BULLETIN DE LA S. M. F.

M. RADOJCIC

Sur l'allure des fonctions analytiques au voisinage des singularités essentielles

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 137-146
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__137_0>

SUR L'ALLURE DES FONCTIONS ANALYTIQUES AU VOISINAGE DES SINGULARITÉS ESSENTIELLES ;

PAR M. RADOJČIĆ.

1. Dans certains de mes travaux précédents ([1]) je m'étais proposé l'étude générale des fonctions analytiques au voisinage de leurs singularités essentielles, basée sur la division en feuillets, complète ou partielle, des surfaces de Riemann appartenant aux fonctions inverses. A cette division correspond une division du domaine d'existence de la fonction considérée, ou seulement d'un voisinage de la singularité envisagée, en domaines, que nous avons nommés domaines fondamentaux. Comme ces travaux le montrent déjà, tout un groupe de faits ayant une signification simple et se démontrant facilement, repose uniquement sur les propriétés topologiques du réseau des domaines fondamentaux. Celui-ci nous représente l'entrelacement des feuillets et par conséquent la nature de la surface de Riemann correspondante.

2. Dans la présente communication nous avons l'intention de continuer dans la même voie, en démontrant quelques propositions nouvelles qui se rattachent directement à certaines autres démontrées antérieurement ([2]). Donc, nous reprendrons les mêmes conditions générales, ce qui nous dispense de les répéter complètement. Pourtant, quelques mots ne seront pas, peut-être, inutiles.

([1]) *Sur la division des surfaces de Riemann en feuillets* (*Glas de l'Acad. Roy. Serbe*, t. 134, 1929). *Sur une manière de partager les surfaces de Riemann en feuillets* (*Glas*, t. 146, 1931). *Sur les domaines fondamentaux des fonctions méromorphes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 190). *Sur une classe de fonctions analytiques* (*Publ. math. de l'Univ. de Belgrade*, t. 1, 1932). *Sur les domaines fondamentaux des fonctions analytiques auprès d'une singularité essentielle* (*Publ.*, t. 4, 1935). *Domaines fondamentaux et valeurs exceptionnelles des fonctions analytiques aux environs des singularités essentielles* (*Bulletin de l'Acad. Roy. Serbe*, 1936.

([2]) Voir les deux derniers des travaux cités.

Il s'agit d'un certain voisinage D d'une singularité essentielle S, la fonction considérée $\zeta = f(z)$ y étant uniforme, méromorphe. D est représenté par un domaine ouvert, simplement ou doublement connexe, suivant que S est un arc de cercle ou un point unique (appartenant à un ensemble quelconque de points singuliers) et qu'il se trouve sur la frontière unique de D, ou bien que S est un cercle entier ou un point essentiel isolé et qu'il constitue la frontière intérieure de D. Puisque, grâce à la représentation conforme, tout continu linéaire peut être transformé en un cercle ou en un arc de cercle, S est en réalité quelconque; la restriction ne concerne que D.

Nous supposons que D soit divisé en domaines fondamentaux de manière que : 1° la frontière de chacun d'eux soit continue; 2° que de toute suite infinie de ces domaines on puisse extraire une suite qui converge vers un point de S (qui peut être le point unique de S) et 3° que tous les points de S soient de tels points limites [3].

Un point situé sur la frontière d'un domaine fondamental est appelé par nous un *sommet* de ce domaine, si tout voisinage de ce point appartient à plus de deux domaines fondamentaux différents. Les sommets d'un domaine fondamental divisent la frontière en *côtés*. Deux côtés consécutifs renferment un *angle*. Chaque ensemble d'angles, qui ont un sommet commun et dont les éléments forment une suite ininterrompue d'angles adjacents, est nommé un *faisceau*, pourvu que cet ensemble ne soit pas une partie d'un ensemble plus grand de la même espèce. Les sommets, les angles et les faisceaux sont appelés *algébriques* ou *transcendants*, suivant que le sommet correspondant soit un point algébrique ou transcendant de $f(z)$.

En outre, nous dirons pour un domaine fondamental qu'il entoure un autre, si l'autre est contenu dans l'un des domaines finis du plan, limités par S et le premier domaine. Si, entre deux domaines fondamentaux ce rapport n'existe pas, nous dirons simplement qu'ils se trouvent l'un à côté de l'autre.

