BULLETIN DE LA S. M. F.

A. GAY

Vogues permanentes en canal circulaire à section quelconque

Bulletin de la S. M. F., tome 65 (1937), p. 190-210

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1937__65__190_0>

VAGUES PERMANENTES EN CANAL CIRCULAIRE A SECTION QUELCONQUE;

PAR M. A. GAY.

Énoncé du problème. — Le problème des vagues permanentes périodiques dans un canal horizontal circulaire de profondeur uniforme, a été étudié par Geppert (¹). Je me propose de traiter le cas plus général du canal horizontal circulaire dont la section méridienne est une courbe Γ quelconque. L'axe du canal est la verticale descendante oz; la surface libre du liquide est, à l'état de repos, dans le plan horizontal du point o. Nous supposons que la trace de ce plan horizontal sur le plan de Γ est un axe or qui coupe orthogonalement Γ en deux points A et B, et nous désignerons par H le segment de droite AB et par D le domaine limité par le contour $\Gamma + \mathrm{H}$.

Conservant les notations de Geppert, désignons par ω la vitesse apparente constante de rotation de la surface libre.

Le potentiel Φ des vitesses V, ou un point $\mathrm{M}(r, z)$ d'un méridien d'azimut θ et à l'instant t, est une fonction

$$\Phi(\mathrm{M}, \theta_1),$$

où $\theta_1 = \theta - \omega t$.

Si z est la surélévation en un point de H, l'équation de continuité s'écrit

$$\int_{\mathrm{H}} \int_0^{2\pi} r z \, dr \, d\theta_1 = 0, \tag{1}$$

et l'équation de la surface libre, en négligeant V^2 et en tenant compte de (1), devient

$$g z + \omega \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} = 0. \tag{2}$$

(¹) GEPPERT, *Math. Annalen*, 101, 1929.

L'équation (2) est vérifiée à tout instant et entraîne

$$(3) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_1^2}.$$

Le potentiel est une fonction de θ_1 périodique de période 2π; en le supposant développable en série de Fourier, étudions le potentiel élémentaire de la forme

$$\varphi(M) \cos n\theta_1,$$

où n est un entier.

La fonction $\Phi(M, \theta_1)$ vérifiant l'équation de Laplace, $\varphi(M)$ est solution de l'équation générale

$$(4) \qquad L(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \varphi = 0,$$

avec à la frontière les conditions

$$(5) \qquad \frac{d\varphi}{dn_i} = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

et d'après (3), en posant $\lambda_n = \frac{\omega^2 n^2}{g}$

$$(6) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\lambda_n \varphi \text{ sur } H_1,$$

trace de la surface libre sur zor.

La fonction φ est solution d'un problème mixte analogue à celui des ondes liquides dans un vase, traité par M. Hadamard et une solution analogue à celle de l'illustre géomètre peut être indiquée dans le problème présent; cette solution comporte des singularités semblables à celles bien connues de la solution du problème de M. Hadamard (1).

Généralités.

Formules de Green. — I. Soit $\varphi(M)$ une fonction régulière, dans un domaine D limité par une courbe fermée C sans singularité qui ne coupe pas oz et vérifiant l'équation (4).

La première formule de Green s'écrit en général

$$(7) \qquad \int_D \left| r\varphi \Delta\varphi + \frac{\partial(r\varphi)}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial(r\varphi)}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right| d\sigma = -\int_C r\varphi \frac{d\varphi}{dn_i} ds.$$

(1) BOULIGAND, *Sur divers problèmes de la Dynamique des Liquides.*

d'où, en tenant compte de l'équation (4).

$$\text{(A)} \qquad \int_D \left| r\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|^2 \right) + \frac{n^2}{r}\varphi^2 \right| d\sigma = -\int_C r\varphi \frac{d\varphi}{dn_i}\, ds.$$

C'est la première formule de Green pour l'équation $L(\varphi) = 0$.

Si le second membre de (A) est nul, il faut en conclure que dans D, $\varphi(M) \equiv 0$.

La solution de $L(\varphi) = 0$ est par suite unique si la valeur de φ est donnée sur une portion du contour C et celle de $\frac{d\varphi}{dn_i}$ sur l'autre portion.

II. L'équation

$$m(\varphi) = r\,L(\varphi) = 0$$

a la forme de l'équation étudiée par Courant [1].

On a l'identité

$$f\,m(\varphi) - \varphi\, m(f) = r(f\Delta\varphi - \varphi\Delta f) + (rf)'_r\varphi'_r + (rf)'_z\varphi'_z - (r\varphi)'_r f'_r - (r\varphi)'_z f'_z.$$

et d'après (7) il vient

$$\int_D [f\,m(\varphi) - \varphi\, m(f)]\, d\sigma = -\int_C r\left(f\frac{d\varphi}{dn_i} - \varphi\frac{df}{dn_i}\right) ds.$$

et si f et φ satisfont à l'équation (4) il vient

$$\text{(B)} \qquad \int_C r\left(f\frac{d\varphi}{dn_i} - \varphi\frac{df}{dn_i}\right) ds = 0.$$

C'est la deuxième formule de Green pour l'équation $L(\varphi) = 0$.

Fonction de Newmann. — C'est une fonction $\gamma(P, M)$ du point P qu'on représentera par γ_P^M, qui satisfait à l'équation $L(\gamma) = 0$, qui, au point M devient infinie comme log MP, et dont la dérivée normale s'annule sur le contour C.

