BULLETIN DE LA S. M. F.

N. PODTIAGUINE

Sur les fonctions croissantes régulières

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 25-36
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__25_0>

SUR LES FONCTIONS CROISSANTES RÉGULIÈRES;

PAR M. N. PODTIAGUINE.

M. J. Karamata, dans sa Note *Sur un mode de croissance régulière des fonctions* (¹), a donné une notion nouvelle de la régularité de la croissance, qui peut être définie de la manière suivante :

Une fonction $y(x)$, définie pour tout $x \geqq 0$, sera dite à croissance régulière lorsque

$$y(x) > 0$$

pour tout $x \geqq 0$, et lorsque

$$\lim_{x=\infty} \frac{y(tx)}{y(x)} = h(t)$$

pour tout $t > 0$.

Dans une autre Note, *Sur un mode de croissance régulière*, publiée dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (²), M. J. Karamata a démontré, sur ces fonctions régulières, le théorème fondamental suivant :

Soit $y(x)$ une fonction définie dans $(0, \infty)$ *et telle que*

$$y(x) > 0$$

pour tout $x \geqq 0$. Lorsque

$$(1) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{y(tx)}{y(x)} = h(t),$$

pour une seule valeur de $t_0 \neq 1$ de t, alors

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log y(x)}{\log x} = \frac{\log h(t_0)}{\log t_0} = a;$$

(¹) *Mathematica* (Cluj), V, IV, 1930, p. 38.

(²) Tome 61, 1933, p. 55.

lorsque, d'autre part, la relation (1) *a lieu pour tout* $t > 0$, *avec* $0 < h(t_0) < \infty$, *alors*

$$h(t) = t^a,$$

pour tout $t > 0$. *Par contre, lorsque* $h(t_0) = 0$ *ou* ∞, *il en sera de même de* $h(t)$ *pour tout* $t > 0$, *et suivant que* $t \gtrless 1$.

Dans la présente Note, je veux montrer que ce théorème s'applique aussi à toute fonction régulière $y(x)$ définie dans mon Mémoire *Sur une classe de fonctions croissantes* ([1]). Ayant toujours en vue ces fonctions régulières, je veux donner encore quelques théorèmes fondamentaux qui me semblent être assez intéressants.

Je vais rappeler, tout d'abord, notre définition de la fonction régulière. Soient $y = y(x)$ et $y_1 = y_1(x)$ deux fonctions d'une variable réelle x. Supposons que ces fonctions, étant finies pour toutes valeurs finies de x, tendent vers $+\infty$ avec x et admettent des dérivées positives y' et y'_1. Nous disons que *l'ordre de grandeur de la fonction* y *par rapport à la fonction* y_1 *est égal à* k si la fonction

$$\nu = \frac{y'}{y} : \frac{y'_1}{y_1}$$

tend vers une limite k finie et différente de zéro quand x tend vers l'infini.

Nous dirons de même que cet ordre est égal à $\omega^n k$, si toutes les fonctions

$$\nu, \quad \nu_1 = \frac{\nu'}{\nu} : \frac{y'_1}{y_1}, \qquad \nu_2 = \frac{\nu'_1}{\nu_1} : \frac{y'_1}{y_1}, \qquad \ldots, \qquad \nu_{n-1} = \frac{\nu'_{n-2}}{\nu_{n-2}} : \frac{y'_1}{y_1}$$

tendent vers $+\infty$ avec x, mais la fonction

$$\nu_n = \frac{\nu'_{n-1}}{\nu_{n-1}} : \frac{y'_1}{y_1}$$

tend vers une limite k finie et différente de zéro.

Enfin nous dirons que l'ordre de grandeur de y par rapport à y_1 est égal à $k^{-1}\omega^{-n}$, si l'ordre de grandeur de y_1 par rapport à y est égal à $\omega^n k$.

([1]) *Annali di Matematica*, 4e série, t. V, 1927-1928, p. 214.