3. Notons d'abord les deux propositions suivantes, concernant les voisinages D de la *première espèce*, c'est-à-dire dans lesquels

---

[3] On reconnait ici les conditions A, B, C de l'avant-dernier des travaux cités.

tous les domaines fondamentaux, excepté peut-être un nombre fini, ont des sommets transcendants situés sur S :

Lorsque, D *étant de la première espèce*, *deux angles transcendants d'un domaine fondamental situé dans* D *appartiennent au même faisceau transcendant*, *le nombre des domaines fondamentaux situés entre ces deux angles est fini.*

En effet, le nombre des angles transcendants situés entre ces deux angles est fini ([4]); puisque D est de la première espèce, le nombre des domaines fondamentaux situés entre ces deux angles est également fini.

Lorsque, D *étant de la première espèce*, *deux angles transcendants d'un domaine fondamental situé dans* D *appartiennent au même faisceau transcendant*, *ce domaine entoure au moins un domaine fondamental qui n'a qu'un seul angle transcendant.*

En effet, le nombre des domaines fondamentaux situés entre les deux angles étant fini, si l'un de ces domaines a plus d'un angle transcendant, le nombre des domaines fondamentaux situés entre deux de ces angles-ci est fini, différent de zéro et plus petit que le premier. S'il y a parmi ces derniers domaines de nouveau un, qui a plus d'un angle transcendant, la même conclusion a lieu, etc. Comme le nombre des domaines envisagés diminue ainsi et comme il ne devient jamais nul, on arrive à un certain nombre de domaines dont aucun n'a plus qu'un seul angle transcendant. Parmi ceux-ci il y en a au moins un qui possède un angle transcendant, puisqu'ils remplissent un domaine du plan qui a S sur sa frontière.

4. Sur ces faits s'appuient d'abord les deux propositions suivantes :

I. *Si chaque domaine fondamental situé dans* D, *excepté peut-être un nombre fini*, *a au moins deux sommets transcendants et s'il y a une infinité de ces domaines l'un à côté de*

([4]) *Ibid* n° 6.

l'autre, alors, il y a dans D *une infinité de faisceaux transcendants.*

En effet, puisque le nombre des domaines fondamentaux qui n'ont qu'un seul angle transcendant est fini, le nombre des domaines fondamentaux dont deux angles transcendants appartiennent au même faisceau est, d'après ce qu'on a vu, également fini. Par conséquent, chaque domaine fondamental dans D, sauf peut-être un nombre fini, a au moins deux angles transcendants appartenant à deux faisceaux transcendants. Prenons parmi ces derniers deux qui sont situés l'un à côté de l'autre; ils ont au moins quatre angles transcendants, appartenant à plus de deux faisceaux transcendants. Donc le nombre des domaines situés l'un à côté de l'autre étant infini, il y a une infinité de faisceaux transcendants.

II. *Si chaque domaine fondamental situé dans* D, *excepté peut-être un nombre fini, a au moins deux sommets transcendants et s'il y a une infinité de ces domaines dont chacun a au moins trois sommets trancendants, alors, il y a dans* D *une infinité de faisceaux transcendants.*

S'il y a, parmi ceux qui ont au moins trois sommets transcendants, une infinité de domaines se trouvant l'un à côté de l'autre, la proposition se réduit à la précédente. Supposons que cela n'a pas lieu. Alors une infinité de ces domaines, formant une suite $D_n (n = 1, 2, \ldots)$, est disposée de sorte que D_n entoure $D_{n+1} (n = 1, 2, \ldots)$. Puisque le nombre des domaines qui ont moins de deux sommets transcendants est fini, les faits du n° 3 nous autorisent à supposer que chaque D_n ait au moins trois angles appartenant à trois faisceaux transcendants. Désignons ces faisceaux par F_n, F'_n, F''_n de façon que F''_n se trouve entre F_n et F'_n. Puisque D_n entoure D_{n+1}, les faisceaux F_{n+1}, F'_{n+1}, F''_{n+1} se trouvent « *entre* » F_n et F''_n ou « *entre* » F'_n et F''_n ([5]). Il en résulte que l'un au moins des $F^{(i)}_{n+1}$ est différent des $F^{(i)}_n$. D'autant plus, l'un au moins des $F^{(i)}_{n+2}$ est différent des $F^{(i)}_n$, etc., donc il y a une infinité de faisceaux transcendants situés dans D.

([5]) « *Entre* » F_n et F''_n doit signifier : entre F_n et F''_n ou égal à F_n ou à F''_n.

