BULLETIN DE LA S. M. F.

D. WOLKOWITSCH

Sur les applications de la notion de moment d'inertie en géométrie

Bulletin de la S. M. F., tome 66 (1938), p. 69-78

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1938__66__69_0>

SUR LES APPLICATIONS DE LA NOTION DE MOMENT D'INERTIE EN GÉOMÉTRIE;

PAR M. D. WOLKOWITSCH.

Nous avons montré, dans plusieurs Notes publiées aux *Comptes rendus*, comment la notion du moment d'inertie simplifiait l'étude de la surface des singularités du complexe de Painvin relatif à une quadrique à centre (surface Ω).

Le paraboloïde pouvant être considéré comme la quadrique d'inertie d'un système de masse nulle, dont le centre de gravité se trouve à l'infini dans la direction de l'axe, nous avons, dans cette étude, étendu aux paraboloïdes l'application du moment d'inertie. Nous avons pu ainsi retrouver, par voie simple, de nombreuses propriétés classiques du conoïde de Plücker et en formuler de nouvelles.

1. Sur le paraboloïde d'un faisceau linéaire tangentiel de quadriques. — Soient $S_1 S_2$ deux systèmes de masses, $O_1 O_2$ leurs centres d'inertie, $E_1 E_2$ leurs quadriques centrales d'inertie, ε_1, ε_2 les quadriques conjuguées de celles-ci.

Attribuons à $S_1 S_2$ des masses égales et de « signes contraires », le centre de la quadrique d'inertie du système résultant S, de masse nulle, se trouve à l'infini sur la ligne $O_1 O_2$. La quadrique conjuguée de cette quadrique est le paraboloïde η du faisceau linéaire tangentiel défini par les quadriques ε_1 et ε_2.

Si ε_1 et ε_2 représentent les premiers membres des équations tangentielles des quadriques correspondantes, l'équation tangentielle de la quadrique η est de la forme

$$\eta = \varepsilon_1 + k\varepsilon_2 \quad \text{avec} \quad k = -1,$$

ou

$$\eta = \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

Si l'on cherche l'équation de l'enveloppe des plans qui ont même rayon de giration par rapport aux systèmes S_1 et S_2, on doit écrire

$$\frac{\varepsilon_1}{u^2+v^2+w^2} = \frac{\varepsilon_2}{u^2+v^2+w^2}, \qquad \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0,$$

on obtient le paraboloïde η.

Si nous cherchons en outre l'enveloppe des plans tels que la différence des carrés des rayons de giration par rapport aux deux systèmes soit constante et égale à h^2, nous avons

$$\left|\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{u^2+v^2+w_2}\right| = h^2$$

ou

$$\eta \pm h^3 (u^2+v^2+w^2) = 0,$$

c'est un paraboloïde homofocal de η.

On voit, en s'aidant des antipôles d'un plan quelconque, normal à O_1O_2, par rapport aux quadriques E_1 et E_2, que l'axe du paraboloïde η est symétrique, par rapport à O_1O_2, de l'axe du paraboloïde du faisceau défini par les quadriques E_1 et E_2.

D'autre part, nous savons que le lieu des points A de l'espace, qui ont même rayon de giration polaire pour les deux systèmes S_1 et S_2, est le plan radical des sphères de Monge σ_1 et σ_2, des quadriques ε_1 et ε_2. Soit $P = 0$ l'équation de ce plan.

Le lieu des points tels que la différence des carrés des rayons de giration polaire soit égale à une constante h^2 est, aussi, le lieu des points dont la différence des puissances par rapport aux sphères σ_1 et σ_2 est égale à h^2; on obtient immédiatement l'équation $P = h^2$ d'un plan parallèle à $P = 0$.

Rappelons aussi que le plan radical des deux sphères σ_1 et σ_2 est le plan de Monge du paraboloïde η, lieu des points d'où l'on peut circonscrire un trièdre trirectangle à ce paraboloïde.

