BULLETIN DE LA S. M. F.

MENAHEM SCHIFFER

Sur la variation du diamètre transfini

Bulletin de la S. M. F., tome 68 (1940), p. 158-176
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1940__68__158_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA VARIATION DU DIAMÈTRE TRANSFINI;

PAR M. MENAHEM SCHIFFER.

(Jérusalem).

1. Introduction. — Considérons dans le plan z tous les ensembles bornés et fermés E. A chacun d'eux adjoignons la suite de nombres suivante :

$$(1) \qquad d_n(E) = \sqrt[\binom{n}{2}]{\max_{a_\nu \subset E} \prod_{\nu < \mu}^{1\ldots n} |a_\nu - a_\mu|} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

M. Fekete (¹) a démontré que ces nombres non négatifs, les « diamètres de l'ordre n de E », convergent pour $n \to \infty$ en décroissant vers une limite $d(E)$, le diamétre transfini de E. Si C est un continu (²) borné, on peut représenter son extérieur conformément sur l'extérieur d'un cercle à l'aide d'une fonction univalente $h(z)$ normée à l'infini [à savoir $h(\infty) = \infty$, $h'(\infty) = 1$]; on sait que le rayon de ce cercle sera égal à $d(C)$ [*voir* (¹), théorème IX, p. 239]. C'est pourquoi $d(C)$ est appelé, dans le cas d'un continu, le rayon de représentation de C.

Dans une Note précédente (³) j'ai traité le problème d'extrémum suivant : Pour tout n fixe trouver parmi tous les continus C avec $d(C) = 1$, dont l'ensemble complémentaire est d'un seul tenant, les continus C_n admettant la valeur maximum Δ_n pour $d_n(C)$. Pour tout n on obtient donc un problème d'extrémum, et

(¹) M. FEKETE, *Ueber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten* (*Math. Zeitschr.*, t. 17, 1923, p. 228-249).

(²) Dans cette Note nous appellerons continu seulement des *continus propres*, c'est-à-dire des continus contenant deux points au moins.

(³) M. SCHIFFER, *Sur un problème d'extrémum de la représentation conforme* (*Bull. Soc. math. France*, t. 66, 1938, p. 48-55).

j'ai développé une méthode de variations infinitésimales ([4]) permettant de traiter le cas général et de caractériser les continus extrémum C_n pour tout n. J'ai démontré que ces continus sont des ensembles sans points intérieurs et composés d'un nombre fini d'arcs analytiques satisfaisant tous à la même équation différentielle du premier ordre.

Nous pouvons en déduire une propriété caractéristique pour les continus C_n. En effet, choisissons sur C_n un système de n points $a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}$ pour lequel le produit

$$(1') \qquad \prod_{\nu<\mu}^{1\ldots n} |a_\nu - a_\mu| \qquad (a_\nu \subset C_n)$$

devient maximum. Alors *nous pouvons caractériser* C_n *comme le continu, contenant les points* $a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}$ *et ayant le diamètre transfini le plus petit possible.* Car, d'une part, supposons qu'il y ait un continu C', contenant les $a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}$ et avec $d(C') < 1$; alors on pourrait construire l'ensemble C'' avec $d(C'') = 1$, en soumettant C' à une homothétie de rapport $d(C')^{-1}$, dont le $d_n(C'')$ deviendrait $d(C')^{-1}\, d_n(C')$, c'est-à-dire plus grand que $d_n(C_n)$, en contradiction avec la propriété extrémale de C_n. D'autre part, si un continu C' contenant les $a_\nu^{(n)}$ satisfait à $d(C') = 1$, il doit coïncider avec C_n. En effet, on a

$$d_n(C') \geqq d_n(C_n) = \Delta_n,$$

parce que C' contient le système $a_\nu^{(n)}$; mais à cause de $d(C') = 1$, on a par définition $\Delta_n \geqq d_n(C')$. Donc $d_n(C') = \Delta_n$, C' est un continu extrémum pour n et satisfait à la même équation différentielle de premier ordre que C_n. Ces deux continus ayant les points $a_\nu^{(n)}$ communs, ils coïncident entièrement, d'après le théorème d'unicité, pour les équations en question.

M. Pólya posa la question générale de trouver pour n points $a_1, \ldots, a_n$, donnés arbitrairement, un continu borné C qui les contient et possède le diamètre transfini le plus petit possible.

([4]) *Loc. cit.* ([3]). *Voir* aussi : M. SCHIFFER, *A method of variation within the family of simple functions* (*Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. 44, 1938, p. 432-449).

Après que M. Pólya eut réussi à résoudre ce problème pour certains cas spéciaux ([5]), M. Grötzsch donna la solution la plus générale à l'aide de sa méthode des bandes ([6]).

Dans la présente Note je résous le même problème à l'aide des variations infinitésimales, en me servant d'un théorème de MM. Fekete et Leja (§ 3). On y trouvera une nouvelle méthode d'application de ces variations qui permet aussi la solution d'autres problèmes d'extrémum concernant le diamètre transfini (§§ 4 et 5).

2. Le changement du diamètre transfini par une variation infinitésimale de l'ensemble. — La solution du problème de Pólya-Grötzsch pour le cas $n = 2$ est connue depuis longtemps. On sait que le continu C contenant deux points donnés et de diamètre transfini $d(C)$ minimum est le segment rectiligne joignant ces deux points. Notre méthode permet de résoudre le problème général; mais pour simplifier les calculs suivants, nous nous bornerons au cas $n = 3$ et nous supposerons $a_1, a_2, a_3 \equiv 0, 1, \eta$. De cette recherche spéciale on pourra tirer aisément le procédé général. Soit donc C un continu borné contenant les points 0, 1 et η, dont l'ensemble complémentaire est d'un seul tenant ([7]), et étudions le changement de $d(C)$ pour une déformation infinitésimale qui ne déplace pas ces trois points.

z_0 étant un point à l'extérieur de C, nous formons la fonction

$$(2) \qquad z^* = u_\varepsilon(z) = z + \varepsilon e^{i\varphi} \frac{z(z-1)(z-\eta)}{z - z_0} \qquad (\varepsilon > 0, \ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi).$$

Celle-ci est holomorphe et univalente dans tout domaine borné D, contenant C dans son intérieur, mais z_0 dans son extérieur, si $\varepsilon = \varepsilon(D)$ est choisi suffisamment petit. Elle transforme C en un

---

([5]) G. Pólya, *Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete, III* (*Sitzungsberichte Akad. Berlin*, 1929, p. 55-62).

