BULLETIN DE LA S. M. F.

G. PFEIFFER

# Construction de l'intégrale de S. Lie de la classe supérieure d'après l'intégrale de S. Lie de la classe inférieure ; en particulier, de l'intégrale de S. Lie d'après l'intégrale de Lagrange

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 64 (1936), p. 241-254
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__241_0>

# CONSTRUCTION DE L'INTÉGRALE DE S. LIE DE LA CLASSE SUPÉRIEURE D'APRÈS L'INTÉGRALE DE S. LIE DE LA CLASSE INFÉRIEURE; EN PARTICULIER, DE L'INTÉGRALE DE S. LIE D'APRÈS L'INTÉGRALE DE LAGRANGE;

PAR M. G. PFEIFFER.

## Introduction.

L'intégrale de Lagrange d'après l'intégrale de S. Lie est construite par M. N. Saltykow.

Après les remarques de P. Mansion, les recherches de M. N. Saltykow et nos recherches, la question de la construction d'après l'intégrale de S. Lie de l'intégrale de Lagrange et des intégrales de S. Lie de toutes les classes inférieures peut être regardée comme épuisée. Quant au problème inverse, pas toujours possible, celui de la construction de l'intégrale de S. Lie de la classe supérieure d'après l'intégrale de S. Lie de la classe inférieure, de l'intégrale de S. Lie d'après l'intégrale de Lagrange, cette question restait *encore* ouverte.

Nous la résolvons dans le Mémoire présent.

La circonstance suivante nous a amené à l'étude de la question indiquée.

En 1872, S. Lie a donné la classification des équations, il ne fait pas mention des systèmes, aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue. Sa classification est liée à la notion de la classe de l'intégrale. Il dit : A. « Insbesondere schliesst sich an die allgemeine Auffassung der Begriffe : partielle Differentialgleichung erster Ordnung, vollständige Lösung, etc., eine neue Classification der partiellen Differentialgleichungen (¹) » en vertu de ce que

(¹) S. LIE, *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine Classification derselben* (*Nachr. v. d. K. Gesellschaft der Wiss...*, Göttingen, 1872, S. 473-474; *Ges. Abh.*, B. III, S. 16); est admise la permutation des mots; les mots sans importance sont rejetés.

« unter den Gleichungen mit $n+1$ variablen kann man ausser der Classe der linearen noch weitere $n-1$ Classen angeben (1) »; B. « Unter den Lösungen einer partiellen Gleichung Gebilde auftreten, welche durch $1, 2, \ldots, n+1$ Gleichungen zwischen den $n+1$ variablen $z$, $x_i$ repräsentiert werden. Auf dem Auftreten solcher Gebilde beruht nun meine Classification (2) ».

Après l'éclaircissement du fait, que l'équation, le système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, admettant l'intégrale de S. Lie de la classe $q$, possèdent les intégrales des classes inférieures jusqu'à l'intégrale de la classe o, l'intégrale de Lagrange, il devenait clair, que la classification de S. Lie n'est pas juste. On peut la corriger, en entendant par la classe de l'équation, du système d'équations la classe maximum de l'intégrale de S. Lie.

S. Lie a senti que le fondement de sa classification n'est pas parfait; cela explique ses mots : C. « Die hier vorgetragene Classification partieller Differentialgleichungen 1. o. soll übringens keine definitive sein, es gibt in der That noch weitere Gesichtspuncte, auf die sich Eintheilungen gründen lassen (3) ».

P. Mansion (4) reproduit la classification de S. Lie; Ed. Goursat (5) signale la possibilité de la classification.

**1. Les paramètres essentiels dans un système des fonctions et dans une intégrale de S. Lie.** — Prenons l'intégrale de S. Lie en deux formes

$$(1)\ (\mathrm{A})\quad \varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \quad \ldots, \quad \varphi_q = a_q, \quad \varphi_{q+1} = a_{q+1};$$

$$(2)\ (\mathrm{B})\qquad \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q, \varphi_{q+1}) = 0,$$

où les fonctions indépendantes

$$(3)\quad \varphi_i \equiv \varphi_i(x_0, x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_h) \qquad (x_0 = z;\ i = 1, 2, \ldots, q+1),$$

$$(4)\qquad h < n - q,$$

---

(1) *Ibid.*, S. 474; *ibid.*, S. 16.

(2) *Ibid.*, S. 484-485; *ibid.*, S. 23.

(3) *Ibid.*, S. 487; *ibid.*, S. 25.

(4) P. Mansion, *Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* (Berlin, 1892, S. 23).

(5) Ed. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Paris, 1891, p. 237).

sont indépendantes par rapport aux variables $x_0, x_1, \ldots, x_q$

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \ldots, x_{q-1}, x_q)} \not\equiv 0, \tag{5}$$

$\Phi$, fonction arbitraire des arguments.

