Bulletin de la S. M. F.

A. Marchaud

Sur quelques propriétés différentielles des ensembles

Bulletin de la S. M. F., tome 67 (1939), p. 13-25 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__S13_0>

Réun. intern. Math. (1937, Paris)
Bull. Soc. math. France,
Suppl. 1939, p. 13 à 25.

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES DES ENSEMBLES

Par M. A. MARCHAUD.

L'indulgence d'une vieille amitié me vaut l'honneur de représenter à ces Journées les Mathématiques provinciales. C'est un honneur auquel je suis particulièrement sensible et pour lequel je remercie très vivement le Comité de la Société Mathématique.

La question qui va nous occuper est une petite remarque géométrique très simple dont on peut, je crois, tirer beaucoup. Il s'agira d'*ensembles fermés* ou de *continus* de l'espace euclidien ordinaire et de leurs propriétés différentielles du premier ordre. On pourrait, comme je l'ai fait ailleurs [1], considérer des ensembles moins particuliers que les ensembles fermés. Je me bornerai néanmoins à ceux-ci, qui suffiront pour montrer l'intérêt de la remarque annoncée. Il est d'ailleurs toujours facile de déterminer quelles sont les hypothèses strictement nécessaires à la validité d'une démonstration.

On m'excusera de ne pas apporter de résultats nouveaux, c'est-à-dire que je n'aie publiés antérieurement. Mais comme ceux dont nous allons parler sont, je crois, peu connus, le mal ne sera pas trop grand.

1. Les éléments différentiels du premier ordre sont les *demi-tangentes* et les *tangentes*. Soit a un point d'un ensemble E, toute

[1] A. Marchaud, *Sur les demi-sécantes limites et sur les semi-tangentes* (*C. R.*, t. 194, p. 948, 14 mars 1932); *Sur les demi-sécantes et les semi-tangentes aux ensembles* (*Journ. Math. p. et appl.*, t. XII, Fasc. IV, 1933).

Dans la Note et le Mémoire précédents, j'appelais « *semi-tangente* » ce que j'appelle ici « *demi-tangente* ».

demi-droite d'origine a contenant un point m de l'ensemble est une *demi-sécante* à E issue de a. Les éléments d'accumulation des demi-sécantes en a sont les *demi-sécantes limites* en ce point. Celles particulières pour lesquelles les points m tendent vers a sont par définition les *demi-tangentes.* Si l'ensemble E représente les variations d'une fonction continue, les demi-tangentes correspondent aux nombres dérivés, médians ou extrêmes, selon la dénomination de M. Denjoy. Lorsque E est un arc simple, les expressions demi-tangente à droite (ou postérieure), demi-tangente à gauche (ou antérieure), ont un sens évident.

L'ensemble des demi-tangentes en un point est en quelque sorte un premier résultat de l'examen local de l'ensemble par l'intérieur, c'est-à-dire avec le point de vue placé au point considéré. Les tangentes sont au contraire des résultats d'une observation locale par l'extérieur. Si l'on demande à un élève de tracer une tangente à une courbe dessinée sur une feuille de papier, il placera sa règle de manière à *toucher* la courbe. C'est qu'il a intuitivement la vraie notion de tangente : Une *tangente* en un point a est une droite d'accumulation de sécantes à l'ensemble passant par deux points (de l'ensemble) qui tendent vers a. Bien entendu demi-tangentes et tangentes n'existent qu'en un point d'accumulation. M. Georges Bouligand a appelé *contingent* en un point l'ensemble des demi-tangentes en ce point, et *paratingent* celui des tangentes. Ce sont là des questions de terminologie sans grande importance. Personnellement je préfère dire : demi-tangente plutôt que : rayon du contingent.

Si j'ai rappelé la définition des tangentes parallèlement à celle des demi-tangentes, c'est uniquement pour bien préciser le langage. En fait, les propriétés différentielles dont nous allons parler ne font intervenir que les demi-tangentes. Comme on le verra, cette restriction apparente tient à la nature des choses. Il y a en effet une question d'orientation, mise en évidence par M. A. Denjoy dans son Mémoire fondamental *Sur les nombres dérivés des fonctions continues* [1], sur laquelle nous reviendrons tout à l'heure.

