BULLETIN DE LA S. M. F.

H. KREBS

Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles

Bulletin de la S. M. F., tome 62 (1934), p. 225-244
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1934__62__225_0>

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

PAR M. H. KREBS.

(*Suite.*)

20. La transformation qui est définie par les relations (37) et (38) sera maintenant l'objet de nos considérations. Nous avons désigné pour abréger cette transformation par l'expression transformation $T_{x,y}$. Nous montrerons que cette transformation permet de déduire en général d'une équation hyperbolique dont la solution est de rang $m+1$ par rapport à x et de rang $n+1$ par rapport à y une équation hyperbolique dont la solution est de rang $m+2$ par rapport à x et de rang $n+2$ par rapport à y.

Nous changeons de fonction pour que l'élimination de u nous donne une équation complètement linéaire. Pour arriver à ce résultat nous poserons

$$U' = \frac{\zeta_1 \dot{u}}{u_1} - U. \tag{96}$$

Les relations qui définissent la transformation $T_{x,y}$ deviennent

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{u}{u_1}, \tag{97}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y} = \left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \frac{u}{u_1}. \tag{98}$$

Pour démontrer notre proposition, nous considérons de nouveau séparément les termes qui contiennent la fonction X et ceux qui contiennent la fonction Y.

La valeur de la fonctiou U' est donnée par la relation

$$U' = \int \left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{u}{u_1} dx + \left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \frac{u}{u_1} dy. \tag{99}$$

Nous désignons par $(U')_x$ l'ensemble des termes de la fonction U' qui sont formés avec la fonction arbitraire X et ses dérivées et par $(U')_y$ l'ensemble des termes de la fonction U' qui sont formés avec la fonction arbitraire Y et ses dérivées.

Lorsque l'on remplace dans la relation (99) la fonction u par l'expression $f(\mathrm{X})$, on obtient pour la valeur de $(\mathrm{U}')_x$

$$(100)\qquad (\mathrm{U}')_x = \int \left(\zeta_1 - \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{f(\mathrm{X})}{u_1}\, dx + \left(\zeta_1 + \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \frac{f(\mathrm{X})}{u_1}\, dy.$$

La quantité sous le signe d'intégration peut être intégrée par parties et l'on obtient pour la fonction $(\mathrm{U}')_x$ l'expression

$$(101)\qquad \begin{aligned} (\mathrm{U}')_x = {} & \left(\zeta_1 - \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right) \frac{f(\mathrm{X})}{u_1} - \int \frac{f(\mathrm{X})}{u_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta_1 - \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right) dx \\ & + \left[\frac{f(\mathrm{X})}{u_1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta_1 - \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right) - u_1 z_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{f(\mathrm{X})}{u_1}\right] dy. \end{aligned}$$

Nous pouvons de nouveau appliquer le théorème de Darboux à l'expression sous le signe d'intégration. Nous pouvons remplacer dans la relation (73) u par X et v par $\frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right)$. La relation devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta_1 - \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right) f(\mathrm{X}) = {} & \mathrm{X} g\left[\frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right)\right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{B}\left[\mathrm{X}, \frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

La substitution de cette valeur dans la relation (101) nous donne pour déterminer $(\mathrm{U}')_x$ l'expression

$$(102)\qquad \begin{aligned} (\mathrm{U}')_x = {} & \left(\zeta_1 - \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right) - \mathrm{B}\left[\mathrm{X}, \frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right)\right] \\ & - \int \mathrm{X} g\left[\frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right)\right] dx \\ & + \left\{\frac{f(\mathrm{X})}{u_1} \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right) - u_1 \mathrm{Z}_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{f(\mathrm{X})}{u_1}\right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{B}\left[\mathrm{X}, \frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right)\right]\right\} dy. \end{aligned}$$

L'expression sous le signe d'intégration devant être une différentielle exacte, on doit avoir

$$(103)\qquad \frac{\partial}{\partial y} g\left[\frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right)\right] = 0,$$

$$(104)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{\frac{f(\mathrm{X})}{u_1} \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right) - u_1 \mathrm{Z}_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{f(\mathrm{X})}{u_1}\right. & \\ \left. - \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{B}\left[\mathrm{X}, \frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 \mathrm{Z}_1}{2}\right)\right]\right\} & = 0. \end{aligned}$$

Le polynome $g\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]$ n'est pas nul en général, comme on peut s'en rendre compte en calculant le coefficient du terme qui présente la plus haute dérivée de X_1.

Nous posons pour éviter le signe d'intégration par rapport à x

$$(105)\qquad X g\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right] = X'_2.$$

La fonction $(U')_x$ a donc pour valeur, si nous substituons X à X_2,

$$(106)\qquad (U')_x = \frac{1}{u_1}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right) f\left(\frac{X'}{g\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]}\right)$$
$$- B\left[\frac{X'}{g\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]}, \frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right] - X.$$

Nous calculerons maintenant la valeur de la fonction $(U')_y$.

