BULLETIN DE LA S. M. F.

J. SOULA

Sur une classe de fonctions indéfiniment dérivables

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 57-65
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__57_0>

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS INDÉFINIMENT DÉRIVABLES;

PAR M. J. SOULA.

1. Les fonctions dont je m'occuperai sont des fonctions réelles ayant des dérivées de tous les ordres dans un intervalle fini (a, b), le module maximum de certaines de ces dérivées se comportant comme celui des fonctions analytiques holomorphes dans un champ qui contient le segment (a, b) sans qu'il en soit de même pour les dérivées de tous les ordres. Pour une telle fonction $f(x)$, on aura donc une suite d'inégalités

$$(1) \qquad |f^{(n)}(x)| < A\lambda^n n!$$

qui ne sont admises que pour certaines valeurs de n formant une suite illimitée. Je dirai que ce sont là les fonctions (R).

Ces fonctions font partie d'un ensemble de fonctions qui n'ont pas toutes des dérivées et qui ont été étudiées sous le nom de fonctions quasi analytiques par M. Serge Bernstein [1]; elles ont en commun avec les fonctions quasi analytiques de MM. Denjoy et Carlemann la propriété d'être définies par les valeurs qu'elles prennent sur un intervalle partiel quelconque. M. Serge Bernstein a donné des exemples de fonctions (R) qui ne sont pas analytiques.

2. Je rappelle d'abord une remarque de M. Bernstein, mais je la formule de manière à pouvoir la rendre comparable à ce qui suivra : soit une suite d'entiers illimitée $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$; si une fonction $f(x)$ est telle que les dérivées $f^{(n_p)}(x)$ n'ont pas de racine dans (a, b), la fonction est de la classe (R) dans tout intervalle intérieur à (a, b). Pour la démonstration, il suffira de se servir du principe suivant de M. S. Bernstein : si M est le maximum

(1) Serge BERNSTEIN, *Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques* (*Mathematiche Annalen*, t. 75, 1914, p. 449).

du module de la fonction $f(x)$ dans un intervalle de longueur h et m_n le minimum du module de la dérivée $n^{\text{ième}}$, on a

$$m_n < \frac{M}{2} n! \left(\frac{4}{h}\right)^n \quad (^1).$$

Dans notre hypothèse, il y a une infinité de fonctions $f^{(q)}$ qui sont non décroissantes par exemple, pour des valeurs de q de la forme $q = n_p - 1$. Soit un intervalle (c, d), $(a < c < d < b)$, $|f^{(q)}(x)|$ est maximum dans (c, d) pour $x = c$ ou pour $x = d$. Dans la première hypothèse, $f^{(q)}(c) < 0$ et $|f^{(q)}(c)|$ est le minimum du module pour l'intervalle (a, c); il est donc inférieur à $\frac{Mq!}{2}\left(\frac{4}{c-a}\right)^q$. Si, au contraire, $|f^{(q)}(x)|$ est maximum pour $x = d$, c'est que $f^{(q)}(d) > 0$ et $|f^{(q)}(x)|$ est minimum pour $x = d$ dans (d, b), donc $|f^{(q)}(d)| < \frac{Mq!}{2}\left(\frac{4}{b-d}\right)^q$. De toutes façons, le maximum dans (c, d) vérifie une inégalité de la forme (1) pour une infinité de valeurs de n.

Ainsi, d'une propriété des zéros de la suite des fonctions dérivées, on peut conclure qu'une fonction est de la classe (R). L'objet du présent travail est de montrer que, réciproquement, les dérivées des fonctions de la classe (R) n'ont pas leurs zéros distribués de façon quelconque. La propriété du n° 1 n'est que l'extension aux fonctions (R) du théorème de M. Gontcharoff concernant les fonctions analytiques. Cette proposition est généralisée au n° 6 et l'on remarquera que le théorème ainsi obtenu donne un résultat nouveau même pour les fonctions que l'on sait *a priori* être analytiques.

La méthode employée est celle qui a donné à M. Gontcharoff toute une suite de résultats intéressants (^{2}).