Dans le cas où $y_1(x) = x$, c'est-à-dire quand on compare la croissance de la fonction $y(x)$ à celle de x, les fonctions

$$\nu, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \quad \ldots, \quad \nu_n$$

prennent la forme plus simple

$$\nu = \frac{xy'}{y}, \qquad \nu_1 = \frac{x\nu'}{\nu}, \qquad \nu_2 = \frac{x\nu'_1}{\nu_1}, \qquad \ldots, \qquad \nu_n = \frac{x\nu'_{n-1}}{\nu_{n-1}}.$$

Nous disons que la croissance de la fonction y est *régulière* si l'ordre de grandeur de y par rapport à x est égal à k, ou $\omega^n k$, ou encore $k^{-1}\omega^{-n}$. La fonction dont la croissance est régulière sera appelée par nous aussi *régulière*.

Nous dirons de même que la fonction y est à croissance *très rapide* et *régulière*, si toutes les fonctions en nombre infini

$$y, \quad \nu, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \quad \ldots, \quad \nu_n, \quad \ldots$$

tendent vers $+\infty$ avec x et si, en outre, toutes les expressions

$$\frac{yy''}{y'^2}, \quad \frac{\nu\nu''}{\nu'^2}, \quad \frac{\nu_1\nu''_1}{\nu'^2_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\nu_n\nu''_n}{\nu'^2_n}, \quad \ldots$$

tendent en même temps vers des limites déterminées et finies. J'ai montré ailleurs (1) que ces limites ne peuvent être égales qu'à l'unité.

Enfin, la fonction y sera dite une *fonction régulière à croissance très lente*, si sa fonction inverse $x = x(y)$ est une fonction régulière à croissance très rapide.

Il est aisé de montrer que toute fonction régulière $y(x)$ dont l'ordre de grandeur est fini est une fonction régulière aussi dans le sens de M. Karamata (2). Cela résulte, tout d'abord, de la défi-

---

(1) *Annali di Matematica*, 4e série, t. IX, 1931, p. 90.

(2) Il y a lieu de remarquer ici que M. G. Valiron, dans ses beaux travaux sur la théorie des fonctions entières, a considéré déjà des fonctions croissantes qui sont régulières dans notre sens aussi bien que dans le sens de M. Karamata. Il a utilisé en effet dans ses recherches des fonctions $\rho(x)$ telles que :

1° elles sont définies et dérivables pour $x > 0$;

2° on a

$$\lim_{x=\infty} x\rho'(x)\log x = 0,$$

$$0 < \lim_{x=\infty} \rho(x) = \rho < \infty;$$

nition (D_2) de la croissance régulière donnée par cet auteur dans sa Note *Sur un mode de croissance régulière* citée plus haut (p. 62). En effet, pour toute fonction régulière $y(x)$ dont l'ordre de grandeur est égal à un nombre fini k, nous avons par définition

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = \frac{xy'}{y} = k.$$

Nous avons donc, en employant nos significations,

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x^{k_1+1}y(x)} \int_0^x t^{k_1}y(t)\,dt = \lim_{x=\infty} \frac{x^{k_1}y(x)}{(k_1+1)x^{k_1}y(x)+x^{k_1+1}y'(x)}$$
$$= \lim_{x=\infty} \frac{1}{k_1+1+\nu(x)} = \frac{1}{k_1+1+k},$$

et l'on a toujours

$$\frac{1}{k_1+1+k} > 0$$

pour chaque valeur de k_1 vérifiant l'inégalité

$$k_1 > -1-k.$$

Or, nous donnons dans la suite la démonstration directe de ce fait que toute fonction régulière dans notre sens sera aussi régulière dans le sens de M. Karamata. Maintenant nous allons donner quelques théorèmes sur nos fonctions régulières.

Théorème I. — *Toute fonction réelle $y(x)$, pour laquelle on a*

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = \lim_{x=\infty} \frac{xy'(x)}{y(x)} = 0,$$

vérifie l'égalité

$$\lim_{x=\infty} \frac{y[x+x\varphi(x)]}{y(x)} = 1,$$

où $\varphi(u)$ est une fonction réelle quelconque satisfaisant à

---

il est clair alors que la fonction

$$V(x) = x^{\rho(x)}$$

vérifie l'égalité

$$\lim_{x=\infty} \frac{x\,V'(x)}{V(x)} = \rho,$$

et l'on a, d'autre part,

$$\lim_{x=\infty} \frac{V(tx)}{V(x)} = t^{\rho}.$$

l'égalité

$$\lim_{x=\infty} v(x) = a,$$

a étant un nombre quelconque fini supérieur à -1.