2. Complexe des droites qui ont même rayon de giration par rapport à deux systèmes de masses S_1 et S_2. — *Cône du complexe.* — Cherchons les droites passant par un point A quelconque.

Désignons par ρ_1 et ρ_2 les rayons de giration polaire des deux systèmes S_1 et S_2, posons $\rho_1^2 - \rho_2^2 = h^2$.

Les plans T qui passent par le point A, et dont la différence des carrés des rayons de giration est $t_1^2 - t_2^2 = h^2$ enveloppent le cône C′ de sommet A circonscrit au paraboloïde

$$\eta - h^2 (u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Pour un tel plan on a

$$\rho_1^2 - \rho_2^2 = t_1^2 - t_2^2,$$

d'où

$$\rho_1^2 - t_1^2 = \rho_2^2 - t_2^2.$$

Or, chacun des membres de cette dernière égalité représente le rayon de giration relatif à la normale en A, au plan T, pour l'un et l'autre système, ce qui permet de conclure : le cône du complexe est le cône supplémentaire du cône C′ qui est lui-même du second ordre, le *complexe est donc du second ordre*.

Nous pouvons ajouter immédiatement que les deux paraboles focales de la famille des paraboloïdes homofocaux constituent le lieu des points de l'espace pour lesquels le cône du complexe est de révolution.

Faisons varier le point A dans le plan fixe

$$P - h^2 = 0;$$

le paraboloïde

$$\eta - h^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

demeure constant, d'où cette propriété.

Les plans menés perpendiculairement aux droites du complexe, par les points où elles percent un plan quelconque, fixe, normal à la droite $O_1 O_2$, enveloppent un paraboloïde, appartenant à une famille homofocale, et associé au plan fixe.

Le paraboloïde $\eta = 0$ est associé au plan $P = 0$ qui est lui-même le plan de Monge de ce paraboloïde $\eta = 0$, de par la propriété rappelée au paragraphe précédent. Il s'ensuit que notre *complexe se confond avec celui des droites d'où l'on peut mener des plans rectangulaires tangents au paraboloïde* $\eta = 0$.

Ce complexe a déjà fait l'objet de nombreux travaux, nous allons en poursuivre l'étude par la géométrie.

Courbe du complexe :

Soit, pour un plan donné T,

(1) $$t_1^2 - t_2^2 = h^2$$

la différence des carrés des rayons de giration des deux systèmes S_1 et S_2.

Une droite D de ce plan appartient au complexe si elle est la trace d'un plan R, normal à T, et tel que la différence des carrés des rayons de giration soit

$$r_1^2 - r_2^2 = -h^2. \tag{2}$$

En effet, les deux dernières relations donnent

$$t_1^2 - t_2^2 + r_1^2 - r_2^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad t_1^2 + r_1^2 = t_2^2 + r_2^2,$$

qui exprime l'égalité des rayons de giration de la droite D. La relation (2) montre que *la courbe du complexe est le contour apparent du paraboloïde*

$$\eta + h^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

projeté normalement sur le plan T; *cette courbe est donc une parabole.*

3. **Surfaces des singularités Φ.** — *Au point de vue ponctuel.* — D'après ce que nous savons déjà du complexe de Painvin, nous pouvons dire que le point A du plan $P - h^2 = 0$ se tronvera sur la surface Φ, s'il appartient également au paraboloïde

$$\eta - h^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

de sorte que la surface Φ est engendrée par l'intersection du plan et du paraboloïde de la famille homofocale associés, c'est-à-dire par une conique variable.

Nous pouvons aussi indiquer un deuxième mode de génération de la surface Φ, analogue à celui de la surface Ω.

Soit λ la différence des carrés des rayons de giration polaire pour les deux systèmes

$$\rho_1^2 - \rho_2^2 = \lambda$$

pour le point A considéré.

