BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI CARTAN

Sur les fonctions de n variables complexes : les transformations du produit topologique de deux domaines bornés

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 37-48
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__37_0>

SUR LES FONCTIONS DE n VARIABLES COMPLEXES : LES TRANSFORMATIONS DU PRODUIT TOPOLOGIQUE DE DEUX DOMAINES BORNÉS;

PAR M. HENRI CARTAN.

1. Je me propose de développer ici le contenu d'une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1).

Il s'agit essentiellement de généraliser, pour n variables complexes, le théorème classique : dans l'espace de *deux* variables complexes x et y, le domaine

$$|x| < 1, \qquad |y| < 1$$

n'admet pas d'autre transformation pseudo-conforme (2) biunivoque en lui-même que les transformations

$$x \to S(x), \qquad y \to T(y), \tag{1,1}$$

combinées avec la transformation

$$x \to y, \qquad y \to x; \tag{1,2}$$

$S(x)$ ou $T(y)$ désigne la transformation homographique la plus générale du domaine $|x| < 1$ ou $|y| < 1$ en lui-même.

Pour généraliser ce résultat, partageons les n variables complexes envisagées en deux groupes $x_1, \ldots, x_p$ et $y_1, \ldots, y_q$ $(p + q = n)$, et désignons la transformation pseudo-conforme la plus générale par la notation

$$x \to f(x, y), \qquad y \to g(x, y);$$

$f(x, y)$ désigne p fonctions holomorphes des $p + q$ variables x_i

(1) T. 199, 1934, p. 925-927.

(2) Suivant l'usage, nous donnons, dans l'espace de n variables complexes, le nom de *pseudo-conforme* à toute transformation définie par n fonctions analytiques des n variables complexes.

et y_j, et $g(x, y)$ désigne q fonctions holomorphes des mêmes variables. Cela étant, nous démontrerons plus loin le

THÉORÈME I. — Soit, dans l'espace des p variables (x), un domaine [1] borné D_x, et, dans l'espace des q variables (y), un domaine borné D_y; soit D le produit topologique de ces deux domaines (D est un domaine borné dans l'espace des n variables x_i et y_j). Dans ces conditions : *toute transformation pseudo-conforme biunivoque de* D *en lui-même est le produit d'une transformation biunivoque de* D_x *en lui-même par une transformation biunivoque de* D_y *en lui-même; autrement dit, une telle transformation a nécessairement la forme*

$$x \to f(x), \qquad y \to g(y);$$

ou du moins il en est ainsi pour toutes les transformations de D *qui sont assez voisines de la transformation identique.*

Cette dernière restriction est essentielle, comme le montre l'exemple de la transformation (1,2) citée plus haut. D'ailleurs, au sujet de cette restriction, on peut préciser de la façon suivante : le « groupe » d'un domaine D (c'est-à-dire le groupe de toutes les transformations pseudo-conformes biunivoques de D en lui-même) se compose, on le sait [2] (au moins dans le cas où D est borné), d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de familles continues et connexes, dont l'une est un groupe de Lie qui peut d'ailleurs se réduire à la seule transformation identique. Le théorème I peut alors s'énoncer ainsi :

Le groupe de Lie connexe du domaine D *est le produit direct du groupe de Lie connexe de* D_x *par le groupe de Lie connexe de* D_y. En particulier, le groupe de D n'est *transitif* que si les groupes de D_x et de D_y sont tous deux transitifs.

---

(1) Il s'agit aussi bien de domaines multivalents que de domaines univalents; on n'exclut pas le cas où les domaines envisagés posséderaient des variétés de ramification intérieures.

(2) *Voir* H. CARTAN, *Sur les groupes de transformations analytiques* (Collection d'exposés mathématiques publiés à la mémoire de J. Herbrand, fasc. IX, Hermann, Paris 1935).