La valeur de $(U')_y$ s'obtient lorsque l'on remplace dans la relation (99) u par $f_1(Y)$. Nous obtenons

$$(107)\qquad (U')_y = \int \left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{f_1(Y)}{u_1}\,dx + \left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\frac{f_1(Y)}{u_1}\,dy.$$

Lorsque l'on intègre par parties, on obtient pour $(U')_y$ l'expression

$$(108)\qquad (U')_y = \left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\frac{f_1(Y)}{u_1}$$
$$- \int \left[\frac{f_1(Y)}{u_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right) + u_1 z_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{f_1(Y)}{u_1}\right] dx$$
$$+ \frac{f_1(Y)}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right) dy.$$

Lorsque l'on remplace dans la relation (74) u par Y et v par

$$\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right),$$

on obtient l'expression

$$\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right) f_1(Y) = Y g_1\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y} B_1\left[Y, \frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right].$$

La valeur de $(U')_y$ est donc, lorsqu'on intègre par parties,

$$(109)\quad (U')_y = \left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\frac{f_1(Y)}{u_1} - B_1\left[Y, \frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]$$
$$- \int \left\{ \frac{f_1(Y)}{u_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right) + u_1 Z_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{f_1(Y)}{u_1} - \frac{\partial}{\partial x} B_1\left[Y, \frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]\right\} dx$$
$$+ Y g_1\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right] dy.$$

La quantité sous le signe d'intégration étant une différentielle exacte, le théorème de Darboux nous donne les relations de condition

$$(110)\qquad \frac{\partial}{\partial x} g_1\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right] = 0,$$

$$(111)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{f_1(Y)}{u_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right) + u_1 Z_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{f_1(Y)}{u_1} - \frac{\partial}{\partial x} B_1\left[Y, \frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]\right\} = 0.$$

La quantité $g_1\left[\frac{1}{u_1}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]$ ne dépend donc pas de x et l'on montrerait aisément qu'elle n'est pas nulle en général. Nous posons donc

$$(112)\qquad Y g_1\left[\frac{1}{u_1}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right] = Y'_2.$$

La relation (109) donne pour la quantité $(U')_y$ lorsque l'on remplace Y_2 par Y, l'expression

$$(113)\quad (U')_y = \frac{1}{u_1}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right) f_1\left\{\frac{Y'}{g_1\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]}\right\}$$
$$- B_1\left\{\frac{Y'}{g_1\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]}, \frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right\} - Y.$$

Lorsque l'on remplace dans la relation (99) les valeurs de $(U')_x$ et de $(U')_y$ données par les relations (106) et (108), on obtient pour la fonction U′ associée à l'équation (34) l'expression

$$
\begin{aligned}
(114)\quad U' = {} & \frac{\zeta_1}{u_1}\left(f\left\{\frac{X'}{g\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]}\right\} \right. \\
& \left. + f_1\left\{\frac{Y'}{g_1\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]}\right\}\right) \\
& - \frac{Z_1}{2}\left(f\left\{\frac{X'}{g\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]}\right\} \right. \\
& \left. - f_1\left\{\frac{Y'}{g_1\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]}\right\}\right) \\
& - B\left\{\frac{X'}{g\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]}, \frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right\} - X \\
& - B_1\left\{\frac{Y'}{g_1\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]}, \frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right\} - Y.
\end{aligned}
$$

L'équation à laquelle satisfait la fonction U′ s'obtient par l'élimination de u entre les relations (97) et (98).

La valeur de U′ donnée par la relation (114) ne présente aucun signe d'intégration.

La transformation $T_{x,y}$ définie par les relations (97) et (98) permet donc de déduire d'une équation hyperbolique intégrable et de sa solution une autre équation hyperbolique intégrable et sa solution. Lorsque l'on donne aux fonctions u_1 et Z_1 diverses valeurs, les transformations $T_{x,y}$ que l'on obtient ont différentes formes et donnent des équations dont les propriétés diffèrent en général.

21. Nous démontrerons que les transformations $T_{x,y}$ permettent de déduire en général d'une équation hyperbolique intégrable dont la solution est de rang $m+1$ par rapport à x est de rang $n+1$ par rapport à y une équation hyperbolique intégrable dont la solution est de rang $m+2$ par rapport à x et de rang $n+2$ par rapport à y.

La valeur de la fonction U′ peut se mettre sous une forme beaucoup plus simple. Lorsque l'on remplace dans les expressions

$$g\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right]$$

et

$$g_1\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right],$$

les dérivées $\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial\zeta_1}{y}$ par leurs valeurs données par les relations (35) et (36), on obtient les égalités

$$(115)\qquad g\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right] = g\left(bZ_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right),$$

$$(116)\qquad g_1\left[\frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_1 + \frac{u_1 Z_1}{2}\right)\right] = g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right).$$

La relation (103) est donc égale à celle que l'on déduit de la relation (79) en changeant le signe de $\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - bZ_1\right)$. La relation (110) est la même que la relation (85). Les considérations que nous avons données sur les polynomes

$$g\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - bZ_1\right) \qquad \text{et} \qquad g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)$$

dans l'étude des transformations T_x et T_y peuvent être utilisées pour notre démonstration.

