

BULLETIN DE LA S. M. F.

LEWIS-BAYARD ROBINSON

**Complément à une étude sur l'équation
fonctionnelle d'Ozumi**

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 213-215

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__213_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPLÉMENT
A UNE ÉTUDE SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE D'OZUMI;

PAR M. L. B. ROBINSON (1).

Dans cet article, nous ferons l'étude de l'équation

$$(1) \quad u'(x) = a(x) u\left(x^{\frac{m}{n}}\right),$$

où m et n sont deux nombres entiers et positifs et $m > n$.

De plus $a(x)$ est une fonction entière à coefficients positifs.

Au moyen de la substitution $x = e^z$, l'équation (1) est transformée dans l'équation

$$(2) \quad w'(z) = P(z) w\left(\frac{m}{n} z\right),$$

où $P(z)$ est une fonction entière à coefficients positifs.

Nous verrons facilement que la série qui satisfait formellement à l'équation ci-dessus, diverge partout. Pour cela

$$z = 0, \quad x = 1$$

est un point singulier de l'équation (1).

En suivant le raisonnement d'un travail antérieur (2), on voit que la solution générale de l'équation (1) a le cercle de rayon 1 comme coupure essentielle. On obtient la solution générale par des approximations successives.

$u(x)$ est une fonction lacunaire tant que $m > n$. Mais quand

$$\frac{m}{n} \rightarrow 1, \\ u(x) \rightarrow e^{\int a(x) dx},$$

c'est-à-dire une fonction entière.

(1) L'auteur cherche à généraliser un travail d'Ozumi, voir JONOKU, *Mathematical Journal*, 1929, p. 10-18.

(2) Voir *Bulletin de la Société Mathématique* (t. 64, fasc. I-II, 1936, p. 66.)

Procédons au cas plus général

$$(3) \quad u'(x) = a(x)u\left(x^{\frac{m}{n}}\right) + b(x) \quad (1).$$

Par la méthode d'approximations successives nous obtenons une solution

$$u(x) \equiv c_0 v(x) + \varpi(x)$$

qui converge dans le cercle de rayon 1 et sur la circonférence du cercle.

L'origine est un point multiple quand $\frac{m}{n} \neq$ nombre entier; $v(x)$ est une fonction LACUNAIRE mais LIMITÉE. $\varpi(x)$ est aussi LIMITÉE.

Parfois des solutions singulières existent.

Nous donnerons un exemple.

Supposons que nous ayons

$$(4) \quad \lambda u'(x) = u(x^2) - x^3,$$

ou

$$x^3 + \lambda u'(x) = u(x^2).$$

Par des approximations successives nous obtenons une solution

$$(5) \quad u_1(x) \equiv x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \lambda x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \lambda^2 x^{\frac{-3}{8}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{-3}{8} \lambda^3 x^{\frac{-11}{16}} + \dots \\ + a_1 a_2 a_3 \dots a_n \lambda^n x^{a_{n+1}} + \dots,$$

où

$$a_{n+1} = \frac{3}{2^{n+1}} - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Évidemment $a_{n+1} \rightarrow -1$ quand $n \rightarrow \infty$.

Pour cela nous pouvons écrire notre solution

$$u_1(x) \equiv \frac{1}{x} \left\{ x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2} \lambda x^{\frac{5}{4}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \lambda^2 x^{\frac{5}{8}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{-3}{8} \lambda^3 x^{\frac{5}{16}} + \dots \right. \\ \left. + a_1 a_2 a_3 \dots a_n \lambda^n x^{\frac{5}{2^{n+1}}} + \dots \right\}.$$

Notre série converge si $|\lambda| < 1$, $x \neq 0$.

Mais $u_1(x)$ a un point multiple à l'origine.

L'équation (4) est une équation fonctionnelle d'Ozumi et pour

(1) Si $m < n$, cette équation devient une équation d'Ozumi après la transformation

$$x = e^z.$$

cela a une solution

$$u_2(x) \equiv c_0 v(x) + \varpi(x),$$

où $v(x)$ et $\varpi(x)$ sont holomorphes dans le voisinage du point $x=0$. Dans le cas ci-dessus, $v(x)$ est une fonction lacunaire.

L'identité

$$u_1(x) \equiv c_0 v(x) + \varpi(x)$$

pour un choix convenable de la constante c_0 N'EXISTE POINT.

Car $u_1(x)$ n'est pas uniforme.

Par conséquent, $u_1(x)$ est une solution singulière.

L'auteur, après avoir cherché à démontrer que M. Ozumi a obtenu toutes les solutions analytiques, a réussi à obtenir plusieurs solutions singulières. Il a donné l'exemple le plus simple.

Dans le domaine de la physique théorique l'importance des solutions singulières augmente (1). Les solutions singulières des équations différentielles sont relativement rares. Mais lorsqu'on entre dans le domaine des équations fonctionnelles le nombre des solutions singulières devient énorme.

Considérons

$$(6) \quad \lambda u'(x) = u(x^2) - x^2.$$

Une solution est

$$u(x) \equiv \lambda + x.$$

Dans ce cas la solution générale peut s'écrire

$$u(x) \equiv c_0 v(x) + (\lambda + x).$$

APPENDICE.

Revenons à l'équation

$$(2) \quad w'(z) = P(z)w\left(\frac{m}{n}z\right).$$

Si $P(z)$ n'est pas une fonction à coefficients positifs la solution en général diverge. Mais des cas exceptionnels existent.

Si la solution diverge partout, la solution de l'équation (1) est lacunaire avec le cercle de rayon 1 comme coupure.

(1) Voir BOUSSINESQ, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des Sciences*. Compléments au tome III. *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale*.