Les paramètres

$$c_1, c_2, \ldots, c_h, \tag{6}$$

doivent être essentiels comme dans le système des fonctions (3), aussi dans l'intégrale de S. Lie [(A)-(B)].

Deux conceptions : 1° le caractère essentiel des paramètres (6) dans le système des fonctions (3) et 2° le caractère essentiel des paramètres (6) dans l'intégrale de S. Lie [(A)-(B)], comme on verra tout de suite, sont différentes.

1. La question du caractère essentiel des paramètres dans un système de fonctions se résout par certain critère de S. Lie ([1]); néanmoins, dans un autre lieu ([2]), en traits généraux, S. Lie parle d'une seconde méthode de jugement.

L. Bianchi a beaucoup étudié le critère de S. Lie et l'a amené à une forme commode pour la pratique ([3]). Ayant simplifié les recherches de L. Bianchi, nous sommes parvenu ([4]) à la seconde méthode de S. Lie.

Utilisons nos résultats :

Avec $h = 1$ le paramètre, $c_1 = c$ dans les fonctions

$$\varphi_i \equiv \varphi_i(x_0, x_1, \ldots, x_n, c) \qquad (i = 1, 2, \ldots, q+1), \tag{7}$$

est essentiel, si au moins une dérivée

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial c} \not\equiv 0. \tag{8 (a)}$$

---

([1]) S. Lie und Fr. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen* (Leipzig, B. I, 1888, S. 13-14).

([2]) *Ibid.*, S. 183.

([3]) L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni* (Bologna, 1928, p. 30-36).

([4]) G. Pfeiffer, *La simplification des recherches de L. Bianchi, généralisant le caractère de S. Lie, que les paramètres soient essentiels* (*Atti d. R. Acc. Naz. dei Lincei*, 6e série, vol. XVI, fasc. 9, 1932, p. 420-426).

Avec $h = 2$ les paramètres $c_1$, $c_2$ dans les fonctions

$$(9) \qquad \varphi_i \equiv \varphi_i(x_0, x_1, \ldots, x_n, c_1, c_2) \qquad (i = 1, 2, \ldots, q+1),$$

sont èssentiels, si se vérifie une des conditions

$$(10) \qquad \frac{D(\varphi_\lambda, \varphi_\mu)}{D(c_1, c_2)} \neq 0,$$

$$(11)\ (b) \qquad \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial c_1} \neq 0, \qquad \frac{D\left(\varphi_\lambda, \dfrac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_j}\right)}{D(c_1, c_2)} \neq 0,$$

$$(12) \qquad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial c_2} \neq 0, \qquad \frac{D\left(\varphi_\mu, \dfrac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_j}\right)}{D(c_1, c_2)} \neq 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

II. L'intégrale de S. Lie [(A)-(B)] amène au système d'équations linéaires.

$$(13) \qquad \begin{aligned} p_k &= \alpha_q^k p_q + \alpha_{q-1}^k p_{q-1} + \ldots + \alpha_1^k p_1 - \alpha_0^k \\ &= F_k(x_0, x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_h, p_1, \ldots, p_q) \\ &\qquad (k = q+1, q+2, \ldots, n), \end{aligned}$$

$$(14) \qquad \alpha_j^k = \frac{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, \ldots, x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \ldots, x_q)}}{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \ldots, x_{q-1}, x_q)}}. \qquad (j = 0, 1, \ldots, q).$$

Les paramètres (6) dans l'intégrale [(A)-(B)] sont essentiels, si au moins un déterminant

$$(15) \qquad \frac{D(F_{\tau_1}, F_{\tau_2}, \ldots, F_{\tau_h})}{D(c_1, c_2, \ldots, c_h)} \neq 0,$$

$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, combinaison des nombres $q+1, q+2, \ldots, n$, ou, ce qui est la même chose, au moins une expression

$$(16) \qquad \left[\left[ \frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \dfrac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}, \dfrac{\partial \varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi_{\lambda_h}}{\partial c_h}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_h})} \right]\right] \neq 0,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$, combinaison avec répétitions $h$ à $h$ des nombres $1, 2, \ldots, q+1$, le symbole [[ ]] indique, qu'on doit prendre la somme des expressions *qui y sont contenues* pour toutes les permutations avec répétitions des éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ([1]).