2. Il est maintenant bien connu que les nombres dérivés peuvent remplacer les dérivées dans certains énoncés classiques. M. H. Lebesgue, dont les idées et les travaux ont tant contribué au dévelop-

[1] A. Denjoy, *Sur les nombres dérivés des fonctions continues* (*Journ. de Math. p. et appl.*, t. I, 1915, p. 209).

pement des méthodes directes pour l'étude des problèmes de Géométrie différentielle, a montré qu'*une fonction continue possédant en chaque point et pour un côté invariable un dérivé nul* (*médian ou extrême*) *est une constante* (¹). Cet énoncé est celui de M. A. Denjoy, qui a donné du résultat de M. H. Lebesgue une démonstration très élégante, ne faisant pas intervenir comme celle de M. Lebesgue, des considérations analogues à celles du Théorème des accroissements finis (²). Traduisant géométriquement la démonstration de M. Denjoy, M. Georges Durand a généralisé la proposition précédente et obtenu notamment les résultats suivants.

Un arc simple quelconque, plan ou gauche, dont le contingent postérieur (*ou antérieur*) *en tout point contient une demi-droite équipollente à une demi-droite fixe, se réduit à une parallèle à cette demi-droite.*

Si un arc simple est tel que le contingent postérieur (*ou antérieur*) *en chaque point* M *contient une demi-droite* MT *parallèle à un plan fixe et toujours située d'un même côté d'un plan* Π *passant par* M *et restant parallèle à lui-même, cet arc est tout entier contenu dans un plan parallèle à* Π.

Ces énoncés (et leurs démonstrations) ont été publiés par M. G. Durand (³) dans une Note aux *Comptes rendus* parue le 14 mars 1932, Note reproduite par M. G. Bouligand dans son *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, page 209. Voici, par exemple, comment peut se démontrer la première proposition par la méthode de M. A. Denjoy. Soient Ox une demi-droite et Om_1 un arc simple possédant partout (sauf en m_1) une demi-tangente à droite parallèle à Ox. Donnons-nous un demi-cône de révolution C de sommet O et d'axe Ox. Cette demi-droite étant une demi-tangente à l'arc, celui-ci possède forcément des points dans C. Soit m' la borne vers m_1 des points de l'arc situés dans C. Si cette borne n'est pas l'extrémité de l'arc, celui-ci possède en m' une demi-tangente à droite parallèle à Ox, par suite il y a des points de l'arc $m'm_1$ dans C, ce qui conduit à une contradiction. Comme tout point de l'arc distinct

(¹) H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 1re édition, p. 72.

(²) A. Denjoy, Mémoire cité, p. 175.

(³) Georges Durand, *Sur la recherche d'une condition de planéité d'un arc simple à partir du contingent* (*C. R.*, t. 194, p. 944, 14 mars 1932).

de l'origine peut jouer le rôle d'extrémité, l'arc tout entier est dans C. Il suffit alors de prendre pour C des demi-cônes de plus en plus petits.

Indépendamment des recherches de M. Durand, je m'étais de mon côté préoccupé d'étendre le plus possible le Théorème de M. Lebesgue. Sachant par expérience (après mes études sur les continus d'ordre borné) que l'hypothèse : *courbe* pouvait parfois être remplacée par celle de *continu*, j'avais examiné la question pour des continus. C'est ainsi que j'ai été mis sur la voie du résultat qui fait l'objet de cette communication. Comme je l'ai déjà dit, ce résultat n'est pas nouveau. Il a été publié aux *Comptes rendus*, ainsi que quelques applications immédiates, dans une Note parue le même jour que celle de M. Durand ([1]). Voici, extraits de la Note en question, deux de ces applications :

Un ensemble fermé possédant partout, sauf peut-être en un nombre fini de points, une demi-sécante, limite ou non, parallèle à une DEMI-DROITE *fixe, est situé sur un nombre fini de droites parallèles. Si l'ensemble est un continu, c'est un segment de droite.*

Un continu qui possède partout, sauf peut-être en un nombre fini de points, une demi-sécante limite ou non, parallèle à un plan fixe et FAISANT UN ANGLE AIGU AVEC UNE DEMI-DROITE FIXE DU PLAN, *est un continu plan.*

Dans ces énoncés l'expression : « possède une demi-sécante limite ou non » signifie : « possède une demi-tangente, ou bien une demi-sécante limite non demi-tangente, ou bien une demi-sécante ». On voit qu'ils sont beaucoup plus généraux que ceux de M. Durand. Pourtant ils s'établissent d'une manière extrêmement simple. La méthode de M. Denjoy ne pourra évidemment pas s'appliquer, car elle exige ce fil conducteur qu'est la courbe et qui fait défaut dans un continu quelconque (plus encore sur un ensemble fermé). Pour avoir prise sur l'ensemble considéré, il faut trouver autre chose. Comme on va le voir, cet « autre chose » c'est tout simplement la considération des points où l'hypothèse n'est pas vérifiée. Il existe toujours au moins un de ces points : un segment de droite ab, par exemple, ne peut avoir en b une demi-tangente parallèle à la demi-droite ab.

