BULLETIN DE LA S. M. F.

LEWIS-BAYARD ROBINSON

Une pseudo-fonction et l'équation d'Izumi

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 66-70
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__66_0>

UNE PSEUDO-FONCTION ET L'ÉQUATION D'IZUMI;

PAR M. L.-B. ROBINSON.

Considérons l'équation

$$u'(x) = a(x)\,u[\varpi(x)] + b(x).$$

Sous les conditions

$$|\varpi(x)| < 1,$$
$$|x| \leqq 1,$$

Izumi a démontré l'existence d'une solution qui converge dans la région

$$|x| < 1 \quad (^1).$$

L'auteur a démontré le théorème plus général suivant :

Si

$$|\varpi(x)| \leqq 1,$$
$$|x| \leqq 1,$$

une solution existe qui converge dans la région

$$|x| \leqq 1.$$

Par conséquent nous pouvons résoudre une équation

$$u'(x) = a(x)\,u(x) + b(x)\,u[\varpi(x)]$$

qu'on ne saura pas résoudre au moyen de la méthode d'Izumi [2].

La question se présente. Est-ce qu'on peut étendre la région de convergence au delà du cercle de rayon un ?

C'est impossible à moins qu'on impose une *restriction* sur la fonction $\varpi(x)$.

L'exemple suivant démontrera la vérité de notre énoncé.

---

(1) *Tohoku Mathematical Journal*, 1929, p. 10.
(2) L'auteur a présenté la démonstration au *Journal de Duke University*.

Considérons l'équation

$$(1)\qquad u'(x) = a(x)\,u(x^2)$$
$$\varpi(x) = x^2$$

où $a(x)$ est une fonction entière dont les coefficients sont positifs.

Si nous développons $u(x)$ dans le voisinage de

$$x = 1,$$

notre équation prendra la forme

$$(2)\qquad w'(z) = b(z)\,w(2z + z^2) \quad (^1),$$

$b(z)$ comme $a(x)$ est une fonction entière dont tous les coefficients sont positifs.

On voit immédiatement que la série $w(z)$ qui satisfait formellement à l'équation (2) diverge partout. Par conséquent $z = 0$, $x = 1$ est un point singulier de $u(x)$.

Nous démontrons que le théorème ci-dessus entraîne comme conséquence l'existence d'une série de points singuliers qui forment tous les éléments d'un cercle de rayon un.

Il s'ensuit que la circonférence du cercle ci-dessus est une coupure pour $u(x)$.

Démonstration. — De l'équation (1) nous tirons le système

$$u'(x) = a_{11}(x)\,u(x^2) \quad (^2),$$
$$u''(x) = a_{12}(x)\,u(x^2) + a_{22}(x)\,u(x^4),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$u^r(x) = a_{1_r}(x)\,u(x^2) + a_{2_r}(x)\,u(x^4) + \ldots + a_{rr}(x)\,u(x^{2^r}).$$

Après avoir résolu le système ci-dessus nous obtiendrons

$$u(x^{2^r}) = \frac{1}{\Delta}\{\Delta_{r_1}u'(x) + \Delta_{r_2}u''(x) + \ldots + \Delta_{rr}u^{(r)}(x)\}.$$

En général $\Delta \not\equiv 0$ quand $|x| = 1$. Donc $u(x^{2^r})$ a un point singulier pour

$$x^{2^r} = 1,$$

puisque $u(x)$ a un point singulier pour $x = 1$.

(¹) Cette transformation est effectuée de la manière suivante :

$$u(x) \equiv w(x-1) \equiv w(z),$$
$$u(x^2) \equiv w(x^2-1) \equiv w\{2(x-1) + (x-1)^2\} \equiv w(2z_1 + z^2);$$

(²) $\qquad a(x) \equiv a_{11}(x), \qquad a_{12}(x) \equiv a'(x) \quad \ldots.$

Les racines de cette équation

$$x^{2^r} = 1$$

sont

$$\rho_k = \cos\frac{2K\pi}{2^r} + i\sin\frac{2K\pi}{2^r} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2^r),$$

ρ_k est un point SINGULIER de $u(x^{2^r})$.

Supposons que

$$x = \rho_k$$

soit un point ordinaire de la fonction $u(x)$. Donc

$$x = \rho_k$$

est un point ordinaire de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\Delta}\{\Delta_{r1}u^1(x) + \Delta_{r2}u''(x) + \ldots + \Delta_{rr}u^r(x)\}.$$

Mais

$$f(x) = u(x^{2r}).$$

Par suite $x = \rho_k$ est un point ORDINAIRE de $u(x^{2^r})$.

Nous sommes arrivé à une contradiction.

Par conséquent ρ_k est un point singulier de $u(x)$.

Les points ρ_k sont sur la circonférence du cercle de rayon *un*.

Quand $r \to \infty$, l'ensemble des points ρ_k sur la circonférence devient partout DENSE.

Nous pouvons construire la circonférence entière au moyen des points ρ_k.

Il en résulte que la circonférence est une coupure de la fonction $u(x)$.

Nous avons démontré notre théorème.

Il est impossible d'étendre la région de convergence de la solution de l'équation d'Izumi au delà du cercle de rayon un sans qu'on impose une restriction à la fonction $\varpi(x)$.

Nous sommes arrivé à la limite (1) (Anglice-Ultimate).

---

(1) Voir THOMAS, *Riquer's Existence theorems* (*Annals of Mathematics*, p. 309, lignes 25-30).

Reprenons l'équation

$$u'(x) = a(x)\,u(x^2). \tag{1}$$

Nous en avons fait l'étude en supposant que « $a(x)$ est une fonction entière dont les coefficients sont positifs ».

Nous allons supprimer cette restriction.

Nous ferons la transformation

$$\begin{gathered}
u(x) \equiv w(\operatorname{Log} x) \equiv w(z),\\
u(x^2) \equiv w(\operatorname{Log} x^2) \equiv w(2 \operatorname{Log} x) = w(2z),\\
x = e^z, \qquad z = \operatorname{Log} x,\\
u'(x) \equiv w'(z)\frac{dz}{dx} \equiv w'(z)\frac{1}{x} \equiv w'(z)e^{-z}.
\end{gathered}$$

Donc nous pourrons remplacer l'équation (1) par l'équation transformée

$$w'(z) = e^z a(e^z)\,w(2z) \tag{2}$$

ou

$$w'(z) = b(z)\,w(2z) \tag{2'}$$

ou

$$w'(z)\,b^{-1}(z) = w(2z). \tag{2''}$$

Une fonction holomorphe au voisinage du point

$$x = 1, \qquad z = 0,$$

qui satisfait à l'équation, ci-dessus n'existe pas [1].

Par suite le point (A) est un point singulier de l'équation (2″).

Donc nous pourrons démontrer que la circonférence du cercle de convergence est une coupure de la fonction $u(x)$ [2].

Nous pouvons aussi considérer l'équation

$$u'(x) = a(x)\,u(x^2) + b(x).$$

---

[1] L'auteur a présenté la démonstration au *Journal de Duke University.*

[2] Le procédé de démonstration est semblable à celui du premier Chapitre.

La solution peut s'écrire

$$u'(x) \equiv cv(x) + \varpi(x).$$

La solution particulière $\varpi(x)$ est holomorphe dans le voisinage du point

$$x = 1, \qquad z = 0,$$

$v(x)$ *est une pseudo-fonction, qu'on ne saura pas prolonger au delà du cercle de rayon un.*