On la construira en partant d'une solution fondamentale de $L(\gamma) = 0$ dont la forme est connue [2]

$$\text{(8)} \qquad v_P^M = \gamma_{1P}^M \log MP + \gamma_{2P}^M.$$

---

[1] COURANT. *Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichemgen der Mathematische* (*Physik Math. Zeitung*, 7-8).

[2] PICARD, *Équations aux dérivées partielles*, n° 5, p. 193.

où γ_1 et γ_2 sont holomorphes par rapport aux coordonnées de P et de M; $\gamma_{1_P}^M$ vérifiant l'équation $L(\gamma_1) = 0$ et la condition $\gamma_{1_M}^M = 1$.

On suppose toujours que le domaine D limité par C n'a aucun point commun avec l'axe oz.

La fonction v_P^M joue pour l'équation (4) le même rôle que la fonction logarithmique pour l'équation de Laplace et permet de construire pour l'équation (4) des potentiels de simple couche à densité étalée sur C. On ajoutera à v_P^M un tel potentiel $\gamma_{3_P}^M$ qu'on déterminera de façon que

$$\frac{d\gamma_3}{dn_i} = -\frac{dv}{dn_i},$$

$\gamma_{3_P}^M$ sera défini par une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce et finalement en posant

$$K_P^M = \gamma_{2_P}^M + \gamma_{3_P}^M,$$

la fonction de Newmann a la forme

$$(9) \qquad \gamma_P^M = \gamma_{1_P}^M \log MP + K_P^M,$$

où K_P^M et $\gamma_{1_P}^M$ sont holomorphes; $\gamma_{1_P}^M$ vérifiant

$$(9') \qquad L(\gamma_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma_{1_M}^M = 1.$$

Symétrie. — La fonction γ_P^M satisfait à une relation de symétrie. Soient M et M′ deux points du domaine D; désignons par γ et γ' les fonctions γ_P^M qui leur correspondent; traçons deux cercles c et c' de centres M et M′ et de rayons ε et ε' très petits et appliquons la formule (B) en faisant $f = \gamma$, $\varphi = \gamma'$ à la portion de D limitée par les contours C, c et c'. Comme γ et γ' sont deux fonctions de Newmann pour le contour C, il reste, puisque ε et ε' sont infiniment petits,

$$r_M \int_C \left(\gamma \frac{d\gamma'}{dn} - \gamma' \frac{d\gamma}{dn}\right) ds + r_{M'} \int_{C'} \left(\gamma \frac{d\gamma'}{dn} - \gamma' \frac{d\gamma}{dn}\right) ds = 0,$$

où r_M et $r_{M'}$ sont les distances des points M et M′ à oz, et où les dérivées normales sont prises sur les normales extérieures à c et à c'.

D'après (9) et (9′), et en tenant compte de ce que K_P^M et $K_{1_P}^M$ sont holomorphes, l'intégrale le long de c est équivalente à

$$-\gamma_{M}^{M'} \times 2\pi,$$

et on a l'équation de symétrie suivante

$$r_M \gamma_M^{M'} = r_{M'} \gamma_{M'}^{M}. \tag{10}$$

Variation. — Si le contour C subit une variation infinitésimale définie par le déplacement algébrique δn d'un point de C sur la normale intérieure à C, la fonction γ_A^B des deux points A et B intérieurs à C est une fonctionnelle de C dont on calculera la variation infinitésimale $\delta\gamma_A^B$ en suivant le raisonnement de M. Hadamard pour la fonction ordinaire de Newmann (¹).

En désignant par γ la fonction γ_P^A qui correspond au point A et au contour C, par γ' la fonction $\gamma_P'^B$ qui correspond au point B et au contour C′ infiniment voisin de C, et en appliquant encore la formule (B) à ces deux fonctions et au contour C auquel on a adjoint les deux petits cercles c et c', il vient, en remarquant que $\frac{d\gamma}{dn} = 0$ sur C

$$2\pi(r_A \gamma_A'^B - r_B \gamma_B^A) = \int_C r\gamma \frac{d\gamma'}{dn} ds,$$

et d'après (10)

$$2\pi r_A \delta\gamma_A^B = \int_C r\gamma \frac{d\gamma'}{dn} ds.$$

On trouve finalement

$$2\pi r_A \delta\gamma_A^B = \int_C r\gamma_P^A \left| \frac{d(\delta n)}{ds} \frac{d\gamma_P^B}{ds} + \delta n \frac{d^2\gamma_P^B}{dn^2} \right| ds. \tag{11}$$

Comme sur C on a $\frac{d\gamma}{dn} = 0$, on peut écrire en tout point de contour

$$\frac{\partial\gamma}{\partial r} = \frac{d\gamma}{ds} \frac{dr}{ds}$$

et

$$\Delta\gamma = \frac{d^2\gamma}{dn^2} + \frac{d^2\gamma}{ds^2}.$$

(¹) Hadamard, *Calcul des Variations*, p. 303.

En intégrant par parties et en tenant compte de l'équation $L(\gamma) = 0$, on met l'équation (11) sous la forme

$$
(11') \qquad 2\pi r_A \,\delta\gamma_A^B = \left[r\gamma_P^A \frac{d\gamma_P^B}{ds} \delta n \right] - \int_C \left| \frac{d}{ds}\left(r\gamma_P^A \frac{d\gamma_P^B}{ds} \right) + \gamma_P^A \frac{d}{ds}\left(r \frac{d\gamma_P^B}{ds} \right) - \frac{n^2}{r} \gamma_P^A \gamma_P^A \right| \delta n \, ds.
$$

où le premier terme du second nombre représente une partie toute intégrée sur la portion de C qui a varié.