([6]) H. Grötzsch, *Ueber ein Variationsproblem der konformen Abbildung* (*Berichte*, Leipzig, t. 82, 1930, p. 251-263).

([7]) Cette restriction ne diminue pas la généralité parce qu'on peut adjoindre au continu donné tout son ensemble complémentaire, sauf le domaine contenant le point à l'infini sans changer son diamètre transfini.

continu C_ε^* qui contient aussi les points o, 1, η, parce que $u_\varepsilon(z)$ transforme ces trois points en eux-mêmes. L'ensemble complémentaire de C_ε^* est aussi d'un seul tenant. Pour ε suffisamment petit, C_ε^* est arbitrairement rapproché de C au sens de Fréchet.

Fixons maintenant deux domaines D et D' avec les propriétés mentionnées ci-dessus et tels que D' avec tous ses points frontières se trouve dans D. Soit A le minimum des distances entre les points frontières de D' et de D. Posant

$$(3) \qquad \varepsilon_0 = \frac{A}{2 \operatorname*{borne\ sup.}_{z \subset D} \left| \dfrac{z(z-1)(z-\eta)}{z-z_0} \right|},$$

nous pouvons affirmer, d'après la formule d'inversion de Lagrange, que pour $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$ la fonction inverse de (2) $z = u_\varepsilon^{-1}(z^*)$ est régulière et univalente dans $\overline{D}'$, région obtenue de D' en lui adjoignant sa frontière. Cette fonction peut être développée dans cette région sous la forme

$$(4) \qquad u_\varepsilon^{-1}(z^*) = z^* - \frac{\varepsilon}{1!} e^{i\varphi} \frac{z^*(z^*-1)(z^*-\eta)}{z^*-z_0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} r(z_1^* \varepsilon);$$

$r(z_1^* \varepsilon)$ représentant une fonction holomorphe de ε et de z^* dans $\overline{D}'$. En outre, nous choisissons $\varepsilon_1 \leqq \varepsilon_0$ tel que tous les ensembles C_ε^* se trouvent dans $\overline{D}'$ si $\varepsilon < \varepsilon_1$.

Après ces préparatifs, calculons et comparons les diamètres transfinis de C et de C_ε^* pour $\varepsilon \leqq \varepsilon(D)$. Nous pàrtons des équations

$$(5) \qquad d(C) = \lim_{n=\infty} d_n(C); \qquad d(C_\varepsilon^*) = \lim_{n=\infty} d_n(C_\varepsilon^*).$$

En outre nous nous servirons de la relation limite suivante, mentionnée à la fin de l'Introduction, qui a été trouvée indépendamment par M. Fekete et par M. Leja ([8]).

([8]) Dans la forme citée ci-dessus le théorème m'a été indiqué par M. Fekete qui l'a énoncé dans un Mémoire inédit sur l'approximation de fonctions analytiques à l'aide de polynomes, écrit en 1926 et professé dans son cours à l'Université hébraïque dès 1933. Le théorème découle d'un théorème antérieur du même auteur : *Ueber den absoluten Betrag von Polynomen, welche auf einer Punktmenge gleichmässig beschränkt sind*, théorème XIII (*Math. Zeitschr.*, t. 26, 1927. p. 324-344). Le théorème est obtenu aussi en combinant un théorème de M. Kalmàr [*Ueber Interpolation* (*Matematikai és Physikai Lapok*, 1926, p. 120-149)] et un théorème de M. Fekete [*Ueber Interpolation* (*Z. f. angew.*

Soit C *un continu borné dont l'ensemble complémentaire est d'un seul tenant. Soit* $z_1^{(n)}, \ldots, z_n^{(n)}$ *l'ensemble des points sur* C, *donnant au produit* (1′) *la valeur maximale, les* a_ν *variant sur* C. *Alors on a uniformément dans tout domaine* $\overline{\mathrm{D}}$ *borné et fermé qui ne contient pas de points de* C *l'identité*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\prod_{\nu=1}^{n} (z - z_\nu^{(n)})} = h(z). \tag{6}$$

$h(z)$ *est la fonction univalente et normée à l'infini qui représente l'extérieur de* C *sur le domaine circulaire* $|\zeta| > d(\mathrm{C})$.

Grâce à l'uniformité de la convergence, on déduit de (6) la relation limite pour les dérivés logarithmiques

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{z - z_\nu^{(n)}} = \frac{h'(z)}{h(z)}, \tag{7}$$

valable uniformément dans $\overline{\mathrm{D}}$. Pour $|z|$ suffisamment grand, $h(z)$ a le développement $h(z) = z + \alpha + \beta z^{-1} + \ldots$, ce qui entraîne

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{1}{z} - \frac{\alpha}{z^2} + \ldots. \tag{7'}$$

Pour l'usage ultérieur tirons de (7) et de (7′), par comparaison des coefficients du développement de Laurent par rapport à z, l'identité spéciale

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu^{(n)} = -\alpha. \tag{8}$$

On obtient des équations analogues par rapport à C_ε^*, en consi-

---

Math., t. 6, 1926, p. 410-413)]. *Voir* aussi : Walsh, *Interpolation and Approximation*, New York, 1935, théorème III, p. 159, et théorème VI, p. 170.