De ce que nous avons dit, découle que :

avec $h = 1$ le paramètre $c_1 = c$ à l'intégrale de S. Lie

$$(17)\qquad \begin{cases} \varphi_i(x_0, x_1, \ldots, x_n, c) = a_i & (i = 1, 2, \ldots, q+1); \\ \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}) = 0, \end{cases}$$

est essentiel, si au moins une expression

$$(18)\ (\alpha)\qquad \left[\left[\frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \dfrac{\partial\varphi_\lambda}{\partial c}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_\tau)}\right]\right] \equiv \frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \dfrac{\partial\varphi_\lambda}{\partial c}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_\tau)} \not\equiv 0$$

$$(\tau_1 = \tau,\ \lambda_1 = \lambda);$$

avec $h = 2$ les paramètres $c_1$, $c_2$ à l'intégrale de S. Lie

$$(19)\qquad \begin{cases} \varphi_i(x_0, x_1, \ldots, x_n, c_1, c_2) = a_i & (i = 1, 2, \ldots, q+1), \\ \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}) = 0, \end{cases}$$

sont essentiels si au moins une expression

$$(20)\ (\beta)\qquad \left[\left[\frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}, \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2})}\right]\right] \not\equiv 0.$$

Il est clair, que les conditions $(a)$, $(\alpha)$; $(b)$, $(\beta)$; ..., sont différentes.

Admettons que le système d'équations (13) contient les paramètres (6), à chaque paramètre $c_i$ correspondent des nombres $\lambda_i$, $\tau_i$ pour lesquels les expressions

$$(21)\qquad \left[\left[\frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_i}}{\partial c_i}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_i})}\right]\right] \equiv \frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_i}}{\partial c_i}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_i})} \not\equiv 0$$

$$(i,\ \text{un des nombres } 1, 2, \ldots, h).$$

---

([1]) G. Pfeiffer, *Sur les intégrales des équations et des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue, qui possèdent les intégrales de S. Lie* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 189, 1929, p. 1928-1930); *Ueber die allgemeinen Intégrale von partielen Différentialgleichungen erster Ordnung mit einer unbekannten Funktion und von Systemen solcher Gleichungen, die Intégrale im Sinne von S. Lie zulassen* (*Math. Zeitschtr.*, B. 36, 1933, S. 790-805).

En attribuant à quelques paramètres (6), si cela est nécessaire, des valeurs fixes, on peut toujours atteindre, que tous les autres paramètres de l'intégrale de S. Lie [(A)-(B)] seront essentiels : c'est pourquoi, à l'avenir, nous supposerons, que dans l'intégrale de S. Lie [(A)-(B)] les paramètres (6) sont essentiels, les conditions (16) sont vérifiées.

Il est facile de se convaincre, qu'on peut toujours par la permutation des indices, parvenir à ce, qu'avec les conditions

$$(22)\qquad \frac{D(F_{\tau_1}, F_{\tau_2}, \ldots, F_{\tau_h})}{D(c_1, c_2, \ldots, c_h)} \not\equiv 0,$$

$$(23)\qquad \left[\left[\frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\nu_1}}{\partial c_1}, \frac{\partial \varphi_{\nu_2}}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{\nu_{h-1}}}{\partial c_{h-1}}, \frac{\partial \varphi_{\nu_h}}{\partial c_h}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_{h-1}}, x_{\tau_h})}\right]\right] \not\equiv 0.$$

$$(24)\qquad \frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\nu_1}}{\partial c_1}, \frac{\partial \varphi_{\nu_2}}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{\nu_{h-1}}}{\partial c_{h-1}}, \frac{\partial \varphi_{\nu_h}}{\partial c_h}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_{h-1}}, x_{\tau_h})} \not\equiv 0,$$

auront lieu les conditions

$$(25)\qquad \frac{D(F_{\tau_1}, F_{\tau_2}, \ldots, F_{\tau_{h-1}})}{D(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})} \not\equiv 0,$$

$$(26)\qquad \left[\left[\frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\mu_1}}{\partial c_1}, \frac{\partial \varphi_{\mu_2}}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{\mu_{h-1}}}{\partial c_{h-1}}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_{h-1}})}\right]\right] = 0,$$

$$(27)\qquad \frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\mu_1}}{\partial c_1}, \frac{\partial \varphi_{\mu_2}}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{\mu_{h-1}}}{\partial c_{h-1}}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_{h-1}})} \not\equiv 0,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . :

$$(28)\qquad \frac{D(F_{\tau_1}, F_{\tau_2}, \ldots, F_{\tau_g})}{D(c_1, c_2, \ldots, c_g)} \not\equiv 0,$$

$$(29)\qquad \left[\left[\frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{\lambda_g}}{\partial c_g}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_g})}\right]\right] \not\equiv 0.$$

$$(30)\qquad \frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{\lambda_g}}{\partial c_g}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_g})} \not\equiv 0,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**2. L'élévation de *g* unités de la classe de l'intégrale de S. Lie**

