BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI LEBESGUE

Démonstration du théorème fondamental de la théorie projective des coniques faite à l'aide des droites focales de M. P. Robert

Bulletin de la S. M. F., tome 63 (1935), p. 121-154
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1935__63__121_0>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE PROJECTIVE DES CONIQUES FAITE A L'AIDE DES DROITES FOCALES DE M. P. ROBERT;

PAR M. HENRI LEBESGUE.

Dans ces dernières années plusieurs géomètres ont étudié une situation particulière de deux circonférences appelée parataxie. L'un d'eux, M. P. Robert, s'est proposé, dans l'un de ses écrits (1), d'obtenir les premiers faits de la nouvelle théorie, qui sont de nature élémentaire, par des méthodes de géométrie élémentaire et, puisque la parataxie est conservée par une inversion, d'examiner d'abord la figure formée par une circonférence et une droite en position paratactique. Lorsqu'il en est ainsi, M. Robert dit que l'on a affaire à une circonférence et à l'une de ses droites focales.

Comme application de ses raisonnements M. Robert donne toute une série de démonstrations également intéressantes qu'elles soient nouvelles ou non, car celles qui étaient déjà connues se présentent maintenant sous un aspect beaucoup plus naturel et l'on sait combien il est difficile de grouper en méthode cohérente les artifices disparates de la géométrie élémentaire. Mais c'est la démonstration nouvelle, donnée par M. Robert, du théorème de Chasles d'après lequel la somme des angles faits par les génératrices d'un cône du second degré avec deux certaines droites est constante, qui a été le point de départ de mes réflexions. Puisque les méthodes de M. Robert permettent de donner pour les cônes du second degré une définition métrique élémentaire, ne permettent-elles pas d'obtenir les faits fondamentaux relatifs à la projection des coniques, faits qui sont en réalité relatifs aux cônes? Et, s'il en est bien ainsi, n'obtiendrons-nous pas un exposé géométrique des débuts de la théorie projective des coniques plus satisfaisant que ceux connus?

Du point de vue logique les exposés connus sont tout à fait satisfaisants, mais l'ordre qu'on y suit l'est moins. Ou bien, en

(1) *Les droites focales du cercle* (*L'Enseignement scientifique*, 1928, n° 4, p. 108).

effet, on part, avec de La Hire, des définitions métriques élémentaires et l'étude des coniques apparaît artificielle tant qu'on n'a pas prouvé qu'elles sont les seules perspectives de cercles et de coniques. Ou bien, on part de ce fait fondamental — en prouvant, par exemple, que les transformations homographiques d'un plan forment un groupe, ou encore, comme certains ouvrages étrangers, en posant axiomatiquement les principes de la géométrie projective construite indépendamment de la géométrie métrique — mais alors on n'atteint que très tardivement les propriétés métriques élémentaires, les définitions de de La Hire.

On verra que, grâce à la considération des droites focales, la définition : « on appelle conique toute perspective de circonférence » donne immédiatement une relation métrique qui fournit facilement, d'une part le théorème fondamental « toute perspective de conique est une conique », d'autre part les définitions métriques élémentaires des coniques, qui se présentent à nous mieux groupées; elles deviennent des cas particuliers ou des conséquences évidentes de la relation métrique initiale.

J'ai défini (I) les droites focales du cercle et démontré celles de leurs propriétés que j'utilise; puis (II) j'ai donné une propriété assez curieuse de la perspective qui généralise la propriété bien connue du rapport anharmonique de quatre points alignés, propriété qui m'est indispensable pour étudier dans (III) les coniques.

Pour bien montrer le caractère élémentaire des trois premières parties je les ai rédigées comme si je m'adressais à des élèves de l'enseignement secondaire; il en résulte que plusieurs démonstrations paraissent basées sur des artifices inexpliqués. Abandonnant le mode de rédaction élémentaire j'ai (IV) indiqué l'origine des faits et expliqué le succès des démonstrations. Puis (V) j'ai montré que la définition métrique très générale qui m'a servi et qui conduit aux définitions classiques habituelles permet non seulement de donner une origine commune à des définitions éloignées mais aussi d'en rapprocher d'autres propriétés qu'on n'a pas l'habitude d'utiliser comme définitions.

L'emploi des droites focales permet évidemment bien d'autres groupements de faits éloignés, bien d'autres généralisations de propriétés élémentaires, il fournirait aux Professeurs des énoncés de problèmes un peu nouveaux.

I.

1. On démontre, au troisième Livre de la Géométrie, que si A et α sont deux points conjugués par rapport à un cercle Γ de centre O et de rayon R, celui-ci est le lieu des points de son plan Π, vérifiant la relation

$$(1)\qquad \frac{(M, A)}{(M, \alpha)} = \frac{(O, A)}{R} = \frac{R}{(O, \alpha)};$$

en désignant, comme dans toute la suite, par (M, N) la distance de deux éléments M, N qui pourront être des points, des droites et des plans dans les cas où de telles distances ont un sens.

Montrons que la relation (1) peut être remplacée par

$$(2)\qquad \frac{(M, AA_1)}{(M, \alpha\alpha_1)} = \frac{(O, A)}{R} = \frac{R}{(O, \alpha)},$$

AA_1 et $\alpha\alpha_1$ étant deux droites perpendiculaires à $OA\alpha$. Nous prendrons, en supposant, comme dans toute la suite, que A est intérieur à Γ, la droite $\alpha\alpha_1$ dans le plan Π et AA_1 faisant avec Π un angle θ que l'on va déterminer. Soient N et ν les projections orthogonales de M sur AA_1 et $\alpha\alpha_1$, de sorte que $(M, N) = (M, AA_1)$; $(M, \nu) = (M, \alpha\alpha_1)$. Alors, (1) entraînera (2) si, et seulement si, les deux triangles rectangles AMN, $\alpha M\nu$ ont deux couples de côtés, AM et αM, MN, et $M\nu$ proportionnels, c'est-à-dire s'ils sont semblables ou encore si

$$\frac{(A, N)}{(\alpha, \nu)} = \frac{(A, M)}{(\alpha, M)} = \frac{(O, A)}{R}.$$

Or AN est la projection orthogonale de $\alpha\nu$ (car $M\nu$ et MN sont perpendiculaires à AA_1), l'angle de AN et de $\alpha\nu$ est θ, donc il faut et il suffit que l'on ait pris

$$\cos\theta = \frac{(O, A)}{R} = \frac{R}{(O, \alpha)}.$$

D'ailleurs, si θ a été ainsi choisi, pour tout point M de Π vérifiant la relation (2) les deux triangles rectangles AMN, $\alpha M\nu$ ont deux couples de côtés proportionnels MN, $M\nu$; AN, $\alpha\nu$, donc on a la relation (1).

Ainsi, à chaque point A intérieur à Γ et différent de O nous attachons deux droites AA_1, symétriques l'une de l'autre par rapport à Π, on les appelle les *droites focales de* Γ *de pied* A; la droite $\alpha\alpha_1$ est dite la *droite directrice correspondante* [1].

Si, A variant se rapproche du point A_0 de Γ, θ tend vers zéro, AA_1 et $\alpha\alpha_1$ tendent vers la tangente à Γ en A_0; les tangentes à Γ seront pour cette raison considérées comme des droites focales. On les appellera *droites focales limites* pour les distinguer des *droites focales ordinaires*: distinction indispensable car si, avec une droite focale limite, on a encore la relation (2) pour tous les points de Γ, Γ n'est plus caractérisée par cette relation.

Si A tend vers O, AA_1 tend vers l'axe OZ de Γ que nous appellerons la *droite focale principale* parce qu'elle est perpendiculaire à Π, et aussi *droite focale singulière* parce que la droite directrice correspondante n'existe plus. La relation (2) ne peut plus servir.

Mais, A étant différent de O, faisons passer par $\alpha\alpha_1$ un *plan directeur* Δ quelconque; comme il y un rapport constant pour tout point M de Π entre $(M, \alpha\alpha_1)$ et (M, Δ) la relation (2) est exactement équivalente, *pour les points de* Π, à la relation

$$\frac{(M, AA_1)}{(M, \Delta)} = k, \tag{3}$$

pour une valeur convenable de k.

Or, X étant un point fixe extérieur à Π, prenons Δ passant par X. Quand A tend vers O, Δ tend vers le plan Π_0 mené par X parallèlement à Π et (3) donne

$$(M, OZ) = k(M, \Pi_0); \qquad \text{d'où} \quad (M, OZ) = \text{const.}$$

La relation (3) réunit donc la définition classique du cercle et la définition (2); elle établit la continuité des diverses relations

---

(1) J'avais eu depuis longtemps l'occasion d'utiliser le raisonnement qui m'a conduit ici à l'existence des droites focales pour démontrer que la projection orthogonale d'un cercle est une ellipse. La direction connue des projetantes est alors celle de AA_1, on en déduit A et α. La relation (2) exprime alors que la projection est le lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite a la valeur $\cos\theta$.

L'exposé qu'on va lire est en un certain sens l'extension de cette remarque.

caractéristiques (1), (2), (3). Dans la suite elle jouera le rôle fondamental; mais nous avons besoin de mieux connaître la distribution des droites focales dans l'espace.

2. *Par tout point* N *de l'espace passent deux droites focales, distinctes sauf si* N *est sur le cercle* Γ *ou sur son axe.* — Après ce qui précède il n'y a à étudier que le cas où N est hors du plan Π de Γ et non sur son axe OZ. Soient AA_1 une droite focale passant par N, $\alpha\alpha_1$ la droite directrice correspondante, n la projection de N sur Π, ν le point de $\alpha\alpha_1$ qui se projette en N sur AA_1. On a

$$\frac{(A, n)}{(\alpha, \nu)} = \frac{(A, n)}{(A, N)} \times \frac{(A, N)}{(\alpha, \nu)} = \cos\theta \times \cos\theta = \frac{(O, A)}{R} \times \frac{R}{(O, \alpha)} = \frac{(O, A)}{(O, \alpha)},$$

O, n, ν *sont alignés.*

La polaire AI de ν par rapport à Γ, étant perpendiculaire à $On\nu$, est perpendiculaire à $N\nu$. $N\nu$ perpendiculaire à AI et à AA_1N est perpendiculaire à NI. I étant pris sur On, $I\nu$ coupe Γ en deux points P_1 et P_2, I et ν sont à la fois conjugués par rapport à P_1 et P_2 et vus de N sous un angle droit. Donc NI est bissectrice intérieure de P_1NP_2 et $N\nu$ bissectrice extérieure.

