BULLETIN DE LA S. M. F.

A. GAY

Sur l'équation de M. P. Humbert

Bulletin de la S. M. F., tome 63 (1935), p. 197-209
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1935__63__197_0>

SUR L'ÉQUATION DE M. P. HUMBERT;

PAR M. GAY.

Au cours d'une Communication faite à la Société Mathématique de France (séance du 22 mars 1933) M. Liénard, par un simple changement d'axes, a transformé l'équation des potentiels de troisième ordre de M. P. Humbert en la suivante

$$\Delta \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

où Δ désigne le laplacien du plan xOy et il a établi [équation (4) de la note citée] la formule de Green correspondant à cette équation.

A ce sujet je me permets de présenter quelques remarques simples, conséquences immédiates de la théorie des fonctions harmoniques de deux variables.

1. Formule de Green. — Conservant les notations de la Note citée précédemment, nous désignerons par S la surface fermée pour laquelle on veut établir la formule de Green, par C sa courbe de niveau de cote z, en regardant l'axe oz comme vertical, par ds un élément de courbe C et par n une normale intérieure à C dans son plan. Soient $P(a, b, c)$ un point intérieur à S et $P'(a, b, z)$ l'intersection de la verticale de P avec le plan de C; nous supposons z assez voisin de c pour que P' soit intérieur à C. La dérivée $\frac{\partial v(P')}{\partial z}$ est harmonique en a et b et la formule fondamentale des fonctions harmoniques donne l'équation

$$\frac{\partial v(P')}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int_C \left| \log r \frac{d}{dn} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{d \log r}{dn} \right| ds, \tag{2}$$

dans laquelle $\frac{d}{dn}$ désigne la dérivée prise suivant la normale intérieure en un point M de C et où $r = P'M$. Dans cette équation (2) le second membre I est fonction de z par l'intermédiaire des données et de C. Si l'on désigne maintenant par P_1P_2 le segment de verticale de P, limité à S et contenant le point P, en intégrant l'équation (2) par rapport à z, il vient

$$(3) \qquad v(P) - v(P_1) = \int_{z_1}^{c} I(z)\,dz,$$

et

$$(3') \qquad v(P_2) - v(P) = \int_{c}^{z_2} I(z)\,dz,$$

où z_1 et z_2 sont les cotes des points P_1 et P_2.

Les équations (3) et (3') entraînent immédiatement l'équation (4) de M. Liénard

$$(4) \qquad v(P) = \frac{1}{2}\{v(P_1) + v(P_2)\} + \frac{1}{2}\left|\int_{z_1}^{c} I(z)\,dz - \int_{c}^{z_2} I(z)\,dz\right|,$$

dans laquelle la surface S n'intervient que par la zone comprise entre les courbes de niveau des points P_1 et P_2.

Remarquons encore que les équations (3), (3') ou (4) subsistent si la verticale de P ne rencontre pas la surface ouverte S; il suffit de fermer S par un ou deux plans horizontaux et de se donner la valeur de v sur ces plans.

Dans les équations précédentes $v(P_1)$ et $v(P)$ sont des fonctions de a et b seulement.

2. Transformations. — Les équations obtenues précédemment appellent quelques remarques. Si l'on désigne par α et β les cosinus directeurs de la normale n à C et par φ l'angle de n avec l'axe Ox, α et β sont fonctions de φ et de z, et l'on a

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dv}{dn}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial x} + \beta\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ &= \alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial z} + \beta\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z} + \alpha'_z\frac{\partial v}{\partial x} + \beta'_z\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{d}{dn}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \alpha'_z\frac{\partial v}{\partial x} + \beta'_z\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Les plans de cotes z et $z + dz$ coupent la surface S suivant deux courbes C et C'; si l'on projette C' sur le plan de C on obtient une courbe C'_1 voisine de C et la portion λ de la normale n comprise entre C et C'_1 dépend de la forme de S; on voit aisément que

$$\lambda = -c\,dz,$$

où

$$c = \cot \widehat{Nz},$$

N désignant la normale intérieure à S au point M.