Fonction de Green. — C'est une fonction G_P^M vérifiant l'équation $L(G) = 0$, ayant en M la singularité logarithmique, dont la dérivée normale s'annule sur une portion C_1 du contour C et qui s'annule elle-même sur le reste C_2 du même contour.

Si une telle fonction existe elle a la même forme (9) que la fonction γ_P^M, et d'après les conditions au contour, elle satisfait à la même équation (10) de symétrie.

Si la partie C_2 du contour subit une variation infinitésimale, la fonction G_A^B des deux points A et B intérieurs à C subit une variation δG_A^B qu'on calcule comme pour la fonction ordinaire de Green.

On obtient

$$
(12) \qquad 2\pi r_A \,\delta G_A^B = -\int_{C_2} r \frac{dG_P^B}{dn} \frac{dG_P^A}{dn} \delta n \, ds.
$$

Les équations aux variations (11), (11') et (12) supposent essentiellement que les fonctions γ' ou G' existent pour le contour varié C' et que ces fonctions ainsi que leurs dérivées restent infiniment voisines des fonctions γ ou G, ainsi que de leurs dérivées pour le contour C. Nous admettons dans ce qui suit qu'on peut faire cette hypothèse.

Problème mixte. — On veut déterminer une fonction φ de M, vérifiant à l'intérieur du domaine D l'équation $L(\varphi) = 0$, prenant en tout point P de C_2 une valeur donnée φ_P, sa dérivée normale s'annulant de plus en tout point de C_1.

Appliquons la formule (B), où $f = G_P^M$ au contour C auquel on adjoint le petit cercle c de rayon ε et de centre M.

On obtient pour déterminer φ_M

$$(13) \qquad 2\pi r_M \varphi_M = \int_{C_2} r_P \varphi_P \frac{dG_P^M}{dn} ds,$$

qu'on pourra transformer en utilisant la relation de symétrie.

Mouvement liquide dans le canal.

Potentiel des vitesses. — Pour définir dans le problème des vagues la surélévation z de la surface libre au-dessus du plan horizontal de H, posons

$$(14) \qquad z = h_P \sin n \theta_1.$$

où h est une fonction inconnue de la distance ρ du point P de H à l'axe oz.

L'équation (2) donne

$$(15) \qquad \varphi_P = \frac{g}{n\omega} h_P.$$

Si G_M^P est la fonction de Green définie précédemment, où C_1 est remplacé par Γ et C_2 par H, l'équation (13) définit le potentiel des vitesses en tout M du domaine liquide D

$$(16) \qquad \varphi_M = \frac{g}{2\pi n \omega} \int_H \frac{\rho}{r_M} h_\rho \frac{dG_P^M}{dn} d\rho.$$

On peut, en effet, si l'on suppose que la surélévation z reste infiniment petite, substituer à la fonction de Green $G_{1P}^{\;M}$ du domaine liquide réel D_1, la fonction de Green G_P^M du domaine D limité par Γ et H d'après la formule (12) qui définit δG_P^M. Comme on l'a dit déjà cette approximation revient à admettre que $G_{1P}^{\;M}$ existe pour D_1, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres et qu'il en est de même pour G_P^M.

On peut aussi, en supposant que H_1 trace de la surface libre réelle sur zor a partout une pente très faible, substituer à la dérivée normale de G_1 sur H_1 la dérivée normale de G sur H et confondre l'élément d'arc de H_1 avec celui de H. L'équation (16) est ainsi justifiée.

Cette équation se simplifie si on utilise l'équation de symétrie

$$r_P G_P^M = r_M G_M^P,$$

où P et M sont deux points de D.

Si l'on dérive par rapport à l'ordonnée ζ du point P, il vient

$$r_P \frac{\partial G_P^M}{\partial \zeta} = r_M \frac{\partial G_M^P}{\partial \zeta},$$

et (16) s'écrit finalement

$$(16') \qquad \varphi_M = \frac{g}{2\pi n \omega} \int_H h_P \frac{\partial G_M^P}{\partial \zeta_{\zeta=0}} d\rho.$$

Si γ_M^P est la fonction de Newmann pour le domaine limité par la courbe Γ et sa symétrique Γ' par rapport à H, le raisonnement de M. Hadamard, basé uniquement sur la symétrie précédente, s'applique encore ici et l'équation (16') devient

$$(16'') \qquad \varphi_M = \frac{g}{\pi n \omega} \int_H h_P \frac{\partial \gamma_M^P}{\partial \zeta_{\zeta=0}} d\rho.$$

D'après la forme (9) de γ_M^P, où $\gamma_M^M = 1$ la fonction potentielle φ_M a encore les mêmes caractères qu'un potentiel de double couche dont la densité h_P est étalée sur H.

Vitesse méridienne. — La vitesse méridienne en M est définie par les dérivées partielles de φ par rapport à z et à r.

$$(17) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{g}{\pi n \omega} \int_H h_P \frac{\partial_2 \gamma_M^P}{\partial z_{\zeta=0}\, \partial z} d\rho.$$

qui reste continue si M vient à la limite se confondre avec un point intérieur à H, en tant que dérivée normale d'un potentiel de double couche.