3. Soient une suite de valeurs x_n de l'intervalle (a, b) $(n = 0, 1, 2\ldots;\ a < x_n < b)$. Plus spécialement, je supposerai

---

(^{1}) J'ai démontré une inégalité analogue par une méthode non algébrique [*Sur une inégalité vérifiée par une fonction et sa dérivée d'ordre n* (*Mathematica*, vol. VI, 1932, p. 86)].

(^{2}) Gontcharoff, *Sur les dérivées successives des fonctions analytiques* (*Annales de l'École Normale*, t. 47, 1930, p. 1; Thèse).

par moments que l'on a

$$a < \ldots \leqq x_n \leqq \ldots \leqq x_1 \leqq x_0 < b. \tag{2}$$

Je considérerai, de toutes façons, les polynomes

$$\begin{aligned}
&P_0(x) = 1,\\
&P_1(x) = \int_{x_0}^{x} dt_1,\\
&P_2(x) = \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_1}^{t_1} dt_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&P_n(x) = \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_1}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_n. \qquad \ldots
\end{aligned}$$

On adoptera aussi la notation

$$P_n(x) = P(x; x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Ces polynomes vérifient les égalités

$$P_n(x_0) = 0, \quad P'_n(x_1) = 0, \quad \ldots, \quad P_n^{(n-1)}(x_{n-1}) = 0, \quad P_n^{(n)}(x) \equiv 1.$$

Je vais d'abord supposer que les inégalités (2) sont vérifiées, j'admettrai aussi que l'on a $x > x_0$ et je vais démontrer que $P_n(x)$ est positif. La variable t_1 qui figure dans son expression doit prendre des valeurs supérieures à x_0, donc à x_1. La variable t_2 doit prendre des valeurs supérieures à x_1, donc à x_2, etc. Les limites d'intégration supérieures sont donc plus grandes que les limites inférieures correspondantes et $P_n(x)$ n'est pas négatif pour $x > x_0$.

Observons que l'on a l'identité

$$P_n^{(q)}(x) = P_{n-q}(x; x_q, x_{q+1}, \ldots, x_{n-1}),$$

de sorte que l'on peut appliquer au polynome $P_n^{(q)}$ la remarque précédente : $P_n^{(q)}$ n'est pas négatif si $x > x_q$. Il est donc certain que $P_n(x)$ n'a pas de racine supérieure à x_0, puisque sa dérivée n'est pas négative pour $x > x_1$. De même $P_n(x)$ n'a pas de racine supérieure à x, etc. Nous dirons avec M. S. Bernstein que ce polynome dont toutes les dérivées sont positives pour $x > x_0$ est, pour ces valeurs, absolument croissant.

Dans le même cas spécial où les x_p vérifient les inégalités (2) et où $x > x_0$, on a immédiatement des inégalités vérifiées par P_n. Il suffit de remplacer toutes les limites d'intégration qui figurent dans son expression par la plus grande ou la plus petite. On a ainsi

$$(3) \qquad \frac{(x-x_0)^n}{n!} \leqq P_n(x) \leqq \frac{(x-x_n)^n}{n!}.$$

Dans le cas général où les x_p ne vérifient pas (2), M. Gontcharoff donne l'inégalité

$$|P_n(x)| < [\,|x-x_0| + |x_0-x_1| + \ldots + |x_{n-1}-x_n|\,]^n \frac{1}{n!}.$$

4. Soit $f(x)$ une fonction ayant des dérivées de tous les ordres dans (a, b). Nous admettons que $x_0, x_1, x_2, \ldots$ appartiennent à cet intervalle; la fonction

$$R_n(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_1) P_1(x) - \ldots - f^{(n)}(x_n) P_n(x)$$

vérifie

$$R_n^{(q)}(x_q) = 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq q \leqq n.$$

On en déduit

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_1}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_n}^{t_n} R_n^{(n+1)}(t_n)\, dt_n.$$

Mais la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ de R_n est identique à celle de $f(x)$.