M. Leja a donné une version équivalente du théorème dans sa Note : *Construction de la fonction analytique effectuant la représentation conforme d'un domaine plan quelconque sur le cercle* (*Math. Ann.*, t. 111, 1935, p. 501-504). *Voir* aussi ses Notes antérieures : *Une méthode de construction de la fonction de Green appartenant à un domaine plan quelconque* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 198, 1934, 231-234); *Sur les suites de polynomes, les ensembles fermés et la fonction de Green* (*Ann. Soc. Polon. math.*, t. 12, 1934, p. 57-71).

dérant les points extrémum $z_\nu^{*(n)}$, la fonction représentant $h_\varepsilon^*(z)$ et le premier coefficient $\alpha^*(\varepsilon)$ de cette dernière.

D'après (1) on a l'inégalité

$$(9)\qquad \log d_n(C_\varepsilon^*) \geqq \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\nu<\mu}^{1\ldots n} \log | u_\varepsilon(z_\nu^{(n)}) - u_\varepsilon(z_\mu^{(n)}) |,$$

parce que les $u_\varepsilon(z_\nu^{(n)})$ se trouvent sur C_ε^* et leur produit de différences ne peut donc pas surpasser la valeur maximum $d_n(C_\varepsilon^*)^{\binom{n}{2}}$. On a donc

$$(10)\qquad \log d_n(C_\varepsilon^*) \geqq \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\nu<\mu}^{1\ldots n} \log | z_\nu^{(n)} - z_\mu^{(n)} | + \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\nu<\mu}^{1\ldots n} \log | 1 + \varepsilon e^{i\varphi} K(z_\nu^{(n)}; z_\mu^{(n)}) |,$$

avec

$$(11)\qquad K(z_\nu^{(n)}; z_\mu^{(n)}) = z_\nu^{(n)} + z_\mu^{(n)} - (1+\eta) + z_0 - \frac{z_0(z_0-1)(z_0-\eta)}{(z_\nu^{(n)} - z_0)(z_\mu^{(n)} - z_0)}.$$

Désignons par k le maximum de $|K(z; z')|$ pour tous les couples de points z, z' dans $\overline{D}'$. On a pour $\varepsilon < \frac{1}{2k}$

$$(12)\qquad \log d_n(C_\varepsilon^*) \geqq \log d_n(C) + R\left\{ e^{i\varphi}\, \varepsilon \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\nu<\mu}^{1\ldots n} K(z_\nu^{(n)}; z_\mu^{(n)}) \right\} + \varepsilon^2 H_n(z_\nu^{(n)}; \varepsilon),$$

avec H_n satisfaisant à l'inégalité

$$(13)\qquad | H_n(z_\nu^{(n)}; \varepsilon) | \leqq \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3}\varepsilon + \frac{k^4}{4}\varepsilon^2 + \ldots = \frac{1}{\varepsilon^2}[\log(1-k\varepsilon)^{-1} - k\varepsilon] < 4k^2\left[\log 2 - \frac{1}{2}\right].$$

En passant à la limite $n=\infty$, on tire de (11), à l'aide de (7) et (8),

$$(14)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\nu<\mu}^{1\ldots n} K(z_\nu^{(n)}; z_\mu^{(n)}) = -(1+\eta) + z_0 - 2\alpha - z_0(z_0-1)(z_0-\eta)\frac{h'(z_0)^2}{h(z_0)^2},$$

et de (5), (12) et (14) suit

$$(15)\quad \log d(C_\varepsilon^\star) \geqq \log d(C) + R\left\{e^{i\varphi}\varepsilon\left[z_0-(1+\eta)-2\alpha - z_0(z_0-1)(z_0-\eta)\frac{h'(z_0)^2}{h(z_0)^2}\right]\right\} + \varepsilon^2 H(\varepsilon),$$

$H(\varepsilon)$ satisfaisant également à l'inégalité (13).

Ayant choisi $\varepsilon < \varepsilon_1$, nous pouvons changer dans toutes les considérations précédentes les rôles de C et de $C_\varepsilon^\star$. Au lieu de la fonction (2) paraîtra maintenant la fonction (4), différente de la première par le changement de $e^{i\varphi}$ en $-e^{i\varphi}$ et par l'addition du terme $\frac{\varepsilon^2}{2}r(z_1^\star\varepsilon)$. $r(z_1^\star\varepsilon)$ étant holomorphe dans $\overline{D'}$, on a dans ce domaine

$$(16)\qquad \left|\frac{r(z,\varepsilon)-r(z',\varepsilon)}{z-z'}\right| \leqq b(D').$$

On peut donc énoncer une inégalité analogue à (10), dans laquelle il faut remplacer $K(z_\gamma^{(n)};\, z_\mu^{(n)})$ par

$$(17)\qquad K^\star(z_\nu^{\star(n)};\, z_\mu^{\star(n)}) = K(z_\nu^{\star(n)};\, z_\mu^{\star(n)}) + a(z_\nu^{\star(n)};\, z_\mu^{\star(n)})\, b(D'),$$

avec $|a(z_\nu^{\star(n)};\, z_\mu^{\star(n)})| < \varepsilon$. Maintenant les conclusions précédentes amènent l'inégalité suivante, analogue à (15) :

$$(18)\quad \log d(C) \geqq \log d(C_\varepsilon^\star) - R\left\{e^{i\varphi}\varepsilon\left[z_0-(1+\eta)-2\alpha^\star(\varepsilon) - z_0(z_0-1)(z_0-\eta)\frac{h_\varepsilon^{\star\prime}(z_0)^2}{h_\varepsilon^\star(z_0)^2}\right]\right\} + \varepsilon^2 G(\varepsilon).$$

Ici $G(\varepsilon)$ est borné pour ε suffisamment petit. Quand ε converge vers zéro, le continu $C_\varepsilon^\star$ converge vers C au sens de Fréchet; donc, d'après un théorème classique de M. Carathéodory, on a

$$h_\varepsilon^\star(z_0) \to h(z_0), \qquad \alpha^\star(\varepsilon) \to \alpha.$$