([1]) A. MARCHAUD, *Sur les demi-sécantes limites et sur les semi-tangentes* (*C. R.*, t. 194, p. 948, 14 mars 1932).

3. Le résultat annoncé fait intervenir des demi-cônes convexes, qui se déduiront les uns des autres par des homothéties (directe ou inverse). Soit C *un demi-cône convexe de sommet* O, c'est-à-dire un ensemble fermé de demi-droites d'origine O, ne renfermant pas un demi-espace, tel que si deux points appartiennent à l'ensemble, le segment qui les joint en fait également partie. C *peut se réduire à un dièdre*, mais je supposerai qu'il n'est pas plan (ceci parce que nous nous plaçons dans l'espace à trois dimensions). Choisissons une demi-droite Ox, intérieure à C, et un plan P passant par O, laissant C d'un même côté (au sens large).

Ceci posé, considérons un *ensemble borné et fermé* E. Soit m un point quelconque de E, je désignerai par $C(m)$ et $C'(m)$ les deux demi-cônes de sommet m se déduisant de C par des homothéties respectivement directe et inverse. Je dis que $C(m)$ *contient toujours au moins un point a de* E *tel que* $C(a)$ *ne renferme à son intérieur aucun point de* E. Pour le montrer j'établirai d'abord que si un point m' appartient à $C(m)$, $C(m')$ est tout entier dans $C(m)$. En effet, soit S le symétrique de m par rapport à m'. Ce point est dans $C(m)$, d'autre part ce demi-cône est l'homothétique de $C(m')$ par rapport à S dans le rapport 2. Considérons un point p' de $C(m')$, le segment Sp homothétique de Sp' dans l'homothétie précédente appartient à $C(m)$, et par suite p', qui est compris entre S et p, puisque $C(m)$ est convexe. (Il est immédiat que le résultat qui vient d'être établi ne subsiste pas pour les demi-cônes non convexes.)

Désignons par A l'ensemble des points a tels que $C(a)$ ne contienne à son *intérieur* aucun point de E. Soit m un point quelconque de E, il s'agit de montrer que $C(m)$ contient un point (au moins) de A. C'est évident si m appartient à cet ensemble. Supposons le contraire, les abscisses des points de E intérieurs à $C(m)$ — c'est-à-dire celles de leurs projections sur Ox parallèlement à P — ont alors une borne supérieure atteinte pour un point au moins de E, puisque cet ensemble est fermé. Soit m' ce point, il est dans $C(m)$, donc $C(m')$ également. On en déduit que m' appartient à A, sans quoi il y aurait à l'intérieur de $C(m)$ des points de E d'abscisse supérieure à celle de m', ce qui est impossible.

En résumé, à tout point m de E correspond au moins un point a de A, contenu dans $C(m)$. Mais le demi-cône $C'(a)$ est symétrique de $C(m)$ par rapport au milieu de ma. Par suite m fait partie de $C'(a)$, autrement dit, E est contenu tout entier dans la somme des demi-cônes $C'(a)$, étendue à tous les points de A. Dans la conclusion précédente on peut évidemment remplacer A par un ensemble le contenant. Supposons alors que, en chaque point m de E, sauf sur un ensemble B, le demi-cône $C(m)$ contienne à son intérieur des points de E satisfaisant ou non à une condition supplémentaire arbitrairement choisie. L'ensemble B contient évidemment A. Nous sommes donc conduits au Théorème suivant, qui n'est autre que le résultat annoncé.

Soient E *un ensemble fermé et* C *un demi-cône convexe. Si* B *est l'ensemble des points* b *de* E *pour lesquels le demi-cône de sommet* b *directement homothétique à* C *ne renferme à son intérieur aucun point de* E, *satisfaisant ou non à une condition arbitrairement donnée, l'ensemble* E *est contenu tout entier dans la somme des demi-cônes inversement homothétiques à* C *ayant pour sommets les points de* B.