**de la classe** $q(q>0)$. — Prêtons l'attention au cas particulier de l'intégrale de S. Lie [(A)-(B)], quand les fonctions (3) s'expriment par des fonctions indépendantes

$$(31)\qquad w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_{q+g+1},$$

ne contenant pas les paramètres $c_1, c_2, \ldots, c_g$ :

$$(32)\qquad w_i \equiv w_i(x_0, x_1, \ldots, x_n, c_{g+1}, \ldots, c_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, q+g+1)$$

et les paramètres

$$(33)\qquad c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_g,$$

alors

$$(34)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1 \quad = \theta_1 \quad (w_1, w_2, \ldots, w_{q+g+1}, c_1, c_2, \ldots, c_g), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{q+1} = \theta_{q+1}(w_1, w_2, \ldots, w_{q+g+1}, c_1, c_2, \ldots, c_g). \end{array}\right.$$

Grâce à l'identité (30) on trouve

$$(35)\qquad \left\{\begin{array}{l} w_1 \qquad = \vartheta_1 \qquad \left(\varphi_1, \ldots, \varphi_{q+1}, \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_g}}{\partial c_g}, c_1, \ldots, c_g\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ w_{q+g+1} = \vartheta_{q+g+1}\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_{q+1}, \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_g}}{\partial c_g}, c_1, \ldots, c_g\right). \end{array}\right.$$

Prenons, que les fonctions (31) sont indépendantes par rapport aux variables $x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{q+1}, \ldots, x_{q+g}$

$$(36)\qquad \frac{D(w_1, \ldots, w_{q+1}, \ldots, w_{q+g+1})}{D(x_0, \ldots, x_q, \ldots, x_{q+g})} \not\equiv 0.$$

En vertu de la non-identité (29) le système complet (13) se résout par rapport aux paramètres (33). En les éliminant des égalités (13), on parvient, comme nous avons montré [1], au système complet

[1] G. Pfeiffer, *Sur les intégrales complètes d'un système complet d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre* (*Journ. de l'Inst. math. de l'Acad. des Sc. de l'Ukraine*, 1936, p. 79-89).

d'équations linéaires avec les intégrales (31)

$$(37)\qquad p_l = \beta^l_{q+g} p_{q+g} + \beta^l_{q+g-1} p_{q+g-1} + \ldots + \beta^l_1 p_1 - \beta^l_0$$
$$(l = q+g+1,\ q+g+2,\ \ldots,\ n),$$

$$(38)\qquad \beta^l_j = \frac{\dfrac{D(w_1, w_2, \ldots, w_{q+g+1})}{D(x_0, \ldots, x_{j-1}, x_l, x_{j+1}, \ldots, x_{q+g})}}{\dfrac{D(w_1, w_2, \ldots, w_{q+g+1})}{D(x_0, x_1, \ldots, x_{q+g})}} \qquad (j = 0, 1, \ldots, q+g).$$

De là suit, qu'on a la possibilité dans le cas indiqué de l'intégrale de S. Lie [(A)-(B)] de construire, d'après l'intégrale de S. Lie de la classe $q (q > 0)$ l'intégrale de S. Lie de la classe $q+g$

$$(39)\ (C)\qquad w_1 = b_1,\quad w_2 = b_2,\quad \ldots,\quad w_{q+g} = b_{q+g},\quad w_{q+g+1} = b_{q+g+1};$$

$$(40)\ (D)\qquad \Phi(w_1, w_2, \ldots, w_{q+g}, w_{q+g+1}) = 0,$$

alors se pose la question, de savoir si l'on peut aux conditions (28), (29), (30) trouver l'intégrale de S. Lie [(C)-(D)] d'après l'intégrale de S. Lie [(A)-(B)], et, si c'est possible, quelles sont les conditions complémentaires?

En introduisant les significations

$$(41)\qquad \frac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1} = z_1,\qquad \frac{\partial\varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2} = z_2,\qquad \ldots,\qquad \frac{\partial\varphi_{\lambda_g}}{\partial c_g} = z_g;$$

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{llllll}
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial c_1} = \omega_{11}, & \ldots, & \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1-1}}{\partial c_1} = \omega_{1,\lambda_1-1}, & \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1} = z_1, & \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1+1}}{\partial c_1} = \omega_{1,\lambda_1+1}, & \ldots,\quad \dfrac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial c_1} = \omega_{1,q+1}, \\
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial c_2} = \omega_{21}, & \ldots, & \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_2-1}}{\partial c_2} = \omega_{2,\lambda_2-1}, & \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2} = z_2, & \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_2+1}}{\partial c_2} = w_{2,\lambda_2+1}, & \ldots,\quad \dfrac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial c_2} = \omega_{2,q+1}, \\
\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots,\quad \ldots\ldots, \\
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial c_g} = \omega_{g1}, & \ldots, & \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_g-1}}{\partial c_g} = \omega_{g,\lambda_g-1}, & \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_g}}{\partial c_g} = z_g, & \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_g+1}}{\partial c_g} = w_{g,\lambda_g+1}, & \ldots,\quad \dfrac{\partial\varphi_{g+1}}{\partial c_g} = \omega_{g,q+1};
\end{array}\right.$$