La valeur de la fonction U' donnée par la relation (114) est

$$(117)\qquad \begin{aligned} U' = {} & \frac{\zeta_1}{u_1}\left\{f\left[\frac{X'}{g\left(bZ_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right)}\right] + f_1\left[\frac{Y'}{g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)}\right]\right\} \\ & - \frac{Z_1}{2}\left\{f\left[\frac{X'}{g\left(bZ_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right)}\right] - f_1\left[\frac{Y'}{g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)}\right]\right\} \\ & - B\left[\frac{X'}{g\left(bZ_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right)}, bZ_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right] - X \\ & - B_1\left[\frac{Y'}{g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)}, \frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right] - Y. \end{aligned}$$

Lorsque l'on remplace dans la valeur de u les fonctions X et Y par l'un quelconque des $(m + n + 1)$ couples de valeurs (x_1, y_1),

(x_2, y_2), ..., (x_{m+n+1}, y_{m+n+1}), cette fonction u s'annule. Les relations (97) et (98) nous montrent que, en négligeant une constante d'intégration, la fonction U' s'annule également pour ces mêmes valeurs de X et de Y. Les relations (97) et (98) montrent que la fonction U' s'annule encore lorsque l'on remplace u par u_1. La relation (117) montre de plus que la fonction u s'annule lorsque l'on remplace X par $+1$ et Y par -1. Pour établir la relation (117), nous avons supposé que le polynome en X, $g\left(bZ_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right)$ et le polynome en Y, $g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)$ ne sont pas nuls. Nous avons démontré pour le polynome $g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)$ que ce n'est pas le cas en général.

Les considérations que nous avons données sur le polynome $g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - bZ_1\right)$ peuvent s'appliquer avec de petites modifications au polynome $g\left(bZ_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right)$. Lorsque la fonction Z_1 est nulle, la fonction $g\left(bZ_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right)$ qui est linéaire par rapport à $bZ_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial x}$ s'annule aussi, et comme elle ne dépend pas de y, il suffit de remplacer dans cette fonction x_1 par une des valeurs ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{m+n+1} ou par une combinaison linéaire de ces valeurs pour qu'elle s'annule. Nous pouvons représenter cette combinaison linéaire des valeurs $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+n+1}$ par l'expression

$$\xi = \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \dots + \gamma_{m+n+1}\,\xi_{m+n+1}, \tag{118}$$

les quantités $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m+n+1}$ étant des constantes. Lorsque la fonction X_1 n'est pas égale à l'une des quantités $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+n+1}$ ou ξ, la fonction $g\left(bZ_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right)$ n'est pas nulle et la valeur de $(U')_x$ a bien la forme donnée par la relation (106). Nous pouvons donner pour la fonction $g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)$ la même conclusion. Lorsque la valeur de la fonction Y_1 n'est pas égale à l'une des quantités $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+n+1}$ ou η, la fonction $g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)$ n'est pas nulle et la valeur $(U')_y$ a bien la forme donnée par la relation (113),

La conclusion qui résulte de ce qui précède est que lorsque les quantités X_1 et Y_1 que présente la fonction Z_1 ont été choisies de manière que les fonctions $g\left(bZ_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right)$ et $g\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)$ ne s'annulent pas, la fonction U' s'annule pour $m+n+3$ couples de valeurs. La fonction u_1 se déduit de la fonction u en donnant une valeur particulière aux fonctions X et Y et que nous désignerons par X_2 et Y_2. Les valeurs des $m+n+3$ couples de fonctions pour lesquels s'annule la fonction U' sont (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_{m+n+1}, y_{m+n+1}), (X_2, Y_2) et $(+1, -1)$. La fonction U' est donc de rang $m+2$ par rapport à x et de rang $n+2$ par rapport à y en général.

22. Les transformations $T_{x,y}$ permettent aussi de construire toutes les équations hyperboliques intégrables et leurs solutions en partant de la plus simple d'entre elles. Pour démontrer cette proposition, il faut prouver que ces transformations permettent aussi de déduire d'une équation hyperbolique intégrable et de sa solution de rang $m+1$ par rapport à x et de rang $n+1$ par rapport à y une autre équation hyperbolique dont la solution est de rang m par rapport à x et de rang n par rapport à y.

Pour simplifier l'écriture et par conséquent la démonstration de cette proposition fondamentale nous poserons

$$g\left(bZ_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right) = \varphi_1(x). \tag{119}$$

La fonction $g_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right)$ a déjà été posée égale à $\psi(y)$ par la relation (94).

Ces changements de notation donnent pour la fonction U une expression commode pour la démonstration.

La valeur de U' donnée par les relations (102) et (109) est donc, lorsque l'on tient compte des relations (104) et (111) qui permettent de simplifier les valeurs $(U')x$ et de $(U')y$,

$$\begin{aligned} U' = \frac{\zeta_1 u}{u_1} - \frac{Z_1}{2}[f(X) - f_1(Y)] - B\left(X, bZ_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right) - B_1\left(Y, \frac{\partial Z_1}{\partial y} - aZ_1\right) \\ - \int \varphi_1(x)\, X\, dx - \int \psi(y)\, Y\, dy. \end{aligned} \tag{120}$$

La fonction Z_1 peut être choisie de manière que l'on ait l'équation

$$\psi(y) = 0. \tag{121}$$

La valeur de la fonction Y_1 que présente la fonction Z_1 est donc l'une des valeurs que donne la relation (95). Pour simplifier on supposera que Y_1 a précisément la valeur donnée par cette relation dans laquelle les constantes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+n+1}$ ont des valeurs bien déterminées.