On déduit de là

$$(19)\quad \log d(C) \geqq \log d(C_\varepsilon^\star) - R\left\{e^{i\varphi}\varepsilon\left[z_0-(1+\eta)-2\alpha - z_0(z_0-1)(z_0-\eta)\frac{h'(z_0)^2}{h(z_0)^2}\right]\right\} + \varepsilon\, o(\varepsilon).$$

$o(\varepsilon)$ désignant un terme satisfaisant à $\lim\limits_{\varepsilon=0} o(\varepsilon)=0$. De (15) et (19) découle enfin

$$(20)\quad \log d(C_\varepsilon^*)=\log d(C) + R\left\{e^{i\varphi}\varepsilon\left[z_0-(1+\eta)-2\alpha - z_0(z_0-1)(z_0-\eta)\frac{h'(z_0)^2}{h(z_0)^2}\right]\right\}+\varepsilon o(\varepsilon).$$

Le deuxième terme à droite représente la variation de $\log d(C)$ *pour la déformation infinitésimale* (2). Il est évident qu'on peut obtenir de la même manière des formules analogues pour toute autre déformation infinitésimale. En effet, nous nous servirons dans ce mémoire, pour d'autres recherches, des déformations d'un autre type. Mais la transformation spéciale (2) suffit pour résoudre le présent problème.

3. Solution du problème de Pólya-Grötzsch. — Démontrons d'abord l'existence d'un continu C résolvant le problème de Pólya-Grötzsch. Encore une fois nous nous bornerons au cas 0, 1, η, d'où l'on tire aisément le procédé général. Considérons donc tous les continus C contenant trois points 0, 1, η et dont l'ensemble complémentaire est d'un seul tenant. Parmi eux se trouve le cercle autour de l'origine avec le rayon $\max(1,|\eta|)$. Puisque le diamètre transfini d'un cercle est égal à son rayon, nous en tirons que la limite inférieure δ des $d(C)$ ne surpasse pas la valeur $\max(1,|\eta|)$. D'autre part la solution du problème pour $n=2$ montre que le diamètre transfini d'un continu contenant deux points n'est jamais inférieur à celui du segment rectiligne qui les joint. Donc $\delta \geqq \frac{1}{4}$, car $\frac{1}{4}$ est le diamètre transfini du segment rectiligne $<0, 1>$. La limite inférieure δ de tous les $d(C)$ est donc un nombre positif.

Parmi tous les continus C choisissons une suite partielle C_n telle qu'on ait $\lim\limits_{n=\infty} d(C_n)=\delta$. Considérons la suite correspondante des fonctions univalentes

$$(21)\qquad z=f_n(\xi)=d(C_n)\xi+\alpha_n+\beta_n\xi^{-1}+\ldots,$$

qui représentent le domaine $|\xi|>1$ sur l'extérieur de C_n. Ces fonctions forment une famille normale, comme on voit aisément en passant à la suite des fonctions

$$(21') \qquad f_n\left(\frac{1}{\eta}\right)^{-1} = d(C_n)^{-1}\eta + a_n\eta^2 + \ldots,$$

univalentes et holomorphes dans le cercle $|\eta| < 1$, et en considérant le fait que $\lim_{n=\infty} d(C_n) = \delta > 0$. On peut donc choisir une suite partielle $f_{n'}(\xi)$ convergente uniformément dans tout domaine $|\xi| > r > 1$ vers une fonction univalente et holomorphe

$$(21'') \qquad f(\xi) = \delta\xi + \alpha + \beta\xi^{-1} + \ldots.$$

Dans ce domaine $f(\xi)$ n'atteint pas les valeurs 0, 1, η, parce que les fonctions $f_{n'}(\xi)$ ne le font pas. Donc $f(\xi)$ représente le domaine $|\xi| > 1$ d'une manière biunivoque et conforme sur l'extérieur d'un continu C, qui contient les points 0, 1, η. En outre, on voit que le rayon de représentation de C est δ. On a donc $d(C) = \delta$ et C est un continu résolvant le problème en question.

Soumettons maintenant un continu extrémal C (dont nous venons de démontrer l'existence) aux transformations considérées dans le paragraphe 2. Tous les ensembles C_ε^* obtenus à leur aide sont des ensembles de concurrence à C, parce que tous contiennent aussi les points 0, 1, η. On a donc $\log d(C_\varepsilon^*) \geqq \log d(C)$ et à l'aide de (20) on trouve pour $\varepsilon = 0$

$$(22) \qquad R\left\{e^{i\varphi}\left[z_0 - (1+\eta) - 2\alpha - z_0(z_0-1)(z_0-\eta)\frac{h'(z_0)^2}{h(z_0)^2}\right]\right\} \geqq 0.$$

φ étant arbitraire, l'inégalité (22) est possible seulement si l'on a

$$(22') \qquad z_0 - (1+\eta) - 2\alpha = z_0(z_0-1)(z_0-\eta)\frac{h'(z_0)^2}{h(z_0)^2}.$$

Cette égalité doit être valable pour tout z_0 à l'extérieur de C et fournit donc une équation différentielle caractérisant $h(z)$.

Pour trouver C, il vaut mieux considérer la fonction $z = f(\xi)$ inverse de $\xi = h(z)$. $f(\xi) = \xi - \alpha + b\xi^{-1} + \ldots$ représente le domaine $|\xi| > d(C)$ conformément sur l'extérieur de C; cette fonction satisfait à l'équation différentielle

$$(23) \qquad \xi^2 f'(\xi)^2[f(\xi) - (1+\eta+2\alpha)] = f(\xi)[f(\xi)-1][f(\xi)-\eta],$$

ou en écrivant d'une manière un peu plus générale a_1, a_2, a_3 au lieu de o, 1, η

$$\begin{aligned}(23') \qquad & \xi^2 f'(\xi)^2 [f(\xi) - (a_1 + a_2 + a_3 + 2\alpha)] \\ & = [f(\xi) - a_1][f(\xi) - a_2][f(\xi) - a_3].\end{aligned}$$

Dans les équations (22′), (23) et (23′) paraît toujours le paramètre indéterminé α; celui-ci est fixé par la condition que le continu C contienne les trois points o, 1, η. Pendant que l'existence d'un tel α résulte de l'existence d'une solution du problème d'extrémum, il n'est nullement trivial qu'il existe un seul α, donc un seul continu résolvant le problème. Ce fait a été démontré, cependant, par M. Grötzsch à l'aide de la méthode de continuité. L'équation (22′) se trouve aussi chez M. Grötzsch sous une forme un peu différente ([9]).