$$(43)\quad \left\{\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial z_1}{\partial c_1} = \bar\omega_{11}, & \dfrac{\partial z_2}{\partial c_1} = \bar\omega_{12}, & \ldots, & \dfrac{\partial z_g}{\partial c_1} = \bar\omega_{1g}, \\
\dfrac{\partial z_1}{\partial c_1} = \bar\omega_{21}, & \dfrac{\partial z_2}{\partial c_2} = \bar\omega_{22}, & \ldots, & \dfrac{\partial z_g}{\partial c_2} = \bar\omega_{2g}, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
\dfrac{\partial z_1}{\partial c_g} = \bar\omega_{g1}, & \dfrac{\partial z_2}{\partial c_g} = \bar\omega_{g2}, & \ldots, & \dfrac{\partial z_g}{\partial c_g} = \bar\omega_{gg},
\end{array}\right.$$

prenons le système des $q+g+1$ fonctions

$$(44)\quad \begin{cases} \mathfrak{I}_1\quad(\varphi_1,\ldots,\varphi_{q+1},z_1,\ldots,z_g,c_1,\ldots,c_g),\\ \mathfrak{I}_2\quad(\varphi_1,\ldots,\varphi_{q+1},z_1,\ldots,z_g,c_1,\ldots,c_g),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \mathfrak{I}_{q+g+1}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{q+1},z_1,\ldots,z_g,c_1,\ldots,c_g),\end{cases}$$

indépendantes par rapport aux arguments $\varphi_1,\ldots,\varphi_{q+1},z_1,\ldots,z_g$

$$(45)\quad \frac{D(\mathfrak{I}_1,\mathfrak{I}_2,\ldots,\mathfrak{I}_{q+g+1})}{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_{q+1},z_1,\ldots,z_g)}\neq 0$$

et exigeons, qu'elles ne dépendent pas des paramètres (33).

Il est clair, que les fonctions $\mathfrak{I}$-(44) satisfont au système des relations

$$(46)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{I}}{dc_1}+\omega_{11}\dfrac{d\mathfrak{I}}{d\varphi_1}+\ldots+\omega_{1,\lambda_1-1}\dfrac{d\mathfrak{I}}{d\varphi_{\lambda_1-1}}+z_1\dfrac{d\mathfrak{I}}{d\varphi_{\lambda_1}}+\omega_{1,\lambda_1+1}\dfrac{d\mathfrak{I}}{d\varphi_{\lambda_1+1}}+\ldots\\ \qquad+\omega_{1,q+1}\dfrac{d\mathfrak{I}}{d\varphi_{q+1}}+\bar\omega_{11}\dfrac{d\mathfrak{I}}{dz_1}+\bar\omega_{12}\dfrac{d\mathfrak{I}}{dz_2}+\ldots+\bar\omega_{1g}\dfrac{d\mathfrak{I}}{dz_g}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{d\mathfrak{I}}{dc_g}+\omega_{g1}\dfrac{d\mathfrak{I}}{d\varphi_1}+\ldots+\omega_{g,\lambda_g-1}\dfrac{d\mathfrak{I}}{d\varphi_{\lambda_g-1}}+z_g\dfrac{d\mathfrak{I}}{d\varphi_{\lambda_g}}+\omega_{g,\lambda_g+1}\dfrac{d\mathfrak{I}}{d\varphi_{\lambda_g+1}}+\ldots\\ \qquad+\omega_{g,q+1}\dfrac{d\mathfrak{I}}{d\varphi_{q+1}}+\bar\omega_{g1}\dfrac{d\mathfrak{I}}{dz_1}+\bar\omega_{g2}\dfrac{d\mathfrak{I}}{dz_2}+\ldots+\bar\omega_{gg}\dfrac{d\mathfrak{I}}{dz_g}=0.\end{cases}$$