On peut donner une autre forme à cette dérivée. La fonction $\log MP$ étant harmonique, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial z} \log MP = - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \log MP = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \log MP.$$

De plus, en posant maintenant $\gamma_1 = \gamma_{1P}^M$

$$\int_H \left(h\gamma_1 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \log MP - \log MP \frac{\partial^2 h \gamma_1}{\partial \rho^2} \right)_{\zeta=0} d\rho = \left| h\gamma_1 \log MP - \log MP \frac{\partial h \gamma_1}{\partial \rho_{\zeta=0}} \right|,$$

et l'équation (17) devient

$$(17')\quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{g}{\pi n \omega}\left\{ \int_{\mathrm{H}} \log \mathrm{MP} \frac{\partial^2 h \gamma_1}{\partial \rho^2}_{\zeta=0} d\rho \right.$$

$$+ \int_{\mathrm{H}} h \left| \log \mathrm{MP} \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial \zeta \, \partial z} + \frac{\partial^2 \mathrm{k}}{\partial \zeta \partial z} + \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \log \mathrm{MP} \right|_{\zeta=0} d\rho$$

$$\left. + \left| h \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \rho} \lg \mathrm{MP} - \log \mathrm{MP} \frac{\partial h \gamma_1}{\partial \rho}_{\zeta=0} \right| \right\}.$$

où la partie intégrée est calculée aux extrémités B et A du segment H. Ce calcul d'intégration par parties suppose essentiellement que la dérivée $\frac{\partial h}{\partial \rho}$ reste continue en tout point de H, ce qui exclut l'existence de points anguleux sur la courbe H_1, c'est-à-dire de crêtes à la surface libre réelle du liquide.

Dans l'intégrale de (17′) la somme des deux termes en logMP a le caractère d'un potentiel de simple couche; il est continu si le point M vient sur H. Le terme en $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ logMP a le caractère d'un potentiel de double couche.

Lorsque M vient sur H ce terme a une limite simple; si P décrit H on a alors

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \log \mathrm{MP} = 0.$$

et la limite se réduit à

$$-\pi h_{\mathrm{M}} \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \zeta} \right)_{\substack{z=\zeta=0 \\ \rho=r}}$$

Pour M et P voisins on a en général le développement

$$\gamma_1(r z \rho \zeta) - \gamma_1(r z r z) = \left((\rho - r) \frac{\partial \gamma_1}{\partial \rho} + (\zeta - z) \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} + \ldots \right)_{\substack{z=\zeta \\ \rho=r}},$$

où les termes négligés sont de degré supérieur en $\rho - r$ et en $\zeta - z$.

En remarquant que $\gamma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} = 1$, on obtient, en dérivant par rapport à z et en faisant $\rho = r$ et $z = \zeta = 0$,

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial \zeta}_{\substack{z=\zeta=0 \\ \rho=r}} = 0,$$

et le terme limite s'écrit

$$(18)\qquad -2\pi \frac{\partial \gamma_1}{\partial z}_{\substack{z=\zeta=0 \\ \rho=r}} h_{\mathrm{M}}.$$

La vitesse verticale $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ a une limite finie si M vient en un point intérieur au segment H.

Il n'en est plus de même si le point M tend vers une des extrémités A ou B du segment H. Dans ce cas, le dernier terme du second membre de l'équation (17′), où la dérivée $\frac{\partial h}{\partial \rho}$ a une valeur finie, devient logarithmiquement infinie.

Il en est donc de même pour la vitesse verticale $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, mais celle-ci reste de carré intégrable dans le domaine D.

On trouve de même pour la vitesse radiale $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, en posant

$$L = h \frac{\partial \gamma_1}{\partial r} + \frac{\partial \gamma_1 h}{\partial \rho_{\zeta=0}},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{g}{n \pi \omega} \int_{H} \left| h \frac{\partial^2 K}{\partial \zeta \, \partial r} + \frac{\partial L}{\partial \zeta} \log MP + L \frac{\partial}{\partial \zeta} \log MP \right|_{\zeta=0} d\rho$$
$$- \left| h \frac{\partial \gamma_1 \log MP}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0}$$

qui reste bornée si M tend vers un point quelconque de H.

Équation intégrale de la surélévation. — On peut former maintenant l'équation qui définit h_M en tout point M de H, c'est-à-dire la surélévation z.

D'après les équations (6) et (15), on a sur H

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_{z=0}} = -\omega n h_M, \tag{18'}$$

et d'après (17) pour déterminer h_M l'équation intégrale de Fredholm

$$-\pi \lambda_n h_M = \int_H h_P \frac{\partial^2 \gamma_M^P}{\partial z_{z=0} \, \partial \zeta_{\zeta=0}} d\rho. \tag{19}$$

Cette équation homogène ne pourra admettre de solutions non identiquement nulles que pour certaines valeurs caractéristiques de $\lambda_n = \frac{\omega^2 n^2}{g}$, valeurs qui définiront les vitesses de rotation apparentes possibles de la surface libre.

En tenant compte de (17′) et de (18) l'équation (19) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(20)\quad \pi\left(2\frac{\partial\gamma_1}{\partial z_{\substack{z=\zeta=0\\ r=\rho}}}-\lambda_n\right)h_{\mathrm{M}}=\int_{\mathrm{H}}\log \mathrm{MP}\,\frac{\partial^2\gamma_1 h}{\partial\rho^2}\,d\rho$$
$$+\int_{\mathrm{H}} h\left|\log\mathrm{MP}\,\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial z\,\partial\zeta}+\frac{\partial^2\mathrm{K}}{\partial z\,\partial\zeta_{z=\zeta=0}}\right|d\rho$$
$$+\left|h\gamma_1\frac{\partial}{\partial\rho}\log\mathrm{MP}-\log\mathrm{MP}\,\frac{\partial h\gamma_1}{\partial\rho_{z=\zeta=0}}\right|.$$

Comme dans le problème de M. Hadamard, les équations (17′) et (20) donneront une approximation du phénomène si l'on exclut dans le domaine liquide D ou sur le segment H les points A et B, points anguleux de D.