En effet, posons

$$z(x) = \frac{y[x + x v(x)]}{y(x)};$$

d'où

$$\log z(x) = \log y[x + x v(x)] - \log y(x).$$

En appliquant le théorème des accroissements finis, nous pouvons écrire

$$\log z(x) = x v(x) \frac{y'[x + \theta x v(x)]}{y[x + \theta x v(x)]} \qquad (0 < \theta < 1)$$

ou

$$\log z(x) = \frac{v(x)}{1 + \theta v(x)} \nu[x + \theta x v(x)].$$

Il en résulte que

$$\lim_{x=\infty} \log z(x) = 0,$$

car on a, par hypothèse,

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = 0; \qquad \lim_{x=\infty} [1 + \theta v(x)] = 1 + \theta a > 0,$$

et, par conséquent,

$$\lim_{x=\infty} \nu[x + \theta x v(x)] = 0.$$

Nous avons donc

$$\lim_{x=\infty} z(x) = 1.$$

Théorème II. — *Toute fonction croissante régulière* $y(x)$ *dont l'ordre de grandeur est égal à un nombre positif quelconque* k *vérifie l'égalité*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y[x + x v(x)]}{y(x)} = (1 + a)^k,$$

où $v(x)$ *est une fonction réelle quelconque satisfaisant à l'égalité*

$$\lim_{x=\infty} v(x) = a,$$

a étant un nombre quelconque fini supérieur à -1.

Ce théorème est une conséquence immédiate du lemme suivant

Lemme. — *Toute fonction régulière $y(x)$ dont l'ordre de grandeur est égal à un nombre positif quelconque k peut se mettre sous la forme suivante :*

$$y(x) = x^k \varphi(x), \tag{2}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction vérifiant l'égalité

$$\lim_{x=\infty} \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

En effet, on trouve de l'égalité (2)

$$\log \varphi(x) = \log y(x) - k \log x;$$

d'où

$$\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{xy'(x)}{y(x)} - k.$$

Or, puisque l'ordre de grandeur de la fonction $y(x)$ est égal à k, nous avons

$$\lim_{x=\infty} \frac{xy'(x)}{y(x)} = k.$$

Donc

$$\lim_{x=\infty} \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

L'égalité (2) nous donne maintenant

$$\lim_{x=\infty} \frac{y[x + xv(x)]}{y(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{[x + xv(x)]^k}{x^k} \cdot \lim_{x=\infty} \frac{\varphi[x + xv(x)]}{\varphi(x)} = (1 + a)^k,$$

car nous avons, d'après le théorème I,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi[x + xv(x)]}{\varphi(x)} = 1.$$

Notre théorème est donc démontré.

Il suit de ce théorème, que toute fonction régulière $y(x)$, dont l'ordre de grandeur est fini, est une fonction régulière dans le sens de M. Karamata. En effet, si nous posons

$$v(x) = t - 1,$$

nous aurons, d'après notre théorème II,

$$\lim_{x=\infty} \frac{y[x + xv(x)]}{y(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{y(tx)}{y(x)} = t^k$$

pour tout $t > 0$.

Puisque, d'autre part, nous avons

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log y(x)}{\log x} = \lim_{x=\infty} \frac{xy'(x)}{y(x)} = k,$$

nous voyons de même que notre fonction régulière $y(x)$ satisfait aussi au théorème de M. Karamata.

Théorème III. — *Toute fonction régulière $y(x)$ dont l'ordre de grandeur est infiniment grand ou dont la croissance est très rapide vérifie l'égalité*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y\left[x + w(x)\dfrac{x}{\nu(x)}\right]}{y(x)} = e^q,$$

où

$$\nu(x) = \frac{xy'(x)}{y(x)}$$

et où $w(x)$ est une fonction réelle quelconque satisfaisant à l'égalité

$$\lim_{x=\infty} w(x) = q,$$

q étant un nombre quelconque fini.