Si l'on accepte, qu'ont lieu les connexions

$$(47)\quad \begin{cases} \omega_{1j_1}=\text{fonct.}\,(\varphi_1,\ldots,\varphi_{q+1},z_1,\ldots,z_g,c_1,\ldots,c_g)\\ \qquad (j_1=1,2,\ldots,\lambda_1-1,\lambda_1+1,\ldots,q+1),\\ \bar\omega_{1s}=\text{fonct.}\,(\varphi_1,\ldots,\varphi_{q+1},z_1,\ldots,z_g,c_1,\ldots,c_g)\\ \qquad (s=1,2,\ldots,g);\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \omega_{gj_g}=\text{fonct.}\,(\varphi_1,\ldots,\varphi_{q+1},z_1,\ldots,z_g,c_1,\ldots,c_g)\\ \qquad (j_g=1,2,\ldots,\lambda_{g-1},\lambda_{g+1},\ldots,q+1),\\ \bar\omega_{gs}=\text{fonct.}\,(\varphi_1,\ldots,\varphi_{q+1},z_1,\ldots,z_g,c_1,\ldots,c_g)\\ \qquad (s=1,2,\ldots,g).\end{cases}$$

alors le système (46) sera un système d'équations linéaires homogènes aux dérivées partielles du premier ordre.

Quand sont vérifiées les conditions (47), et, qu'en outre, le système (46) est complet, ses intégrales

$$(48)\qquad \vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \ldots,\ \vartheta_{q+g+1}$$

sont indépendantes par rapport aux arguments $\varphi_1, \ldots, \varphi_{q+1}, z_1, \ldots, z_g$. Elles donnent les expressions (35). Les égalités

$$(49)\qquad w_1 = \vartheta_1,\quad w_2 = \vartheta_2,\quad \ldots,\quad w_{q+g+1} = \vartheta_{q+g+1}$$

amènent aux égalités

$$(50)\quad \left|\begin{array}{ll} (50') & \left\{\begin{array}{l} \varphi_1 = \theta_1(w_1, \ldots, w_{q+g+1}, c_1, \ldots, c_g), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_{q+1} = \theta_{q+1}(w_1, \ldots, w_{q+g+1}, c, \ldots, c_g), \end{array}\right. \\ (50'') & \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1} = \varepsilon_1(w_1, \ldots, w_{q+g+1}, c_1, \ldots, c_g), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_g}}{\partial c_g} = \varepsilon_g(w_1, \ldots, w_{q+g+1}, c_1, \ldots, c_g), \end{array}\right. \end{array}\right.$$

dont la première partie reproduit les relations (34).

La non-identité (29) montre, que les paramètres (33) dans l'intégrale de S. Lie [(A)-(B)] sont essentiels; en les éliminant des équations (13), on viendra aux équations (37)

En vue de la non-identité (30) les égalités (50) sont équivalentes aux égalités (35)-(49).

Ainsi, aux conditions (47), avec le système complet (46) on a la possibilité de passer de l'intégrale de S. Lie [(A)-(B)] à l'intégrale de S. Lie [(C)-(D)].

D'après l'intégrale de S. Lie [(C)-(D)] on forme facilement les intégrales de S. Lie des classes inférieures.

Quand $g = 1$, le nombre des équations (46) est un, les conditions, que le système (46) soit complet, disparaissent.

*Remarque.* — Admettons, qu'ait lieu la non-identité

$$(51)\qquad \frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}, \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi_{\lambda_g}}{\partial c_g}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_g})} \not\equiv 0,$$

En introduisant les significations

$$\frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1} = z_1, \quad \frac{\partial \varphi_{\lambda_2}}{\partial c_1} = z_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial \varphi_{\lambda_g}}{\partial c_1} = z_g; \tag{52}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_1} = \omega_{11}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_{\lambda_1-1}}{\partial c_1} = \omega_{1,\lambda_1-1}, & \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1} = z_1, \\ \frac{\partial \varphi_{\lambda_1+1}}{\partial c_1} = \omega_{1,\lambda_1+1}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_{\lambda_g-1}}{\partial c_1} = \omega_{1,\lambda_g-1}, & \frac{\partial \varphi_{\lambda_g}}{\partial c_1} = z_g, \\ \frac{\partial \varphi_{\lambda_g+1}}{\partial c_1} = \omega_{1,\lambda_g+1}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial c_1} = \omega_{1,q+1}, & \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_2} = \omega_{21}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_2} = \omega_{2\lambda_1}, & \dots, \\ \frac{\partial \varphi_{\lambda_g}}{\partial c_2} = \omega_{2\lambda_g}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial c_2} = \omega_{2,q+1}, & \\ \dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots\dots, & \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_g} = \omega_{g1}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_g} = \omega_{g\lambda_1}, & \dots, \\ \frac{\partial \varphi_{\lambda_g}}{\partial c_g} = \omega_{g\lambda_g}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial c_g} = \omega_{g,q+1}; & \end{array}\right. \tag{53}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} \frac{\partial z_1}{\partial c_1} = \overline{\omega}_{11}, & \frac{\partial z_2}{\partial c_1} = \overline{\omega}_{12}, & \dots, & \frac{\partial z_g}{\partial c_1} = \overline{\omega}_{1g}, \\ \frac{\partial z_1}{\partial c_2} = \overline{\omega}_{21}, & \frac{\partial z_2}{\partial c_2} = \overline{\omega}_{22}, & \dots, & \frac{\partial z_g}{\partial c_2} = \overline{\omega}_{2g}, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots, \\ \frac{\partial z_1}{\partial c_g} = \overline{\omega}_{g1}, & \frac{\partial z_2}{\partial c_g} = \overline{\omega}_{g2}, & \dots, & \frac{\partial z_g}{\partial c_g} = \overline{\omega}_{gg}, \end{array}\right. \tag{54}$$