Le point M_1 ou n perce C'_1 est lié à M par

$$\delta\,\overrightarrow{OM} = \lambda\, n, \tag{6}$$

qui entraîne

$$ds_1 = ds\left(1 - \frac{\lambda}{\rho}\right), \tag{7}$$

ρ désignant le rayon de courbure à C ou M.

Si l'on dérive (6) par rapport à s_1, abscisse de M_1 sur C'_1, on obtient, en utilisant (7) et les formules de Frenet, l'accroissement δn, d'où

$$\frac{\partial n}{\partial z} = c'_s\, t, \tag{8}$$

et l'équation (5) s'écrit finalement

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dv}{dn}\right) - c'_s\,\frac{dv}{ds}. \tag{9}$$

Considérons maintenant une intégrale de la forme

$$\mathcal{J} = \int_C H(s, z)\, ds$$

qui s'écrit, puisque $ds = \rho\, d\varphi$, sous la forme

$$\mathcal{J} = \int_0^{2\pi} H(\varphi, z)\,\rho(\varphi, z)\, d\varphi.$$

C'est une fonction de z et $\dfrac{\partial \mathcal{J}}{\partial z}$ s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial z} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial H}{\partial z}\rho + H\,\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)d\varphi = \int_C\left(\frac{\partial H}{\partial z} + H\,\frac{\partial}{\partial z}\log\rho\right)ds. \tag{10}$$

Remarquons que ce résultat peut s'obtenir en utilisant l'équation (7) d'où l'on tire

$$\frac{\partial}{\partial z}(ds) = \frac{c}{\rho}\,ds.$$

En comparant ce résultat au calcul précédent il faut en conclure que c est équivalent à ρ'_z, ce qu'un calcul direct montre facilement.

En utilisant (9) on met l'équation (2) sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2\pi}\int_C \left| \log r \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dv}{dn}\right) - \frac{d\log r}{dn}\frac{\partial v}{\partial z} - c'_s \log r \frac{dv}{ds}\right| ds$$

et, d'après (10), il vient

$$(11)\quad 2\pi\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\int_C\left(\log r\frac{dv}{dn} - v\frac{d\log r}{dn}\right)ds$$
$$-\int_C \frac{dv}{dn}\left(\frac{\partial \log r}{\partial z} + \log r\frac{\partial\log\rho}{\partial z}\right)ds$$
$$+\int_C v\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\log r}{dn} + \frac{d\log r}{dn}\frac{\partial\log\rho}{\partial z}\right)ds - \int_C c'_s\log r\frac{dv}{ds}\,ds.$$

En intégrant (11) par rapport à z, on obtiendra dans (3), (3′) et (4) la valeur de $v(\mathrm{P})$ connaissant seulement les valeurs de v et de $\frac{dv}{dn}$ sur C.

3. **Problème de Dirichlet.** — Si l'on connaît pour C la fonction de Green G(P, M), c'est-à-dire si l'on sait résoudre un cas particulier du problème de Dirichlet pour le contour C, l'équation (2) se simplifie et devient

$$(2')\qquad \frac{\partial v(\mathrm{P}')}{\partial z} = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial v}{\partial z}\frac{d\mathrm{G}}{dn}\,ds.$$

En utilisant (10) on obtient

$$2\pi\frac{\partial v(\mathrm{P}')}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\int_C v\frac{d\mathrm{G}}{dn}\,ds - \int_C v\left|\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\mathrm{G}}{dn} + \frac{d\mathrm{G}}{dn}\frac{\partial\log\rho}{\partial z}\right| ds.$$

Mais, d'après (9).

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\mathrm{G}}{dn} = \frac{d}{dn}\left(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z}\right),$$

car on a ici

$$\frac{d\mathrm{G}}{ds} = 0$$

et finalement

$$(2'') \quad 2\pi \frac{\partial v(P')}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\int_C v \frac{dG}{dn}\, ds - \int_C v \left| \frac{d}{dn}\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right) + \frac{dG}{dn}\frac{\partial \log \rho}{dz} \right| ds.$$

Cette équation, intégrée par rapport à z, fera connaître une solution du problème de Dirichlet pour l'équation (1) et relatif à S.