Finalement

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_1}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_n}^{t_n} f^{(n+1)}(t_n)\, dt_n.$$

Cette formule de M. Gontcharoff peut être transformée et prendre une forme qui rappelle celle du reste de Lagrange d'une série de Taylor

$$(4) \qquad R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) P_{n+1}(x),$$

ξ étant compris dans l'intervalle le plus petit qui contient les points $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$. Dans le cas où les x_n vérifient (2) et $x > x_0$, cet intervalle est celui de x à x_n. Dans cette hypothèse, on peut d'ailleurs donner une démonstration qui rappelle celles que l'on emploie habituellement pour les formules de Taylor.

4. Soit une fonction $f(x)$ qui est de la classe (R) dans l'intervalle (a, b); soit une suite de valeurs de l'intervalle $x_0, x_1, x_2, \ldots$, telles que la série $|x_0 - x_1| + |x_1 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n+1}| + \ldots$ converge. Les x_n ont une limite que je désigne par X. Je suppose que l'on a

$$f^{(n)}(x_n) = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Donc

$$f(x) = f^{(n)}(\xi_n) P_n(x), \qquad (a < \xi_n < b).$$

Comme $f(x)$ est de la classe (R), pour une infinité de valeurs de n on peut écrire

$$f(x) < A \lambda^n n! \, |P_n(x)|$$

et, si je pose

$$r_n = |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \ldots, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$|f(x)| < A \lambda^n [(x - x_0) + r_0]^n.$$

Nous admettrons en premier lieu que l'on a $\lambda r_0 < 1$ et nous choisirons x assez voisin de x_0 pour que $|x - x_0| + r_0 < \frac{1}{\lambda}$.

On aperçoit que $f(x)$ est arbitrairement petit, donc nul, pour toutes les valeurs de x qui forment un intervalle. Comme on l'a déjà dit, il en résulte que cette fonction (R) est nulle : la démonstration est immédiate par l'emploi de la formule de Taylor ordinaire.

En deuxième lieu, ne supposons plus que λr_0 soit inférieur à 1; nos hypothèses entraînent qu'il y a un entier q tel que $\lambda r_q < 1$. Nous appliquerons la formule (4) à $f^{(q)}(x)$

$$f^{(q)}(x) = f^{(q+n)}(\xi_n) P_n(x, x_q, x_{q+1}, \ldots, x_{q+n}), \qquad (a < \xi_n < b).$$

Pour une infinité de valeur de n, on a

$$|f^{(q)}(x)| < A \lambda^{n+q} \frac{(n+q)!}{n!} [|x - x_q| + r_q]^n.$$

Choisissons x tel que $|x - x_q| + r_q < \frac{\mu}{\lambda}$, $(0 < \mu < 1)$; le second membre est de l'ordre de $\frac{(n+q)!}{n!} \mu^q$; $|f^{(q)}|$ est donc arbitrairement petit, par suite nul, dans un intervalle fini. Il est donc nul dans (a, b). La fonction $f^{(q-1)}$ est donc une constante, elle est nulle pour $x = x_{q-1}$, donc nulle partout. En remontant ainsi de proche en proche, on arrive encore à $f(x) = 0$.

Si la fonction $f(x)$ *est de la classe* (R) *dans l'intervalle* (a, b), *si l'on a* $f^{(n)}(x_n) = 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$, *les* x_n *étant des valeurs de l'intervalle telles que la série* $\Sigma |x_n - x_{n+1}|$ *converge, cette fonction est identiquement nulle.*

Le théorème (I) de la thèse de M. Gontcharoff s'applique donc aux fonctions (R). M. Gontcharoff a d'ailleurs établi récemment une autre généralisation ([1]). Un théorème analogue ne serait probablement pas exact pour les fonctions quasi analytiques de MM. Denjoy et Carlemann, mais il résulterait des recherches de M. Gontcharoff qu'une fonction de cette catégorie est nulle si $f^{(n)}(x_n) = 0$ quand les r_n tendent rapidement vers zéro.