Comme condition supplémentaire on peut imposer aux points de E intérieurs à $C(m)$ d'être voisins de m. Autrement dit *on peut prendre pour* B *l'ensemble des points où* E *ne possède aucune demi-tangente intérieure au demi-cône* directement homothétique à C. C'est en vue de cette dernière application qu'il a fallu considérer les points *intérieurs* aux demi-cônes $C(m)$. L'ensemble E peut, en effet, avoir une demi-tangente sur la frontière de $C(m)$ sans posséder aucun point dans ce demi-cône en dehors de m.

On observera que nous n'avons pas utilisé entièrement l'hypothèse que E est fermé. Les conclusions précédentes sont donc valables pour des ensembles moins particuliers que les ensembles fermés. Ce sont ceux que j'ai appelés : *ensembles fermés d'un côté*. Pour cette extension je renverrai à mon Mémoire : *Sur les demi-sécantes et les semi-tangentes aux ensembles*, où le Théorème est établi d'une manière un peu plus compliquée que celle que je viens d'exposer.

4. Même limitées aux ensembles fermés, les conséquences directes du Théorème précédent sont très nombreuses. Je me bornerai à celles annoncées tout à l'heure, et je dirai ensuite quelques mots sur des applications moins immédiates, dont l'intérêt n'est pas moindre.

Prenons pour C un demi-cône de révolution d'angle très petit et supposons que B ne contienne qu'un nombre fini de points. E est forcément contenu dans un nombre fini de demi-cônes de révolution inversement homothétiques à C. En prenant pour C des demi-cônes de même axe, dont l'angle au sommet tend vers zéro, on obtient l'une ou l'autre des propositions suivantes, selon la condition supplémentaire choisie.

Un ensemble fermé possédant partout, sauf peut-être en un nombre fini de points, une demi-tangente parallèle à une demi-droite fixe, est situé sur un nombre fini de droites parallèles. Si l'ensemble donné est un continu, c'est forcément un segment de droite.

Si à tout point m d'un ensemble fermé, sauf peut-être pour un nombre fini d'entre eux, on peut faire correspondre un point m' tel que la demi-droite mm' soit parallèle à une demi-droite fixe, l'ensemble est situé sur un nombre fini de droites parallèles: si c'est un continu ce ne peut être qu'un segment de droite.

Pour obtenir la condition de planéité, il suffira de prendre pour C un dièdre d'angle très petit, dont le bissecteur soit paralléle au plan donné. Là aussi on pourra considérer soit les demi-tangentes, soit les demi-sécantes. Je n'insiste pas.

Avant d'aller plus loin, je ferai quelques remarques au sujet de la question d'*orientation* à laquelle j'ai fait allusion au début de cet exposé. Par le fait que l'on déplace le demi-cône $C(m)$ par translation on ne peut conclure que si les demi-tangentes (ou les demi-sécantes) intervenant dans les énoncés sont dirigées dans le même sens par rapport à une direction fixe de plan. On peut se demander si ce n'est pas là une imperfection de la méthode, et si, par exemple, l'énoncé suivant ne serait pas exact. « Un continu possédant partout, sauf peut-être en un point une demi-tangente parallèle à une *droite* fixe est un segment de droite. » Il n'en est rien. Cet *énoncé est faux* même si l'on suppose que le continu est un arc simple se projetant sur la droite fixe d'une manière biunivoque. M. A. Denjoy a donné, en effet, un exemple de fonction continue *non constante* admettant partout un dérivé nul (d'un côté nécessairement variable) (1).

5. Les applications, moins immédiates que les précédentes, dont je vais parler maintenant, se rapportent à la théorie des équations différentielles et à celle des équations aux dérivées partielles. Elles découlent de la remarque suivante. Quand on déplace le demi-cône

(1) A. Denjoy, Mémoire cité, p. 209.