N étant donné, On donne les deux points P_1 et P_2, d'où par les bissectrices de P_1NP_2 on a, dans Π, les deux points I et ν, d'où la polaire AI de ν. Puis A sur le cercle de diamètre On.

I étant entre O et n, les points A existent bien; le cercle de diamètre On étant intérieur au cercle de diamètre $O\nu$, lequel coupe AI sur Γ, en Q_1, Q_2, ces points A sont intérieurs à Γ. Soit l'un d'eux A; par A passent des droites focales, soit AA_1 l'une d'elles, puisqu'elle est perpendiculaire à OA en A, elle coupe nN en un point N'. La droite directrice correspondante passe par le pôle ν de AI; c'est donc ν, aligné avec O et la projection n de N', qui se projette orthogonalement en N' sur AA_1 et, puisque I est le pied sur $O\nu$ de la polaire AI de ν, $IN'\nu$ est droit. Donc N' est en N ou est symétrique de N par rapport à Π. La proposition est prouvée.

Si N avait été à l'infini, c'est-à-dire si l'on s'était donnée la direction de la droite focale cherchée, on aurait eu la direction de sa projection An sur Π, d'où celle de OA, et (O, A) car on a aussi la valeur de θ (voir la note précédente).

3. *Tout cône* (1) *à base circulaire est le lieu des points de l'espace vérifiant une relation de la forme* (3), *la droite* AA_1 *et le plan* Δ *passant par le sommet* N *du cône; réciproquement, le lieu des points de l'espace vérifiant une relation* (3), *dans laquelle* AA_1 *et* Δ *se coupent en un point* N *à distance finie, est un cône à base circulaire de sommet* N. — En effet, soient Γ la base circulaire d'un cône de sommet N, AA_1 l'une des droites focales de Γ passant par N, Δ le plan directeur correspondant passant par N; Γ sera définie dans son plan, par une relation (3). Or quand on passe d'un point M à un autre point de NM le premier membre de (3) reste constant, donc la relation (3) caractérise, dans l'espace, les points du cône considéré.

Réciproquement, soient donnés AA_1, Δ se coupant en N et le nombre k; pour trouver Γ nous allons reconstituer la figure du paragraphe précédent. Le plan Δ doit être le plan $N\alpha\alpha_1\nu$ et comme $N\nu$ était perpendiculaire au plan NAI, nous obtiendrons le plan NAI en faisant passer par NA un plan Λ perpendiculaire à Δ. A la vérité Λ serait indéterminé si AA_1 avait été donnée perpendiculaire à Δ, mais dans ce cas la relation (3) signifierait $\operatorname{tang} MNA = k$ elle définirait un cône de révolution.

Supposons donc Λ déterminé; dans Λ (3) définit deux droites du lieu conjuguées harmoniques par rapport à NA et à la trace $N\alpha_1$ de Λ sur Δ; sur la figure du paragraphe précédent on aurait obtenu ces deux droites en joignant N aux points Q_1 et Q_2 où AI coupe Γ. Donc nous aurons NI en prenant la bissectrice de ces deux droites passant dans ceux de leurs angles qui ne contiennent pas de points de $N\alpha_1$. Une perpendiculaire à NI nous donnera I, A, α_1, Q_1, Q_2.

n est dans le plan perpendiculaire à AI en I, sur la parallèle à $\alpha\alpha_1$ menée par A, donc dans le plan parallèle à Δ et passant par A, et sur la sphère dont I et N sont deux points diamétralement opposés. Ceci donne deux points n, réels, car, A étant entre I et α_1, le plan parallèle à Δ mené par A coupe le segment NI.

Soit n un de ces points, $\alpha_1\alpha\nu$ est parallèle à An, ν est sur In, O est à l'intersection de $In\nu$ et de la perpendiculaire en A à An

---

(1) Le mot cône est pris au sens strict, les cylindres ne sont pas considérés ici comme des cônes spéciaux.

tracée dans le plan AIn qui sera le plan Π. Γ est déterminée puisqu'elle doit passer par Q_1, Q_2. Vérifions que la figure est reconstituée.

Pour avoir une droite focale de Γ passant par A il faut prendre la polaire de A, c'est $\alpha\alpha_1$ car elle doit être perpendiculaire à OA, donc parallèle à An, et passer par le conjugué α_1 de A par rapport à Q_1Q_2. Ces droites focales couperont la perpendiculaire nN à Π en des points situés sur la sphère dont ν et I sont deux points diamétralement opposés, donc l'une de ces droites est bien NA.

Alors Γ est définie par la relation (3) à partir de la droite donnée AA_1, du plan Δ (car ils sont bien droite focale et plan directeur associés pour Γ) et de la valeur k (car celle-ci convient pour les points Q_1 et Q_2).

II.

4. Nous allons avoir à transformer une relation (2) ou (3) par perspective; c'est-à-dire à évaluer (M, AA_1) et (M, Δ) à l'aide des distances, à des droites et plans, du point M' transformé de M dans une perspective de centre S et faisant correspondre les plans π et π'. Nous avons déjà dit comment on passait de (3) à (2). Donc nous n'avons en réalité à transformer par perspective que les distances des points M de π à une droite située ou non dans π.

Rappelons-nous comment on transforme par perspective les distances de point à point; supposons établie une correspondance par une perspective de centre S entre les points de deux droites $\omega\omega_1$, $\omega'\omega'_1$. Si A et M sont deux points de la première, A', M' leurs perspectives, en menant par M et S des parallèles à $\omega'\omega'_1$ qui coupent respectivement SA et $\omega\omega_1$ en a et ω on a

$$\frac{(A, M)}{(A', M')} = \frac{(A, M)}{(a, M)} \times \frac{(a, M)}{(A', M')} = \frac{(\omega, A)}{(\omega, S)} \times \frac{(S, M')}{(S, M)};$$

c'est-à-dire qu'on obtient (A, M) en multipliant (A', M') par un nombre $\frac{(\omega, A)}{(\omega, S)}$, qui ne dépend que de A et par un nombre $\frac{(S, M)}{(S, M')}$, qui ne dépend que de M. Donc un monome formé avec des distances mutuelles de 4 points A, B; M, N de $\omega\omega_1$ restera invariant dans la perspective si chacun des points figure, comme origine ou comme extrémité, autant de fois au numérateur qu'il figure au dénominateur. Et cela nous donne la conservation du rapport anharmonique entre longueurs ([1]).

Par analogie, *la perspective* S, π, π' *étant donnée, nous nous proposons d'associer à toute droite* AA_1 *une droite* $A'A'_1$ *telle que pour tout couple de points* M *et* M', *respectivement de* π *et* π' *et en perspective, on ait*

$$\frac{(M, AA_1)}{(M', A'A'_1)} = \frac{(S, M)}{(S, M')} \times \lambda,$$

λ *ne dépendant que de la droite* AA_1.

Si une droite $A'A'_1$ convient, sa symétrique par rapport à π' convient aussi; nous verrons qu'à cela près $A'A'_1$ est déterminée; supposons trouvé un couple AA_1, $A'A'_1$ et faisons varier M sur une parallèle à l'intersection ZZ_1 de π et π', intersection à distance finie ou non. $\frac{(S, M)}{(S, M')}$ sera constant, donc si (M, AA_1) est constant il en sera de même de $(M, A'A'_1)$; en d'autres termes AA_1 et $A'A'_1$ sont en même temps parallèles à ZZ_1. Écartons ce cas, alors AA_1 et $A'A'_1$ coupent respectivement π et π' en deux points à distance finie ou non A et A', l'un d'eux au moins est à distance finie, aucun d'eux n'est à l'infini sur ZZ_1 : ^{a}), si A et sa perspective sont à distance finie, pour M en A le rapport $\frac{(S, M)}{(S, M')}$ est fini et (M, AA_1) est nul, donc $(M', A'A'_1)$ l'est aussi; ^{b}), si A est à l'infini, donc sa perspective à distance finie, pour M tendant vers A, (M, AA_1) tend vers une valeur finie, (S, M) vers l'infini, (S, M') vers une valeur finie donc $(M', A'A'_1)$ doit tendre vers zéro quand M' tend vers la perspective de A; ^{c}), si A est à distance finie et sa perspective à l'infini, on fera tendre M vers A; alors le rapport $\frac{(M', A'A'_1)}{(S, M')}$ devra tendre vers zéro, or si Sa' est parallèle à $A'A'_1$, ce rapport a même limite que $\frac{(M', Sa')}{(S, M')}$ parce que les numérateurs de ces deux rapports diffèrent au plus de $(A'A'_1, Sa')$. Or le second rapport est le sinus de l'angle $a'S'M'$, $A'A'_1$ est donc parallèle à la direction dans laquelle la perspective de A est rejetée à l'infini. *Dans tous les cas les pieds de* AA_1 *sur* π *et de* $A'A'_1$ *sur* π' *sont en perspective.*

Supposons, de plus, ces pieds A, A' distincts, donc non situés

---

([1]) D'une façon analogue on prouve que l'inversion conserve les rapports anharmoniques des distances mutuelles de quatre points, alignés ou non.

sur ZZ_1 et déplaçons M sur ZZ_1; M′ est alors en M, on doit avoir $(M, AA_1) = \lambda(M, A'A'_1)$. Ces deux distances doivent passer par un minimum en même temps pour une position M_0 de M; soient M_0H, M_0H' les segments plus courtes distances de M_0 à AA_1 et $A'A'_1$, (M, AA_1) apparaît, en projection sur un plan perpendiculaire à AA_1, comme la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle mm_0h, m, m_0 et h étant les projections de M, M_0 et H de sorte que $mM = M_0M\cos\theta$, si θ est l'angle de ZZ_1 et du plan de projection; $(M, A'A'_1)$ s'interprète de même.