2. Pour démontrer le théorème I, nous établirons le résultat plus général que voici :

THÉORÈME II. — *Soient* D_x *un domaine borné de l'espace* (x) *et* D_y *un domaine borné de l'espace* (y). *Soit* Δ *un domaine de l'espace* (x, y) *qui contienne à son intérieur le produit topologique de* D_x *et de* D_y, *mais qui soit intérieur au produit topologique de* D_x *par l'espace* (y) *tout entier. Alors, pour toute transformation pseudo-conforme biunivoque de* Δ *en lui-même*

$$x \to f(x, y), \qquad y \to g(x, y), \tag{2,1}$$

$f(x, y)$ *est indépendant de* y, *et la transformation*

$$x \to f(x)$$

est une transformation biunivoque de D_x *en lui-même. Du moins, tout cela est vrai pour toutes les transformations* (2,1) *assez voisines de la transformation identique.*

3. Pour la démonstration du théorème II, nous utiliserons la *métrique de Carathéodory*. Étant donné, dans l'espace de n variables complexes, un domaine borné Δ et deux points M et M' intérieurs à Δ, on désigne par

$$d_\Delta(M; M')$$

la borne supérieure, au point M', du module des fonctions holomorphes dans Δ, de module inférieur à *un* dans Δ, et nulles en M. On a

$$d_\Delta(M; M') = d_\Delta(M'; M) < 1.$$

Cette pseudo-distance d_Δ reste *invariante* par toute transformation pseudo-conforme de Δ en lui-même; d'autre part, si Δ est intérieur à Δ_1, on a évidemment

$$d_\Delta(M; M') \geqq d_{\Delta_1}(M; M').$$

Nous aurons à nous servir du lemme suivant :

LEMME I. — *Soit* Δ *un domaine qui contient l'hypersphère de centre* O *et de rayon* r, *mais est intérieur à l'hypersphère de centre* O *et de rayon* R (O désigne un point fixe quelconque de Δ). *Tant que la distance euclidienne d'un point variable* M *au point* O *reste au plus égale à un certain nombre* ρ (*qui ne dépend que de* r *et* R), *la pseudo-distance*

$$d_\Delta(\mathrm{O}; \mathrm{M})$$

est une fonction monotone (*au sens strict*) *quand* M *décrit une demi-droite quelconque issue de* O.

Prenons en effet O comme origine des coordonnées, et choisissons les axes de façon que, sur la demi-droite OM envisagée, toutes les coordonnées (complexes) soient nulles sauf une, que nous appellerons z, et que nous supposerons réelle et positive sur la demi-droite OM. Posons

$$d_\Delta(\mathrm{o}; \mathrm{M}) = \varphi(z),$$

fonction définie pour $\mathrm{o} \leqq z < r$. On a

$$\varphi(z) \geqq \frac{z}{\mathrm{R}}, \tag{3,1}$$

car la fonction $\frac{z}{\mathrm{R}}$ est nulle en O, et de module inférieur à *un* dans Δ.

Soit z_0 un point fixe de la demi-droite ($z_0 < r$). Il existe une fonction holomorphe dans Δ, de module inférieur à *un* dans Δ, et qui est égale à $\varphi(z_0)$ pour $z = z_0$. En effet la borne supérieure, pour $z = z_0$, du module des fonctions nulles en O et de module inférieur à un dans Δ, est *atteinte* pour au moins une de ces fonctions, parce qu'elles forment une famille normale. Si on annule toutes les coordonnées sauf z, cette fonction se réduit à une fonction de la variable z, soit

$$f_{z_0}(z),$$

qui est certainement holomorphe et de module inférieur à un pour $|z| < r$; d'autre part

$$f_{z_0}(\mathrm{o}) = \mathrm{o}, \qquad f_{z_0}(z_0) = \varphi(z_0).$$

Soit

$$f_{z_0}(z) = z\,a(z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} z^n a_n(z_0) = z a(z_0) + g_{z_0}(z);$$