$C(m)$ par translation, en portant son sommet aux divers points d'une certaine région R de l'espace, on définit dans cette région un *champ* de demi-cônes, qu'il est naturel d'appeler uniforme. Si, au lieu de ne faire subir à $C(m)$ que des translations, on le déforme d'une manière continue, on obtiendra un champ (continu) pour lequel, dans toute portion suffisamment petite de R, les demi-cônes se déduisent presque par translation les uns des autres. Sans entrer dans le détail, je vais exposer rapidement quelques résultats, renvoyant pour le reste à mon Mémoire : *Sur les champs continus de demi-cônes convexes* [1]. Il faut pourtant préciser la notion un peu vague de variation continue d'un demi cône. Pour cela il suffit de définir un nombre qui généralise l'*angle* de deux demi-droites. Ce nombre c'est l'écart. Considérons d'abord deux demi-cônes : C et C′, de même sommet O. Formons les deux demi-cônes $(C)_\alpha$ et $(C')_\alpha$, obtenus en remplaçant respectivement dans C et C′ chaque demi-droite par un demi-cône de révolution de sommet O, ayant pour axe la demi-droite considérée et pour demi-angle au sommet un angle donné α. Si α est assez grand, (C_α) et $(C')_\alpha$ contiennent respectivement C′ et C. La borne inférieure des valeurs de α satisfaisant à cette double condition est l'*écart* des deux demi-cônes. L'écart de deux demi-cônes de sommets différents s'obtiendra en transportant par translation l'un d'eux de manière à amener son sommet sur celui de l'autre. L'écart de deux demi-droites est évidemment leur angle.

Rapportons l'espace à trois axes rectangulaires $Oxyz$, et considérons la région R définie par les inégalités $0 \leqq x \leqq y$. A chaque point m de R attachons un demi-cône convexe $C(m)$ de sommet m, possédant les propriétés suivantes :

1° Les demi-droites de $C(m)$ font avec Ox un angle au plus égal à un angle aigu indépendant de m;

2° $C(m)$ varie continûment avec m.

Le cas où $C(m)$ se réduit à une demi-droite unique, soit en certains points, soit partout, n'est pas exclu.

Je désignerai par $-C(m)$ le demi-cône opposé par le sommet à $C(m)$. Le champ constitué par les demi-cônes $-C(m)$ sera dit le *champ opposé* au premier.

---

(1) A. Marchaud, *Sur les champs continus de demi-cônes convexes et leurs intégrales* (*Compositio Math.*, Vol. 3, Fasc. I, 1936, p. 89 et p. 127).

Il est naturel d'appeler *intégrale* du champ $C(m)$ issue de a, tout arc simple ab, dont les demi-tangentes en chaque point m sont toutes dans $C(m)$ et $-C(m)$, ces demi-cônes contenant respectivement les demi-tangentes postérieures et antérieures (sauf bien entendu en a pour les demi-tangentes antérieures et en b pour les demi-tangentes postérieures). L'arc ab parcouru en sens inverse, est évidemment une intégrale du champ opposé, issue de b. Lorsque $C(m)$ se réduit partout à une demi-droite, les intégrales du champ sont celles d'un système d'équations différentielles,

$$y' = f(x, y, z), \qquad z' = g(x, y, z),$$

où les fonctions f et g sont bornées et continues dans R.

On démontre aisément que par tout point de R il passe au moins une intégrale du champ $C(m)$, prolongeable jusque dans le plan $x = 1$. L'ensemble des points de R par chacun desquels il passe au moins une intégrale issue d'un point donné a, est l'*émission* de ce point par le champ. L'émission d'un ensemble A est la somme des émissions de ses points. L'émission d'un ensemble par le champ opposé $-C(m)$ se définit d'une manière analogue.

6. Il est immédiat que si un point m' appartient à l'émission d'un point m par un champ, l'émission de m' (par le même champ) est tout entière dans celle de m, et d'autre part que m appartient à l'émission de m' par le champ opposé. On reconnaît là les propriétés des demi-cônes convexes obtenus à partir de l'un d'eux par des homothéties, propriétés qui nous ont conduit au théorème général ; celui-ci peut donc s'étendre au cas présent. Pour lui donner exactement la même forme, je supposerai que $C(m)$ ne se réduit jamais à une demi-droite unique. On obtient alors la proposition suivante :

Soit E *un ensemble fermé* (de R). *Si* A *est l'ensemble des points* a *de* E *tels que l'émission de* a *par le champ* $C(m)$ *ne contienne à son intérieur aucun point de* E, *cet ensemble* E *est contenu tout entier dans l'émission de* A *par le champ opposé.*

Bien entendu on peut imposer aux points situés dans l'émission de chaque point une condition supplémentaire arbitraire, ce qui revient à remplacer A par un ensemble le contenant. On en déduit, par exemple, que *si* B *est l'ensemble des points* b *de* E *pour lesquels cet* *ensemble n'a aucune demi-tangente intérieure à* C(b), E *est tout entier dans l'émission de* B *par le champ* — C(m).