Des propriétés élémentaires du diamètre transfini découle que le continu extrémal C ne possède pas de points intérieurs ([10]) et que C est donc une coupure du plan z. D'après des théorèmes bien connus de la théorie des équations différentielles, la fonction $f(\xi)$, solution de l'équation différentielle (23′), est holomorphe en tout point du cercle $|\xi| = d(C)$, pour lequel $f(\xi)$ est différente de a_1, a_2, a_3 et $a_1 + a_2 + a_3 + 2\alpha$, sauf en un nombre fini de points. Donc C est composé d'arcs analytiques

$$z = z(\varphi) = f\{ e^{i\varphi} d(C) \}$$

satisfaisant tous à l'équation différentielle

$$(24) \qquad \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 \frac{a_1 + a_2 + a_3 + 2\alpha - z}{(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)} = 1.$$

De (24) on tire enfin que C est composé de trois arcs analytiques, sortant de a_1, a_2, a_3 respectivement et se rencontrant en

$$a_1 + a_2 + a_3 + 2\alpha$$

sous des angles de 120°.

Pour le continu $C_3 : z = z(s)$ résolvant le problème d'extrémum

---

([9]) *Loc. cit.* ([5]), p. 262.
([10]) Je dois cette remarque à M. Fekete.

traité au paragraphe 1 par rapport à $d_3(\mathrm{C})$, j'ai trouvé l'équation différentielle ([11])

$$(24') \qquad \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \frac{\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)-z}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)} \geqq 0,$$

s désignant un paramètre réel quelconque et a_1, a_2, $a_3 \subset \mathrm{C}$ satisfaisant à

$$d_3(\mathrm{C}_3) = |a_1-a_2|\,|a_1-a_3|\,|a_2-a_3|.$$

L'inégalité différentielle (24′) équivaut à une équation différentielle du type (24); on obtient la dernière en choisissant dans (24′) au lieu de s le paramètre $t = \int_0^s r(s)\,ds$, $r^2(s)$ désignant le premier membre de (24′). On voit donc que dans le cas spécial du problème de Pólya-Grötzsch, où les points a_1, a_2, a_3, fixant le continu C, sont les points extrémaux du problème que nous venons de mentionner, on sait de plus que le paramètre α est égal à $-\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)$.

4. Problème d'extrémum par rapport à des ensembles composés de deux continus séparés. — J'ai démontré récemment l'inégalité ([12])

$$(25) \qquad d(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leqq d(\mathrm{A}) + d(\mathrm{B}),$$

pour tout continu A + B, *composé de deux continus* A *et* B *avec des points communs et situés de manière qu'il existe une courbe de Jordan, séparant les points de* A *et* B *qui ne sont pas communs aux deux ensembles.* L'égalité ne vaut que dans le cas où A + B est un segment rectiligne, composé de deux segments A et B. Ce fait combiné avec l'inégalité (25) donne la solution du problème d'extrémum suivant : On cherche le continu A + B avec $d(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ donné, qu'on peut décomposer de la façon mentionnée en deux continus A et B de manière

---

([11]) *Loc. cit.* ([3]), p. 53.

([12]) SCHIFFER, *On the subadditivity of the transfinite diameter* (*Proc. London Math. Soc.*, II. s., sous presse).

que $d(\mathrm{A})+d(\mathrm{B})$ soit le plus petit possible. D'après le précédent on sait que la solution est fournie par un segment rectiligne.

Nous allons proposer maintenant le même problème d'extrémum pour le cas d'un ensemble $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ composé de deux continus A et B, l'ensemble complémentaire de chacun d'eux étant d'un seul tenant. Démontrons d'abord que toute fonction normée à l'infini, univalente et holomorphe dans l'extérieur $\widetilde{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$ de $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ (excepté le pôle à l'infini) représente ce domaine sur l'extérieur $\widetilde{\mathrm{A}'+\mathrm{B}'}$ d'un ensemble $\mathrm{A}'+\mathrm{B}'$ (composé évidemment aussi de deux continus séparés A' et B') de diamètre transfini

$$d(\mathrm{A}'+\mathrm{B}')=d(\mathrm{A}+\mathrm{B}).$$

En effet, considérons la fonction de Green $g(z\,;\infty)$ de $\widetilde{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$ avec le pôle logarithmique à l'infini et dont l'existence suit de théorèmes classiques. Autour de l'infini elle possède donc le développement

$$g(z\,;\infty)=\log|z|+\gamma+o\left(\frac{1}{|z|}\right);$$

on sait [13] que γ est égal à $-\log d(\mathrm{A}+\mathrm{B})$. Si la fonction

$$z(\xi)=\xi+\alpha+\beta\xi^{-1}+\ldots$$

effectue la représentation de $\widetilde{\mathrm{A}'+\mathrm{B}'}$ sur $\widetilde{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$, la fonction de Green pour $\widetilde{\mathrm{A}'+\mathrm{B}'}$ sera $g[z(\xi)\,;\infty]$ et autour de l'infini elle aura le développement

$$g[z(\xi)\,;\infty]=\log|\xi|+\gamma+o\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Donc $\mathrm{A}'+\mathrm{B}'$ a même deuxième terme γ et par là même diamètre transfini que $\mathrm{A}+\mathrm{B}$. Nous voyons donc que le diamètre transfini de $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ est invariant par rapport à des représentations conformes biunivoques et normées à l'infini, de son extérieur. Il est évident que le même résultat vaut pour tout ensemble

---

([13]) G. Szegö, *Bemerkung zu einer Arbeit von Herrn Fekete : Ueber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Kœffizienten* (*Math. Zeitschr*, t. 21, 1924, p. 203-208, voir p. 204).

fermé et borné, pour l'extérieur duquel la fonction de Green existe (au sens classique). Pour le cas que cet extérieur est d'un seul tenant le résultant découle du théorème de M. Fekete [*loc. cit.* ([2])].