on a

$$|a_n(z_0)| \leqq \frac{1}{r^n};$$

d'où

$$|g_{z_0}(z)| \leqq \frac{\dfrac{z^2}{r^2}}{1-\dfrac{z}{r}},$$

et par suite, pour $z = z_0$ [1],

$$\mathcal{R}[z_0 a(z_0)] \geqq \varphi(z_0) - \frac{\dfrac{z_0^2}{r^2}}{1-\dfrac{z_0}{r}},$$

c'est-à-dire, si z_0 est inférieur ou égal à un certain nombre ρ (à déterminer ultérieurement),

$$\mathcal{R}[a(z_0)] \geqq \frac{\varphi(z_0)}{z_0} - \frac{\dfrac{\rho}{r^2}}{1-\dfrac{\rho}{r}},$$

ou enfin, en tenant compte de (3,1),

(3,2) $$\mathcal{R}[a(z_0)] \geqq \frac{1}{R} - \frac{\dfrac{\rho}{r^2}}{1-\dfrac{\rho}{r}}.$$

Soit z_1 un autre point de la demi-droite ($0 < z_1 \leqq \rho$). Nous voulons montrer que

$$\frac{\varphi(z_1)-\varphi(z_0)}{z_1-z_0} > 0,$$

ce qui établira le lemme. Supposons par exemple $z_1 > z_0$. On a alors

$$\varphi(z_1) \geqq |f_{z_0}(z_1)|;$$

il suffit donc de montrer

(3,3) $$\mathcal{R}\left(\frac{f_{z_0}(z_1)-f_{z_0}(z_0)}{z_1-z_0}\right) > 0.$$

Or le premier membre de cette inégalité est égal à

$$\mathcal{R}\left(a(z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z_0)\frac{z_1^n - z_0^n}{z_1 - z_0}\right),$$

et l'on a

$$\left|a_n(z_0)\frac{z_1^n - z_0^n}{z_1 - z_0}\right| \leqq \frac{n\rho^{n-1}}{r^n};$$

[1] Par $\mathcal{R}(u)$, nous désignons la partie réelle d'un nombre complexe u.

d'où

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n(z_0)\frac{z_1^n - z_0^n}{z_1 - z_0}\right| \leqq \frac{2\dfrac{\rho}{r^2} - \dfrac{\rho^2}{r^3}}{\left(1 - \dfrac{\rho}{r}\right)^2},$$

et par suite, en tenant compte de (3,2),

$$\mathcal{R}\left(\frac{f_{z_0}(z_1) - f_{z_0}(z_0)}{z_1 - z_0}\right) \geqq \left(\frac{1}{R} - \frac{\dfrac{\rho}{r^2}}{1 - \dfrac{\rho}{r}}\right) - \frac{2\dfrac{\rho}{r^2} - \dfrac{\rho^2}{r^3}}{\left(1 - \dfrac{\rho}{r}\right)^2} = \frac{1}{R} - \frac{\dfrac{3\rho}{r^2} - \dfrac{2\rho^2}{r^3}}{\left(1 - \dfrac{\rho}{r}\right)^2}.$$

Si $\rho\,(\rho < r)$ a été choisi assez petit pour que

$$(3,4) \qquad \frac{\dfrac{3\rho}{r} - \dfrac{2\rho^2}{r^3}}{\left(1 - \dfrac{\rho}{r}\right)^2} < \frac{r}{R},$$

alors l'inégalité (3,3) est vérifiée; cela démontre le lemme en le précisant.

4. Abordons maintenant la démonstration du théorème II. Tout revient à démontrer que, si la transformation T

$$x \to f(x, y), \qquad y \to g(x, y)$$

est « assez voisine de la transformation identique » (et il faudra préciser le sens de cette locution), alors la fonction $f(x, y)$ ne dépend pas des variables y. En effet, une fois ce point acquis, la transformation inverse T^{-1}

$$x \to f_1(x, y), \qquad y \to g_1(x, y)$$

aura la même forme, pour la même raison. Nous aurons donc deux transformations

$$x \to f(x) \quad \text{et} \quad x \to f_1(x),$$

définies dans D_x, et dont le produit sera la transformation identique $x \to x$. Il en résultera que chacune d'elles est une transformation biunivoque de D_x en lui-même, ce qui achèvera d'établir le théorème II.