prenons le système des $q+g+1$ fonctions

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{S}_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}, z_1, \dots, z_g, c_1, \dots, c_g), \\ \mathfrak{S}_2(\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}, z_1, \dots, z_g, c_1, \dots, c_g), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathfrak{S}_{g+g+1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}, z_1, \dots, z_g, c_1, \dots, c_g), \end{array}\right. \tag{55}$$

indépendantes par rapport aux arguments $\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}, z_1, \dots, z_g$

$$\frac{D(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_{q+g+1})}{D(\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}, z_1, \dots, z_g)} \neq 0 \tag{56}$$

et exigeons, qu'elle ne dépendent pas des paramètres (33).

Il est clair, que les fonctions $\mathfrak{S}$-(55) satisfont au système des relations

$$
(57)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial c_1}+\omega_{11}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varphi_1}+\ldots+z_1\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varphi_{\lambda_1}}+\ldots+z_g\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varphi_{\lambda_g}}+\ldots\\
&\qquad+\omega_{1,q+1}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varphi_{q+1}}+\bar\omega_{11}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z_1}+\ldots+\bar\omega_{1g}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z_g}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial c_g}+\omega_{g1}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varphi_1}+\ldots+\omega_{g\lambda_1}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varphi_{\lambda_1}}+\ldots+\omega_{g\lambda_g}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varphi_{\lambda_g}}+\ldots\\
&\qquad+\omega_{g,q+1}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\varphi_{q+1}}+\bar\omega_{g1}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z_1}+\ldots+\bar\omega_{gg}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z_g}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Si pour tous les $\omega$, $\bar\omega$

$$
(58)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\omega=\text{fonct.}\,(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{q+1},\ z_1,\ \ldots,\ z_g,\ c_1,\ \ldots,\ c_g),\\
&\bar\omega=\text{fonct.}\,(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{q+1},\ z_1,\ \ldots,\ z_g,\ c_1,\ \ldots,\ c_g),
\end{aligned}
\right.
$$

alors le système (57) est le système d'équations linéaires homogènes aux dérivées partielles du premier ordre.

Au cas, quand s'effectuent les conditions (58), et, en outre, le système (57) est complet, ses intégrales

$$
(59)\qquad w_1=\mathfrak{F}_1,\qquad w_2=\mathfrak{F}_2,\qquad \ldots,\qquad w_{q+g+1}=\mathfrak{F}_{q+g+1}
$$

sont indépendantes par rapport aux arguments $\varphi_1$, $\ldots$, $\varphi_{q+1}$, $z_1$, $\ldots$, $z_g$. Elles donnent des fonctions des variables indépendantes $x_0$, $x_1$, $\ldots$, $x_n$ et des paramètres $c_{g+1}$, $\ldots$, $c_h$, qui ne sont pas liées avec les paramètres $c_1$, $c_2$, $\ldots$, $c_g$. Les égalités (59) amènent aux égalités

$$
(60)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\varphi_1=\theta_1\ \ (w_1,\ \ldots,\ w_{q+g+1},\ c_1,\ \ldots,\ c_g),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\varphi_{q+1}=\theta_{q+1}(w_1,\ \ldots,\ w_{q+g+1},\ c_1,\ \ldots,\ c_g);\\
&\frac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}=\varepsilon_1\ \ (w_1,\ \ldots,\ w_{q+g+1},\ c_1,\ \ldots,\ c_g),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{\partial\varphi_{\lambda_g}}{\partial c_1}=\varepsilon_g\ \ (w_1,\ \ldots,\ w_{q+g+1},\ c_1,\ \ldots,\ c_g).
\end{aligned}
\right.
$$

La différence entre les raisonnements précédents et les présents raisonnements consiste en ce, que dans le premier cas la non-identité (29) indique, que les paramètres (33) à l'intégrale de S. Lie [(A)-(B)] sont essentiels, dans le second cas une telle non-identité ne se présente pas.

Entre les suppositions extrêmes (30), (51) sont possibles des suppositions intermédiaires; nous ne les regardons pas.