La valeur de Y_1 peut être supposée nulle sans que la valeur de Z_1 soit changée à condition de remplacer X_1 et Y_1 par

$$X_1 - \beta_1 \xi_1 - \beta_2 \xi_2 -, \qquad - \beta_{m+n+1} \xi_{m+n+1},$$
$$Y_1 - \beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2 -, \qquad - \beta_{m+n+1} \gamma_{m+n+1}.$$

Lorsque l'on suppose que la fonction X est égale à X_1 et que la fonction Y est nulle, la fonction U′ prend une valeur que l'on peut désigner par $(U')_{X_1,0}$ et qui est

$$(U')_{X_1,0} = \frac{1}{u_1}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right) f(X_1) - B\left(X_1, b Z_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right) - \int \varphi_1(X_1) X_1 \, dx. \tag{122}$$

Les valeurs des fonctions X_2 et Y_2 que présente la fonction u_1 peuvent être prises égales à X_1 et à o. La valeur de la fonction u_1 devient égale à la valeur particulière $f(X_1)$ de u. Les relations (97) et (98) montrent que la valeur particulière $(U')_{X_1,0}$ de U′ est constante. La relation (73) dans laquelle on remplace u par X_1 et v par $\frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_1 - \frac{u_1 Z_1}{2}\right)$ et la relation (104) permettent de vérifier cette propriété de la fonction U′. Nous supposerons que lorsque la fonction u devient égale à u_1, la valeur de U′ est nulle. La constante d'intégration que donne le calcul de U′ est donc supposée nulle. Lorsque l'on tient compte de ces valeurs particulières des fonctions et de la valeur correspondante de U′, la relation (122) donne l'expression

$$\zeta_1 - \frac{Z_1 f(X_1)}{2} - B\left(X_1, b Z_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right) - \int \varphi_1(X_1) X_1 \, dx = 0. \tag{123}$$

Nous supposerons maintenant que la fonction X_1 satisfait à l'équation

$$\varphi_1(X_1) = 0. \tag{124}$$

La fonction X_1 a la forme donnée par la relation (118). Le terme que présente la fonction U sous un signe d'intégration disparaît. La fonction U' est de rang $m+1$ par rapport à x comme la fonction U.

Le rang de la fonction U' par rapport à x peut devenir égal à m. Pour démontrer cette propriété de U' nous remarquerons d'abord que la relation (123) devient, lorsque satisfait à X_1 l'équation (124). simplement

$$\varphi_1 - \frac{Z_1 f(X)}{2} - B\left(X,\, bZ_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial x}\right) = 0. \tag{125}$$

Des considérations précédentes il résulte de plus que pour rendre le rang de la fonction U' par rapport à x égal à m, la fonction X doit être remplacée par l'expression

$$[(\gamma_1-\beta_1)\xi_1+(\gamma_2-\beta_2)\xi_2+\ldots+(\gamma_{m+n+1}-\beta_{m+n+1})\xi_{m+n+1}]\int X\,dx.$$

La relation (125) montre que le terme de U' qui présente la fonction X sous un signe d'intégration disparaît.

Par des considérations semblables aux précédentes, on montrerait que le rang de la fonction U' par rapport à y devient égal à n lorsque l'on remplace la fonction Y par l'expression

$$[(\beta_1-\gamma_1)\eta_1+(\beta_2+\gamma_2)\eta_2+\ldots+(\beta_{m+n+1}-\gamma_{m+n+1})\eta_{m+n+1}]\int Y\,dy.$$

Les propriétés précédentes permettent de déduire pour les équations hyperboliques de nombreuses conséquences.

23. La propriété que nous obtenons d'abord est que par une transformation $T_{x,y}$ nous pouvons déduire d'une équation hyperbolique intégrable et de sa solution de rang $m+1$ par rapport à x et de rang $n+1$ par rapport à y une autre équation hyperbolique dont la solution est de rang m par rapport à x et de rang n par rapport à y. Les transformations $T_{x,y}$ permettent de ramener toutes les équations hyperboliques à la plus simple d'entre elles.

La conséquence de cette propriété fondamentale est que les transformations $T_{x,y}$ permettent de construire toutes les équations hyperboliques intégrables et leurs solutions en partant de la plus simple d'entre elles et de sa solution. Les propositions que nous avons données montrent que les procédés pour construire ces équations hyperboliques intégrables et leurs solutions sont nombreux. Lorsque l'on part par exemple de l'équation hyperbolique la plus simple et de sa solution, l'application de transformations $T_{x,y}$ générales permet de construire les équations hyperboliques auxquelles correspondent des suites impaires et leurs solutions.