Ce point A appartiendra à la surface Φ s'il se trouve aussi sur le paraboloïde

$$\eta - \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0, \tag{1}$$

car alors, le cône du complexe est le cône supplémentaire du cône, réduit aux deux génératrices de la quadrique (1), circonscrit à cette quadrique et de sommet A.

Soient λ_1, λ_2, λ_3 les paramètres des paraboloïdes homofocaux qui passent par le point A.

Puis, pour le premier système S_1, $r_1 s_1 t_1$ les rayons de giration relatifs aux plans tangents à ces trois paraboloïdes; $r_2 s_2 t_2$ seront les grandeurs correspondantes pour le système S_2.

On a

$$r_1^2 - r_2^2 = \lambda_1, \qquad s_1^2 - s_2^2 = \lambda_2, \qquad t_1^2 - t_2^2 = \lambda_3,$$

d'où, en ajoutant membre a membre,

$$\rho_1^2 - \rho_2^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

car les trois paraboloïdes forment une famille triple orthogonale. Mais, puisque le paraboloïde (1) contient le point A, le premier membre de cette égalité a pour valeur λ, l'une des trois valeurs λ_1, λ_2 ou λ_3, de sorte que la somme de deux d'entre elles doit être nulle, ce qui nous conduit à la génération analogue à celle de la surface Ω : *par l'intersection de deux paraboloïdes homofocaux dont les λ sont égaux et de signes contraires.*

Au point de vue tangentiel. — Soient u, v, w les coordonnées d'un plan tangent à la surface Φ, le paraboloïde associé à ce plan

$$\eta + h^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

doit posséder une génératrice normale, pour que le contour apparent de ce paraboloïde dégénère en deux points (dont l'un est à l'infini) autour desquels rayonnent les droites du complexe situées dans le plan.

Le plan donné doit donc être normal à l'un des deux plans directeurs du paraboloïde associé.

En nous rappelant la propriété correspondante de la surface Ω du complexe de Painvin, nous voyons que les plans tangents au cylindre circonscrit au paraboloïde

$$\eta - h^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

et normaux aux plans directeurs du paraboloïde

$$\eta + h^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

sont tangents à la surface Φ. Celle-ci est donc l'enveloppe de la double famille des cylindres paraboloïques, qui remplacent ici les développables de la quatrième classe circonscrites à la surface Ω.

Équations de la surface. — Nous obtiendrons l'équation ponctuelle en écrivant que l'équation en λ

$$\frac{y^2}{p+\lambda}+\frac{z^2}{q+\lambda}-(2x+\lambda)=0$$

admet deux racines égales et de signes contraires, c'est-à-dire admet pour racine la somme même de ses racines.

On trouve que l'expression de la somme des racines est

$$-(2xp+q),$$

en substituant cette expression à λ nous obtenons

$$y^2(p+2x)+z^2(q+2x)-(p+q)(2x+q)(2x+p)=0.$$

Un cas particulier important est celui où le paraboloïde donné est *équilatère*, car on a alors

$$p+q=0,$$

et l'équation devient

$$y^2(p+2x)+z^2(2x-p)=0,$$

c'est le conoïde de Plücker, résultat bien connu.

Pour obtenir l'équation tangentielle prenons l'équation tangentielle du paraboloïde