Nombres caractéristiques et fonctions fondamentales. — Pour les solutions de l'équation (4), les formules de Green (A) et (B) sont analogues à celles des fonctions harmoniques; en utilisant les conditions au contour (5) et (6) on peut, comme dans le cas des ondes planes de gravité, étendre la méthode de Schwartz et montrer que les valeurs caractéristiques λ_n^i du nombre $\lambda_n=\dfrac{\omega^2 n^2}{g}$ existent, qu'elles sont réelles, simples et positives [1].

A ces nombres caractéristiques λ_n^i correspondent des fonctions fondamentales $h_n^i(r)$ de l'équation (19), et pour l'équation (4) des solutions fondamentales φ_n^i du point P définies par (16″).

En utilisant (B) et (6), on trouve comme condition d'orthogonalité.

$$(21)\qquad \int_{\mathrm{H}} r\varphi_n^i\varphi_{n\,z=0}^k\,dr=0\qquad \text{si}\quad i\neq k.$$

et d'après (15)

$$(21')\qquad \int_{\mathrm{H}} r h_n^i h_n^k\,dr=0\qquad \text{si}\quad i\neq k.$$

Nous pourrons supposer que les φ_n^i et les h_n^i ont été normalisées et qu'on a

$$(22)\qquad \int_{\mathrm{H}} r(\varphi_n^i)^2_{z=0}\,dr=\int_{\mathrm{H}} r(h_n^i)^2\,dr=1.$$

Formation de la solution. — Essayons de former une solution par composition d'harmoniques. La surélévation initiale $z_0(r,\theta)$ est une fonction périodique de θ que nous supposons développable en

[1] Vergne, *Thèse*.

série de Fourier, soit

$$(23)\qquad z_0(r\theta)=\frac{k_0(r)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}k_n(r)\cos n\theta+l_n(r)\sin n\theta.$$

ce développement, où

$$(23')\qquad k_n(r)+il_n(r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}z_0(r\theta)e^{in\theta}d\theta.$$

Mais, d'après le théorème de Fischer-Riesz, la série

$$(24)\qquad k_n(r)+il_n(r)=\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i+i\beta_i)h_n^i(r),$$

où

$$(24')\qquad \alpha_i+i\beta_i=\int_{\mathrm{H}}rh_n^i(r)\,|\,k_n(r)+l_n(r)\,|\,dr,$$

d'après (21), (21′) et (22), converge en moyenne vers $k_n(r)+il_n(r)$ et par suite la série double

$$(25)\qquad z(r\theta t)=\sum_{n=1}^{\infty}z_n(r\theta t),$$

où

$$(25')\qquad z_n(r\theta t)=\sum_{i=1}^{\infty}h_n^i(r)\,|\,\alpha_i\cos n(\theta-\omega_n^i t)+\beta_i\sin n(\theta-\omega_n^i t)\,|$$

converge en moyenne vers la surélévation à l'instant t.

Pour obtenir le potentiel Φ des vitesses en un point quelconque du canal et à un instant quelconque t, formons d'abord à l'aide de (16″) le potentiel élémentaire de l'équation (4)

$$(26)\qquad \varphi_{n\mathrm{M}}^i=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\lambda_n^i}}\int_{\mathrm{H}}h_{n\mathrm{P}}^i\,\frac{\partial\gamma_{n\mathrm{M}}^{\mathrm{P}}}{\partial\zeta_{\zeta=0}}\,d\sigma.$$

La série

$$(27)\qquad \Phi_n=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_{n\mathrm{M}}^i\,|\,\alpha_i\cos n(\theta-\omega_n^i t)+\beta_i\sin n(\theta-\omega_n^i t)\,|$$

converge en moyenne vers le potentiel des vitesses en un point M quelconque du canal à l'instant t et correspondant à la surélévation $z_n(r\,\theta\,t)$. Ce potentiel satisfait aux équations et conditions linéaires suivantes :

$$\Delta\Phi_n=0,\qquad \frac{d\Phi_n}{dn_i}=0\quad\text{sur }\Gamma,\qquad \frac{\partial\Phi_n}{\partial t}-gz_n=0\quad\text{sur H},$$

et la série

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n$$

définit le potentiel correspondant à la surélévation $z(r\,\theta\,t)$, et par suite à la surélévation initiale.

Débit. — Si V_θ est la vitesse le long du parallèle passant en un point M du domaine liquide D situé dans le méridien d'azimut θ, on a

$$V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1}, \tag{28}$$

où

$$\Phi = \varphi_M \;[illegible]\; \theta_1 \tag{28'}$$

est un potentiel élémentaire de vitesses correspondant à l'entier n donné.

La moyenne du débit Q à travers D pendant l'unité de temps est

$$Q = \lim_{\theta_1 = \infty} \frac{-1}{\theta_1 - \theta} \int_\theta^{\theta_1} d\theta_1 \int_D \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1}\, d\sigma. \tag{29}$$

Ce débit est la somme de deux débits.

Le débit Q_1 à travers la section D_1 limitée par Γ et H est nul, car d'après (28′) l'intégrale triple de (29) est bornée.