La construction des équations hyperboliques auxquelles correspondent des suites paires pourra se faire en partant de l'équation générale à laquelle correspond une suite de deux équations et de sa solution. Des transformations $T_{x,y}$ générales permettront de déduire de cette équation et de sa solution les équations hyperboliques auxquelles correspondent des suites paires et leurs solutions.

Par l'application de ces transformations $T_{x,y}$ générales, on obtiendra des équations hyperboliques auxquelles correspondent des suites impaires et dont les solutions sont de même rang par rapport à x et par rapport à y, ainsi que des équations hyperboliques auxquelles correspondent des suites paires et dont les solutions ont des rangs par rapport à x et par rapport à y qui diffèrent d'une unité. Les équations hyperboliques dont les solutions n'ont pas le même rang par rapport à x et par rapport à y ou dont les rangs par rapport à x et par rapport à y diffèrent de plus d'une unité pourront être déduites de celles obtenues par des transformations $T_{x,y}$ générales par l'application de transformation $T_{x,y}$ particulières. Les considérations précédentes montrent que les transformations $T_{x,y}$ permettent de construire les équations hyperboliques intégrables et leurs solutions par plusieurs procédés.

24. Les transformations que nous avons étudiées permettent de construire les équations hyperboliques et leurs solutions en les déduisant de la plus simple d'entre elles et de sa solution de plusieurs manières différentes. Les transformations T_x, T_y et $T_{x,y}$ peuvent être employées seules, ou combinées les unes avec les autres. Ces transformations peuvent ainsi être combinées avec des transformations de Laplace qui conservent le nombre caractéristique des équations constant.

Nous ne donnerons dans ce Mémoire que les propriétés fondamentales de nos transformations.

La formule (90) montre que lorsque le nombre caractéristique de l'équation (34) est $m+n$, la solution générale de cette équation est formée au moyen de $m+n+1$ couples de fonctions arbitraires (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{m+n+1}, y_{m+n+1}). Ces fonctions permettent aussi de former l'équation (34). Nous désignerons les fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n+1}$ et $y_1, y_2, \ldots, y_{m+n+1}$ que présente une équation hyperbolique et sa solution par l'expression « fonctions composantes ».

Le nombre des fonctions composantes d'une équation hyperbolique et de sa solution est donc étroitement relié au nombre caractéristique de l'équation. Lorsque le nombre caractéristique augmente d'une unité le nombre des fonctions composantes de l'équation hyperbolique correspondante et de sa solution augmente de deux unités. Cette remarque nous permet de vérifier indirectement que nos transformations permettent de construire toutes les équations hyperboliques et leurs solutions en partant de la plus simple d'entre elles.

Lorsque l'on considère par exemple les transformations T_x et T_y, les relations (61) et (62) et les relations (41) et (42) qui les définissent présentent la solution Z_1 de l'équation adjointe de l'équation (34). Cette solution Z_1 présente en général les nouvelles fonctions arbitraires X_1 et Y_1. Les équations déduites de l'équation (34) par l'application des transformations T_x et T_y et dont le nombre caractéristique a augmenté en général d'une unité, présentent, ainsi que leurs solutions, les deux fonctions composantes nouvelles X_1 et Y_1. Les considérations précédentes montrent que ces transformations permettent de construire toutes les équations hyperboliques intégrables et leurs solutions,

Des considérations semblables peuvent être faites sur les transformations $T_{x,y}$ définies par les relations (97) et (98). Ces relations sont formées au moyen des fonctions u_1 et Z_1 qui présentent les fonctions arbitraires X_2, Y_2 et X_1, Y_1. Les transformations $T_{x,y}$ permettent de déduire d'une équation hyperbolique et de sa solution une autre équation hyperbolique dont le nombre caractéristique est augmenté de deux unités en général. Le nombre des fonctions composantes que présentent la nouvelle équation et sa solution données par la transformation $T_{x,y}$ est augmenté de quatre en général. Les relations (97) et (98) présentent précisément les quatre fonctions composantes nouvelles X_1, Y_1 et X_2, Y_2

nécessaires pour que l'équation donnée par la transformation $T_{x,y}$ et sa solution soient générales. Ces considérations confirment la proposition suivant laquelle les transformations $T_{x,y}$ permettent de construire toutes les équations hyperboliques intégrables et leurs solutions en partant de la plus simple d'entre elles et de sa solution.

Lorsque le nombre caractéristique d'une équation hyperbolique est $m+n$, le nombre des fonctions composantes de cette équation et de sa solution est en général $2(m+n+1)$. Ce nombre peut cependant être diminué de deux unités lorsque l'on suppose que les fonctions d'un des couples de fonctions qui servent à construire l'équation et sa solution sont égales à l'unité positive ou négative. Pour cela on peut supposer par exemple que l'on ait divisé les fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n+1}$ par l'une d'elles, par x_1 par exemple, et que l'on ait divisé de même les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_{m+n+1}$ par l'une d'elles, par y_1 par exemple. Les équations hyperboliques et leurs solutions que l'on obtiendra par l'application des transformations T_x, T_y et $T_{x,y}$ et dont le nombre caractéristique est $m+n$ présenteront alors en général $2(m+n)$ fonctions composantes. Le nombre des fonctions composantes peut être encore diminué de deux unités si l'on prend deux des rapports des fonctions composantes précédents, par exemple $\frac{x_2}{x_1}$ et $\frac{y_2}{y_1}$, pour variables indépendantes x et y. Les autres rapports des fonctions composantes pourront être désignés par $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-1}$ et par $y_1, y_2, \ldots, y_{m+n-1}$.