Considérons maintenant (dans R) un champ continu de demi-droites D(m), ou si l'on préfère un système d'équations différentielles

$$y'=f(x, y, z), \qquad z'=g(x, y, z).$$

Soit E un continu admettant partout, sauf en b, la demi-droite du champ pour une de ses demi-tangentes. Peut-on affirmer que E est une intégrale du champ — D(m) issue de b ? Ce serait alors dans le cas particulier d'un seul point exceptionnel, l'extension de la propriété établie tout à l'heure lorsque le champ D(m) était uniforme. Procédons de la même manière, considérons un champ C(m) obtenu en remplaçant chaque D(m) par un demi-cône de révolution d'angle au sommet ε, et faisons tendre ε vers zéro. Nous pouvons seulement affirmer que E est dans l'émission de b par le champ — C(m), quel que soit ε. Il est donc nécessaire de déterminer la limite de cette émission quand ε tend vers zéro. En fait cette limite est l'émission de b, ce qui montre que *tout continu possédant partout, sauf en b, la demi-droite du champ pour une de ses demi-tangentes est l'intégrale du champ opposé issue de b, pourvu que cette intégrale soit unique*. Cette dernière restriction ne peut évidemment être levée : plusieurs intégrales du champ D(m) peuvent se rejoindre en b, si l'intégrale de — D(m) issue de ce point n'est pas unique. On voit aussi pourquoi nous avons supposé qu'il y avait un seul point exceptionnel et non pas un nombre fini.

On peut rapprocher le théorème précédent du théorème suivant, établi par M. G. Bouligand dans le cas particulier où les fonctions f et g *ont des dérivées partielles continues*.

Étant donné le système différentiel

$$y'=f(x, y, z) \qquad z'=g(x, y, z),$$

tout arc de Jordan sans point multiple dont le contingent postérieur englobe, en chaque point, la demi-droite portant le vecteur (I, f, g) est un arc d'intégrale ([1]).

Si j'insiste sur les hypothèses faites par M. G. Bouligand, c'est parce

([1]) Georges Bouligand, *Sur quelques points de la théorie des ensembles* (*Comptes rendus*, t. 194, p. 1060, 1932). Voir aussi *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, p. 215.

que le rédacteur du *Zentralblatt,* qui a fait le compte rendu de la Note de M. G. Bouligand, s'est contenté de reproduire l'énoncé que je viens de citer, attribuant ainsi à l'auteur un résultat beaucoup plus général que celui qu'il avail démontré [1]. J'ajoute que ce résultat est d'ailleurs exact. C'est un cas particulier de la proposition suivante, établie dans mon Mémoire : *Sur les champs de demi-cônes :* si un arc simple ab admet en tout point intérieur m au moins une demi-tangente à droite dans le demi-cône $C(m)$, alors en chaque point $\overline{m}$, distinct de b, toutes les demi-tangentes à droite sont dans le demi-cône $C(\overline{m})$, et en tout point $\overline{m}$, distinct de a, toutes les demi-tangentes à gauche sont dans $-C(\overline{m})$ [2].

7. Voici pour terminer quelques propriétés des émissions et de leurs frontières. Soit A un ensemble *fermé* (de R) ; il n'est pas nécessaire de définir la frontière de l'émission de A par un champ $C(m)$, mais par le fait que nous ne considérons que les points contenus dans R, la section de l'émission par le plan $x = 1$ fait partie de la frontière. Dans le cas général, la plupart des points de cette section cesseraient d'être sur la frontière si R et le champ étaient prolongés à droite de $x = 1$. Si l'on exclut ces points, il reste ce que j'ai appelé la *frontière latérale* de l'émission.