Les deux côtés M_0H et M_0H' sont constants, les deux côtés mm_0, $m'm_0$ varient et restent dans un rapport constant, ainsi que les hypoténuses mh, $m'h$; ceci exige que les deux rapports constants soient égaux entre eux et à celui de M_0h et M_0h', donc

$$\frac{M_0H}{mm_0} = \frac{M_0H'}{m'm_0} \quad \text{ou} \quad \frac{M_0H}{\cos\theta} = \frac{M_0H'}{\cos\theta'},$$

Or, cette condition s'interprète de suite : le cercle γ de centre M_0, d'axe ZZ_1 et dont le rayon est la valeur commune des deux derniers rapports, admet AA_1 et $A'A'_1$ pour droites focales. Ce cercle γ se construit facilement à partir de ZZ_1 et de AA_1, on en déduit la droite $A'A'_1$ comme droite focale de γ passant par le point connu A′; d'où deux droites $A'A'_1$ symétriques par rapport au plan ZZ_1A', c'est-à-dire par rapport au plan π'. Montrons que ces droites conviennent : soit $\mathfrak{M}$ le point de rencontre de ZZ_1 et de AM, M étant quelconque dans π; A′M′ coupe aussi ZZ_1 en $\mathfrak{M}$ et l'on a

$$\begin{aligned}\frac{(M, AA_1)}{(M', A'A'_1)} &= \frac{(M, AA_1)}{(\mathfrak{M}, AA_1)} \times \frac{(\mathfrak{M}, AA_1)}{(\mathfrak{M}, A'A'_1)} \times \frac{(\mathfrak{M}, A'A'_1)}{(M', A'A'_1)} \\ &= \frac{(M, A)}{(\mathfrak{M}, A)} \times \frac{\cos\theta}{\cos\theta'} \times \frac{(\mathfrak{M}, A')}{(M', A')} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta'} \times \frac{(S, M)}{(S, M')},\end{aligned}$$

Ce calcul s'applique que M et M′ soient ou non à distance finie, mais il suppose qu'on a divisé et multiplié par des quantités non infinies, donc que $\mathfrak{M}$ est à distance finie; mais la conclusion est pourtant valable dans tous les cas comme on le voit en faisant tendre M vers la position que l'on veut examiner et pour laquelle $\mathfrak{M}$ est à l'infini.

5. Donc, *quand* AA_1 *ne rencontre pas* ZZ_1 *il y a deux droites*

$A'A'_1$ *et deux seulement; la valeur de* λ *est* $\frac{\cos\theta}{\cos\theta'}$. Ce résultat s'étend facilement aux cas laissés de côté. Tout d'abord, du fait que les pieds de AA_1 et $A'A'_1$ doivent être en perspective il résulte que si AA_1 est dans π, $A'A'_1$ ne peut être que la perspective de AA_1 et cette perspective répond à la question car, si N et N' sont les intersections avec AA_1 et $A'A'_1$ des parallèles à ZZ_1 menées par M et M', on a

$$\frac{(M, AA_1)}{(M', A'A'_1)} = \frac{(M, N)\cos\theta}{(M', N')\cos\theta'} = \frac{(S, M)}{(S, M')}\frac{\cos\theta}{\cos\theta'}.$$

Supposons AA_1 hors de π, mais dans un même plan avec ZZ_1 [1], et prenons un plan π'' en situation générale. Alors nos raisonnements nous permettent d'associer à AA_1 dans la perpective S, π, π'' deux droites $A''A''_1$, puis d'associer à ces $A''A''_1$, dans la perspective S, π'', π', deux droites $A'A'_1$. Et ces deux droites sont bien déterminées, car si π''' est en situation générale et si $A'''A'''_1$ est associée à $A'A'_1$ dans S, π', π''', il en résulte que l'on a

$$\frac{(M, AA_1)}{(M''', A'''A'''_1)} = \frac{(M, AA_1)}{(M', A'A'_1)} \times \frac{(M', A'A'_1)}{(M''', A'''A'''_1)} = \frac{(S, M)}{(S, M''')} \times \text{const.},$$

relation qui caractérise les associées de AA_1 dans la perspective S, π, π'''.

Remarquons que nos conclusions s'appliquent encore pour S à l'infini à condition de faire $\frac{(S, M)}{(S, M')} = 1$; donc *dans toute projection ou perspective d'un plan* π *sur un plan* π' *faite d'un centre* S, *à toute droite* AA_1 *on peut associer deux droites* $A'A'_1$, *symétriques l'une de l'autre par rapport à* π', *et deux seulement, telles que, pour tout couple de points en perspective* M, M' *de* π *et* π', *on ait*

$$\frac{(M, AA_1)}{(M', A'A'_1)} = \frac{(S, M)}{(S, M')} \times \frac{\cos\theta}{\cos\theta'} = \frac{(S, M)}{(S, M')} \times \frac{H}{H'};$$

θ *et* θ' *étant les angles de* AA_1 *et* $A'A'_1$ *avec un plan perpendiculaire à la fois à* π *et à* π', H *et* H' *étant les plus courtes distances de* AA_1 *et* $A'A'_1$ *à l'intersection de* π *et* π'.

---

[1] Ce cas se traite encore en faisant déplacer M sur une parallèle à ZZ_1 au lieu de le déplacer comme nous l'avons fait sur la droite ZZ_1 elle-même.

6. Raisonnant comme nous l'avons rappelé, on déduit de là que le rapport anharmonique $(M, N; AA_1, BB_1)$ de deux points M, N de π et de deux droites AA_1, BB_1

$$(M, N; AA_1\, BB_1) = \frac{(M, AA_1)}{(N, AA_1)} : \frac{(M, BB_1)}{(N, BB_1)},$$

est conservé par une perspective, c'est-à-dire qu'il est égal au rapport anharmonique des points perspectives de M et N dans S, π, π' et des droites associées dans cette perspective à AA_1 et BB_1. Cette propriété contient la propriété classique à laquelle elle se réduit quand M et N sont alignés avec les pieds A et B de AA_1 et BB_1 car alors

$$(M, N; AA_1, BB_1) = (M, N; A, B);$$

notons pourtant qu'il ne s'agit plus que de rapports positifs.

Énonçons aussi des résultats obtenus incidemment : *pour que deux droites* Λ, Λ' *ne rencontrant pas une droite* ZZ_1 *soient deux droites focales d'un cercle d'axe* ZZ_1 *il faut et il suffit que,* M *se déplaçant sur* ZZ_1, *il y ait proportionnalité entre* (M, Λ) *et* (M, Λ') ou encore, puisque ceci a été déduit de la similitude des triangles mm_0h, $m'm_0h'$ et que les angles m_1hm_2, $m'_1h'm'_2$ relatifs à deux positions M_1 et M_2 de M, sont les angles plans des dièdres sous lesquels on voit de Λ et Λ' le segment M_1M_2, *il faut et il suffit que de* Λ *et de* Λ' *on voit sous des angles égaux tout segment* M_1M_2 *porté par* ZZ_1.

III.

7. **Coniques.** — *On appelle conique toute perspective (ou projection) curviligne d'une circonférence.* En adoptant cette définition nous réservons donc le mot conique à des courbes indécomposables; le lecteur verra facilement que certaines restrictions n'ont été introduites dans ce qui suit que pour rester fidèle à cette convention de dénomination.

Γ' étant un cercle tracé dans un plan Π', on sait qu'un point intérieur à Γ' est caractérisé par le fait que toute droite de Π' passant par ce point rencontre Γ' et en dehors de ce point, tandis que par le point extérieur, il est possible de faire passer des droites ne rencontrant pas Γ'. Si, par une perspective de centre S on projette Γ' suivant la conique Γ de Π, les points intérieurs et extérieurs à Γ' donneront des perspectives que nous dirons intérieures ou extérieures à Γ; la façon dont nous avons caractérisé les points intérieurs et extérieurs à Γ' montre que les points intérieurs et extérieurs à Γ se caractérisent de façon analogue et par suite que ces qualificatifs restent attribués de la même façon quand on considère à la place de Γ' un autre cercle dont Γ est encore une perspective.

Théorème I. — *Une conique* Γ *peut être définie comme le lieu des points* M *de son plan* Π *vérifiant une relation*

$$\frac{(M, AA_1)}{(M, \Delta)} = k, \tag{3}$$

on peut prendre, pour plan Δ, *n'importe quel plan ne coupant pas* Γ, *ou encore on peut prendre* AA_1 *passant par n'importe quel point intérieur à* Γ.

Il n'y a pas de point commun à la fois à AA_1, *à* Δ *et à* Π.

Supposons Γ provenant du cercle Γ' de Π', par une perspective faite du centre S. On peut supposer que Δ passe par S car, dans une relation de la forme indiquée, on peut remplacer Δ par n'importe quel plan du faisceau Δ, Π, sauf par Π, à condition peut-être de changer la valeur de k; avec ce choix de Δ on a

$$\frac{(M, \Delta)}{(M', \Delta)} = \frac{(M, S)}{(M', S)},$$

Δ, passant par S, ne coupe pas Γ', donc il lui correspond une droite focale $A'A'_1$ grâce à laquelle les points de Π' sont caractérisés comme points de Γ', points intérieurs ou extérieurs à Γ' par le fait que le rapport $\frac{(M', A'A'_1)}{(M', \Delta)}$ est égal à k', inférieur à k', supérieur à k'; pour une certaine valeur de k'.

Par notre théorème sur la perspective, à $A'A'_1$ nous associons AA_1 et les points de Π sont sur Γ, intérieurs ou extérieurs à Γ, suivant que $\frac{(M, AA_1)}{(M, \Delta)}$ est égal à $k'\lambda$, inférieur à $k'\lambda$, supérieur à $k'\lambda$.

La démonstration vient d'être faite en supposant Δ donné ne coupant pas Γ, si l'on avait voulu au contraire se donner *à priori* un point intérieur à Γ comme point de AA_1, on en aurait déduit d'abord la perspective de ce point sur Π' comme point de $A'A'_1$, d'où $A'A'_1$ et Δ; puis enfin AA_1.

Quant au fait qu'il n'y a pas de point à distance finie ou non commun à la fois à AA_1, à Δ et à Π, il résulte de ce qu'il n'y a pas de point commun à la fois à $A'A'_1$ à Δ et à Π'.