25. Des considérations semblables à celles que nous avons données pour la transformation $T_{x,y}$ définie par les relations (97) et (98) peuvent être faites sur la transformation $T_{x,y}$ définie par les relations (49) et (50). La transformation $T_{x,y}$ définie par les relations (49) et (50) permet de construire toutes les équations hyperboliques intégrables et leurs solutions en partant de l'équation hyperbolique la plus simple et de sa solution. Le raisonnement est si semblable à celui que nous avons donné pour démontrer cette proposition pour la transformation $T_{x,y}$ définie par les relations (97) et (98), que nous ne le donnerons pas pour éviter les répétitions.

Par la permutation des variables x et y, on peut déduire de l'équation (34) une autre transformation $T_{x,y}$ et qui peut être définie par les relations

$$\frac{\partial U}{\partial x} = (\xi_1 + u_1 Z_1)\frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{u_1}, \tag{126}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \zeta_1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{u_1}. \tag{127}$$

26. Les résultats que nous avons exposés seront mieux compris lorsque des applications en auront été données. Nous considérerons l'équation hyperbolique la plus simple et sa solution :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0,$$
$$u = X + Y.$$

Nous déduisons de cette équation et de sa solution une autre équation hyperbolique et sa solution par l'application d'une transformation T_x définie par les relations (61) et (62). Les équations de la transformation peuvent s'écrire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (X_1 + Y_1)X', \tag{128}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Y'_1(X + Y). \tag{129}$$

Ces relations donnent pour la fonction U cherchée en négligeant une constante d'intégration l'expression

$$U = (X_1 + Y_1)X - \int X'_1 X\,dx + \int Y'_1 Y\,dy.$$

Les intégrales peuvent être évitées en posant

$$X'_1 X = X'_2,$$
$$Y'_1 Y = Y'_2.$$

La substitution des valeurs de X et de Y dans la valeur de U donne, lorsque l'on remplace X_2 par X et Y_2 par Y, l'expression

$$U = (X_1 + Y_1)\frac{X'}{X'_1} - X + Y. \tag{130}$$

27. La dérivation de la relation (128) par rapport à y permet d'éliminer la fonction arbitraire X et l'on obtient pour l'équation satisfaite par la fonction U l'expression

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} - \frac{Y'_1}{X_1 + Y_1} \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \tag{131}$$

Pour continuer l'application de la méthode et retrouver des résultats connus, nous changerons de fonction et nous poserons

$$U_1 = -\frac{\sqrt{X'_1}}{X_1 + Y_1} U. \tag{132}$$

La substitution de la valeur de U dans les relations (130) et (131) nous donne pour la valeur de la fonction U_1 et pour l'équation à laquelle elle satisfait les expressions

$$U_1 = \frac{\sqrt{X'_1}(X - Y)}{X_1 + Y_1} - \frac{X'}{\sqrt{X'_1}}, \tag{133}$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\, \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{X'_1}{(X_1 + Y_1)^2} \frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{X'_1 Y'_1}{(X_1 + Y_1)^2} U_1 = 0. \tag{134}$$

Lorsque l'on remplace dans ces relations Y_1 par $-Y_1$, on obtient l'équation hyperbolique à laquelle correspond une suite de deux équations avec sa solution et que nous avons données dans notre Thèse de doctorat.

28. Dans le but d'obtenir des résultats sous une forme plus symétrique, nous changerons de notation et nous remplacerons U_1 par u et Y_1 par $-Y_1$ dans les relations (133) et (134). L'équation hyperbolique et sa solution deviennent

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{X'_1}{(X_1 - Y_1)^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{X'_1 Y'_1}{(X_1 - Y_1)^2} u = 0, \tag{135}$$

$$u = \frac{\sqrt{X'_1}(X - Y)}{X_1 - Y_1} - \frac{X'}{\sqrt{X'_1}}. \tag{136}$$

L'équation adjointe à l'équation (135) et sa solution sont

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{X'_1}{(X_1 - Y_1)^2} \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \tag{137}$$

$$Z = -\frac{X_1 - Y_1}{\sqrt{X'_1}} \left(\frac{X - Y}{X_1 - Y_1} - \frac{Y'}{Y'_1} \right). \tag{138}$$

Les solutions des équations (135) et (137) sont reliées entre elles par la relation

$$(139) \qquad Z = \frac{(X_1 - Y_1)^2}{X'_1 Y'_1} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Le facteur qui multiplie $\frac{\partial u}{\partial y}$ dans cette relation est égal à l'inverse du coefficient de u dans l'équation (135). Cette propriété est générale pour les équations hyperboliques qui ont leurs invariants égaux à l'ordre près et qui sont mises sous la forme réduite proposée.