**3. La construction de l'intégrale de S. Lie de la classe** $g\,(g>0)$ **d'après l'intégrale de Lagrange.** — Prenant dans les recherches qui précèdent $q=0$, nous réduirons l'intégrale de S. Lie [(A)-(B)] à l'intégrale de Lagrange.

$$(61)\qquad \begin{cases} \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n; c_1, \ldots, c_h) = a, \qquad x_0 = z \qquad (h<n), \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0} \not\equiv 0; \end{cases}$$

le système (13) se transforme en système

$$(62)\qquad p_k + \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}} = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n);$$

les conditions (28), (29), (30) deviennent identiques

$$(63)\qquad \frac{D\left\{\dfrac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{\tau_1}}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}}, \dfrac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{\tau_2}}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}}, \ldots, \dfrac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{\tau_g}}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}}\right\}}{D(c_1, c_2, \ldots, c_g)} = \frac{1}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)^{g+1}} \frac{D\left(\varphi, \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_1}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_2}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_g}\right)}{D(x_0, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_g})} \not\equiv 0.$$

Les significations (41), (42), (43)

$$(64)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial c_1} = z_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial c_2} = z_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial c_g} = z_g;$$

$$(65)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial c_1} = \overline{\omega}_{11}, & \dfrac{\partial z_2}{\partial c_1} = \overline{\omega}_{12}, & \ldots, & \dfrac{\partial z_g}{\partial c_1} = \overline{\omega}_{1g}, \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial c_2} = \overline{\omega}_{21}, & \dfrac{\partial z_2}{\partial c_2} = \overline{\omega}_{22}, & \ldots, & \dfrac{\partial z_g}{\partial c_2} = \overline{\omega}_{2g} & (\overline{\omega}_{ij} = \overline{\omega}_{ji}), \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial c_g} = \overline{\omega}_{g1}, & \dfrac{\partial z_2}{\partial c_g} = \overline{\omega}_{g2}, & \ldots, & \dfrac{\partial z_g}{\partial c_g} = \overline{\omega}_{gg}. \end{cases}$$

et les fonctions (44), (45)

$$(66)\qquad \begin{cases} \vartheta_1(\varphi, z_1, \ldots, z_g, c_1, \ldots, c_g), \\ \vartheta_2(\varphi, z_1, \ldots, z_g, c_1, \ldots, c_g), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \vartheta_{g+1}(\varphi, z_1, \ldots, z_g, c_1, \ldots, c_g), \end{cases}$$

$$(67)\qquad \frac{D(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{g+1})}{D(\varphi, z_1, \ldots, z_g)} \neq 0$$

amènent au système

$$(68)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\vartheta}{\partial c_1} + z_1\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} + \overline{\varpi}_{11}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial z_1} + \ldots + \overline{\omega}_{1g}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial z_g} = 0, \\ \dfrac{\partial\vartheta}{\partial c_2} + z_2\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} + \overline{\omega}_{21}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial z_1} + \ldots + \overline{\omega}_{2g}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial z_g} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial\vartheta}{\partial c_g} + z_g\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} + \overline{\omega}_{g1}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial z_1} + \ldots + \overline{\omega}_{gg}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial z_g} = 0, \end{cases}$$

qui avec les conditions

$$(69)\qquad \omega_{ij} = \text{fonct.}\,(\varphi, z_1, \ldots, z_g, c_1, \ldots, c_g),$$

est le système d'équations linéaires, homogènes aux dérivées partielles du premier ordre.

Quand sont vérifiées les conditions (69), et, qu'en outre, le système (68) est complet, ses intégrales

$$(70)\qquad w_1 = \vartheta_1, \qquad w_2 = \vartheta_2, \qquad \ldots, \qquad w_{g+1} = \vartheta_{g+1},$$

sont indépendantes par rapport aux arguments $\varphi, z_1, \ldots, z_g$; elles entraînent les égalités

$$(71)\qquad \begin{cases} \varphi = \theta(w_1, \ldots, w_{g+1}, c_1, \ldots, c_g), \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_1} = \varepsilon_1(w_1, \ldots, w_{g+1}, c_1, \ldots, c_g), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_g} = \varepsilon_g(w_1, \ldots, w_{g+1}, c_1, \ldots, c_g). \end{cases}$$

Les expressions (70) donnent la possibilité de passer de l'intégrale [(A)-(B)] de Lagrange (61) à l'intégrale [(C)-(D)] de S. Lie

$$(72)\qquad \begin{cases} w_1 = b_1, \qquad w_2 = b_2, \qquad \ldots, \qquad w_{g+1} = b_{g+1}, \\ \Phi(w_1, w_2, \ldots, w_{g+1}) = 0. \end{cases}$$