Avant de démontrer ce théorème, nous allons démontrer le lemme suivant :

Lemme. — *Toute fonction régulière $y(x)$ vérifie l'égalité*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y\left[x + w(x)\dfrac{x}{y(x)}\right]}{y(x)} = 1,$$

la fonction $w(x)$ étant définie comme plus haut.

Dans le cas où l'ordre de grandeur de la fonction $y(x)$ est égal à $k\omega^{-n}$, ce lemme est une conséquence immédiate du théorème I. En effet, nous avons dans ce cas

$$\lim \nu(x) = 0.$$

En posant, d'autre part,

$$v(x) = \frac{w(x)}{y(x)},$$

on a

$$\lim_{x=\infty} v(x) = 0 > -1.$$

Si l'ordre de grandeur de la fonction $y(x)$ est égal à un nombre fini k, notre lemme est évidemment une conséquence du théorème II.

Mais, supposons maintenant que l'ordre de grandeur de la fonction $y(x)$ soit égal à $\omega^n k$, ou que la fonction $y(x)$ soit une fonction à croissance très rapide. Nous aurons dans ce cas

$$\lim_{x=\infty} \frac{y(x)\,y''(x)}{[y'(x)]^2} = 1 \quad (^1).$$

Mais j'ai déjà montré ailleurs ([2]) que cette dernière condition entraîne l'existence de l'égalité

$$(3) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{y\left\{x + \dfrac{1}{[y(x)]^\eta}\right\}}{y(x)} = 1,$$

quelque petit que soit le nombre positif η.

Or, puisque la fonction $y(x)$ croît dans notre cas plus vite que la puissance quelconque de la variable x, nous aurons toujours, à partir d'une certaine valeur de x, l'inégalité

$$w(x)\frac{x}{y(x)} < \frac{1}{[y(x)]^\eta}$$

pour chaque valeur de η inférieure à 1.

Donc, si le nombre q est positif, nous aurons, à partir de cette valeur de x,

$$1 < \frac{y\left[x + w(x)\dfrac{x}{y(x)}\right]}{y(x)} < \frac{y\left\{x + \dfrac{1}{[y(x)]^\eta}\right\}}{y(x)}$$

et l'égalité (3) nous montre que

$$\lim_{x=\infty} \frac{y\left[x + w(x)\dfrac{x}{y(x)}\right]}{y(x)} = 1.$$

([1]) *Annali di Matematica*, 4e série, t. IX, 1931, p. 95; t. XIII, 1934-1935, p. 163.

([2]) *Annali di Matematica*, 4e série, t. IX, 1931, p. 116.

Supposons maintenant que le nombre q est négatif et posons

$$z(x) = \frac{y\left[x + w(x)\dfrac{x}{y(x)}\right]}{y(x)}.$$

En mettant cette égalité sous la forme

$$\log z(x) = \log y\left[x + w(x)\frac{x}{y(x)}\right] - \log y(x),$$

et en lui appliquant le théorème des accroissements finis, nous aurons

$$\log z(x) = w(x)\frac{x}{y(x)}\,\frac{y'\left[x + \theta\, w(x)\dfrac{x}{y(x)}\right]}{y\left[x + \theta\, w(x)\dfrac{x}{y(x)}\right]} \qquad (0 < \theta < 1)$$

ou

$$\log z(x) = \frac{w(x)}{1 + \theta\dfrac{w(x)}{y(x)}}\;\frac{\nu\left[x + \theta\, w(x)\dfrac{x}{y(x)}\right]}{y(x)}.$$

Il en résulte que

$$(4) \qquad \lim_{x=\infty} \log z(x) = q \lim_{x=\infty} \frac{\nu\left[x + \theta\, w(x)\dfrac{x}{y(x)}\right]}{y(x)},$$

si la dernière limite existe. Or, dans notre cas, la fonction $\nu(x)$ est une fonction toujours croissante. Nous aurons donc, à partir d'une certaine valeur de x, l'inégalité

$$\frac{\nu\left[x + \theta\, w(x)\dfrac{x}{y(x)}\right]}{y(x)} < \frac{\nu(x)}{y(x)}.$$

On a d'ailleurs

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu(x)}{y(x)} = 0 \qquad ([1]).$$

L'égalité (4) nous donne alors

$$\lim_{x=\infty} \log z(x) = 0;$$

---

[1] *Annali di Matematica*, 4e série, t. V, 1927-1928, p. 208; t. XIII, 1934-1935, p. 164.

d'où

$$\lim_{x=\infty} z(x) = 1.$$

Ayant démontré le lemme pour toutes les fonctions régulières et pour tous les nombres q, nous allons maintenant démontrer notre théorème.