5. Soit une fonction de la classe (R) ayant une infinité de dérivées qui sont toutes positives ou nulles pour $x = x_0$, valeur intérieure à l'intervalle (a, b). La série de Taylor $\sum \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$ n'a pas de terme négatif si $x_0 \leqq x < b$. La différence entre la somme des $n - 1$ premiers termes et la fonction $f(x)$ est donnée par la formule de Taylor et elle est de la forme

$$\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)].$$

Comme la fonction est de la classe (R), pour des valeurs de n appartenant à une certaine suite illimitée, cette différence est en module inférieure à $A\lambda^n(x - x_0)^n$; elle tend vers zéro si $x_0 < x < x_0 + \frac{1}{\lambda}$. Il en résulte que la somme des p premiers termes de la série est bornée quel que soit p et que cette série à termes positifs converge; le raisonnement montre d'ailleurs que sa somme est bien $f(x)$. Ainsi, $f(x)$ est holomorphe pour $x = x_0$ et le rayon de convergence de la série est le plus petit des nombres $\frac{1}{\lambda}$ et $b - x_0$;

([1]) Gontcharoff, *Sur les zéros des dérivées successives des fonctions absolument monotones* (*Comm. de la Soc. math. de Kharkof*, 4e série, t. 7, 1933).

je le désigne par R, j'examine le cas $\frac{1}{\lambda} < b - x_0$. Soit $x'_0 = x_0 + \frac{R}{2}$; les valeurs des dérivées $f^{(n)}(x'_0)$ sont données par des séries à termes positifs; le résultat obtenu montre donc que la fonction est holomorphe dans le cercle de centre x'_0 et dont le rayon est le plus petit des nombres $\frac{1}{\lambda}$ et $b - x'_0$. En continuant ainsi, on montrera que la fonction est holomorphe pour $x_0 < x < b$. Cela étant, le point du cercle de convergence de centre x_0 qui est situé sur l'axe réel du côté positif doit être singulier ([1]). Il en résulte que ce cercle n'a pas son rayon inférieur à $b - x_0$. *La fonction $f(x)$ est holomorphe dans le cercle* $|x - x_0| < b - x_0$.

6. Cette remarque simple peut être étendue à un cas plus général par les méthodes de M. Gontcharoff, le cas où la fonction $f(x)$ est de la classe (R) dans l'intervalle (a, b) et où $f^{(n)}(x_n)$ est positif ou nul pour toutes les valeurs de n, les x_n étant des valeurs de l'intervalle qui vérifient les inégalités (2).

Acceptons ces hypothèses; désignons par $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ les entiers pour lesquels on a l'inégalité (1); désignons par X la limite des x_n. Je choisis un entier q assez grand pour que $0 < x_q - X < \frac{1}{\lambda}$; j'applique à $f^{(q)}(x)$ les formules du n° 3. Je suppose que l'on donne à x des valeurs comprises entre x_q et $X + \frac{1}{\lambda}$. On a ainsi

$$\begin{aligned} f^{(q)}(x) = {} & f^{(q)}(x_q) + f^{(q+1)}(x_{q+1}) P_1(x; x_q) + \dots \\ & + f^{(q+n-1)}(x_{q+n-1}) P_{n-1}(x; x_q, \dots, x_{q+n-1}) + R_n. \end{aligned}$$

J'ai posé

$$R_n = f^{(n+q)} P_n(x; x_q, \dots, x_{q-n}), \qquad f^{(q)}(x) = S_n + R_n$$

avec $a < \xi < b$.

L'inégalité (3) donne ici

$$P_n(x; x_q, \dots, x_{q+n}) < \frac{1}{n!}(x - x_{n+q})^n.$$

([1]) Pour ce principe sur les séries de Taylor à coefficients positifs, *voir*, par exemple, HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement* (*Collection Scienta*, Chap. III, n° 4, p. 20).

Pour certaines valeurs de $n(n = n_1, n_2, \ldots)$, on a donc

$$|\mathrm{R}_n(x)| < \mathrm{A}\lambda^q \frac{(x+q)!}{n!}[(x-\mathrm{X})\lambda]^n$$

et cette quantité tend vers zéro si $x_q < x < \mathrm{X} + \frac{1}{\lambda}$.