Après ces préparatifs, cherchons parmi tous les ensembles $A' + B'$ qu'on peut obtenir de $A + B$ à l'aide de telles représentations et pour lesquels on a donc $d(A' + B') = d(A + B)$ celui pour lequel $d(A') + d(B')$ a la valeur la plus petite possible. Si l'on connaît les continus extrémaux A' et B', on peut évaluer la borne inférieure de $d(A) + d(B) - d(A + B)$ pour toute classe d'ensembles, les extérieurs desquels on peut représenter l'un sur l'autre à l'aide d'une fonction univalente et normée à l'infini.

Pour résoudre ce problème nous nous servirons du lemme suivant ([14]) :

Lemme. — *a*). *Soit* C *un continu borné dans le plan* z *contenant plus d'un point et dont l'ensemble complémentaire est d'un seul tenant. Alors il y a pour tout* $z_0 \subset C$ *et pour toute valeur du paramètre* $\rho > 0$ *des fonctions* $F_\rho(z; z_0, C)$ *univalentes et holomorphes dans l'extérieur* $\tilde{C}$ *de* C *(un pôle à l'infini excepté) et possédant autour de l'infini le développement*

$$(26) \qquad F_\rho(z; z_0, C) = z - z_0 + \frac{a\rho^2}{z - z_0} + \frac{b\rho^3}{(z - z_0)^2} + \dots,$$

avec $|a| \leqq 4^2, |b| \leqq 4^3, \dots$. *Ce développement est donc valable dans tout le domaine* $|z - z_0| > 4\rho$.

b.) *Soit* $s(z)$ *une fonction analytique sur* C *non identiquement nulle. Supposons que, pour tout point* $z_0 \subset C$ *et pour toute suite de fonctions* $F_{\rho_\nu}(z; z_0, C)$ *pour laquelle on a* ([15])

$$\lim_{\rho_\nu \to 0} a = \alpha \neq 0,$$

on ait $R\{\alpha s(z_0)\} \geqq 0$. *Alors* C *est une courbe analytique* $z(t)$,

---

([14]) Voir la Note *loc. cit.* ([4]), p. 433.

([15]) Il y a telles suites de fonctions, par exemple celle définie par la formule (2″) de la Note citée ([4]), p. 435.

satisfaisant à l'équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 s(z) + 1 = 0. \tag{27}$$

Retournons à notre problème d'extrémum. L'existence d'un ensemble extrémum $A' + B'$ peut être démontrée à l'aide de la conception des familles normales et en se servant du théorème de convergence de Carathéodory-Bieberbach pour la représentation conforme de domaines variables. Sur la partie A' de cet ensemble choisissons un point z_0 et formons la famille $F_\rho(z; z_0, A')$ du lemme. Si ρ est assez petit, on aura dans tout domaine fermé $\overline{D}$ contenant B' mais ne contenant pas z_0

$$F_\rho(z; z_0, A') = z - z_0 + \frac{a\rho^2}{z - z_0} + \rho^3 h(z; \rho), \tag{26'}$$

avec $h(z; \rho)$ holomorphe dans $\overline{D}$. Cette représentation transforme l'extérieur $\widetilde{A'}$ de A' et l'extérieur $\widetilde{A' + B'}$ de $A' + B'$ en ceux de A^*_ρ et de $A^*_\rho + B^*_\rho$. Grâce à l'invariance du diamètre transfini des ensembles par rapport à des représentations conformes de leur extérieur, normées à l'infini, on a

$$d(A^*_\rho) = d(A') \qquad \text{et} \qquad d(A^*_\rho + B^*_\rho) = d(A' + B').$$

Il ne reste donc qu'à étudier combien $d(B')$ est changé par la déformation (26'), étant sûr que ce nombre ne peut que croître, vu la propriété minimum de $A' + B'$.

Pour cela nous avons à faire un calcul absolument analogue à celui du paragraphe 2, qui nous fournit immédiatement ([16])

$$\log d(B^*_\rho) = \log d(B') - R\left\{ a\rho^2 \frac{\varphi'(z_0)^2}{\varphi(z_0)^2} \right\} + \rho^2 o(\rho). \tag{28}$$

Ici $\xi = \varphi(z) = z + c_0 + c_1 z^{-1} + \ldots$ représente biunivoquement l'extérieur $\widetilde{B'}$ de B' sur le domaine $|\xi| > d(B')$. De $d(B^*_\rho) \geqq d(B')$

([16]) Ce résultat découle d'un théorème général permettant d'exprimer la variation de la fonction de Green d'un domaine $\widetilde{B}$ soumis à une déformation infinitésimale du type (26') avec $z_0 \subset \widetilde{B}$. *Voir* M. Schiffer. *Sur la variation de la fonction de Green* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 209, 1939, p. 980-982).

découle d'après (28)

$$R\left\{ a\frac{\varphi'(z_0)^2}{\varphi(z_0)^2}\right\} + o(\rho) \leqq 0. \tag{29}$$

Choisissons maintenant pour z_0 une suite $F_{\rho_\nu}(z;\ z_0, A')$ pour laquelle $\lim\limits_{\rho_\nu \to 0} a = \alpha \neq 0$ existe. On obtient de (29)

$$R\left\{ \alpha\left(-\frac{\varphi'(z_0)^2}{\varphi(z_0)^2}\right)\right\} \geqq 0. \tag{29'}$$