On peut calculer la dérivée $\frac{\partial G}{\partial z}$ qui figure dans ($2''$). G(P, M) est une fonction du contour C, et quand on passe de C à C', la variation δG est donnée par

$$\delta G = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{dG_P^{M'}}{dn}\frac{dG_M^{M'}}{dn}\lambda\, ds_{M'} \quad (^1),$$

d'où

$$(12) \qquad \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{-1}{2\pi}\int_C \frac{\partial G_P^{M'}}{dn}\frac{dG_M^{M'}}{dn} c\, ds_{M'}.$$

La solution du problème de Dirichlet pour l'équation (1) n'est plus unique; la différence w de deux solutions vérifie (1) et s'annule sur S; elle vérifie donc; avec les notations habituelles : ($1'$) $\Delta w = f(p)$, p étant le pied de la verticale de P sur xOy, avec $w = 0$ sur S. Cette fonction w n'est pas nulle, elle est donnée par la formule connue

$$(13) \qquad w(P) = \frac{-1}{2\pi}\int_D G(P, M) f(m)\, d\sigma_M$$

dans laquelle f est une fonction arbitraire et où D représente le domaine intérieur à C.

D'une façon générale si l'on considère une fonction de P définie par une intégrale de surface de la forme

$$(14) \qquad K(P) = \int_D H(P, M) f(m)\, d\sigma_M$$

lorsque z varie, la variation de K provient de la variation du contour C du domaine D et de celle de H si H est une fonction du contour et l'on a

$$\delta K(P) = \int_D \delta H(PM) f(m)\, d\sigma_M + \int_C H(P, M) f(m) \lambda\, ds,$$

(1) Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations*, p. 305.

d'où

$$\frac{\partial K}{\partial z} = \int_D \frac{\partial H}{\partial z} f(m)\, d\sigma_M - \int_C H f(m) c\, ds. \tag{14'}$$

Pour la fonction w définie par (13), l'intégrale curviligne qui figure dans (14') est nulle car G(P, M) est la fonction de Green du contour et $\frac{\partial G}{\partial z}$ est définie par (12).

4. Remarques. — Certains calculs peuvent être explicités dans les résultats précédents. On peut calculer par exemple les dérivées

$$\frac{\partial}{\partial z} \log r \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial z} \frac{d \log r}{dn}$$

qui figurent dans (11). L'équation (6) donne en poussant les développements jusqu'aux infiniment petits du second ordre

$$ds_1 = ds\left(1 - \frac{\lambda}{\rho} + \frac{\lambda^2}{\rho^2}\right)\left(1 + \frac{\lambda_s'^2}{2}\right) \tag{15}$$

et pour la variation de n quand on passe de M en M_1

$$\delta n = -\lambda_s'\left(1 + \frac{\lambda}{\rho}\right) t - \frac{\lambda_s'^2}{2} n. \tag{16}$$

On en déduit aisément que

$$(\delta\varphi)^2 = \lambda_s'^2$$

et, en remarquant que φ et λ croissent simultanément,

$$\delta\varphi = \lambda_s' = \frac{\lambda_\varphi'}{\rho}. \tag{17}$$

En projetant le contour PMM_1 sur Mt et sur Mn on a

$$\delta(r \sin\psi) = 0 \qquad \text{et} \qquad \delta(r\cos\psi) + \lambda = 0,$$

où ψ est l'angle de MP avec Mn; on en tire

$$\delta r = -\lambda \cos\psi \tag{17'}$$

et

$$\delta\psi = \frac{\lambda \sin\psi}{r}. \tag{17''}$$

En utilisant (17), (17') et (17'') on trouve

$$(17''') \qquad \frac{\partial}{\partial z}\log r = \frac{c}{r}\cos\psi$$

et

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\log r}{dn} = \frac{1}{r}\left(-\frac{c}{r}\cos 2\psi + \frac{c_2'}{\rho}\sin\psi\right).$$

5. **Cas particulier.** — En particulier supposons maintenant que toute courbe de niveau C de la surface S soit un cercle dont le rayon ρ soit une fonction connue de z; l'équation (2') se réduit alors à l'équation de Poisson

$$(18) \qquad \frac{\partial v(\mathrm{P}')}{\partial z} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{C}}\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\cos\psi}{r} - \frac{1}{2\rho}\right)ds$$

où ψ est l'angle de MP avec le rayon du point M.