On aurait pu donner à la démonstration la forme suivante plus rapide encore : la relation de définition de Γ',

$$\frac{(M', A'A'_1)}{(M', \Delta)} = k'$$

s'écrit encore

$$\frac{(M', A'A'_1)}{(M', \Delta)} : \frac{(X', A'A'_1)}{(X', \Delta)} = k' : \frac{(X', A'A'_1)}{(X', \Delta)},$$

X' étant un point de Π' choisi arbitrairement. Ou encore

$$(M', X';\ A'A'_1,\ \alpha'\alpha'_1) = k' \frac{(X', \Delta)}{(X', A'A'_1)} = \text{const.},$$

$\alpha'\alpha'_1$ étant l'intersection de Π' et de Δ. Donc si AA_1 et $\alpha\alpha_1$ sont les droites associées à $A'A'_1$ et $\alpha'\alpha'_1$ dans la perspective S, Π', Π, de sorte que $\alpha\alpha_1$ est dans Π et AA_1 hors de Π, on a

$$(M, X;\ AA_1,\ \alpha\alpha_1) = \text{const.},$$

ce qui est la relation (2).

Indiquons aussi d'un mot que la relation précédente, c'est-à-dire la relation (2), peut être utilisée de bien d'autres manières pour la définition d'une conique si l'on n'astreint plus l'une des droites AA_1, $\alpha\alpha_1$, à être dans le plan de la conique. Ces droites ne sont plus ni des droites focales, ni des droites directrices; l'une d'elles peut être prise arbitrairement.

Théorème II. — *Réciproquement, étant donnés deux plans* Π *et* Δ *et une droite* AA_1 *ne rencontrant leur intersection ni à distance finie, ni à l'infini, le lieu des points de* Π *défini par la relation*

$$\frac{(M, AA_1)}{(M, \Delta)} = k \tag{3}$$

est une conique.

Nous savons en effet qu'à condition de modifier k on peut faire tourner Δ autour de son intersection avec Π de façon que AA_1 coupe Δ à distance finie. Alors la relation (3) caractérise dans l'espace les points d'un cône à base circulaire, donc, dans Π, ceux d'une conique.

THÉORÈME III. — *Toute perspective (ou projection) non rectiligne d'une conique est une conique.*

Ceci résulte des théorèmes I et II et ne réclame aucune explication. On sait qu'à partir de ces propriétés la théorie projective des coniques se construit très facilement; ce qui différencie cet exposé de ceux connus c'est que la traduction métrique, sous la forme (3), de la définition projective des coniques conduit aussi très facilement aux définitions plus particulières des coniques; à celles de de La Hire, à la définition par foyer et directrice, à la définition comme sections planes de cônes et cylindres de révolution.

8. Pour arriver à cela nous allons rechercher les droites focales, droites directrices, plans directeurs en situations assez particulières pour fournir une interprétation plus géométrique des relations (2) et (3). Si AA_1 est droite focale singulière de Γ (c'est-à-dire si la droite directrice est rejetée à l'infini, le plan directeur étant donc parallèle au plan Π de Γ), la conique est sur un cylindre de révolution d'axe AA_1, car, dans (3), le dénominateur étant constant, le numérateur l'est aussi. Si, de plus, AA_1 est droite focale principale (perpendiculaire à Π), Γ se réduit à un cercle d'axe AA_1.

Si la droite focale AA_1 et le plan directeur Δ sont perpendiculaires, Γ est sur un cône de révolution d'axe AA_1; or ceci exige que la droite directrice soit perpendiculaire à la droite focale. Et toutes les fois qu'il en est ainsi on peut prendre pour plan directeur le plan qui projette la droite directrice sur AA_1 pourvu qu'il soit distinct de Π, donc toutes les fois que AA_1 n'est pas droite focale principale et est perpendiculaire à la droite directrice correspondante.

Enfin, si AA_1 est droite focale principale non singulière, la relation (2) devient la relation classique

$$(4) \qquad (\text{M, foyer}) = e \times (\text{M, directrice}).$$

Nous supposerons Γ dérivant par la perspective S, Π', Π du cercle Γ'; S étant supposé à distance finie comme il est permis.

Ellipse. — Pour qu'il y ait une droite focale singulière, il faut que son pied ω soit la perspective du pôle ω' par rapport à Γ' de la droite de fuite $X'Y'$ du plan Π sur le plan Π'. Donc que ce pôle ω soit intérieur à Γ', c'est-à-dire que $X'Y'$ soit extérieure à Γ'. Ceci est nécessaire et suffisant.

Γ est alors une courbe fermée à distance finie, on l'appelle une *ellipse;* elle est tracée sur un *cylindre de révolution* dont l'axe $\omega\omega_1$ est déterminé par ce qui précède. Le pied de cet axe est évidemment un *centre* de Γ, la projection orthogonale ωx de $\omega\omega_1$ sur Π est un *axe de symétrie* de Γ ainsi que la perpendiculaire ωy à $\omega x'$.

Nous appellerons X et Y les points à l'infini de ces axes, X' et Y' leurs perspectives sur Π'.

Soit N un point quelconque de $\omega\omega_1$, la conique Γ et le cône N, Γ sont caractérisés par une même relation (3) relative à la droite $\omega\omega_1$ et au plan Δ mené par N parallèlement à Π, donc (théorème II) nous savons déterminer un cercle γ situé sur ce cône. Ce cercle admettra $\omega\omega_1$ pour une de ses droites focales, l'autre droite focale passant par N est la symétrique de $\omega\omega_1$, par rapport aux bissectrices de l'angle M_1NM_2, M_1 et M_2 étant sur Γ et sur ωx.

Soit NF cette seconde droite focale, elle est aussi droite focale de Γ, elle est dans $N\omega x$, son pied F est sur ωx, la perspective F' de F est sur $\omega'X'$, donc la droite directrice de NF' par rapport à Γ' passe par Y', donc la droite directrice relative à NF et à Γ est parallèle à ωy, donc perpendiculaire à NF. Ainsi NF est axe d'un *cône de révolution* contenant Γ à moins qu'elle ne soit droite focale principale.

Pour que ceci arrive il faut que NF soit perpendiculaire à M_1M_2, or si l'on appelle o et f les points de rencontre de $N\omega$ et NF avec la circonférence M_1M_2N, of est parallèle à M_1M_2, mais ofN dans le cas considéré serait droit, et le centre de la circonférence serait en ω. On obtient donc deux droites focales principales grâce aux points N_1 et N_2 intersections de $\omega\omega_1$ et du cercle de diamètre M_1M_2. D'où *deux foyers* F_1, F_2, *deux directrices* δ_1, δ_2, avec une valeur commune pour e à cause de la symétrie. Γ est d'ailleurs entre δ_1 et δ_2 car les pieds de δ_1 et δ_2 sont conjugués par rapport à M_1, M_2 des points F_1 et F_2, d'où, pour tout point M de Γ,

$$(M, F_1) = e(M, \delta_1); \qquad (M, F_2) = e(M, \delta_2);$$
$$(M, \delta_1) + (M, \delta_2) = (\delta_1, \delta_2); \qquad (M, F_1) + (M, F_2) = e(\delta_1, \delta_2).$$

Hyperbole. — Si la droite $X'Y'$ coupe Γ' en deux points $J'K'$, Γ est formée de deux branches infinies, on l'appelle une *hyperbole;* tout point A' du segment $J'K'$ est intérieur à Γ' et il fournit une droite focale de Γ parallèle à Π puisque la perspective A de A' est à l'infini dans la direction SA'; la droite directrice correspondante passe par le point à l'infini α, perspective du conjugué α' de A' par rapport à J', K', α est dans la direction $S\alpha'$. Voici donc, dans ce cas, des couples droite focale, droite directrice dont on connaît simplement les directions; profitons-en pour chercher si ces deux droites peuvent être rectangulaires. Cela arrive si, et seulement si, $A'S'\alpha'$ est droit. D'où la construction de A', entre J' et K', et de α', hors de $J'K'$, comme points d'intersection de $X'Y'$ avec la sphère qui a son centre sur $X'Y'$, qui passe par S' et qui est orthogonale à Γ'.

Ainsi nous arrivons à une droite focale AA_1 parallèle à Π et perpendiculaire à sa droite directrice $\alpha\alpha_1$, donc à *un cône de révolution contenant* Γ *et d'axe parallèle à* Π. La projection ω sur Π de sommet Ω de ce cône est *centre* de Γ; la projection ωA de AA_1 est axe de Γ et rencontre Γ en deux points M_1, M_2, c'est l'*axe transverse de* Γ; la droite perpendiculaire $\omega\alpha$ est l'*axe non transverse*.

En raisonnant comme dans le cas précédent, par tout point N de AA_1 on déterminera une deuxième droite focale de Γ perpendiculaire à sa droite directrice, donc axe d'un *cône de révolution* contenant Γ ou droite focale principale. Si N_1F_1 est une droite focale principale les angles $\Omega N_1 M_1$, $F_1 N_1 M_2$ devant être égaux et de sens contraires, F_1N_1 devra être tangente au cercle $M_1M_2N_1$. On a donc N_1 et N_2 aux points de rencontre de AA_1 et du cercle de centre Ω et passant par M_1 et M_2. D'où *deux foyers* F_1, F_2, *deux directrices* δ_1, δ_2 et une valeur de *e*. Cette fois M_1, M_2 sont entre F_1 et F_2, donc les pieds de δ_1 et δ_2 entre M_1 et M_2; la courbe Γ

est tout entière hors de la bande limitée par δ_1 et δ_2 et l'on a

$$(M, F_1) = e(M, \delta_1); \qquad (M, F_2) = e(M, \delta_2);$$
$$(M, \delta_1) - (M, \delta_2) = \pm(\delta_1, \delta_2); \qquad (M, F_1) - (M, F_2) = \pm e(\delta_1, \delta_2).$$

Parabole. — Si $X'Y'$ est tangente à Γ' en X', Γ est formée d'un seul arc infini, on dit que c'est une *parabole*. Cette fois il n'y a plus de droite focale en évidence, mais il y a un axe. Si, en effet, Y' est pris tel que $X'SY'$ soit droit et si $Z'X'$ est la polaire de Y', la perspective ZX de $Z'X'$ est un axe car deux points $M'_1\,M'_2$ de Γ' alignés avec Y' donnent deux points M_1 et M_2 de Γ symétriques par rapport à XZ.