La proposition II est équivalente à la proposition suivante, concernant la fonction inverse $z = \varphi(\zeta)$ et le domaine Δ de sa surface de Riemann, correspondant à D :

Si dans Δ chaque feuillet, excepté peut-être un nombre fini, a sur sa frontière au moins deux points de ramification transcendants et si, pour une infinité de ces feuillets, le nombre deux est dépassé, l'ensemble des points de ramification transcendants situés sur la frontière de Δ est infini.

5. Démontrons maintenant la proposition suivante :

III. *Si chaque domaine fondamental situé dans* D, *excepté peut-être un nombre fini, a au moins deux sommets transcendants et s'il y a dans* D *une infinité de sommets algébriques, alors, il y a dans* D *une infinité de faisceaux transcendants.*

En effet, désignons par $s_n (n = 1, 2, \ldots)$ une suite infinie de ces sommets algébriques. En chaque point s_n se rencontrent plus de deux domaines fondamentaux. Soient D_n, D'_n, D''_n trois parmi ces domaines. Parmi les $D_n (n = 1, 2, \ldots)$ il peut y en avoir d'identiques. Mais le nombre des domaines fondamentaux se rencontrant dans l'ensemble des s_n étant infini, on peut supposer qu'il y ait une infinité des D_n différents entre eux et, dès lors, que tous les D_n soient différents entre eux.

Le nombre des domaines fondamentaux, qui ont moins de deux sommets transcendants, étant fini, les propositions du n° 3 nous autorisent à supposer que chaque D_n, D'_n, $D''_n (n = 1, 2, \ldots)$ ait au moins deux sommets transcendants, appartenant à deux faisceaux transcendants, et une frontière unique.

Divisons la frontière de D_n en arcs dont les bouts sont les sommets transcendants de D_n. L'un de ces arcs, soit E_n, renferme avec S un domaine fini, qui contient les autres arcs; désignons l'ensemble de ces derniers par I_n. Le point S_n se trouve sur E_n ou sur I_n.

S'il y a une infinité des D_n qui sont situés l'un à côté de l'autre, notre proposition se ramène à I. Supposons donc que cela n'a pas lieu. Alors, on peut admettre que D_n entoure $D_{n+1} (n = 1, 2, \ldots)$. Deux cas se présentent :

1° Il y a une infinité de sommets s_n se trouvant sur les I_n; désignons cette infinité de nouveau par $s_n (n = 1, 2, \ldots)$. Soient F_n, F'_n les faisceaux transcendants qui contiennent les deux angles transcendants de D_n dont les sommets présentent les bouts de E_n. Puisque les autres angles transcendants de D_n, s'il y en a, sont situés entre ces deux, F_n et F'_n sont différents entre eux. Comme s_n se trouve sur I_n, D_n entoure D'_n et D''_n; donc ceux-ci sont situés l'un à côté de l'autre et par conséquent les angles transcendants de D'_n et D''_n appartiennent au moins à trois faisceaux transcendants dont l'un, soit F''_n, est sûrement différent de F_n et F'_n, étant situé entre ceux-ci. Puisque D_n entoure D_{n+1}, les faisceaux F_{n+1}, F'_{n+1}, F''_{n+1} se trouvent «*entre*» F_n et F''_n ou «*entre*» F'_n et F''_n, de sorte que l'un au moins des $F^{(i)}_{n+1}$ est différent des $F^{(i)}_n$. D'autant plus, l'un au moins des $F^{(i)}_{n+2}$ est différent des $F^{(i)}_n$, etc. Donc, il y a dans D une infinité de faisceaux transcendants.

2° Il y a une infinité de sommets s_n se trouvant sur les E_n; désignons cette infinité de nouveau par $s_n (n = 1, 2, \ldots)$. Soient F'_n et F''_n les faisceaux transcendants qui contiennent deux des angles de D_n et qui sont différents entre eux. D_n et D'_n sont l'un à côté de l'autre, donc leurs angles transcendants appartiennent à au moins trois faisceaux transcendants dont l'un, soit F_n, est sûrement différent de F'_n et F''_n. Cette fois-ci F'_n est situé entre F_n et F''_n ou bien, F''_n est situé entre F_n et F'_n. Supposons que les faisceaux qui sont désignés par F'_n et F''_n, le soient de telle sorte, que pour tout n F_n soit situé entre F'_n et F''_n. Puisque D_n entoure D_{n+1} et D'_{n+1} [6], les faisceaux F_{n+1}, F'_{n+1}, F''_{n+1} se trouvent « *entre* » F'_n et F''_n. Par conséquent, l'un au moins des $F^{(i)}_{n+1}$ est différent des $F^{(i)}_n$; donc il y a dans D une infinité de faisceaux transcendants.