De (18) il résulte que si $\frac{\partial v}{\partial z}$ est positive ou nulle sur S, $\frac{\partial v}{\partial z}$ est positive en tout point intérieur à S.

Par suite si la fonction harmonique $\frac{\partial v}{\partial z}$ est partout positive elle se réduit à une constante (1) et v a la forme

$$v(\mathrm{P}) = k^2 z + f(p)$$

où k^2 est constante et $f(p)$ une fonction arbitraire de p, projection de P sur xOy.

Dans le cas tout particulier où S est un cylindre de révolution de rayon ρ, dans l'équation (18), seul le terme $\frac{\partial v}{\partial z}$ dépend de z et en intégrant par rapport à z on résout immédiatement le problème de Dirichlet si l'on connaît la valeur de v en tout point d'une section droite du cylindre.

6. **Généralisations.** — Il est évident maintenant que tout ce qui précède peut s'étendre à des équations analogues à l'équation (1).

C'est le cas par exemple de l'équation

$$\mathrm{F}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = f.$$

(1) Goursat, Analyse III, p. 184.

où

$$F(u) = \Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c$$

a, b, c et f étant des fonctions de P, quand on connaît une intégrale particulière de l'équation adjointe de $F(u) = 0$ de la forme

$$\alpha(P, M) = U(M)\log r + V(M)$$

où U et V sont réguliers à l'intérieur de C avec $U(P) = -1$.

Un calcul analogue à celui du n° 2 fera encore connaître $v(P)$ si l'on connaît v et $\frac{dv}{dn}$ en tout point de S.

Si l'intégrale particulière α s'annule sur C, on peut résoudre le problème de Dirichlet pour l'équation précédente ([1]).

On peut étudier de la même manière une équation de la forme

$$\Delta F = 0$$

où F est une fonction de P, de v et de ses dérivées par rapport à z, si l'on sait résoudre l'équation

$$F = f(P)$$

où f représente une fonction connue de P.

7. **Problème de Neumann.** — On peut résoudre l'équation (1) en la prenant sous la forme (1′) du n° 3, qu'on vérifie en posant

$$v(P) = A(P) + K(P) \tag{19}$$

où K(P) est la fonction (14) dans laquelle

$$H(PM) = \frac{1}{2\pi}\log r$$

et où A(P) est une fonction de P qui est harmonique par rapport aux coordonnées de p dans le plan xOy, et qui sera déterminée par les conditions aux limites, la fonction f de K restant arbitraire.

Bornons-nous aux problèmes classiques.

([1]) GOURSAT, *loc. cit.*, p. 232.

Le problème de Dirichlet (D) pour v, se ramène pour A(P) au problème de Dirichlet sur la courbe de niveau C.

Le problème (n) qui consiste à déterminer v connaissant la valeur de $\frac{dv}{dn}$ en tout point d'une section C quelconque, se ramène pour A(P) au problème de Neumann pour C.

La condition de possibilité

$$\int_C \frac{dv}{dn}\,ds = \int_C \frac{dK}{dn}\,ds$$

s'écrit, d'après l'expression de K(P, M)

$$\int_C \frac{dv}{dn}\,ds = \int_D f(m)\,d\sigma$$

qui doit être vérifiée quel que soit z.

Le problème de Neumann (N) relatif à S se ramène à un problème aux limites pour la fonction harmonique A(P) car

$$\frac{dv}{dN} = \sin \widehat{Nz}\,\frac{dv}{dn} + \cos \widehat{Nz}\,\frac{\partial v}{\partial z}$$

et A doit satisfaire en tout point de C a une condition de la forme

$$(20) \qquad \frac{dA}{dn} + c\,\frac{\partial A}{\partial z} = \varphi(M)$$

où φ est une fonction connue en tout point M de C.