Ainsi tout revient à montrer que $f(x, y)$ ne dépend pas de y. Pour cela, choisissons une fois pour toutes, dans le domaine Δ, un point (x_0, y_0) tel que x_0 appartienne à D_x sans en être un point de ramification, et que y_0 appartienne à D_y sans en être un point de ramification. Dans ces conditions, il existe deux nombres positifs r et r', tels que l'hypersphère de centre x_0 et de rayon $2r$ soit intérieure à D_x, et que l'hypersphère de centre y_0 et de rayon $2r'$ soit intérieure à D_y. Pour simplifier l'écriture, désignons par

$$|x - x'|, \quad \text{ou} \quad |y - y'|,$$

la distance euclidienne de deux points x et x' de l'espace (x), ou de deux points y et y' de l'espace (y). Nous allons démontrer le lemme suivant :

Lemme II. *Les hypothèses et notations précédentes étant conservées, il existe deux nombres positifs α et β $(\alpha < r,\ \beta < r')$ jouissant de la propriété suivante : si la transformation* T *est telle que l'on ait*

$$(4,1) \qquad |f(x, y) - x| < \alpha, \qquad |g(x, y) - y| < \beta$$

pour tout point (x, y) du domaine

$$(4,2) \qquad |x - x_0| < r, \qquad |y - y_0| < r',$$

et si en outre la transformation inverse jouit de la même propriété, alors on a

$$f(x, y) = f(x, y_0)$$

quel que soit le point (x, y) du domaine

$$(4,3) \qquad |x - x_0| < \alpha, \qquad |y - y_0| < \beta.$$

Une fois le lemme II établi, on pourra conclure, par prolongement analytique de $f(x, y)$ dans le domaine Δ, que $f(x, y)$ ne dépend pas de y; le théorème II sera donc démontré, et le sens de la locution « si T est assez voisine de la transformation identique » se trouvera précisé.

5. Avant le lemme II, nous établirons le

Lemme III. — *Si x et x' appartiennent à D_x, si en outre l'un au moins des points y et y' appartient à l'hypersphère*

$$|y - y_0| < r',$$

on a

$$d_\Delta(x, y;\ x', y') = d_x(x;\ x') \tag{5,1}$$

dès que le quotient

$$\frac{|y'-y|}{|x'-x|}$$

est inférieur à un certain nombre positif K.

Dans cet énoncé, $d_x(x;\ x')$ désigne la pseudo-distance des points x et x' dans le domaine D_x, et $d_\Delta(x, y;\ x', y')$ désigne la pseudo-distance des points (x, y) et (x', y') dans le domaine Δ. Pour démontrer (5,1) on remarque d'abord que l'on a

$$d_\Delta(x, y;\ x', y') \geqq d_x(x;\ x'). \tag{5,2}$$

En effet, si l'on désigne pour un instant par D le produit topologique de D_x par l'espace (y) tout entier, et qu'on observe que Δ est intérieur à D, on a

$$d_\Delta(x, y;\ x', y') \geqq d_D(x, y;\ x', y');$$

or

$$d_D(x, y;\ x', y') = d_x(x;\ x'),$$

car toute fonction de x et y, holomorphe et de module inférieur à un dans D, se réduit à une fonction de x seul, holomorphe et de module inférieur à un dans D_x.