Z étant pris sur Γ, on va chercher, par analogie avec ce qui précède, si certains points A, pris sur XZ et du côté voulu de Z pour être intérieurs à Γ, ne donneraient pas des droites focales axes de cônes de révolution passant par Γ.

Un point A' de $X'Z'$ et intérieur à Γ' a une polaire $\alpha'\alpha'_1$ qui passe par Y' et coupe $X'Z'$ au conjugué harmonique de A' par rapport à X', Z', donc le point A correspondant est le pied de droites focales dont la droite directrice $\alpha\alpha_1$ est perpendiculaire à XZ et qui coupe XZ au symétrique α de A par rapport à Z, car X est à l'infini.

Les distances de M_1 et M_2 à $\alpha\alpha_1$ étant égales, les distances de ces points à une droite focale AA_1 issue de A sont égales et, si N_1 et N_2 sont les projections de M_1 et M_2 sur AA_1, les triangles rectangles AM_1N_1, AM_2N_2 sont égaux, on a donc $(A, N_1) = (A, N_2)$. D'où deux cas possibles : ou N_1 et N_2 sont confondus dans le plan R médiateur de M_1M_2, c'est-à-dire dans le plan perpendiculaire à Π passant par XZ et alors AA_1, étant dans ce plan R, fournit un cône de révolution passant par Γ à moins qu'elle ne soit droite focale principale.

Ou bien N_1 et N_2 sont symétriques par rapport à A et AA_1 est perpendiculaire à XZ. Tous les points de Γ sont alors également distants de $\alpha\alpha_1$ et de XZ puisqu'il en est ainsi pour Z et par suite on a

$$(M_1, A) > (M_1, AA_1) = (M_1, \alpha\alpha_1) = (m, \alpha) = (m', A);$$

en appelant m la projection de M_1 sur XZ et m' la symétrique de m par rapport à Z.

Si donc on prend A au delà du point F où la médiatrice de $M_1 m'$ coupe XZ, AA_1 est *axe d'un cône de révolution passant par* Γ; si l'on prend A en F on a une droite focale principale, F *est foyer et l'excentricité correspondante* $\frac{(Z, AA_1)}{(Z, \alpha\alpha_1)}$ *est égale à* 1.

IV.

9. Dans ce qui précède j'ai pris de grandes précautions de langage qui ont dû paraître puériles, car, par exemple, si l'on adopte le point de vue projectif c'est que l'on a déjà réfléchi à l'intérêt de la transformation par perspective et la conservation des propriétés de pôle et polaire est l'une des premières choses que l'on a dû remarquer; il n'y avait donc pas lieu de ne parler, comme je l'ai fait, de pôle et polaire que pour le cas du cercle. Mais j'ai voulu qu'il soit parfaitement clair que l'emploi des droites focales peut être fait dès le début de la théorie des coniques, sans qu'on sache encore rien sur elles. Le fait étant bien suffisamment prouvé maintenant, je ne prendrai plus par la suite les mêmes précautions. Ceci va me permettre tout d'abord d'expliquer les procédés qui nous ont réussi.

Soient $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ les équations normales de deux plans rectangulaires passant par une droite AA_1; $P = 0$, $Q = 0$ des équations analogues relatives à une droite $\alpha\alpha_1$. L'équation du lieu des points dont le rapport des distances aux deux droites a pour valeur k est

$$\Phi^2 + \Psi^2 = k^2(P^2 + Q^2)$$

ce qui donne, pour la section de ce lieu par le plan $P = 0$,

$$\varphi^2 + \psi^2 = k^2 q^2,$$

Ainsi ce lieu est une conique Γ, les plans rectangulaires passant par la droite focale AA_1 coupent $P = 0$ suivant deux droites conjuguées par rapport à Γ, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, les plans tangents à Γ passant par AA_1 sont les plans isotropes $\Phi \pm i\Psi = 0$. Les réciproques sont évidemment vraies, on a donc là deux formes de la définition des droites focales.

Que ces droites soient un instrument commode pour l'étude des coniques, cela est dès maintenant clair : on a vu que la donnée de

AA_1 et $\alpha\alpha_1$ fournissait Γ rapportée à un triangle conjugué $\varphi = o$, $\psi = o$, $q = o$; réciproquement, tout triangle conjugué fournit des droites focales. Si, par exemple, on veut rester dans le réel et qu'il s'agisse du triangle ABC conjugué par rapport à Γ, et si A est le sommet intérieur à Γ, BC sera donc la directrice $q = o$, les deux tangentes imaginaires conjuguées issues de A seront les droites $\varphi \pm i\psi = o$, par elles on mènera respectivement deux plans isotropes conjugués $\Phi \pm i\Psi = o$ dont l'intersection sera la droite focale réelle AA_1. D'où deux positions de AA_1 symétriques par rapport à Π.

Ainsi, la théorie des droites focales n'est qu'une façon d'exprimer géométriquement la théorie des formes réduites des coniques et comme toute la théorie analytique des coniques dérive des passages de forme réduite à forme réduite et que nous voici en possession d'un instrument géométrique équivalent à l'opération analytique de la décomposition en carrés, il est bien certain que nous pourrons édifier une théorie géométrique des coniques.

10. Ne nous bornons pas à cette vue générale, entrons dans quelques détails. Dans ce qui précède nous sommes passés d'une droite focale à une autre, c'est-à-dire d'un triangle conjugué à un autre en montrant que le fait d'avoir une droite focale est en quelque sorte une propriété projective et en utilisant la richesse de la famille des droites focales d'une circonférence. Examinons ces deux points.

Se donner une droite focale AA_1 d'une conique Γ d'un plan Π c'est se donner les deux tangentes AT_1, AT_2 à Γ issues du pied A de AA_1. Si donc on fait en Γ' la perspective de Γ sur un plan Π', c'est se donner les deux tangentes $A'T_1$, $A'T_2$ à Γ' issues du point A' perspective de A. Or ces deux tangentes peuvent être caractérisées par l'une des droites $A'A'_1$, intersection de deux plans isotropes imaginaires conjugués menés respectivement par ces tangentes. Une telle droite $A'A'_1$ est une droite focale de Γ'; la façon dont nous avons obtenu cette droite focale montre qu'elle est entièrement déterminée, à une symétrie par rapport à Π' près, par la correspondance perspective entre Π et Π' et par la donnée de AA', mais comment la construire? Les deux tangentes AT_1, AT_2 à Γ coupent respectivement les deux tangentes $A'T_1$, $A'T_2$ à Γ' en T_1

et T_2 sur l'intersection ZZ_1 de Π et Π'. Les deux plans AA_1T_1, $A'A'_1T_1$ étant isotropes sont tangents à la sphère de rayon nul T_1; de même AA_1T_2 et $A'A'_1T_2$ sont tangents à la sphère de rayon nul T_2. Donc ils sont tous quatre tangents à la circonférence γ_0 d'axe ZZ_1, intersection de ces deux sphères; en d'autres termes AA_1 et $A'A'_1$ sont deux droites focales de γ_0. Ainsi s'explique la réussite de ce qui a été fait précédemment. Je viens de parler de coniques, mais les explications précédentes valent aussi bien pour le théorème sur la perspective II.

11. Relativement au second point, remarquons que les droites focales d'une conique Γ passant par un point P donné s'obtiennent en menant de P les plans tangents isotropes à Γ, au nombre de quatre en général, et en prenant les intersections de ces plans deux à deux. Ceci donne en général six droites focales dont deux sont réelles quand P et Γ sont réelles. Si Γ est une circonférence les quatre plans tangents isotropes passent, respectivement, par l'un ou l'autre des deux centres Ω et Ω' des sphères de rayon nul passant par Γ, donc $P\Omega$ et $P\Omega'$ sont deux droites focales. Ces deux droites focales spéciales, qui sont imaginaires, ont été écartées de nos considérations élémentaires.

Lorsque P est dans le plan Π de Γ deux des droites focales sont tangentes à Γ; ce sont les droites focales réelles issues de P quand P est extérieur à Γ, si P est intérieur les deux droites focales réelles sont en dehors de Π et symétriques l'une de l'autre par rapport à Π.

Lorsque Γ n'est pas une circonférence, les six droites focales issues d'un point P arbitraire jouent toutes le même rôle, il n'y en a plus deux connues à l'avance comme dans le cas où Γ était une circonférence; la détermination de ces six droites focales dépend d'une équation du troisième degré, et c'est pourquoi j'ai dû éviter d'avoir à déterminer les droites focales issues d'un point P hors de Π. On ne saurait donc démontrer, élémentairement, que tout cône à base conique a des sections circulaires.

V.

12. Je vais montrer maintenant que l'emploi des droites focales permettrait aussi d'établir, par des procédés plus géométriques

que ceux qu'on emploie ordinairement, la liaison et la parenté des propriétés élémentaires du cercle et des coniques; je me bornerai aux propriétés les plus immédiates et présentées sous une seule des formes dont elles sont susceptibles.

Soit MM' une corde d'une conique Γ qui rencontre en δ la droite directrice $\alpha\alpha_1$ associée à la droite focale AA_1 ; on a :

$$\frac{(M, \alpha\alpha_1)}{(M, AA_1)} = \frac{(M', \alpha\alpha_1)}{(M, AA_1)};$$

ceci s'écrit encore :

$$\frac{(M, AA_1)}{(M', AA_1)} = \frac{(M, \alpha\alpha_1)}{(M', \alpha\alpha_1)} = \frac{(M, \delta)}{(M', \delta)}$$

et, sous cette forme, elle prouve que *le plan* $AA_1\delta$ *bissecte l'angle dièdre* M, AA_1, M'. Intérieurement, si M et M' sont de part et d'autre de δ, donc de $\alpha\alpha_1$, donc sur deux branches différentes de Γ, extérieurement dans le cas contraire.