Ceci posé, soient $C_\varepsilon(m)$ un champ *convergeant uniformément* vers le champ $C(m)$, et A_ε un ensemble fermé ayant pour limite A, simultanément quand ε tend vers zéro. *Si, quel que soit ε chaque demi-cône $C_\varepsilon(m)$ contient $C(m)$ et si de plus A_ε contient A, l'émission de A_ε par le champ $C_\varepsilon(m)$ et sa frontière latérale tendent respectivement vers celle de A et sa frontière latérale.* Les limites dont il s'agit sont des *limites métriques* au sens de M. Hausdorff. [Les restrictions : $C_\varepsilon(m)$ contient $C(m)$ et A_ε contient A, ne peuvent être supprimées sans compromettre l'exactitude des conclusions.] Ce dernier résultat, dont nous avons utilisé une partie il y a un instant, généralise un théorème de M. Paul Montel, complété par M$^{\text{lle}}$ Marie Charpentier, sur la continuité des intégrales supérieure et inférieure de l'équation $y' = f(x, y)$ [3].

---

[1] *Zentralblatt*, 4 Band, 1932, p. 109.

[2] *Sur les champs continus de demi-cônes convexes*, p. 104.

[3] P. MONTEL, *Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle* (*Bull. Soc. Math.*, t. 50, 1926, p. 307); M$^{\text{lle}}$ CHARPENTIER, *Thèse*, p. 13.

La propriété dont il va s'agir maintenant se rapporte à la théorie des équations aux dérivées partielles. Appelons *intégrale frontière* du champ $C(m)$, une intégrale dont les demi-tangentes en chaque point m sont *toutes* sur la frontière de $C(m)$ et celle de $-C(m)$. J'ai montré que tout point de la frontière latérale de l'émission d'un ensemble fermé A, est situé sur une intégrale frontière issue d'un point de la frontière de A. Si donc, on appelle : *frontière latérale extérieure* de l'émission de A, la fermeture de l'ensemble des points de la frontière latérale extérieure à A, on a le théorème suivant :

Soient $C(m)$ *un champ et* A *un ensemble fermé. La frontière latérale extérieure de l'émission de* A *par le champ est constituée par des intégrales frontières du champ issues des points frontières de* A. *De plus, en chaque point de la frontière latérale extérieure, celle-ci n'a aucune demi-tangente dans* $C(m)$ *ni dans* $-C(m)$.

L'intérêt de cette proposition est qu'elle constitue un premier pas dans l'étude géométrique de l'équation aux dérivées partielles dont le cône élémentaire est $C(m)$. Il est, en effet, immédiat que si *un morceau* Σ *d'une frontière latérale extérieure est une surface pourvue d'un plan tangent — et si* $C(m)$ *a lui-même partout un plan tangent —* Σ *est une intégrale de l'équation aux dérivées partielles dont* $C(m)$ *est le cône élémentaire.* L'émission d'une courbe fournira les intégrales passant par cette courbe. Il reste à déterminer sous quelles conditions la frontière latérale extérieure sera une bonne surface. Cette question résolue, on aurait une théorie géométrique directe des équations aux dérivées partielles à cône élémentaire convexe, assujetti seulement à posséder partout un plan tangent et à varier continûment. Il est même probable que la *continuité* pourrait être remplacée par une condition moins restrictive analogue à celle que j'ai appelée la *régularité* dans le cas des champs de demi-droites, et pour laquelle je renvoie à mon Mémoire : *Sur les champs de demi-droites et les équations différentielles du premier ordre* [1]. On trouvera dans ce travail la définition de la *régularité* et sa propriété essentielle que voici : *si un champ* $D(m)$ *est régulier dans une sphère de centre a, il existe un arc simple traversant a, qui admet, en chacun de ses points* $\overline{m}$, $D(\overline{m})$ *pour demi-tangente*

---

[1] A. MARCHAUD, *Sur les champs de demi-droites et les équations différentielles du premier ordre* (*Bull. Soc. Math.*, t. 62, 1934, p. 2-38).

(unique) *à droite continue à droite, et sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable deux demi-tangentes* (uniques) *opposées. Si le champ opposé à* D(m) *est lui aussi régulier dans la sphère, l'arc possède partout deux demi-tangentes opposées* (uniques) *continues.* J'ajoute qu'un champ régulier peut être discontinu sur un ensemble partout dense.

J'ai terminé. Mon but sera atteint si j'ai pu persuader quelques jeunes chercheurs qu'il y a en Géométrie différentielle directe un champ de recherches attrayantes et fécondes. Ces recherches n'exigent point l'acquisition préalable d'une technique difficile ou rébarbative. Elles demandent seulement du goût pour les choses simples et les réalités concrètes, goût qu'il n'est peut-être pas sans intérêt de développer, même en Mathématiques.

ANDRÉ MARCHAUD.