Il reste donc à démontrer l'inégalité

$$d_\Delta(x, y;\ x', y') \leqq d_x(x;\ x'). \tag{5,3}$$

Pour cela, supposons x, y, x', y' fixés; au moyen d'une transformation linéaire sur les coordonnées (conservant les distances), on peut se ramener au cas où toutes les coordonnées de x et de x' sont égales sauf une; de même pour y et y'. On aura donc

$$x'_i - x_i = 0 \qquad (2 \leqq i \leqq p),$$
$$y'_j - y_j = 0 \qquad (2 \leqq j \leqq q).$$

Cela étant, à chaque point $\xi(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ de D_x, je fais correspondre le point $\eta(\eta_1, \ldots, \eta_q)$ défini par les formules

$$\left\{\begin{aligned} \eta_1 &= y_1 + \frac{y'_1 - y_1}{x'_1 - x_1}(\xi_1 - x_1), \\ \eta_j &= y_j \qquad (2 \leqq j \leqq q). \end{aligned}\right. \tag{5,4}$$

On a par hypothèse

$$\left|\frac{y'_1 - y_1}{x'_1 - x_1}\right| < \mathrm{K},$$

et par suite

$$|\eta_1 - y_1| < \mathrm{K}\,|\xi_1 - x_1| < \mathrm{KM},$$

M étant un nombre fixe; en effet, le domaine D_x est *borné* par hypothèse. Par hypothèse aussi, le point y est intérieur à l'hypersphère de centre y_0 et de rayon r'. Nous serons donc sûrs que le point η reste intérieur à D_y si

$$|\eta_1 - y_1| < r'$$

car alors le point η sera intérieur à l'hypersphère de centre y_0 et de rayon $2r'$. En définitive, il suffit que

$$\mathrm{KM} < r'$$

pour que le point (ξ, η) (dont les coordonnées sont des fonctions holomorphes de coordonnées de ξ lorsque ξ décrit le domaine D_x) reste intérieur à Δ.

K étant choisi de façon à satisfaire à cette condition, je vais construire une fonction $G(\xi)$, holomorphe et de module inférieur à un dans D_x, nulle pour $\xi = x$, et égale à $d_\Delta(x, y;\, x', y')$ pour $\xi = x'$. L'inégalité (5,3) en résultera.

Or il existe précisément une fonction $F(\xi, \eta)$, holomorphe et de module inférieur à *un* dans Δ, nulle au point (x, y) et égale à $d_\Delta(x, y;\, x', y')$ au point (x', y'). Si, dans cette fonction, nous remplaçons η en fonction de ξ d'après les formules (5,4), nous obtiendrons la fonction $G(\xi)$ annoncée. Le lemme 3 est donc démontré.

6. Nous arrivons à la démonstration du lemme II. Soit R un nombre positif assez grand pour que toute hypersphère de rayon R, dont le centre ξ appartient à l'hypersphère

$$(6,1) \qquad |\xi - x_0| < r,$$

contienne le domaine D_x à son intérieur. D'après la définition de r (§ 4), l'hypersphère de rayon r et de centre ξ est intérieure à D_x quel que soit ξ satisfaisant à (6,1). Si nous voulons appliquer le lemme I au domaine D_x et au point ξ de ce domaine, nous sommes conduit à choisir un nombre positif $\rho (\rho < r)$ satisfaisant à

$$(3,4) \qquad \frac{\frac{3\rho}{r} - \frac{2\rho^2}{r^2}}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^2} < \frac{r}{R};$$

nous ajouterons la condition

$$(6,2) \qquad \rho < \frac{r}{2}.$$

ρ étant ainsi choisi, choisissons un nombre positif α satisfaisant à

$$(6,3) \qquad \alpha < \frac{\rho}{2},$$

et enfin un nombre positif β satisfaisant à

$$(6,4) \qquad \beta < r'$$

et à

$$(6,5) \qquad \beta < K\left(\frac{\rho}{2} - \alpha\right),$$

K ayant la même signification qu'au lemme III.