La série $\Sigma(\mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n)$ est donc convergente pour ces valeurs de n; elle se déduit de la série $\Sigma f^{(q+n)}(x_{q+n})\mathrm{P}_p(x; x_q, \ldots, x_{q+n})$ par groupement de termes. Cette dernière qui a ses termes positifs, comme on a vu au n° 3, converge donc dans le même intervalle.

On a vu que

$$\mathrm{P}_n(x; x_q, x_{q+1}, \ldots, x_{q+n-1}) > \frac{(x-x_q)^n}{n!},$$

la série $\sum \frac{(x - x_q)^n}{n!} f^{(q+n)}(x_{q+n})$ converge donc aussi et sa somme est une fonction holomorphe pour $|x - x_q| < \mathrm{X} + \frac{1}{\lambda} - x_q$. Un théorème de M. Gontcharoff (¹) montre que, dans ces conditions, la série $\Sigma f^n(x_{q+n})\mathrm{P}_n(x; x_q, \ldots, x_{q+n})$ est convergente dans le cercle ayant pour centre le point X limite des x_n et dont le rayon est égal au précédent, soit $\mathrm{X} + \frac{1}{\lambda} - x_q$. Cette série représente aussi une fonction holomorphe dans le cercle de centre X.

Ainsi, $f^q(x)$ est holomorphe dans le cercle de centre de point X et de rayon $\mathrm{X} + \frac{1}{\lambda} - x_q$. Il en est de même de $f(x)$ et, comme x_q est arbitrairement voisin de X, $f(x)$ est holomorphe dans le cercle $|x - \mathrm{X}| < \frac{1}{\lambda}$.

Une autre évaluation du rayon du cercle de centre X où $f(x)$ est holomorphe peut être donnée. Prenons s assez grand pour que x_s soit dans le cercle $|x - \mathrm{X}| < \frac{1}{\lambda}$. La fonction $f^{(s)}(x)$ est holomorphe dans ce cercle et, par suite, d'après le théorème I de M. Gontcharoff, développable en série de la forme

$$\begin{aligned} f^{(s)}(x) = f(x_s) + f^{(s+1)}(x_{s+1})\mathrm{P}_1(x, x_s) + \ldots \\ + f^{(s+n)}(x_{s+n})\mathrm{P}_n(x; x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}) + \ldots; \end{aligned}$$

(¹) Gontcharoff, *loc. cit.*, Thèse, théorème VII.

le développement est valable au voisinage de x_s. Prenons x réel, et plus grand que x_s. Les polynomes $P_n(x; x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n})$ sont positifs, puisque $x > x_s \geqq x_{s+1} \geqq \ldots$ et $f^{(s)}(x)$ est positif. Le même résultat s'applique si l'on remplace s par un entier plus grand. La remarque du n° 5 montre que $f^{(s)}(x)$ est holomorphe dans tout cercle ayant pour centre un point x tel que $x_s < x < X + \frac{1}{\lambda}$ et dont le rayon est $b - x$. Dans un tel cercle $f(x)$ est aussi holomorphe et, comme x_s peut être pris aussi voisin de X qu'on le veut, $f(x)$ est holomorphe dans le cercle passant par le point b et ayant son centre en X.

Ce résultat acquis, un raisonnement identique au précédent montrera que $f(x)$ est positif ainsi que toutes ses dérivées pour $x_0 < x < b$.

Si la fonction $f(x)$ est de la classe (R) *dans l'intervalle* (a, b), *si $f^{(n)}(x_n)$ n'est jamais négatif, les x_n étant des valeurs de l'intervalle telles que $a < \ldots \leqq x_n \leqq \ldots \leqq x_1 \leqq x_0 < b$, la fonction est holomorphe au point X limite des x_n et dans un cercle ayant pour centre ce point et pour rayon le plus grand des nombres $\frac{1}{\lambda}$ et $b - X$ $\left[\lambda \text{ est la plus petite limite de } \sqrt[n]{\frac{M_n}{n!}}, M_n \text{ est le maximum de } |f^{(n)}(x)|\right]$.*