Si l'on prend pour A(P) un potentiel de simple couche

$$A(P) = \int_C \mu(s'z)\log r\,ds'$$

dont la densité μ est fonction de s et de z, l'équation (20) prend la forme

$$(20') \qquad \pi\mu(sz) - \int_C \mu(s'z)\frac{\cos\psi}{r}\,ds' - c\,\frac{\partial}{\partial z}\int_C \mu(s'z)\log r\,ds' = \varphi(sz),$$

où φ est une fonction connue de s et de z.

En utilisant les équations (10) et ($17'''$) et en rappelant qu'en tout point de C on a

$$(21) \qquad c = \frac{\partial\rho}{\partial z},$$

on met l'équation (20′) sous la forme

$$\pi\mu(s, z) - \int_C K(ss'z)\mu(s'z)\,ds' = \Phi(s, z), \tag{22}$$

où

$$K = (1 + cc')\frac{\cos\psi}{r} + \frac{cc'}{\rho}\log r,$$

désignant la valeur de c au point d'abscisse s' de C et où

$$\Phi = \varphi + c\int_C \frac{\partial\mu}{\partial z}\log r\,ds'.$$

L'équation (22) se résoudra par approximations successives soit en prenant pour première approximation $\frac{\varphi}{\pi}$, soit en résolvant d'abord l'équation (22) où l'on remplace Φ par φ; le noyau de l'équation intégrale à résoudre n'a qu'un infini logarithmique. On calculera les valeurs successives de μ en utilisant chaque fois l'équation de transformation (10).

Il restera à ajouter à cette solution particulière l'intégrale générale de l'équation obtenue en faisant $\varphi = 0$ dans l'équation (20′).

8. **Cas singulier.** — Ce qui précède suppose que tout plan horizontal coupe la surface donnée S suivant une courbe de niveau unique; si S se replie on aura à résoudre les trois problèmes précédents dans un domaine D compris entre deux courbes C_1 et C_2 qui s'enveloppent. Les problèmes (D) et (n) sont connus. Pour résoudre le problème (N) on peut considérer la fonction harmonique A(P) comme la somme de deux potentiels $A_1(P)$ et $A_2(P)$ de simple couche de densités respectives $\mu_1(s_1\, z)$ étalée sur C_1 et $\mu_2(s_2\, z)$ étalée sur C_2 et l'on formera un système de deux équations en μ_1 et μ_2, qu'on pourra résoudre par approximations successives.

Sur une telle surface il y a lieu de considérer en particulier des courbes de niveau singulières le long desquelles le plan tangent à S est horizontal. Pour une courbe singulière C_0, que nous supposerons dans le plan $z = 0$, le problème (N) n'est plus résolu par l'équation (22).

Si le plan $z = 0$ a un contact du premier ordre avec S, il est facile de voir que le rayon de courbure en un point d'une courbe de niveau C voisine de C_0, est donné par un développement suivant les puissances de $z^{\frac{1}{2}}$; soit

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 z^{\frac{1}{2}} + \rho_2 \left(z^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \ldots$$

et

$$c = \frac{1}{2} \rho_1 z^{-\frac{1}{2}} + \rho_2 + \ldots.$$

Par suite dans (22) le noyau K a un développement de la forme

$$K = \frac{k_0}{z} + \frac{k_1}{z^{\frac{1}{2}}} + k_2 + k_3 z^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

où k_0, k_1, ..., sont des fonctions connues de s et s'.

Le développement de φ est de même nature où les coefficients φ_0, φ_1, ..., sont des fonctions connues de s.

Prenons pour la densité $\mu(sz)$ un développement de la forme

$$(23) \qquad \mu = \mu_1 z^{\frac{1}{2}} + \mu_2 z + \ldots.$$

En portant le développement (23) dans l'équation (22) et en égalant les parties principales, on obtient en faisant tendre C vers C_0 l'équation intégrale de première espèce

$$(24) \qquad \int_{C_0} \mu_1 \log r \, ds' = -\frac{4\varphi_0}{\rho_1} = -\frac{\rho_1}{2\pi} \int_{C_0} f(m) \log r \, ds'.$$

On obtiendra ensuite des équations pour définir de proche en proche les coefficients μ_2, μ_3, ...