Posons

$$z(x) = \frac{y\left[x + w(x)\dfrac{x}{\nu(x)}\right]}{y(x)}$$

ou

$$\log z(x) = \log y\left[x + w(x)\frac{x}{\nu(x)}\right] - \log y(x).$$

On en trouve, comme plus haut,

$$\log z(x) = \frac{w(x)}{1 + \theta\dfrac{w(x)}{\nu(x)}}\,\frac{\nu\left[x + \theta\, w(x)\dfrac{x}{\nu(x)}\right]}{\nu(x)}. \tag{5}$$

Or, puisque la fonction $\nu(x)$ est évidemment une fonction ellemême régulière, nous aurons, d'après notre lemme,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\nu\left[x + \theta\, w(x)\dfrac{x}{\nu(x)}\right]}{\nu(x)} = 1.$$

Nous avons d'autre part, par hypothèse,

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = +\infty.$$

On trouve donc de l'égalité (5),

$$\lim_{x=\infty} \log z(x) = q.$$

d'où

$$\lim_{x=\infty} z(x) = e^q.$$

Notre théorème est donc démontré.

Il n'est pas sans intérêt de réunir nos théorèmes II et III dans un théorème unique, en changeant un peu leurs énoncés.

Si l'ordre de grandeur de la fonction $y(x)$ est égal à un nombre fini k, nous posons

$$v(x) = \frac{q}{\nu(x)},$$

où q est un nombre quelconque fini, vérifiant la condition

$$q > -k.$$

On a, dans ce cas,

$$\lim_{x=\infty} v(x) = \frac{q}{k} > -1.$$

et le théorème II nous donne

$$\lim_{x=\infty} \frac{y\left[x + q\frac{x}{\nu(x)}\right]}{y(x)} = \left(1 + \frac{q}{k}\right)^k.$$

Il en résulte que nous pouvons toujours mettre l'expression

$$y\left[x + q\frac{x}{\nu(x)}\right]$$

sous la forme

$$(6) \qquad y\left[x + q\frac{x}{\nu(x)}\right] = \left\{\left[1 + \frac{q}{\nu(x)}\right]^{\nu(x)} + \varepsilon(x)\right\} y(x),$$

$\varepsilon(x)$ étant une fonction tendant vers zéro quand x tend vers $+\infty$.

Si, maintenant, l'ordre de grandeur de la fonction $y(x)$ est infiniment grand, ou si la fonction $y(x)$ est une fonction à croissance très rapide, nous posons, dans le théorème III,

$$w(x) = q,$$

q étant un nombre quelconque fini. Nous aurons, d'après ce théorème,

$$\lim_{x=\infty} \frac{y\left[x + q\frac{x}{\nu(x)}\right]}{y(x)} = e^q.$$

Nous voyons ainsi que l'expression

$$y\left[x + q\frac{x}{\nu(x)}\right]$$

peut être mise de nouveau sous la forme (6), car on a, dans ce cas,

$$\lim_{x=\infty} \nu(x) = +\infty.$$

Nous avons ainsi démonré le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Toute fonction régulière $y(x)$ dont l'ordre de grandeur n'est pas égal à zéro vérifie l'égalité*

$$y\left[x + q\frac{x}{\nu(x)}\right] = \left\{\left[1 + \frac{q}{\nu(x)}\right]^{\nu(x)} + \varepsilon(x)\right\} y(x),$$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction réelle satisfaisant à l'égalité

$$\lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0$$

et où q est un nombre fini quelconque, si l'ordre de grandeur de $y(x)$ est infiniment grand; si l'ordre de grandeur de la fonction $y(x)$ est égal à un nombre positif fini k, q est un nombre quelconque vérifiant la condition

$$q > -k.$$