La transformation que nous appliquerons à l'équation (135) pour donner une autre application de nos résultats est une transformation $T_{x,y}$ définie par les relations (49) et (50). Ces relations présentent une valeur particulière de la fonction ζ associée à l'équation adjointe (137) et qui est définie par les expressions (45) et (46). Les valeurs particulières des fonctions arbitraires des solutions particulières u_1 et Z_1 ne peuvent pas être supposées égales à X_1 et à Y_1, car nous aurions les solutions banales zéro. Les valeurs particulières des fonctions u et Z seront supposées égales respectivement à

$$(140) \qquad u_1 = \frac{\sqrt{X'_1}(X_2 - Y_2)}{X_1 - Y_1} - \frac{X'_2}{X'_1},$$

$$(141) \qquad Z_1 = -\frac{X_1 - Y_1}{\sqrt{X'_1}} \left(\frac{X_2 - Y_2}{X_1 - Y_1} - \frac{Y'_2}{Y'_1} \right).$$

La valeur particulière ζ_1 de la fonction ζ correspondant aux valeurs particulières u_1 et Z_1 de u et de Z est

$$(142) \qquad \zeta_1 = -\frac{X_2 - Y_2}{X_1 - Y_1}(X_3 - Y_3) + \int \frac{X'_2}{X'_1} X'_3 \, dx - \int \frac{Y'_2}{Y'_1} Y'_3 \, dy.$$

Lorsque les fonctions X_3 et Y_3 sont égales aux fonctions X_2 et Y_2, la valeur de ζ_1 est

$$(143) \qquad \zeta_1 = -\frac{(X_2 - Y_2)^2}{X_1 - Y_1} + \int \frac{(X'_2)^2}{X'_1} dx - \int \frac{(Y'_2)^2}{Y'_1} dy.$$

La fonction ζ_1 donnée par la relation (143) satisfait à l'équation (56) qui n'est pas linéaire.

Lorsque les fonctions X_3 et Y_3 sont différentes des fonctions X_2

et Y_2, on peut faire disparaître les signes d'intégration de l'expression de ζ_1. Par des intégrations par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\zeta_1 = &-\left(\frac{X_2 - Y_2}{X_1 - Y_1} - \frac{X'_2}{X'_1}\right) X_3 - \int \left(\frac{X'_2}{X'_1}\right)' X_3\, dx \\ &+ \left(\frac{X_2 - Y_2}{X_1 - Y_1} - \frac{Y'_2}{Y'_1}\right) Y_3 + \int \left(\frac{Y'_2}{Y'_1}\right)' Y_3\, dy.\end{aligned}$$

Les signes d'intégration peuvent être évités en posant

$$X_3 = \frac{X'_4}{\left(\frac{X'_2}{X'_1}\right)'}, \tag{144}$$

$$Y_3 = \frac{Y'_4}{\left(\frac{Y'_2}{Y'_1}\right)'}. \tag{145}$$

La valeur de la fonction ζ_1 lorsque l'on remplace les fonctions X_3 et Y_3 par ces valeurs et que l'on remplace dans l'expression obtenue X_4 et Y_4 par X_3 et Y_3 est

$$\zeta_1 = -\left(\frac{X_2 - Y_2}{X_1 - Y_1} - \frac{X'_2}{X'_1}\right) \frac{X'_3}{\left(\frac{X'_2}{X'_1}\right)'} + X_3 + \left(\frac{X_2 - Y_2}{X_1 - Y_1} - \frac{Y'_2}{Y'_1}\right) \frac{Y'_3}{\left(\frac{Y'_2}{Y'_1}\right)'} + Y_3. \tag{146}$$

Les relations (49) et (50) donnent en général lorsque l'on remplace l'expression $\left(\frac{\zeta_1 u}{u_1} - U\right)$ par U,

$$\begin{aligned}U = &-\frac{\zeta_1}{u_1\sqrt{X'_1}} \frac{X''}{\frac{X''_3}{X'_1}} \\ &+ \left\{ \frac{\zeta_1}{u_1\sqrt{X'_1}} \left[\frac{1}{X_1 - Y_1}\left(\frac{X'_1}{X_1 - Y_1} + \frac{X''_1}{2(X'_1)^2}\right) + \frac{1}{u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\log\frac{X''_3}{X'_1}\right] \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\zeta_1}{u_1\sqrt{X'_1}}\right)\right\} \frac{X'}{\frac{X''_2}{X'_1}} \\ &+ X - \frac{1}{u_1}(\zeta_1 - u_1 Z_1)\frac{\sqrt{X'_1}}{(X_1 - Y_1)\left(\frac{Y'_3}{Y'_1}\right)'} Y' - Y.\end{aligned} \tag{147}$$

Les valeurs des fonctions u_1, Z_1 et ζ_1 sont données par les relations (140), (141) et (142).

La fonction U que l'on obtient par le calcul de l'expression (147) satisfait à l'équation

$$(148)\qquad \frac{\partial U}{\partial x\,\partial y}+\frac{\zeta_1-u_1Z_1}{u_1Z_1}\frac{\partial\log\zeta_1}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\zeta_1}{u_1Z_1}\frac{\partial}{\partial x}\log(\zeta_1-u_1Z_1)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$$

Les relations (147) et (148) sont générales et l'on peut en déduire toutes les équations hyperboliques et leurs solutions lorsque le rang de ces solutions est 2 par rapport à la variable x et 1 par rapport à la variable y.