Le débit Q_2 à travers la section D_2 limitée par H et la trace H_1 de la surface libre réelle, s'écrit en remarquant que

$$d\sigma = z\, d\rho,$$

où z désigne la surélévation

$$z = -\frac{\omega_n}{g}\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1}\right|_{z=0} = -\frac{\omega_n}{g}\, r V_{\theta\,z=0}, \tag{28''}$$

sous la forme

$$Q_2 = \lim_{\theta_1 = \infty} \frac{1}{\theta_1 - \theta} \int_\theta^{\theta_1} d\theta_1 \int_H \frac{\omega_n}{g\rho} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1}\right)^2_{z=0} d\rho, \tag{30}$$

où ω_n désigne la vitesse de rotation apparente correspondant au potentiel élémentaire considéré.

Désignons par V_0^{*2} la moyenne de V_0^2 le long de H, on a

(31) $$HV_0^{*2} = \lim_{\theta_1=\infty} \frac{1}{\theta_1 - \theta} \int_\theta^{\theta_1} d\theta_1 \int_H V_0^2 \, d\rho,$$

et la formule de la moyenne donne pour Q_2 l'expression

(30') $$Q_2 = \frac{\omega_n}{g} HR_1 V_0^{*2},$$

où R_1 est la distance à Oz d'un point intérieur à H.

L'expression (30) de Q_2, si l'on tient compte de (28'), prend la forme

(30'') $$Q_2 = \frac{n^2 \omega_n}{2g} \int_H \frac{1}{\rho} \varphi_{M\,z=0}^2 \, d\rho.$$

Mais le long du parallèle de rayon r de H la surélévation maximum est égale, d'après l'expression de z à $\frac{n\omega_n}{g} \varphi_{M\,z=0}$, et par suite, si a est compris entre le maximum et le minimum de

$$\frac{n\omega_n}{g} \varphi_{M\,z=0};$$

la première formule de la moyenne donne

(30''') $$Q_2 = \frac{ga^2}{2\omega_n} \int_H \frac{d\rho}{\rho} \sim \frac{ga^2}{2\omega_n} \log\left(1 + \frac{H}{R}\right),$$

où R est la distance à Oz du milieu de H et où H est supposé petit par rapport à R.

Si le rapport $\frac{H}{R}$ est très petit et si l'on pose

$$c = R\omega_n,$$

on a

(30^IV) $$Q_2 \sim \frac{gHa^2}{2c},$$

où c est la vitesse de propagation sur le parallèle moyen de H. La formule (30^IV) généralise la formule obtenue par Levi-Civita dans le cas d'un canal rectiligne [1].

---

[1] *Voir* Geppert, *loc. cit.*

Énergie. — Calculons l'énergie totale de la vague correspondant au potentiel élémentaire (28').

L'énergie cinétique E_c a pour expression

$$E_c = \frac{\pi}{2} D(\varphi),$$

où $D(\varphi)$ est le premier membre de la formule (A). En tenant compte de cette formule et de l'équation (6) on a, puisque les solutions fondamentales ont été normalisées

$$E_c = \frac{\pi}{2} \lambda_n,$$

où λ_n est le nombre caractéristique qui correspond à la solution φ.

L'énergie potentielle E_p a pour expression

$$E_p = \frac{g}{2} \int_K z^2 \, ds,$$

où z désigne toujours la surélévation et où l'intégrale est étendue à l'aire de la couronne K engendrée par H autour de Oz. D'après l'expression de z rappelée précédemment on trouve

$$E_p = E_c.$$

Similitude. — Étudions l'influence d'une homothétie de rapport h sur le potentiel élémentaire

$$\varphi(r, z) \cos n\theta_1.$$

La fonction $\varphi(r, z)$ devient, si r' et z' sont les coordonnées de M' homologue de M

$$\varphi'(r', z') = \varphi\left(\frac{r'}{h}, \frac{r'}{h}\right),$$

qui satisfait à (4) et (5).

L'équation (6) s'écrit

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial z'} = \lambda' \varphi'$$

ou

(6') $$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \lambda' h \varphi,$$

d'où

$$\lambda' h = \lambda.$$

et par suite

$$\frac{\omega^2}{\omega'^2} = h, \tag{31}$$

en désignant par ω' la vitesse apparente de rotation dans le nouveau canal. La relation (31) est indépendante de n et du potentiel élémentaire considéré.

Étude des oscillations (1).

Surface libre. — L'équation de la surface libre réelle à l'instant t correspondant au potentiel élémentaire (28'), où le module de φ_M est supposé très petit, est définie d'après (28'') par

$$z = -\frac{n\omega}{g}\varphi(r, o)\sin n(\theta - \omega t), \tag{32}$$

où ω désigne une des vitesses de rotation correspondant à l'entier n.

Cette surface à l'instant t est divisée en secteurs par $2n$ rayons nodaux sur lesquels la surélévation z est nulle et définie par

$$\sin n(\theta - \omega t) = 0.$$

Ces rayons sont indépendants de la paroi du canal, c'est-à-dire de la courbe Γ.

La surface libre peut posséder des circonférences nodales si la fonction $\varphi(r, o)$ s'annule sur le segment H, c'est-à-dire d'après l'équation (15) si la solution fondamentale de (19) qui correspond à la vitesse ω peut s'annuler sur H. Ces circonférences nodales dépendent donc de Γ.

La surface libre est ainsi divisée en zones où la surélévation est alternativement positive et négative ; cette surélévation est maximum ou minimum sur les bissecteurs des secteurs formés par les rayons nodaux.