$$\eta+h^2(u^2+v^2+w^2)=0$$

sous la forme

$$pv^2+qw^2-2ru+h^2(u^2+v^2+w^2)=0 \tag{1}$$

correspondant à l'équation ponctuelle

$$\frac{y^2}{p+h^2}+\frac{z^2}{q+h^2}-(2x-h^2)=0.$$

L'équation des plans directeurs est

$$\frac{y^2}{p+h^2}+\frac{z^2}{q+h^2}=0,$$

et celle des points à l'infini sur les normales à ces plans est

$$(2) \qquad w^2(p+h^2)+v^2(q+h^2)=0.$$

L'élimination de h^2 entre les équations (1) et (2), donne, tous calculs faits,

$$u^2(pw^2+qv^2)+(v^2+w^2)[(p+q)(v^2+w^2)-2ru]=0,$$

qui devient, pour le conoïde de Plücker

$$pu(w^2-v^2)-2r(v^2+w^2)=0.$$

Remarque. — Nous avons trouvé dans le cas général une équation ponctuelle du troisième degré, alors qu'elle devrait être du quatrième degré comme l'équation tangentielle, mais il convient de remarquer que le plan de l'infini fait partie de la surface, puisque dans tout plan tangent à la surface Φ se trouve un point à l'infini, qui appartient à cette même surface.

4. **Représentation paramétrique**. — La propriété qui nous a conduit à l'équation ponctuelle nous donnera aussi une représentation paramétrique simple de la surface.

Écrivons les expressions des coordonnées *paraboliques* d'un point de l'espace en fonction des paramètres qui définissent les trois paraboloïdes homofocaux d'un paraboloïde donné passant par ce point

$$y=\sqrt{\frac{(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)(p+\lambda_3)}{q-p}}, \qquad z=\sqrt{\frac{(q+\lambda_1)(q+\lambda_2)q+\lambda_3}{p-q}},$$

$$x=-\frac{1}{2}(p+q+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3);$$

faisons

$$\lambda_1+\lambda_2=0,$$

et posons

$$\lambda_1^2=\lambda \qquad \lambda_3=\mu,$$

il vient

$$y=\sqrt{\frac{(p^2-\lambda)(p+\mu)}{q-p}}, \quad z=\sqrt{\frac{(q^2-\lambda)(q+\mu)}{p-q}}, \quad x=-\frac{1}{2}(p+q+\mu)$$

et le réseau des courbes λ, μ est orthogonal, car

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{q-p} + \frac{1}{p-q}\right) = 0.$$

Ces formules montrent que les courbes $\mu = \text{const.}$ sont planes, ce sont des coniques.

Ces coniques dégénèrent en deux droites confondues pour les valeurs

$$\mu = -p \quad \text{et} \quad \mu = -q.$$

Les abscisses de ces génératrices rectilignes $-\frac{p}{2}$ et $-\frac{q}{2}$ sont celles des foyers des deux paraboles d'intersection du paraboloïde π avec les plans xoy et xoz. Ce sont aussi les points où les deux paraboles focales coupent l'axe ox; les équations de ces focales étant

$$\frac{y^2}{p-q} - (2x - q) = 0, \qquad \frac{z^2}{q-p} - (2x - p) = 0.$$

En faisant $p + q = 0$ dans les expresssions déjà trouvées pour les coordonnées, nous obtenons la représentation paramétrique du conoïde de Plücker

$$y = \sqrt{\frac{(p^2 - \lambda)(\mu + p)}{-2p}}, \qquad z = \sqrt{\frac{(p^2 - \lambda)(\mu - p)}{2p}}, \qquad x = -\frac{\mu}{2}.$$

L'élimination de λ donne

$$\frac{y^2}{\mu + p} + \frac{z^2}{\mu - p} = 0,$$

équation des plans directeurs de la quadrique π_μ

$$\frac{y^2}{\mu + p} + \frac{z^2}{-p + \mu} - (2x + \mu) = 0,$$

qui est un paraboloïde homofocal du paraboloïde donné π_0.

La surface apparaît dès lors comme le lieu de l'intersection du plan $x = -\frac{\mu}{2}$ avec le paraboloïde variable π_μ, c'est-à-dire le *lieu des génératrices au sommet de ce paraboloïde variable*, propriété connue.