Le potentiel A(P) a au voisinage de C_0 un développement de la forme

$$A(P) = z^{\frac{1}{2}} a_1(P) + z a_2(P) + \ldots$$

et, d'après (24), le coefficient $a_1(P)$ est défini par le potentiel de simple couche

$$a_1(P) = -\frac{\rho_1}{2\pi} \int_{C_0} f(m) \log r \, ds'.$$

Le cas où $z = 0$, a le long de C_0 un contact d'ordre supérieur avec S, se traite de même

9. **Cas de la surface de révolution.** — Pour terminer étudions

le problème (N) dans le cas particulier où la surface S est de révolution autour de Oz; le rayon ρ du parallèle étant une fonction connue de z. Supposons la fonction arbitraire $f(m)$ développée en série de Fourier

$$f(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ a_n(\delta)\cos n\theta + b_n(\delta)\sin n\theta \}.$$

où δ et θ sont les coordonnées polaires dans le plan xOy et où l'on suppose que la série

$$\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$$

est convergente quel que soit δ.

La fonction

$$K(P) = \frac{1}{2\pi}\int_D f(m)\log r \, d\sigma_M$$

s'écrit sous la forme

$$(25) \qquad K = \sum \frac{-1}{2n} \left\{ \left(\frac{A_n}{\delta^n} + A_{-n}\delta^n \right) \cos n\theta + \left(\frac{B_n}{\delta^n} + B_{-n}\delta^n \right) \sin n\theta \right\}$$

en posant

$$A_n = \int_0^{\delta} \delta'^{n+1} a_n(\delta')\, d\delta', \qquad A_{-n} = \int_{\delta}^{\rho} \delta'^{1-n} a_n(\delta')\, d\delta'.$$

et où B_n et B_{-n} sont construits de façon analogue avec $b_n(\delta)$.

Dans $f(m)$ les fonctions a_n et b_n sont supposées bornées, mais pour que $K(P)$ ait un sens lorsque P vient sur Oz, il faut supposer que a_n et b_n sont, pour δ infiniment petit, dès que n est supérieur à 2, d'ordre

$$n' > n - 2.$$

La série K est absolument convergente comme la série Σn^{-2} et en dérivant terme à terme on obtient pour $\frac{dK}{dn}$ sur le cercle C de rayon ρ.

$$(26) \qquad \frac{dK}{dn} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{\rho^{n+1}} \{ A_n(\rho)\cos n\theta + B_n(\rho)\sin n\theta \}.$$

L'équation (14') donne ensuite

$$(27) \qquad \frac{dK}{dz} = -\frac{\rho'}{2\pi}\int_C f(m)\log r \, ds'$$
$$= \frac{\rho\rho'}{2}\sum \frac{1}{n} \{ a_n(\rho)\cos n\theta + b_n(\rho)\sin n\theta \},$$

où ρ' est la dérivée de ρ par rapport à z.

Pour résoudre l'équation (20') posons maintenant

$$\mu(z\theta)) = \Sigma\alpha_n(z)\cos n\theta + \beta_n(z)\sin n\theta.$$

Si l'on suppose le second membre de (20') développé en série de Fourier

$$\varphi(z\theta) = \frac{1}{\sin \hat{N} z} \frac{dv}{dN} = \Sigma\lambda_n(z)\cos n\theta + \mu_n(z)\sin n\theta,$$

où la série

$$\Sigma(\lambda_n^2 + \mu_n^2)$$

est convergente. Le coefficient $\alpha_n(z)$ est défini par l'équation différentielle ordinaire

$$(28) \qquad \rho\rho'\alpha_n' + n\alpha_n = k_n,$$

où

$$\pi k_n = \frac{\rho\rho'^2}{2} a_n(\rho) - \frac{n}{2\rho^{n+1}} \Lambda_n(\rho) - n\lambda_n,$$

et $\beta_n(z)$ par une équation analogue.

D'après (28) la série $\Sigma(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$ est convergente puisqu'il en est ainsi de $\Sigma(\lambda_n^2 + \mu_n^2)$.