Vitesse. — En un point de la masse liquide de coordonnées r, z, θ et à l'instant t considéré, les vitesses radiale, verticale et de circula-

(1) *Voir* Brillouin et Coulomb, *Oscillations d'un liquide pesant dans un bassin cylindrique en rotation.*

tion le long du parallèle sont données par

$$(33)\qquad \begin{cases} V_r = \varphi'_r(r, z)\cos n(\theta - \omega t), \\ V_z = \varphi'_z(r, z)\cos n(\theta - \omega t), \\ V_\theta = -\dfrac{n}{r}\varphi(r, z)\sin n(\theta - \omega t). \end{cases}$$

Sur les demi-plans méridiens nodaux N passant par les rayons nodaux on a $V_\theta = 0$; ces demi-plans N divisent la masse liquide en secteurs qui, tout en tournant autour de oz avec la vitesse ω, restent distincts les uns des autres. Sur les demi-plans méridiens B, bissecteurs des secteurs précédents on a $V_r = V_z = 0$ et le mouvement instantané du liquide est normal à B.

Outre les plans mobiles précédents, il peut exister des surfaces nodales fixes sur lesquelles une des composantes (33) de la vitesse peut s'annuler. Considérons d'abord les surfaces de révolution S définies par l'équation

$$\varphi(r, z) = \text{const.}$$

La méridienne Σ de toute surface S est orthogonale à Γ d'après l'équation (5), et il existe sur S des parallèles le long desquels le plan tangent à S est horizontal; le lien S′ de ces parallèles est une surface nodale fixe sur laquelle $V_r = 0$ et S′ divise la masse liquide en zones distinctes.

Vibration. — En intégrant par rapport à t les équations (33) on obtient, pour les variations des variables r, z, θ au voisinage de leurs valeurs moyennes, les expressions suivantes :

$$(34)\qquad \begin{cases} \delta r = -\dfrac{\varphi'_r}{n\omega}\sin n(\theta - \omega t), \\ \delta z = -\dfrac{\varphi'_z}{n\omega}\sin n(\theta - \omega t), \\ r\,\delta\theta = -\dfrac{\varphi}{r\omega}\cos n(\theta - \omega t). \end{cases}$$

Chaque molécule décrit donc autour de sa position moyenne une petite ellipse E suivant la loi des aires, et dans un même plan méridien les mouvements elliptiques sont en phase. Si l'on se déplace sur un parallèle intérieur au liquide, la phase seule varie dans le mouvement (34), ce qui explique la rotation avec la vitesse angulaire ω des plans nodaux N et de la surface libre. Le plan de toute ellipse E est normal à la surface S et par suite au passage de S' le sens du mouvement de la molécule change en projection horizontale. L'un des axes de E est horizontal et sa longueur diminue si l'on se déplace sur S en s'éloignant de l'axe du canal.

Clapotis. — A une même valeur de λ_n correspond deux valeurs opposées de la vitesse angulaire ω; en ajoutant les deux potentiels élémentaires correspondants on obtient un potentiel de clapotis

$$\Phi(r, z) = 2\varphi(r, z)\cos n\theta \cos n\omega t,$$

pour lequel les plans nodaux N sont fixes.

La vibration de la molécule est alors rectiligne; elle s'effectue encore dans un plan normal à la surface S, son amplitude reste constante le long d'un parallèle; mais l'angle qu'elle fait avec la normale à S varie avec le méridien. Pour tout point d'un plan N elle est située dans ce plan; pour tout point d'un plan B elle est normale à ce plan.

Cas des faibles profondeurs.

Équation différentielle. — Soit $z = k(r)$ l'équation de Γ; cette fonction s'annule aux extrémités du segment H, c'est-à-dire pour $r = a$ et $r = b$ en posant $a < b$. Nous supposons que $k(r)$ et sa dérivée $k'(r)$ restent faibles dans l'intervalle a, b. Dans le domaine D la coordonnée z reste faible; développons la fonction $\varphi(r, z)$ suivant les puissances de z et soit

$$\varphi(r, z) = \varphi_0(r) + z\varphi_1(r) + \ldots + z^p\varphi_p(r) + \ldots \tag{35}$$

ce développement. Si cette série et celles qu'on en déduit en calculant les dérivées des deux premiers ordres de ses termes sont uniformément convergentes, l'équation (4) donne en identifiant

$$\varphi_0'' + \frac{1}{r}\varphi_0' - \frac{n^2}{r^2}\varphi_0 + 2\varphi_2 = 0, \tag{36}$$

et, en général,

$$\varphi_p'' + \frac{1}{r}\varphi_p' - \frac{n^2}{r^2}\varphi_p + (p+1)(p+2)\varphi_{p+2} = 0. \tag{36'}$$

De cette dernière équation on tirera φ_{p+2}, et par suite, si les fonctions φ_p et leurs deux premières dérivées restent bornées, la série (35) est uniformément convergente dans tout le domaine D.

La condition au fond qui est la condition (5) s'écrit

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = k'(r)\frac{\partial\varphi}{\partial r} \qquad \text{pour} \quad z = k,$$

et en négligeant le produit kk', il vient

$$\varphi_1 + 2k\varphi_2 = k'\varphi'_0. \tag{37}$$

La condition à la surface qui est la condition (6) s'écrit

$$\varphi_1 = -\lambda_n\varphi_0. \tag{38}$$

En tenant compte de (37) et (38) l'équation (36) devient une équation différentielle en $\varphi_0(r)$ qui s'écrit en posant

$$\Lambda = \frac{n^2 k}{r^2} - \lambda_n,$$

$$\frac{d}{dr}\,|\,kr\varphi'_0\,| - \Lambda r\varphi_0 = 0. \tag{39}$$

Les fonctions φ_1 et φ_2 sont ensuite définies par (37) et (38) et φ_p pour $p \geqq 3$ par (36').