Lorsque les fonctions X_3 et Y_3 sont différentes des fonctions X_2 et Y_2, le changement de fonctions défini par les relations (144) et (145) donne pour l'équation hyperbolique et sa solution des expressions qui ne présentent pas de signes d'intégration.

Lorsque l'on suppose que les fonctions X_3 et Y_3 sont égales aux fonctions X_2 et Y_2, les relations (147) et (148) donnent les équations hyperboliques auxquelles correspond une suite de quatre équations et qui ont leurs invariants égaux à l'ordre près. Les équations hyperboliques auxquelles correspondent des suites comprenant un nombre pair d'équations et qui ont leurs invariants égaux à l'ordre près sont étudiées dans notre Thèse de doctorat.

29. Les équations et leurs solutions obtenues peuvent être interprétées géométriquement très aisément.

L'équation (34) peut être considérée comme celle d'un réseau u et l'on peut faire correspondre à ce réseau une congruence conjuguée dont les foyers U et U_1 sont définis par les systèmes d'équations (43) et (44), (61) et (62). Les fonctions U et U_1 que nous avons obtenues sont donc les coordonnées de ces foyers. Les transformations T_y et T_x permettent de passer du point u aux points U et U_1 qui décrivent les surfaces focales de la congruence conjuguée au réseau (u). Puisque les expressions qui définissent les fonctions U et U_1 sont des différentielles exactes lorsque l'équation qui détermine la fonction u est intégrable, par des applications consécutives des transformations T_x et T_y, on obtiendra donc des séries illimitées de surfaces qui sont de plus en plus compliquées.

30. Les problèmes que l'on peut se poser sur les équations hyperboliques et que permet de résoudre la théorie exposée sont très nombreux. Par exemple lorsque l'on veut construire les équations dont les invariants possèdent certaines propriétés, on cherchera la plus simple équation possédant les propriétés données et sa solution générale, si elle existe réellement. Des applications successives des transformations T_x, T_y et $T_{x,y}$ permettront ensuite de déduire de cette équation et de sa solution d'autres équations et leurs solutions. Pour que les nouvelles équations obtenues possèdent les mêmes propriétés que l'équation primitive, on pourra chercher à choisir les valeurs des fonctions u_1 et Z_1 de manière que les formules de transformation donnent directement des équations ayant les propriétés données. Lorsque la détermination des valeurs convenables des fonctions u_1 et Z_1 présentera trop de difficulté, on choisira les valeurs des nouvelles fonctions composantes que présentent les équations obtenues de manière que ces équations possèdent les propriétés données.

31. La comparaison de la théorie exposée des équations hyperboliques avec celle que Darboux a donnée dans son grand ouvrage sur la théorie des surfaces conduit à plusieurs remarques. Le principal avantage de la théorie de Darboux est qu'elle permet de construire directement les équations générales hyperboliques de chaque ordre ainsi que leurs solutions. La formation des équations nécessite le calcul de déterminants qui devient assez rapidement compliqué. La méthode de Darboux est aussi applicable pour la formation des équations qui ont leurs invariants égaux. La construction d'autres équations hyperboliques qui ont des propriétés particulières données est par contre pour ainsi dire impossible par cette méthode.

La méthode de Darboux ne permet pas par exemple de construire en général les équations hyperboliques qui ont leurs invariants égaux à l'ordre près et auxquelles correspondent un nombre pair d'équations, ainsi que nous l'avons montré dans la première Partie de notre Thèse de doctorat (Paris, 1925). Ce procédé ne permet de construire que la plus simple de ces équations, celle à laquelle correspond une suite de deux équations et que nous avons d'ailleurs obtenue directement par un autre procédé. De plus la méthode de Darboux ne permet pas de relier les équations les unes aux autres. Notre méthode ne permet pas de construire directement les équations d'un ordre quelconque. Par contre elle permet de les déduire les unes des autres ainsi que leurs solutions en partant de la plus simple d'entre elles et de sa solution.

La méthode de construction des équations intégrables qui a été exposée permet d'utiliser les calculs faits pour construire les équations de rang supérieur. De toute équation hyperbolique intégrable, les transformations données permettent d'en déduire des suites illimitées de nouvelles équations qui sont toutes intégrables et leurs solutions. Les équations obtenues par la méthode de Darboux et leurs solutions pourront en particulier être déduites les unes des autres par les transformations données.

Nous concluons par ces considérations générales notre étude des équations hyperboliques intégrables et ce Mémoire.

ERRATA.

Pages 121 et 122, remplacer les fonctions z et z_1 par les fonctions Z et Z_1.

Page 129, ligne 17, *au lieu de* $\frac{\zeta_1}{1}$, *lire* $\frac{1}{\zeta_1}$.

Page 138, ligne 2, depuis le bas, *au lieu de* $m + a$, *lire* $m + 2$.

Page 139, ligne 9, *au lieu de* $n + a$, *lire* $n + 2$.