$-\varphi'(z)^2\varphi(z)^{-2}$ est une fonction analytique sur A' et pas identiquement nulle. Nous pouvons donc appliquer la partie *b.*) de notre lemme en prenant $-\varphi'(z)^2\varphi(z)^{-2}$ au lieu de $s(z)$. Nous voyons donc que A' est une courbe analytique $z(t)$, satisfaisant à l'équation différentielle

$$z'(t)^2\frac{\varphi'[z(t)]^2}{\varphi[z(t)]^2} = 1, \tag{30}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\log\varphi[z(t)] = r = \pm 1, \tag{30'}$$

$$\varphi[z(t)] = C\, e^{rt}. \tag{30''}$$

C désignant une constante. Le résultat obtenu peut être énoncé aussi sous la forme suivante : Si l'on représente $\widetilde{B}'$ sur le domaine circulaire $|\xi| > d(B')$, alors A' devient un segment rectiligne T_A dont le prolongement passe par l'origine.

Si T_A a la direction $e^{i\alpha}$, la transformation additionnelle

$$\eta(\xi) = \xi + \frac{d(B')^2 e^{2i\alpha}}{\xi} \tag{31}$$

changera le cercle $|\xi| = d(B')$ en un segment rectiligne S_B avec la direction $e^{i\alpha}$, pendant que T_A sera représenté sur un segment rectiligne S_A dans le prolongement de S_B. $\eta[\varphi(z)]$ étant univalente, normée et holomorphe dans $\widetilde{B}'$, on a

$$d(S_B) = d(B'); \qquad d(S_A + S_B) = d(A' + B'). \tag{32}$$

Dans toutes nos considérations on peut changer les rôles de A et B'; on obtient donc une fonction $\eta^+[\varphi^+(z)]$ qui représente l'ensemble $A' + B'$ sur deux segments rectilignes S_A^+, S_B^+ situés sur un rayon passant par l'origine avec la direction $e^{i\beta}$. En outre,

$\eta^+[\varphi^+(z)]$ est normée, holomorphe et univalente dans l'extérieur $\widetilde{A'}$ de A'. Donc on a

$$(32') \qquad d(S_A^+) = d(A'); \qquad d(S_A^+ + S_B^+) = d(A' + B').$$

On peut représenter l'extérieur $\widetilde{S_A + S_B}$ de $S_A + S_B$ sur l'extérieur $\widetilde{S_A^+ + S_B^+}$ de $S_A^+ + S_B^+$ d'une manière conforme, univalente et conservant le point à l'infini. On trouve cette représentation en transformant le domaine $\widetilde{S_A + S_B}$ dans le plan η d'abord sur le domaine $\widetilde{A' + B'}$ dans le plan z; après cela on représente ce domaine sur le domaine $\widetilde{S_A^+ + S_B^+}$ dans le plan η^+. La tranformation finale $\eta^+ = \Phi(\eta)$ n'est qu'une homothétie, grâce au théorème suivant :

Soit $M + N$ *un ensemble dans le plan* η, *composé de deux segments rectilignes* M *et* N, *situés sur une même droite; soit* $M^+ + N^+$ *un ensemble du même type dans le plan* η^+. *S'il existe une fonction holomorphe* $\eta^+ = \psi(\eta)$ *représentant biunivoquement l'extérieur* $\widetilde{M + N}$ *de* $M + N$ *sur l'extérieur* $\widetilde{M^+ + N^+}$ *de* $M^+ + N^+$ *en conservant le point à l'infini, alors* $\psi(\eta)$ *n'est qu'une homothétie.*

En démontrant ce théorème, on peut supposer que les deux droites mentionnées coïncident avec les axes réels des plans respectifs. $\psi(\eta)$ est holomorphe dans $\widetilde{M + N}$ (sauf le pôle à l'infini) et peut être prolongé au-dessus de tout point intérieur d'un segment M ou N à l'aide du principe de réflexion. Celle-ci change $\psi(\eta)$ en la fonction $\overline{\psi}(\eta)$, définie à l'aide de l'équation $\overline{\psi}(\eta) = \overline{\psi(\overline{\eta})}$. L'itération d'une réflexion amène toujours à la fonction initiale. On voit donc qu'on obtient toujours l'une des valeurs $\psi(\eta)$ ou $\overline{\psi}(\eta)$, si l'on prolonge la fonction $\psi(\eta)$ le long d'un chemin fermé quelconque en évitant les extrémités de M et N. Un tel prolongement interchange $\psi(\eta)$ et $\overline{\psi}(\eta)$, ou bien ne les change point; les fonctions $\psi(\eta) + \overline{\psi}(\eta)$ et $\psi(\eta) . \overline{\psi}(\eta)$ sont donc uniformes dans tout le plan. D'après un théorème classique de Riemann, ces deux fonctions sont aussi analytiques dans les extrémités de M et de N, et n'ont donc aucune autre singularité que les pôles à l'infini. On a donc

$$(33)\qquad \psi(\eta)+\overline{\psi}(\eta)=a_1\eta+a_2,$$

$$(34)\qquad \psi(\eta)\,.\,\overline{\psi}(\eta)=a_3\eta^2+a_4\eta+a_5.$$

La fonction $\psi(\eta)$ est une racine de l'équation algébrique

$$(35)\qquad \psi(\eta)^2-(a_1\eta+a_2)\psi(\eta)+(a_3\eta^2+a_4\eta+a_5)=0,$$

c'est-à-dire

$$(35')\qquad \psi(\eta)=\frac{1}{2}\left\{a_1\eta+a_2+\sqrt{(a_1^2-4a_3)\eta^2+(2a_1a_2-4a_4)\eta+(a_2^2-4a_5)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{a_1\eta+a_2+\sqrt{q(\eta)}\right\}.$$

Les fonctions (33) et (34) étant réelles sur M et N, les coefficients a_i sont réels. Cherchons maintenant les zéros de $q(\eta)$. S'ils sont différents, ils se trouvent nécessairement sur le même segment M ou N, vu l'uniformité de $\psi(\eta)$ dans $\widetilde{M+N}$. Supposons qu'ils se trouvent sur M. Alors $q(\eta)$ sera de signe différent sur N et sur le segment de M entre les deux racines de $q(\eta)$. Mais ceci est impossible, $\psi(\eta)$ étant toujours réel sur M + N. Donc $q(\eta)$ a une racine double et $\psi(\eta)$ a la forme

$$(36)\qquad \psi(\eta)=a\eta+b,$$

comme nous l'avons affirmé.