Faisant tendre M' vers M, on en déduit que *la portion* AT *de la tangente en* A *comprise entre* A *et la droite directrice* $\alpha\alpha_1$ *est vue de la droite focale* AA_1 *sous un angle dièdre droit.*

13. Par δ menons une seconde sécante NN' à Γ, le plan $AA_1\delta$ bissecte à la fois les dièdres M, AA_1, M' et N, AA_1, N' les conjugués harmoniques de δ, par rapport à MM' et NN' sont donc dans le plan mené par AA_1, perpendiculairement au plan $AA_1\delta$. La droite qui joint ces conjugués, étant la polaire de δ par rapport aux droites MN, M'N', passe par leur point de rencontre. Faisons tendre δNN' vers δMM', N vers M, N' vers M', on voit que *le point de rencontre des tangentes à* Γ *en* M *et* M' *est dans l'un des plans bissecteurs du dièdre* M, AA_1, M'. Dans le plan bissecteur intérieur ou extérieur suivant que M et M' sont ou non points d'une même branche. C'est le premier théorème de Poncelet.

14. Soit H le pied, sur la tangente MT, de la perpendiculaire commune à AA_1 et à MT. Projetons orthogonalement sur un plan perpendiculaire à AA_1 et désignons par $\overline{Z}$ la projection d'un point Z. Soient $\overline{P}$ et $\overline{B}$ les projections orthogonales de $\overline{M}$ et $\overline{A}$ sur $\overline{\alpha\alpha_1}$; on a quatre angles droits $\overline{A}\overline{H}\overline{T}$, $\overline{M}\overline{A}\overline{T}$, $\overline{M}\overline{P}\overline{T}$, $\overline{A}\overline{B}\overline{T}$. Les angles $\overline{A}\overline{M}\overline{T}$,

$\overline{A}\overline{P}\overline{T}$ sont égaux et de même sens comme inscrits dans la circonférence $\overline{A}\overline{M}\overline{P}\overline{T}$. Donc, dans la transformation par figures directement semblables qui laisse $\overline{A}$ fixe et transforme $\overline{M}$ en $\overline{P}$, la droite $\overline{M}\overline{T}$ devient $\overline{\alpha}\overline{\alpha_1}$ et $\overline{H}$ devient $\overline{B}$. Or les triangles que l'on peut former avec le centre $\overline{A}$ de la transformation et un couple de points homologues $\overline{M}$ et $\overline{P}$, ou $\overline{H}$ et $\overline{B}$ sont semblables, donc

$$\frac{\overline{H}\overline{A}}{\overline{H}\overline{B}} = \frac{\overline{M}\overline{A}}{\overline{M}\overline{B}} = \text{const.}$$

Le lieu de $\overline{H}$ est donc une circonférence ou une droite, *le lieu de* H *est une ellipse tracée sur un cylindre de révolution d'axe parallèle à* AA_1, *ou une droite.* On verra facilement que ce dernier cas est celui de la parabole et l'on déduira que *la tangente en un point* M *d'une parabole est dans le plan bissecteur d'un dièdre d'arête parallèle à la droite focale* AA_1, *dont une des faces passe par* AA_1 *et dont l'autre face est de direction indépendante de* M.

15. Je ne m'y arrête pas, car je n'ai donné le raisonnement précédent que pour rendre parfaitement claire la raison de l'analogie si complète entre nos démonstrations et celles qui s'appliqueraient au cas classique foyer et directrice : c'est qu'il est équivalent de raisonner sur une conique et une de ses droites focales ou sur une projection de cette conique et le foyer de cette projection (1). Ceci donne immédiatement quantité de généralisations :

La somme ou la différence des distances d'un point M *variable sur une conique* Γ *à deux droites focales parallèle de* Γ *est constante.*

La tangente à Γ *en* M *est dans l'un des plans bissecteurs de l'angle dièdre des plans vecteurs qui joignent* M *à deux droites focales parallèles.*

Si d'un point P *on mène deux tangentes à une conique de droites focales* AA_1, $A'A'_1$ *parallèles, les plans bissecteurs du dièdre formé par les plans menés par ces tangentes parallèle-*

(1) *Voir* la note du paragraphe 1.

ment à ces droites focales sont aussi les bissecteurs des plans vecteurs de P (*deuxième théorème de Poncelet*).

Mais, en réalité, on a avantage, pour donner aux généralisations toute leur portée, à ne pas procéder ainsi par transformation d'énoncés, à reprendre au contraire les démonstrations comme nous l'avons fait au début. Nous allons, de ce point de vue, reprendre le premier des théorèmes ci-dessus.

16. Soient AA_1, $A'A'_1$ deux droites focales $\alpha\alpha_1$, $\alpha'\alpha'_1$ les droites directrices correspondantes; on a, pour tout point M de la conique considérée,

$$(M, AA_1) = k(M, \alpha\alpha_1); \qquad (M, A'A'_1) = k'(M, \alpha'\alpha'_1).$$

Et, lorsque $\alpha\alpha_1$ et $\alpha'\alpha'_1$ sont parallèles,

$$(R) \qquad \pm(M, \alpha\alpha_1) \pm (M, \alpha'\alpha'_1) \equiv (\alpha\alpha_1, \alpha'\alpha'_1) = h;$$

d'où

$$\pm \frac{1}{k}(M, AA_1) \pm \frac{1}{k'}(M, A'A'_1) = h.$$

Entre les distances d'un point M *variable sur une conique* Γ, *à deux droites focales dont les pieds sont sur un même diamètre de* Γ, *on a une relation linéaire*

$$(5) \qquad \pm a(M, AA_1) \pm a'(M, A'A'_1) = b.$$

En réalité l'égalité (5) réunit quatre relations linéaires; pour ($a > 0$, $a' > 0$, $b > 0$) l'une d'elles (celle relative aux deux signes —) est à rejeter. Dans le cas d'une ellipse une seule des trois autres intervient, celle où il y a les deux signes + si les pieds des droites focales sont de part et d'autre du centre, une des autres dans le cas contraire; dans le cas intermédiaire où le pied A est au centre la relation se réduit, on l'a vu, à $(M, AA_1) = \text{const.}$

Dans le cas de la parabole, une seule relation intervient et qui comporte un signe —.

Dans le cas de l'hyperbole, les deux relations où il y a un signe — doivent être envisagées.

Enfin, si les deux pieds sont symétriques par rapport au centre, c'est-à-dire si les droites focales sont parallèles, on a $k = k'$, $a = a'$ [1].

Pour n'avoir dorénavant à considérer qu'une relation, je supposerai que les distances telles que $(\mathrm{M}, \mathrm{AA}_1)$ sont affectées d'un signe variable avec la branche de conique.

17. Examinons maintenant le cas où $\alpha\alpha_1$ et $\alpha'\alpha'_1$ ne sont plus parallèles; il n'y a plus alors de relation entre $(\mathrm{M}, \alpha\alpha_1)$, $(\mathrm{M}, \alpha'\alpha''_1)$ valable quel que soit M, mais il y a une relation du second degré entre elles, équivalente à l'équation de Γ, quand M est sur Γ, donc : *les distances affectées de signes, d'un point* M *d'une conique* Γ *à deux droites focales de* Γ *sont liées par une relation du second degré*

$$(6) \qquad a(\mathrm{M}, \mathrm{AA}_1)^2 + 2b(\mathrm{M}, \mathrm{AA}_1)(\mathrm{M}, \mathrm{A'A'_1}) + c(\mathrm{M}, \mathrm{A'A'_1})^2 + 2d(\mathrm{M}, \mathrm{AA}_2) + 2e(\mathrm{M}, \mathrm{A'A'_1}) + f = 0.$$

Ce fait, bien remarquable, généralise les relations (5) mais d'une façon peu élégante; de plus (6) résulte d'une relation entre $(\mathrm{M}, \alpha\alpha_1)$, $(\mathrm{M}, \alpha'\alpha'_1)$ valable pour les seuls points de Γ tandis que (5) résultait de la relation (R) valable pour tous les points M du plan. D'où un autre mode de généralisation de (5); entre les distances de M à trois droites $\alpha\alpha_1$, $\alpha'\alpha'_1$, $\alpha''\alpha''_1$ du plan Π de Γ existe une relation linéaire qui est homogène si ces trois droites concourent, donc : *les distances d'un point* M *d'une conique* Γ *à trois droites focales de cette conique sont liées par une relation linéaire*

$$(7) \qquad a(\mathrm{M}, \mathrm{AA}_1) + a'(\mathrm{M}, \mathrm{A'A'_1}) + a''(\mathrm{M}, \mathrm{A''A''_1}) = b;$$

cette relation est homogène si les pieds des trois droites focales sont alignés.

Si, de plus, la droite d'alignement est un diamètre il y a plusieurs

---

[1] Pour compléter cette étude il faudrait examiner les propositions réciproques et inverses. Je ne le ferai ni ici, ni dans la suite, c'est-à-dire que je ne rechercherai pas si les relations (5) ne sont vérifiées que pour les points de Γ, ni comment il faut choisir AA_1, $\mathrm{A'A'_1}$, a, a', b pour que (5) soit vérifiée par les points d'une conique située dans un plan donné ou à déterminer.

Certaines de ces propositions réciproques ou inverses ont des réponses évidentes, d'autres au contraire appelleraient d'assez longues recherches que je n'ai pas entreprises.

relations (7) dont une homogène; si l'un des pieds A est en O, (M, AA_1) est constante, on peut donc de cette relation homogène déduire (5) en faisant passer dans le second membre le terme en (M, AA_1) qui est maintenant constant. Ainsi (7) apparaît bien comme contenant les relations (5).

Mais on peut utiliser autrement la relation entre les distances d'un point d'un plan à trois droites de ce plan. Supposons en effet que, regardant seulement une ou deux de ces droites comme droites directrices, on ne transforme par la définition focale des coniques que les distances à ces droites, nous avons :

Entre les distances d'un point variable sur une conique à une droite focale AA_1 *de cette conique et à deux droites* β, γ *de son plan, il y a une relation linéaire qui est homogène lorsque* β *et* γ *se coupent sur la droite directrice correspondant à* AA_1

$$(8) \qquad a(M, AA_1) + b(M, \beta) + c(M, \gamma) = d;$$

on suppose (M, β) et (M, γ) affectées de signes suivant la règle ordinaire et pour (M, AA_1) comme il a été dit, c'est-à-dire suivant que M est sur une branche ou l'autre de Γ.

Entre les distances d'un point variable sur une conique à deux droites focales AA_1, $A'A'_1$ *de cette conique et à une droite* β *de son plan, on a une relation linéaire*

$$(9) \qquad a(M, AA_1) + a'(M, A'A'_1) = b(M, \beta) + c;$$

cette relation est homogène quand β *passe par le point de rencontre des droites directives correspondant à* AA_1 *et à* $A'A'_1$.

