac{\partial(w_1 w_2)}{\partial(z_1 z_2)} \right|^2,$$

avec

$$(8.24) \qquad C = \frac{2}{\pi^2 \rho_1 ab},$$

et, comme d'après (8.14) $\dfrac{w_1 + \bar{w}_1}{z_1 + \bar{z}_1} > B_1$, on en déduit

$$0 < CB_1 < \left| \frac{\partial(w_1 w_2)}{\partial(z_1 z_2)} \right|^2,$$

il suffit de poser $CB_1 = A$ pour trouver la première inégalité de notre théorème; on a

$$(8.25) \quad A^2 = \frac{\dfrac{\pi}{2} \dfrac{\rho_1^3}{\rho} \dfrac{\Gamma_2}{m'^2} (1 + \alpha_2 h) \left(1 - \dfrac{\rho_1}{2\rho} \right)}{\left\{ 1 + \beta_2 p + h^2 \left[\beta_2^2 + \beta_2 \left(2\alpha_2 - \dfrac{1}{\rho_1} \right) \right] + \beta_2^2 \left(2\alpha_2 - \dfrac{1}{\rho_1} \right) h^3 m \right\}^3}.$$

Passons maintenant à la deuxième inégalité (8.15), et cherchons une borne supérieure pour $\dfrac{K_{\mathfrak{J}}(z)}{K_{\mathfrak{A}}(w)}$. Nous devons chercher alors une borne supérieure de $K_{\mathfrak{J}}(z)$ et une borne inférieure de $K_{\mathfrak{A}}(w)$.

Cette dernière résulte immédiatement de celle de $K_{\mathfrak{A}}(z)$. On a vu en effet que

$$K_{\mathfrak{A}}(w) = \frac{2}{\pi^2 \rho_1} \cdot \frac{|A^{(\mathfrak{A})}|^2}{[E^{(\mathfrak{A})}]^3}$$

et que

$$|A^{(\mathfrak{A})}|^2 > 1,$$

et aussi

$$E^{(\mathfrak{A})} < (w_1 + \bar{w}_1) \left\{ 1 + \beta_2 (w_1 + \bar{w}_1) \right.$$
$$\left. + |w_1|^2 \left[\beta_2^2 + \beta_2 \left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1} \right) \right] + \beta_2^2 \left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{|w_1|^4}{w_1 + \bar{w}_1} \right\},$$

mais par hypothèses

$$w_1 + \overline{w_1} < p', \qquad |w_1| < k,$$

$$\frac{|w_1|^4}{w_1 + \overline{w_1}} < \frac{|w_1|^3 \sqrt{|w_1|^2 + |w_2|^2}}{w_1 + \overline{w_1}} < k^3 m',$$

on a donc

$$\mathrm{E}^{(\mathfrak{a})} < (w_1 + \overline{w_1}) \left\{ 1 + \beta_2 p' + k^2 \left[\beta_2^2 + \beta_2 \left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1} \right) \right] + \beta_2^2 \left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1} \right) m' k^3 \right\},$$

il en résulte immédiatement

$$\mathrm{K}_{\mathfrak{a}}(w) > \frac{2}{\pi^2 \rho_1 a'} \frac{1}{(w_1 + \overline{w_1})^3}, \tag{8.26}$$

en posant,

$$a' = \left\{ 1 + \beta_2 p' + k^2 \left[\beta_2^2 + \beta_2 \left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1} \right) \right] + \beta_2^2 \left(2\alpha_2 - \frac{1}{\rho_1} \right) m' k^3 \right\}^3. \tag{8.27}$$

Mais

$$\mathrm{K}_{\mathfrak{I}}(z) = \frac{2}{\rho_2 \pi^2} \frac{|\mathrm{A}^{(\mathfrak{I})}|^2}{[\mathrm{E}^{(\mathfrak{I})}]_3}. \tag{8.27 bis}$$

Or

$$\begin{aligned} |\mathrm{A}^{(\mathfrak{I})}|^2 &= |1 - \alpha_1 z_1|^2 \, |1 + \beta_1 z_1|^2 \\ &= [1 - \alpha_1 (z_1 + \overline{z_1}) + \alpha_1^2 |z_1|^2] \, [1 + \beta_1 (z_1 + \overline{z_1}) + \beta_1^2 |z_1|^2]. \end{aligned}$$