Cette démonstration nous rappelle une autre qui avait pour but la proposition suivante :

Si le nombre p des valeurs exceptionnelles dans D *est plus grand que un et s'il y a dans* D *une infinité de faisceaux algébriques, alors, il y a dans* D *aussi une infinité de faisceaux transcendants* [7].

---

[6] Il est possible aussi que D'_{n+1} soit identique à D_n. Alors D''_{n+1} est sûrement différent de D_n et l'on peut remplacer D'_{n+1} par D''_{n+1}.

[7] Voir le dernier des travaux cités.

Or, c'est une conséquence immédiate de la proposition III. En effet, comme $p > 1$, chaque domaine fondamental, excepté peut-être un nombre fini, a au moins deux sommets transcendants, de sorte que les conditions de la proposition III soient remplies.

Dans le domaine Δ de la fonction inverse la proposition III conduit à la proposition suivante :

Si dans Δ *chaque feuillet, excepté peut-être un nombre fini, a sur sa frontière au moins deux points de ramification transcendants et s'il y a dans* Δ *une infinité des points de ramification algébriques d'ordre* > 2, *alors, le nombre des points de ramification transcendants situés sur la frontière de* Δ *est infini.*

Les propositions II et III peuvent être réunies en une seule, à savoir :

IV. *Si chaque domaine fondamental situé dans* D, *excepté peut-être un nombre fini, a au moins deux sommets transcendants et si une infinité de ces domaines a un troisième sommet, transcendant ou algébrique, alors, il y a dans* D *une infinité de faisceaux transcendants.*

6. Supposons maintenant que, outre les conditions contenues dans les propositions I, II, III, il y ait dans D une valeur exceptionnelle ω (c'est-à-dire que $f(z)$ accepte ω dans D un nombre fini de fois au plus). Nous allons montrer qu'il y a alors dans D une infinité de faisceaux transcendants dont la valeur asymptotique est ω.

Considérons d'abord la proposition I. Évidemment, il y a une infinité de domaines fondamentaux situés l'un à côté de l'autre et possédant, chacun, un angle transcendant dont la valeur asymptotique est ω. Parmi ces domaines formant un ensemble E prenons un ensemble infini E′ tel, qu'entre chaque paire d'éléments de E′ se trouve au moins un élément de E; alors deux angles appartenant à deux éléments de E′ ne peuvent jamais appartenir à un seul faisceau transcendant. Par conséquent chaque domaine de E′ a un angle appartenant à un faisceau transcendant dont la valeur asymptotique est ω et qui est différent de tous les autres. Donc le nombre de ces faisceaux est infini.

Voyons maintenant la proposition II. Nous pouvons supposer que l'un des faisceaux F_n, F'_n, F''_n qui entrent dans sa démonstration — nous le désignerons par F_n^{ω} — ait la valeur asymptotique ω. S'il y a une infinité des F_n^{ω} différents, notre proposition est démontrée. Si le contraire a lieu, tous les F_n^{ω} sont pour n assez grand identiques entre eux. Alors, puisque les $F_{n+1}^{(i)}$ se trouvent « *entre* » F_n et F''_n ou « *entre* » F'_n et F''_n, F_n^{ω} est pour n assez grand différent de F''_n; pour simplifier la description, supposons que pour n assez grand F_n^{ω} soit identique à F_n et que par conséquent les $F_{n+1}^{(i)}$ se trouvent « *entre* » F_n et F''_n. Puisqu'une infinité de domaines fondamentaux se trouve entre deux angles de D_n appartenant à F'_n et F''_n, il y a sûrement un faisceau transcendant G_n dont la valeur asymptotique est ω et qui est situé « *entre* » F'_n et F''_n. Or, il y en a une infinité parmi les G_n qui sont différents entre eux.

Quant à la proposition III, reprenons sa démonstration et ajoutons les remarques suivantes, valables pour chacun des deux cas désignés par 1 et 2. Puisque ω est une valeur exceptionnelle, on peut supposer que parmi les faisceaux contenant les angles transcendants de D'_n il y ait un, soit F_n^{ω}, dont la valeur asymptotique est ω. Ce faisceau peut coïncider avec F_n ou F'_n. Sinon, choisissons F_n^{ω} pour F''_n. Ainsi l'un des faisceaux F_n, F'_n, F''_n sera égal à F_n^{ω}. D'ici on peut continuer exactement comme dans la considération précédente, qui se rapporte à la proposition II.