Dans (39) le coefficient k de φ''_0 s'annule pour $r = a$ et $r = b$ et la solution de (39) est en général infinie aux extrémités de H. Mais la surélévation définie par

$$z = \frac{n\omega}{g}\varphi_0 \sin n\theta_1$$

devant rester bornée, la solution de (39), qui résout le problème posé doit rester bornée pour $r = a$ et $r = b$.

En posant

$$\mathrm{P} = k\varphi'_0,$$

$$\mathrm{A}_1 = \Lambda\left|\frac{1}{k} - \left(\frac{1}{\Lambda r}\right)'\right|, \qquad \mathrm{A}_2 = \frac{\Lambda'}{\Lambda} - \frac{1}{r},$$

l'équation (39) prend la forme

$$\mathrm{P}'' = \mathrm{A}_2\mathrm{P}' + \mathrm{A}_1\mathrm{P}, \tag{39'}$$

et si φ'_0 reste bornée, la fonction P doit s'annuler pour $r = a$ et $r = b$, condition qui définira les valeurs possibles de λ_n.

Ce calcul suppose que les fonctions A_1 et A_2 restent bornées et continues dans l'intervalle $a < r < b$, ce qui suppose que A ne s'annule pas dans cet intervalle.

Mais A est négatif sur les bords du canal; il faut donc que

$$(r\omega)^2 > gk$$

et sur un parallèle quelconque la vitesse linéaire de propagation de l'onde est toujours supérieure à $\sqrt{gk}$, k étant la profondeur correspondant à ce parallèle.

Équation intégrale. — La solution de (39′) qui s'annule pour

$$r = a \quad \text{et} \quad r = b$$

est solution d'une équation intégrale homogène de Fredholm.

Considérons le noyau $K(r, s)$ défini par

$$k(r, s) = \frac{(r-b)(s-a)}{b-a} \quad \text{si} \quad s \leqq r$$

et

$$k(r, s) = \frac{(r-a)(s-b)}{b-a} \quad \text{si} \quad s \geqq r.$$

La solution $P(r)$ cherchée est solution de l'équation intégro-différentielle suivante, si a et b sont racines de $k(r)$ d'ordre $\leqq 1$ [1]

$$(40)\quad P(r) = \int_a^b K(r, s)\, A_1(s)\, P(s)\, ds + \int_a^b K(r, s)\, A_2(s) \frac{dP(s)}{ds}\, ds.$$

Elle se transforme par une intégration par parties et elle devient, puisque $K(r, s)$ est continue et s'annule pour $s = a$ et $s = b$, l'équation intégrale homogène suivante :

$$(40')\quad P(r) = \int_a^b \left[K(r, s)[A_1(s) - A'_2(s)] - \frac{\partial K(r, s)}{\partial s} A_2(s) \right] P(s)\, ds.$$

Le noyau de cette équation n'a qu'une discontinuité bornée et égale à $A_2(s)$ pour $r = s$; ce noyau dépend de λ_n et pour certaines valeurs caractéristiques de λ_n l'équation (40′) peut posséder des solutions non identiquement nulles.

Équation en λ_n. — On peut former directement l'équation

---

(1) GOURSAT, *Analyse*, t. III, p. 493 et suiv.

donnant les valeurs singulières de λ_n en partant de l'équation différentielle (39') elle-même. Supposons que la courbe Γ coupe H sous des angles aigus et portons l'origine des abscisses en une extrémité du segment H, ce segment étant réduit à l'unité par une similitude.

L'équation (39') prend la forme

$$r(1-r)P'' + r(1-r)\alpha(r)P' + \beta(r)P = 0, \tag{41}$$

où $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ sont deux fonctions holomorphes dans l'intervalle 0 1 ne s'annulant pas dans cet intervalle ni aux bornes.

Une intégrale de l'équation différentielle linéaire (41) ne peut admettre de singularités dans l'intervalle 0 1. Soit

$$P = c_0 r^m + c_1 r^{m+1} + \ldots$$

le développement en série d'une intégrale; en portant ce développement dans (41) et en écrivant que le coefficient du terme de plus bas degré, c'est-à-dire de degré $m-1$ est nul, on obtient l'équation

$$m(m-1)c_0 = 0.$$

Comme par hypothèse le coefficient c_0 n'est pas nul, et comme l'intégrale doit s'annuler pour $r=0$, il faut prendre $m=1$. Le coefficient c_0 reste arbitraire et l'origine est un nœud; on peut faire $c_0 = 1$, ce qui vérifie la condition $P'(0) = 1$. Les autres coefficients c_1, c_2, ... de l'intégrale sont des fonctions rationnelles de λ_n.

En écrivant que $P(1) = 0$ on obtiendra l'équation en λ_n (1).

ERRATA.

A. Appert. — Réflexions sur une Note de M. Bouligand : « Problèmes bien posés et problèmes à conditions surabondantes » (t. LXV, fasc. I-II, 1937).

Page 78, dernière ligne, *au lieu de*

$$P \in \pi, \qquad \text{distance } PP^* < \eta$$

lire

$$P \in \pi, \qquad 0 < \text{distance } PP^* < \eta.$$

---

(1) Goursat, *Analyse*, t. III, p. 498.