D'après les hypothèses faites, $z_1 + \overline{z_1} < p$, $|z_1| < h$, on a

$$|\mathrm{A}^{(\mathfrak{I})}|^2 < (1 + \beta_1 p + \beta_1^2 h^2)(1 - \alpha_1 h + \alpha_1^2 h^2). \tag{8.28}$$

D'autre part

$$\mathrm{E}^{(\mathfrak{I})} = (z_1 + \overline{z_1}) \left[1 - \left(2\alpha_1 + \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{|z_1|^2}{z_1 + \overline{z_1}} - \frac{1}{\rho_2} \frac{|z_2|^2}{z_1 + \overline{z_1}} |1 + (\beta_1 - \alpha_1) z_1 + \alpha_1 \beta_1 z_1^2|^2 \right],$$

or,

$$\frac{|z_1|^2}{z_1 + \overline{z_1}} < \frac{|z_1| \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}{z_1 + \overline{z_1}} < mh,$$

et comme

$$\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} - m(z_1 + \overline{z_1}) < 0$$

entraîne, puisque $z_1 + \overline{z_1} < p$,

$$\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} < mp. \tag{8.29}$$

D'où

$$|z_2| < mp,$$

on conclut

$$\frac{|z_2|^2}{z_1+\overline{z_1}} < \frac{|z_2|\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}}{z_1+\overline{z_1}} < m^2 p.$$

Enfin puisque

$$|1+(\beta_1-\alpha_1)z_1+\alpha_1\beta_1 z_1^2|^2 = 1+(\beta_1-\alpha_1)(z_1+\overline{z_1})$$
$$+\alpha_1\beta_1(\beta_1-\alpha_1)z_1\overline{z_1}(z_1+\overline{z_1})+\alpha_1^2\beta_1^2 z_1^2 z_1^2,$$

on a

$$|1+(\beta_1-\alpha_1)z_1+\alpha_1\beta_1 z_1^2|^2 < 1+(\beta_1-\alpha_1)p+\alpha_1\beta_1(\beta_1-\alpha_1)ph^2+\alpha_1^2\beta_1^2 h^4,$$

et

$$(8.30)\quad E^{(\mathfrak{J})} > (z_1+\overline{z_1})\left\{1-\left(2\alpha_1+\frac{1}{\rho_2}\right)mh - \frac{1}{\rho_2}m^2p[1+(\beta_1-\alpha_1)p+\alpha_1\beta_1(\beta_1-\alpha_1)ph^2+\alpha_1^2\beta_1^2h^4]\right\}.$$

En tenant compte de (8.27 *bis*), (8.28), (8.30), on obtient

$$K_{\mathfrak{J}}(z) < \frac{2b'}{\rho_2\pi^2(z_1+\overline{z_1})^3},$$

en posant

$$(8.31)\quad b' = \frac{(1-\alpha_1 p+\alpha_1^2h^2)(1+\beta_1 p+\beta_1^2h^2)}{\left\{1-\left(2\alpha_1+\frac{1}{\rho_2}\right)mh-\frac{1}{\rho_2}m^2p[1+(\beta_1-\alpha_1)p+\alpha_1\beta_1(\beta_1-\alpha_1)ph^2+\alpha_1^2\beta_1^2h^4]\right\}^3}.$$

D'où

$$\frac{K_{\mathfrak{J}}(z)}{K_{\mathfrak{A}}(w)} < \frac{\rho_1}{\rho_2}a'b'\left(\frac{w_1+\overline{w_1}}{z_1+\overline{z_1}}\right)^3,$$

on arrive ainsi à

$$\left|\frac{\partial(w_1 w_2)}{\partial(z_1 z_2)}\right|^2 < \frac{\rho_1}{\rho_2}a'b'\left(\frac{w_1+\overline{w_1}}{z_1+\overline{z_1}}\right)^3 < \frac{\rho_1}{\rho_2}a'b'A_1^3.$$

Pour trouver l'inégalité que nous voulions démontrer, il suffit de poser

$$B^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}a'b'A_1^3,$$

où a' et b' sont définis respectivement par (8.27) et (8.31) et A_1 par

$$A_1 = 2m\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{1+\alpha_2 k}{1-\alpha_1 h}\cdot\frac{\Gamma_1}{m'^4}.$$

Remarque. — On aurait pu obtenir une borne supérieure un peu meilleure en notant que l'inégalité entraîne

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 < m^2p^2,$$

et, comme $|z_1|^2 < h^2$, on aurait $|z_2| < \sqrt{m^2p^2 - h^2}$, mais cela aurait compliqué l'écriture des formules (8.30) et (8.31) qui le sont déjà assez, sans grand avantage.