En particulier, nous avons démontré que $\eta^+=\Phi(\eta)$ est une homothétie; celle-ci ne change pas le diamètre transfini $d(S_A+S_B)$; on voit donc aisément qu'elle ne change pas $d(S_A)$ et $d(S_B)$. De (32) et de (32') suit grâce à cette invariance

$$(37)\qquad d(A')=d(S_A);\qquad d(B')=d(S_B).$$

La valeur minimun pour $d(A)+d(B)$ *dans toute classe de pairs de continus séparés* A, B, *représentables l'un sur l'autre à l'aide d'une fonction univalente et normée à l'infini, est donc atteinte dans le cas où* A *et* B *sont deux segments rectilignes sur la même droite.* Ainsi le problème d'extrémum est résolu; pour l'évaluation quantitative de $d(A)+d(B)-d(A+B)$, il ne faut connaître que ces nombres pour des segments rectilignes sur une droite.

Nos considérations restent encore valables dans le cas limite que les continus A et B sont rapprochés jusqu'à ce qu'ils aient des points frontières communs. Ce cas contient évidemment le cas particulier décrit au commencement de ce paragraphe où il existe une courbe de Jordan séparant les points non communs de A et B. Soit $A'+B'$ un ensemble du type limite général avec $d(A'+B')$ donné et pour lequel $d(A')+d(B')$ est minimum. L'existence d'un tel ensemble peut être montrée encore une fois par le choix d'une suite d'ensembles A_n+B_n pour laquelle $d(A_n)+d(B_n)$ converge vers la limite inférieure et en se servant des théorèmes de convergence pour les fonctions attachées aux extérieurs de A_n et B_n. D'après les mêmes calculs que dans le cas précédent, on démontre alors : On peut représenter l'extérieur $\widehat{A'+B'}$ de $A'+B'$ à l'aide d'une fonction univalente normée à l'infini sur l'extérieur d'un segment de droite S_A+S_B composé de deux segments S_A et S_B. A tout point frontière de $\widehat{A'+B'}$ appartenant à A' correspond par cette représentation un point sur S_A, et à tout point frontière sur B' un point de S_B. De plus, on montre

$$d(S_A)=d(A') \qquad \text{et} \qquad d(S_B)=d(B')$$

à l'aide de considérations analogues aux précédentes. Mais nous avons, d'après des théorèmes élémentaires,

$$d(S_A)+d(S_B)=d(S_A+S_B)=d(A'+B'),$$

et par là, grâce à la propriété minimum de l'ensemble $A'+B'$, l'inégalité générale (25). En particulier, la sous-additivité du diamètre transfini est démontrée de nouveau dans le cas mentionné au commencement.

5. Autres applications de la méthode de variation. — Prenons un ensemble $A+B$ composé de deux continus séparés A et B; *il faut représenter l'extérieur* $\widehat{A+B}$ *de* $A+B$ *sur l'extérieur* $\widehat{A'+B'}$ *d'un ensemble* $A'+B'$ (du même diamètre transfini) *à l'aide d'une fonction univalente, normée à l'infini, de manière que le diamètre transfini de l'un deux* [par exemple $d(B')$] *soit maximun* (*ou minimun*).

Il est évident que ce problème permet un nombre infini de solutions. Car $A' + B'$ étant déjà un ensemble extrémal (l'existence duquel est évident), on peut faire encore des représentations conformes, holomorphes à l'extérieur de B' et normées à l'infini, sans changer $d(B')$ et $d(A'+B')$. Pour étudier tous les ensembles extrémum, il suffit donc de supposer que B' est un cercle et de chercher la forme de A'. En connaissant cette dernière, dans ce cas spécial, nous la connaîtrons aussi pour tout autre choix de B' en représentant l'extérieur de ce B' sur l'extérieur d'un cercle.

D'abord résolvons le problème de maximum. Nous procédons comme au paragraphe **4**. Nous faisons une représentation (26') et continuons le calcul jusqu'à la formule (28) qui nous indique le changement de $\log d(B')$. Puisque $\log d(B')$ est maximal, il faut que

$$\text{(38)} \qquad R\left\{a\frac{\varphi'(z_0)^2}{\varphi(z_0)^2}\right\} + o(\rho) \geqq 0$$

soit satisfait. Si B' est un cercle, nous avons $\varphi(z) \equiv z$. Il suit donc, du lemme du paragraphe **4** que A' est une courbe analytique $z = z(t)$, $z(t)$ satisfaisant à l'équation différentielle

$$\text{(39)} \qquad \frac{z'(t)^2}{z(t)^2} = -1,$$

d'où il suit que $z(t) = Ce^{it}$ et que A' *est un arc de cercle concentrique à* B'.

Dans le cas du problème minimum, on a le signe $\leqq$ au lieu du $\geqq$ dans (38) et $+1$ au lieu de -1 dans (39). Donc

$$\text{(40)} \qquad z(t) = C\,e^{t},$$

t désignant un paramètre réel. Dans ce cas A' *est un segment rectiligne dirigé vers le centre de* B'.

Il est évident que le même problème se pose pour un ensemble $A + B + \ldots + N$ composé de continus séparés $A, B, \ldots, N$ et qu'il permet une solution absolument analogue.