Nous avons vu que les courbes $\mu = \text{const.}$ étaient, sur le conoïde de Plücker, des droites rencontrant la droite Ox, génératrice double de la surface, et normales à cette droite; les courbes $\lambda = \text{const.}$, leurs trajectoires orthogonales sont des biquadratiques gauches, puisque intersections de deux paraboloïdes homofocaux; elles se trouvent sur des cylindres de révolution concentriques, car les projections de ces courbes sur le plan yox, normal à Ox, sont des cercles concentriques; la normale à cette projection passe, en effet, par le point fixe O.

L'élimination de μ entre les équations paramétriques donne l'équation de ces cercles

$$y^2 + z^2 + p^2 - \lambda = 0.$$

5. **Description de la surface à l'aide d'une équerre.** — Le lieu des sommets des trièdres trirectangles, dont les faces touchent 1, 2 ou 3 paraboloïdes homofocaux, sont des plans normaux à l'axe commun à ces paraboloïdes.

Si le plan normal considéré est le plan associé au paraboloïde variable (§ **24**), l'intersection des deux surfaces décrit la surface des singularités Φ d'un complexe de Painvin relatif à un paraboloïde fixe; de plus, nous savons que le plan tangent au paraboloïde variable, en un point M de la section plane, est normal à la génératrice singulière tangente à la surface Φ en ce point M. Ce même plan tangent sera, d'après la propriété classique des quadriques homofocales tangentes à une droite, celui d'une équerre, dont les branches sont tangentes au paraboloïde fixe, son plan étant normal à ce paraboloïde aux deux points de contact des branches, on retrouve la génération de la surface Ω, et ce mode de génération est valable pour le conoïde de Plücker; rappelons que, dans ce cas, la courbe d'intersection du paraboloïde par son plan associé (plan tangent au sommet) est constitué par deux droites, courbes $\mu = \text{constante}$.

Considérons un point à l'infini qui définit une direction Δ; considérons le cylindre circonscrit au paraboloïde équilatère et de direction Δ, c'est un cylindre parabolique dont le *plan de Monge* contient les droites du complexe de direction Δ, par suite le point à l'infini est un point singulier, ce que nous savons, d'ailleurs, puisque le plan de l'infini fait partie de la surface des singularités, les plans de Monge sont plans singuliers; on déduit cet énoncé :

le conoïde de Plücker est l'enveloppe des plans de Monge des cylindres circonscrits à un paraboloïde équilatère.

Pour terminer, nous donnerons une solution géométrique de cette question; chercher la condition *pour que le paraboloïde d'un faisceau linéaire tangentiel soit équilatère.*

Désignons par $Q_1 Q_2$ les quadriques à centre qui définissent le faisceau.

Si le paraboloïde est équilatère, les deux plans directeurs passant par l'axe, tangents à l'infini à la surface, sont rectangulaires, par suite cet axe appartient à un complexe de droites ayant même rayon de giration par rapport à deux systèmes dont les quadriques centrales d'inertie sont les quadriques $q_1 q_2$, conjuguées de $Q_1 Q_2$.

En partant des quadriques $q_1 q_2$, nous serions arrivés aux quadriques Q_1 et Q_2, mais les deux faisceaux tangentiels ont même direction d'axe : la ligne des centres.

Or, si l'axe du paraboloïde est d'égale inertie, la droite $O_1 O_2$ l'est également, puisque parallèle : nous énoncerons donc :

La condition pour que le paraboloïde d'un faisceau tangentiel soit équilatère est que la ligne des centres des quadriques qui définissent le faisceau soit d'égale inertie.

Considérons deux plans $P_1 R_1$, tangents à Q_1, orthogonaux et parallèles à $O_1 O_2$; et deux plans $P_2 R_2$, tangents à Q_2 et parallèles, respectivement, à P_1 et à R_1, appelons $p_1 r_1$ les distances de $O_1 O_2$ aux deux plans $P_1 R_1$ et $p_2 r_2$ les distances à $P_2 R_2$, la condition s'exprime ainsi

$$p_1^2 + r_1^2 = p_2^2 + r_2^2.$$