Nous avons donc la proposition suivante :

V. *S'il y a dans* D *une valeur exceptionnelle* ω, *si chaque domaine fondamental situé dans* D, *excepté peut-être un nombre fini, a au moins deux sommets transcendants et si une infinité de ces domaines a un troisième sommet, transcendant ou algébrique, alors, il y a dans* D *une infinité de faisceaux transcendants dont la valeur asymptotique est* ω; *dans* Δ *il y a une infinité de points de ramification transcendants dont l'affixe est* ω.

Pour illustrer la proposition V citons quelques conséquences :

VI. *Si, hormis les points de ramification trancendants qui* *correspondent à deux valeurs exceptionnelles* ω_1 *et* ω_2 *de* $f(z)$ *dans* D, *il y a dans* Δ *ou sur sa frontière une infinité de points de ramification, soit transcendants soit algébriques d'ordre* > 2, *alors, le nombre des points de ramification transcendants situés sur la frontière de* Δ *et correspondant à* ω_1 (*ou à* ω_2) *est infini.*

VII. *S'il y a dans* D *au moins deux valeurs exceptionnelles et une valeur asymptotique différente de ces deux valeurs, alors il y a sur la frontière de* Δ *une infinité de points transcendants situés en chacun des points* $\zeta = \omega$ *désignant les valeurs exceptionnelles.*

En effet, la valeur asymptotique mentionnée correspond à un faisceau transcendant. Celui-ci est composé d'un nombre fini ou infini d'angles. Si ce nombre est fini, il y a, d'après la définition du faisceau ([8]), une infinité de sommets algébriques dans D; s'il est infini, une infinité de domaines fondamentaux situés dans D a plus de deux sommets transcendants. Or, dans l'un et l'autre cas s'applique la proposition V.

VIII. *S'il y a dans* D *plus de deux valeurs exceptionnelles, alors il y a dans* D *une infinité de faisceaux transcendants; il y a même une infinité pour chacune de ces valeurs et, par conséquent, une infinité de points de ramification transcendants se trouve sur la frontière de* Δ *en chaque point du plan de* ζ, *qui correspond à l'une des valeurs exceptionnelles.*

7. Démontrons encore la proposition suivante, *valable dans le cas où* D *représente le voisinage tout entier d'un point essentiel isolé ou d'une ligne essentielle fermée* ([9]) :

Si le nombre des valeurs exceptionnelles dans D *est égal à deux, le nombre des faisceaux transcendants situés dans* D *peut être infini ou bien un nombre pair quelconque; jamais le nombre de ces faisceaux ne peut être impair.*

En effet, selon la proposition VII, s'il y a dans D hormis les

---

([8]) *Voir* le n° 5 dans l'avant-dernier des travaux cités.

([9]) C'est-à-dire dans le second des deux cas qui se trouvent dans le n° 1.

deux valeurs exceptionnelles mentionnées et que nous désignerons par ω_1, ω_2, une autre valeur asymptotique, le nombre des faisceaux transcendants est infini. Donc, si ce nombre est fini, ω_1 et ω_2 sont les seules valeurs asymptotiques dans D. Or, nous avons démontré ailleurs ([10]) que si le nombre des valeurs exceptionnelles est plus grand que un, deux faisceaux transcendants consécutifs ont des valeurs asymptotiques différentes. Donc, en suivant les faisceaux trancendants dans l'ordre qu'ils occupent autour de S, nous rencontrons sans cesse alternativement les deux valeurs ω_1 et ω_2, ce qui exige que le nombre de ces faisceaux soit pair.

D'autre part la fonction $e^{z^{-n}}$ nous donne l'exemple d'une fonction qui a $z = 0$ comme point essentiel, deux valeurs exceptionnelles 0 et ∞ et $2n$ faisceaux transcendants.

Ces remarques montrent qu'on peut s'exprimer aussi par les mots suivants :

Si ω_1 et ω_2 sont les seules valeurs exceptionnelles et si le nombre des points de ramification transcendants situés sur la frontière de Δ est fini, alors ce nombre est pair, sa moitié se trouve en $\zeta = \omega_1$ et l'autre moitié en $\zeta = \omega_2$.

([10]) *Voir* le dernier des travaux cités.