α et β étant ainsi choisis, il nous reste à démontrer l'exactitude du lemme II. Soit donc (x, y) un point du domaine (4,3). Nous voulons démontrer que, dans le domaine D_x, les points $f(x, y_0)$ et $f(x, y)$ coïncident. Or, qu'ils coïncident ou non, on a, d'après l'hypothèse (4,1),

$$(6,6) \qquad |f(x, y) - f(x, y_0)| < 2\alpha < \rho.$$

On peut donc trouver, dans l'espace (x), un point ξ situé à une distance ρ du point $f(x, y_0)$ et tel que le point $f(x, y)$ appartienne au segment de droite qui joint $f(x, y_0)$ à ξ. L'inégalité (6,1) est bien vérifiée par ξ, et par suite le lemme I est applicable au domaine D_x et à la demi-droite qui joint le point ξ au point $f(x, y_0)$. Pour s'assurer que ξ satisfait à (6,1), on écrit

$$\begin{aligned} |\xi - x_0| &\leq |\xi - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - x| + |x - x_0| \\ &< \rho + \alpha + \alpha < 2\rho < r. \end{aligned}$$

Appliquons maintenant l'hypothèse (4,1) à la transformation inverse T^{-1}; soit (x', y') le transformé de (ξ, y_0) par T^{-1}. On aura

$$(6,7) \qquad |\xi - x'| < \alpha, \qquad |y_0 - y'| < \beta.$$

Nous allons appliquer le lemme III au deux points (x, y_0) et (x', y'). Pour cela, nous devons nous assurer que

$$|y' - y_0| < K\,|x' - x|;$$

or on a

$$|x' - x| > |\xi - f(x, y_0)| - |f(x, y_0) - x| - |\xi - x'| > \rho - 2\alpha$$

et

$$|y' - y_0| < \beta;$$

comme on a effectivement, d'après (6,5),

$$\beta < K(\rho - 2\alpha),$$

les conditions du lemme III sont bien remplies. D'où

$$(6,8) \qquad d_\Delta(x, y_0;\, x', y') = d_x(x;\, x').$$

Appliquons de même le lemme III aux deux points

$$[f(x, y_0), g(x, y_0)] \quad \text{et} \quad [f(x', y'), g(x', y')],$$

c'est-à-dire en définitive aux points

$$[f(x, y_0), g(x, y_0)] \quad \text{et} \quad (\xi, y_0).$$

Il faut vérifier que

$$|g(x, y_0) - y_0| < K\,|f(x, y_0) - \xi|.$$

Or, d'après l'hypothèse (4,1), on a

$$|g(x, y_0) - y_0| < \beta,$$

et, par construction,

$$|f(x, y_0) - \xi| = \rho;$$

comme on a effectivement, d'après (6,5),

$$\beta < K\rho,$$

le lemme III est applicable. D'où

$$(6,9) \quad d_\Delta[f(x, y_0), g(x, y_0); f(x', y'), g(x', y')] = d_x[f(x, y_0); \xi]$$

Comparons maintenant (6,8) et (6,9). Les premiers membres sont égaux, puisque la pseudo-distance d_Δ reste invariante par la transformation T. On en déduit

$$(6,10) \qquad d_x[f(x, y_0); \xi] = d_x(x; x').$$

Maintenant, on pourrait appliquer pareillement le lemme III aux deux points (x, y) et (x', y'), puis à leur transformés par T; le lecteur s'assurera facilement que les conditions d'application du lemme III sont remplies chaque fois. Il viendra finalement

$$(6,11) \qquad d_x[f(x, y); \xi] = d_x(x; x').$$

Comparons enfin (6,10) et (6,11), ce qui donne

$$d_x[f(x, y_0); \xi] = d_x[f(x, y); \xi].$$

En vertu du lemme I, *les points* $f(x, y_0)$ *et* $f(x, y)$, qui sont situés sur une même demi-droite issue de ξ, et à une distance de ξ au plus égale à ρ, *doivent coïncider*. Tout est donc démontré.