9. **Quelques applications du théorème III.** — L'inégalité fondamentale (8.2) permet de donner des bornes à la variation des mesures euclidiennes de certaines figures géométriques, quand on effectue sur ces figures une T. P. répondant aux conditions du théorème III.

Nous supposerons dans la suite que ces figures géométriques se trouvent, avant la transformation, dans l'intersection du voisinage V(Q) et du cône $\mathcal{C}_{mp}$, et que leurs images après la transformation sont à l'intérieur de l'intersection de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{C}_{m'p'}$; de telle sorte que les conditions du théorème III sont toujours satisfaites pour la figure considérée et son image. Nous nous bornerons à traiter ici le cas du volume et de la surface d'une telle figure.

Appelons $\mathcal{F}$ la figure considérée, $\mathcal{F}^*$ son image après la T. P. **W** satisfaisant aux hypothèses du théorème III, et soient $d\omega$ l'élément de volume euclidien à quatre dimensions de $\mathcal{F}$ et $d\omega^*$ l'élément analogue de $\mathcal{F}^*$. On sait que

$$d\omega^* = \left| \frac{\partial(w_1 w_2)}{\partial(z_1 z_2)} \right| d\omega.$$

Il en résulte immédiatement

$$\mathrm{A}\, d\omega \leqq d\omega^* \leqq \mathrm{B}\, d\omega,$$

et par conséquent

$$\mathrm{A}\ \mathrm{vol}(\mathcal{F}) \leqq \mathrm{vol}(\mathcal{F}^*) \leqq \mathrm{B}\ \mathrm{vol}(\mathcal{F}).$$

Considérons maintenant une surface. Soit $\mathcal{F}^{(2)} = \mathrm{E}[z_k = z_k(u_1 u_2)]$ une surface qui est changée par la T. P. **W**, satisfaisant toujours à nos hypothèses, dans la surface $\mathcal{F}^{*(2)} = \mathrm{E}[w_k = w_k(u_1 u_2)]$. M. Bergmann (*voir* B_3 et B_4) a introduit une notion d'aire spéciale dont l'élément $d\Omega^{(2)}$ est donné par

$$d\Omega^{(2)} = \left| \frac{\partial(z_1 z_2)}{\partial(u_1 u_2)} \right| du_1 du_2.$$

Rappelons que l'aire euclidienne ordinaire d'une surface est donnée par

$$df_2 = \begin{vmatrix} \Sigma X_{ku_1}^2 + Y_{ku_1}^2 & \Sigma (X_{ku_1} X_{ku_2} + Y_{ku_1} Y_{ku_2}) \\ \Sigma (X_{ku_1} X_{ku_2} + Y_{ku_1} Y_{ku_2} & \Sigma (X_{ku_2}^2 + Y_{ku_2}^2) \end{vmatrix}$$

avec

$$X_{ku_n} = \frac{\partial X_k}{\partial u_n}, \qquad Y_{ku_n} = \frac{\partial Y_k}{\partial u_n}, \qquad \Sigma = \sum_{k=1}^{2}.$$

D'après l'inégalité fondamentale, on obtient pour l'aire élémentaire $d\Omega^{\star(2)}$ de la surface $\mathcal{F}^{\star(2)}$ image de $\mathcal{F}^{(2)}$ par la T. P. **W**

$$A\ d\Omega^{(2)} \leqq d\Omega^{\star(2)} \leqq B\ d\Omega^{(2)},$$

et par conséquent

$$A \text{ aire}(\mathcal{F}^{(2)}) \leqq \text{aire}(\mathcal{F}^{\star(2)}) \leqq B \text{ aire}(\mathcal{F}^{(2)}),$$

si l'on comprend par *aire*, l'aire indiquée au sens de M. Bergmann telle que nous l'avons définie précédemment.