Supposons que β passe par le point X de rencontre de $\alpha\alpha_1$ et $\alpha'\alpha'_1$ c'est-à-dire par le pôle de la droite AA' déterminée par les pieds des droites focales, la relation obtenue

$$(10) \qquad a(M, AA_1) + a'(M, A'A'_1) = b(M, \beta)$$

est peut-être la plus simple des généralisations possibles des définitions élémentaires des coniques à centre. Lorsque $\alpha\alpha_1$ et $\alpha'\alpha'_1$ sont parallèles, on peut prendre pour β la droite de l'infini et la relation (10) se réduit à la relation (5) car dans les formules (8),

(9) et (10) le terme en (M, β) peut être remplacé par un terme analogue en (M, B), B étant un plan passant par β [1].

18. Cette relation (10) permet aussi d'établir la continuité entre les définitions élémentaires de l'ellipse et de l'hyperbole et d'autres relations connues. Si l'on a

$$(M, \beta) = l(M, \alpha\alpha_1) + l'(M, \alpha'\alpha'_1);$$

les coefficients a et a' de (10) sont proportionnels à $\frac{l}{k}$ et $\frac{l'}{k'}$; k et k' étant les coefficients attachés aux droites focales AA_1, $A'A'_1$. Donc, quand on fait tourner β autour de X, il y a correspondance homographique entre la position de β et le rapport $\frac{a}{a'}$. D'ailleurs, pour β en $\alpha\alpha_1$ ce rapport est infini; il est nul pour β en $\alpha'\alpha'_1$; à deux valeurs égales et de signes contraires de $\frac{a}{a'}$, correspondent deux positions de β conjuguées par rapport à $\alpha\alpha_1$, $\alpha'\alpha'_1$. Ainsi, en faisant tourner β autour de X, on donnera au premier membre de (10) toutes les formes possibles et, en particulier, on passera continuement de la forme

$$(M, AA_1) + (M, A'A'_1) = b_1(M, \beta_1) \tag{10E}$$

à la forme

$$(M, AA_1) + (M, A'A'_1) = b_2(M, \beta_2). \tag{10H}$$

β_1 ne rencontre pas Γ, donc β_2 rencontre Γ, si, pour les points de celle des branches de Γ qui rencontre β_1 ou β_2, les distances (M, AA_1), $(M, A'A'_1)$ sont prises positivement. *Une conique est donc susceptible d'être définie à partir de deux droites focales quelconques par l'une ou l'autre de ces propriétés, généralisations des propriétés classiques de l'ellipse et de l'hyperbole* auxquelles elles se réduisent respectivement quand β_1, ou β_2, est rejetée à l'infini.

Quand β_1 est à l'infini, sa conjuguée β_2 est alors le diamètre

---

[1] Les procédés de ce paragraphe peuvent aussi être employés pour transformer, de façons autres que celle qui nous a donnée l'équation (6), les équations cartésiennes de la conique rapportée à deux droites quelconques ou les équations trilinéaires de cette conique.

conjugué de la ligne des pieds A et A′ des droites focales. Avec ce diamètre δ, on a suivant les cas

$$(10'_E) \qquad (M, AA_1) - (M', A'A'_1) = b(M, \delta)$$

ou

$$(10'_H) \qquad (M, AA_1) + (M', A'A'_1) = b(M, \delta).$$

Or ces relations sont bien connues dans le cas où AA et $A'A'_1$ sont les droites focales principales; la première, par exemple, est celle qu'on utilise pour arriver aux directrices à partir de la définition bifocale de l'ellipse grâce au calcul suivant :

$$r'^2 - r^2 = 4cx;$$

$$(10_E) \qquad r + r' = 2a;$$

$$(10'_E) \qquad r' - r = 2\frac{c}{a}x.$$

La parenté et la continuité de toutes ces relations apparaissent maintenant clairement.

19. Les faits précédents appellent bien des recherches que je n'aborderai pas, mais je vais du moins indiquer, sans entrer dans le détail des démonstrations, ce qui permet de les entreprendre.

Lorsque l'on a une définition d'une conique Γ par une relation (2) relative à AA_1 et à $\alpha\alpha_1$ et à k, comment peut-on obtenir les éléments d'une autre définition analogue? Le pied A′ de $A'A'_1$ étant supposé donné, on connaît $\alpha'\alpha'_1$ et le point X pôle de AA′. Il existe deux homologies involutives transformant Γ en elle-même et A en A′, leurs centres Y et Z et leurs axes XZ et XY sont déterminés par le couple de points Y, Z de AA′ conjugués à la fois par rapport à Γ et à A, A′. Ces homologies sont des cas limites de perspectives, le théorème du Chapitre II s'applique encore et l'on obtient $A'A'_1$ comme droite associée à AA_1 dans ces perspectives limites; le rapport $\frac{k}{k'}$ se déduit aussi de ce théorème.

Lorsqu'au lieu de se donner Γ, on se donne seulement AA_1 et $A'A'_1$, le triangle X, Y, Z est encore déterminé (c'est le triangle autopolaire commun à toutes les coniques du faisceau tangentiel ainsi défini). Élémentairement on déduira de ce qui a été dit ici :

que X est tel que XAA' et $XA'A$ sont vus sous des angles droits respectivement de AA_1 et de $A'A'_1$, ce qui détermine X; que XY et XZ sont déterminées par le fait qu'un segment quelconque porté par l'une ou l'autre de ces droites est vu de AA_1 et de $A'A'_1$ sous des dièdres égaux (n° 6); que pour ces deux droites XY et YZ prises pour droites β, les rapports $\frac{a}{a'}$ sont égaux en valeur absolue au rapport des distances d'un point de ces droites à $A'A'_1$ et AA_1.

20. Revenons aux considérations tout à fait élémentaires. Chasles a donné une généralisation de nature différente des précédentes des définitions de de La Hire; M. P. Robert a rattaché cette généralisation à la considération des droites focales. Nous allons montrer que ce mode de généralisation est susceptible d'être étendu presque aux cas les plus généraux.

La relation (R) qui nous a servi n'est qu'une formule du changement de coordonnées quand on passe d'un système où $\alpha\alpha'$ est un axe à un autre employant l'axe parallèle $\alpha'\alpha'_1$; lorsque $\alpha\alpha_1$ et $\alpha'\alpha'_1$ se rencontrent à distance finie en σ une relation simple analogue sera celle entre les angles polaires quand on passe du système d'origine σ et d'axe $\alpha\alpha_1$, à celui de même origine et d'axe $\alpha'\alpha'_1$. Mais pour utiliser celle-ci

$$(S) \qquad \widehat{M\sigma\alpha'} - \widehat{M\sigma\alpha} = \widehat{\alpha\sigma\alpha'},$$

il faut savoir utiliser des angles tels que $\widehat{M\sigma\alpha}$.

Reprenons la figure relative au cercle; M se projette sur AA_1 en N, sur $\alpha\alpha_1$ en ν; ν se projette en N sur AA_1 et σ en S. On a vu que

$$\frac{(M, N)}{(M, \nu)} = \cos\theta = \frac{(N, S)}{(\nu, \sigma)},$$

donc les deux triangles rectangles MNS, $M\nu\sigma$ sont semblables quand M est sur le cercle, la réciproque est d'ailleurs vraie car la similitude de MNS et $M\nu\sigma$ entraîne les égalités précédentes.

Donc les angles $\widehat{MSN}$, $\widehat{M\sigma\nu}$ sont égaux pour les points du cercle et pour ceux-là seulement.

Cet énoncé est susceptible de formes diverses; par exemple, si l'on prenait σ en α, S serait en A et le premier angle $\widehat{MSN}$ serait celui du rayon vecteur AM et de la droite focale AA_1. Ou encore si l'on prenait un autre couple σ_1, S_1, les angles $\widehat{SMS_1}$ et $\widehat{\sigma M \sigma_1}$ seraient égaux; contentons-nous de la première forme.

Supposons que σ soit le point de rencontre de deux droites directrices $\alpha\alpha_1$, $\alpha'\alpha'_1$ correspondant aux droites focales AA_1 et $A'A'_1$ et soient S et S′ les projections de σ sur ces droites focales; on a

$$\widehat{MS'A'} - \widehat{MSA} = \widehat{\alpha\sigma\alpha'}, \tag{11}$$

ce qui s'énonce ainsi : *sur deux droites focales d'un cercle*, AA_1 *et* $A'A'_1$ *il existe deux points* S *et* S′ (*projections sur les droites focales du point de rencontre les droites directrices*) *tels que pour tout point* M *du cercle on ait la relation* (11).

Cette relation devrait d'ailleurs être écrite avec des doubles signes comme les précédentes à moins de prendre des précautions pour préciser en grandeur et signe les termes de la relation (11); je suppose ces précisions données.

Remarquons que si les droites directrices sont parallèles, c'est-à-dire si la relation (5) s'applique, la relation (11) ne peut être utilisée et inversement. *Pour le cercle les relations* (5) *et* (11) *sont complémentaires ; l'une des deux s'applique toujours.*

21. Mais on va voir que les choses se compliquent pour une conique quelconque. Dans le cas du cercle, si les deux droites AA_1, $A'A'_1$ se rencontrent, nous savons que c'est en un point qui est le pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan $AA_1A'A'_1$ du point de rencontre des droites directrices; S et S′ sont donc confondus en ce point. La relation (11) est le théorème de Chasles. Et comme si deux droites focales d'une conique se rencontrent ces deux droites sont aussi droites focales de toute circonférence du cône déterminé par ce point de rencontre et la conique, *la relation* (11) *s'applique à deux droites focales concourantes d'une conique quelconque*, *elle exprime alors le théorème de Chasles*

$$\widehat{MSA'} - \widehat{MSA} = \text{const.} \tag{12}$$

Maintenant les relations (5) et (12) épuisent seulement les cas où les deux droites focales considérées sont dans un même plan; il reste donc à examiner le cas de deux droites focales non dans un même plan.

Si M est un point quelconque d'une conique Γ, de droite focale AA_1, de droite directrice $\alpha\alpha_1$, si σ est un point de $\alpha\alpha_1$ et si S est sa projection sur AA_1, on n'a plus $\widehat{MSA} = \widehat{M\sigma\alpha}$. Mais, si Ω est un point quelconque de AA_1, une perspective faite de Ω sur un plan convenable transforme Γ en un cercle Γ' et $\widehat{M\sigma\alpha}$ en un angle $\widehat{M'\sigma'\alpha'}$ égal à $\widehat{MSA}$. Pour ce qui est de $\widehat{M\sigma\alpha}$, la perspective peut être remplacée par la projection cylindrique de projetantes parallèles à $\Omega\sigma$, l'angle $\widehat{M\sigma\alpha}$ a d'ailleurs un côté fixe, donc il y a correspondance homographique entre les tangentes de $\widehat{M\sigma\alpha}$ et de $\widehat{M'\sigma'\alpha'}$, donc de $\widehat{MSA}$. Alors la relation (S) entraîne ce résultat : *Si* S *et* S' *sont les projections orthogonales sur deux droites focales* AA_1, $A'A'_1$ *d'une conique* Γ *du point de rencontre des droites directrices correspondantes, il existe une relation homographique entre les tangentes des angles* MSA, MS'A' *quand* M *décrit* Γ.

Ce fait appellerait bien des précisions; relativement aux cas où cette relation prend une signification simple, je me contenterai d'affirmer qu'elle entraîne que la somme ou la différence des angles est constante seulement dans les deux cas rencontrés : celui de la circonférence et celui de deux droites focales concourantes ou de deux droites dont l'une rencontre la symétrique de l'autre; lorsque AA_1 est axe d'un cône de révolution passant par Γ, la relation homographique devient singulière et exprime tout simplement que MSA est constant.

Pour rapprocher le dernier théorème des précédents, présentons autrement sa démonstration. Soient P et P' les plans élevés perpendiculairement à AA_1 et à $A'A'_1$ respectivement en S et S', soient $\sigma\pi$ et $\sigma\pi'$ leurs traces. Entre les distances d'un point quelconque M du plan considéré aux droites concourantes $\sigma\alpha$, $\sigma\pi$, $\sigma\pi'$ existe une relation linéaire et homogène; or, ces distances sont respectivement proportionnelles (avec des facteurs de proportionnalités variant d'une droite à l'autre) à (M, AA_1), (M, P), et (M, P'); donc la relation s'écrit

$$a(\mathrm{M}, \mathrm{AA}_1) + b(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = c(\mathrm{M}, \mathrm{P}'),$$

et de même

$$c'(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = a'(\mathrm{M}, \mathrm{A}'\mathrm{A}'_1) + b'(\mathrm{M}, \mathrm{P}').$$

D'où par division

$$[a \operatorname{tang}(\mathrm{MSA}) + b][a' \operatorname{tang}(\mathrm{MSA}') + b'] = cc'.$$

22. Les propriétés qui font intervenir un ou deux foyers peuvent être généralisées d'une façon analogue à une ou deux droites focales; les énoncés, comme il est arrivé dans les paragraphes précédents, ne conserveront pas en général la simplicité et l'élégance qu'ils ont dans les cas particuliers, mais ils présenteront l'intérêt qui s'attache à tout groupement en un seul énoncé de propriétés jusque-là séparées et, par leur groupement même, feront mieux comprendre ces propriétés. On pourra examiner de ce point de vue les deux autres propriétés classiques déjà partiellement généralisées au paragraphe 15.

Si l'on ne se place pas au point de vue élémentaire, le fait général est immédiat : toutes les coniques d'un plan Π ayant deux droites focales données AA_1, $\mathrm{A}'\mathrm{A}'_1$ forment un faisceau tangentiel et les tangentes qu'on leur peut mener d'un point P se correspondent involutivement; PA et PA′ se correspondent, les rayons doubles sont les tangentes en P aux coniques du faisceau passant par P. Soit $\mathrm{P}\xi$ une droite extérieure à Π; les plans passant par $\mathrm{P}\xi$ et les rayons se correspondent involutivement et les plans doubles seront orthogonaux si, et seulement si, les deux plans isotropes passant par $\mathrm{P}\xi$ se correspondent, c'est-à-dire si $\mathrm{P}\xi$ est droite focale d'une conique du faiseau.

Donc, *la tangente en un point* M *à une conique* Γ *de droites focales* AA_1 *et* $\mathrm{A}'\mathrm{A}'_1$, *vue de* $\mathrm{M}\xi$ (*droite focale d'une conique du plan de* Γ *et ayant aussi* AA_1 *et* $\mathrm{A}'\mathrm{A}'_1$ *pour droites focales*) *apparaît comme la bissectrice de* MA *et* MA′.

Si d'un point P *on a mené deux tangentes* PT_1, PT_2 *à une conique* Γ *de droites focales* AA_1, $\mathrm{A}'\mathrm{A}'_1$, *vues de* $\mathrm{P}\xi$ (*droite focale d'une conique du plan de* Γ *et ayant aussi* AA_1 *et* $\mathrm{A}'\mathrm{A}'_1$ *pour droites focales*) PT_1 *et* PT_2 *paraissent avoir mêmes bissectrices que* PA *et* PA′.

Du point de vue élémentaire l'étude serait beaucoup moins rapide car une droite focale $P\xi$ réelle peut correspondre à une conique imaginaire ou dégénérée du faisceau. Ainsi on a vu, paragraphe 15, que lorsque AA_1 et $A'A'_1$ sont parallèles on peut prendre $P\xi$ parallèles aux droites focales; à quelle conique appartiennent ces trois droites focales parallèles? On reconnaîtra facilement que c'est à la conique constituée par les deux sommets à l'infini du quadrilatère circonscrit au faisceau de coniques.

De même, si AA_1 et $A'A'_1$ se rencontrent en un point N, PN est une droite focale car, dans le faisceau, il y a un cercle, celui suivant lequel le plan PAA' coupe la sphère de rayon nul de centre N, et PN est, pour ce cercle, l'une de ces droites focales que nous n'avons pas considérées dans l'étude élémentaire des droites focales du cercle, paragraphe 11.

Ainsi, du point de vue élémentaire, les droites $P\xi$ ne paraîtront pas toutes de même nature; le plus simple serait sans doute d'en choisir une ou plusieurs particulières et de n'utiliser que celles-là. Celles qui se présentent les premières à l'esprit sont celles relatives aux coniques dégénérées parce que ces coniques seules se distinguent des autres.

La conique A, A' nous donne comme droites focales réelles, PA et PA', dans le plan de Γ, donc ne convenant pas. Soient Ω, Ω' deux sommets imaginaires conjugués du quadrilatère circonscrit au faisceau, la droite $\Omega\Omega'$ a été construite au paragraphe 19, c'est XY ou XZ. Supposons que ce soit XY. Tout plan isotrope passant par Ω est tangent au cône isotrope de sommet Ω, donc toute droite focale de Ω, Ω' est droite focale du cercle γ intersection des deux sphères de rayon nul de centres Ω et Ω'. Or on a l'axe XY de ce cercle, une droite focale AA_1 (et aussi $A'A'_1$) d'où γ et les droites $P\xi$ relatives à Ω, Ω'.

23. M. P. Delens a bien voulu me signaler que les droites focales avaient été jadis rencontrées par Reye et non seulement dans le cas des coniques mais aussi dans celui des quadriques (1). Reye les

(1) Reye appelle ces droites axes focaux; les deux propriétés de ces axes qui vont être indiquées sont étudiées par lui dans la *Géométrie de position;* vol. I, p. 162, et vol. II, p. 202, dans la traduction Chemin

considère à cause de propriétés qui diffèrent à peine de celles du paragraphe précédent. Quand on étudie l'involution des plans tangents que l'on peut mener par une droite fixe à toutes les quadriques d'un faisceau tangentiel, il y a deux cas remarquables à signaler : celui où les plans doubles sont isotropes et celui où les plans doubles sont rectangulaires. Dans ce second cas les plans isotropes passant par la droite constituent un couple de l'involution, ils sont tangents à la même quadrique, la droite sera *droite focale de cette quadrique*. Les plans conjugués par rapport à cette quadrique et passant par cette droite seront rectangulaires.

Supposons que le faisceau soit celui des quadriques homofocales à une quadrique (ou conique) Q et soit F une droite focale de Q. Les plans isotropes passant par F sont tangents à Q et au cercle de l'infini lequel fait partie du faisceau, donc ils sont tangents à toutes les coniques du faisceau. Si Q_1 est du faisceau et est tangente à F, elle doit avoir pour plan tangent chacun de ces deux plans isotropes, autrement dit F est sur Q_1 ; la réciproque est immédiate. Donc *les droites focales d'une quadrique* (*ou conique*) Q *sont les génératrices des surfaces homofocales à* Q.

Telles sont les propriétés signalées par Reye ; on voit qu'elles sont fort éloignées, du moins en apparence, des propriétés métriques élémentaires considérées par M. Robert et qui nous ont servi.

Pour nous, la définition d'une droite focale F d'une conique Γ est : droite à laquelle on peut associer un plan Δ de telle manière que Γ soit le lieu des points de son plan satisfaisant à la relation

$$(M, F) = k(M, \Delta). \tag{3}$$

La définition analogue des droites focales F d'une quadrique est : droite à laquelle on peut associer deux plans Δ_1, Δ_2 tels que la quadrique soit le lieu des points vérifiant la relation

$$(M, F)^2 = k(M, \Delta_1).(M, \Delta_2). \tag{3'}$$

Toute quadrique peut être caractérisée de cette façon d'une triple infinité de manières ; la relation (3') peut donc servir de base à une théorie des quadriques, mais qui différera nécessairement beaucoup de celle que nous avons esquissée pour les coniques, car une transformation homographique ne remplace pas la relation (3′) par une relation de même forme. Se donner F, Δ_1 et Δ_2 c'est, en effet, se donner un quadrilatère formé de génératrices de la surface situées dans deux plans isotropes tangents à la quadrique; cette dernière condition n'est pas conservée par une transformation homographique. Ainsi, quel que soit l'intérêt des droites focales des quadriques, définies par Reye, on ne doit pourtant pas espérer les utiliser comme nous avons pu utiliser les droites focales des coniques considérées par M. Robert.

Cet article reproduit, quelque peu développée, une conférence faite à la Société mathématique de France, le 23 janvier 1935.